Отношения между нечёткими множествами:

1) $A \subset B \overset{опр}{\Leftrightarrow} \forall(x)\left[\mu_A(x) \le \mu_B(x)\right]$;

2) $A = B \overset{опр}{\Leftrightarrow} \forall(x)\left[\mu_A(x) = \mu_B(x)\right]$.

Очевидно, $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Дополнительные аксиомы t-, s-норм

5. непрерывность;
6. субидемпотентность $t(a, a) < a$ и суперидемпотентность $s(a, a) > a$
7. строгая монотонность $a_1 < a_2, b_1 < b_2 \Rightarrow f(a_1, b_1) < f(a_2, b_2)$

Задачи. 1) Показать, что только $\min\{a, a\} = a$ и $\max\{a, a\} = a$ для всех *a*, другие нормы этим свойством не обладают.

2) Проверить законы де Моргана для разности нечётких множеств, определяемых функцией принадлежности $\mu_{A \backslash B}(x) = t\left(\mu_A(x), c\left(\mu_B(x)\right)\right)$ с $t(a, b) = \min\{a, b\}$, $s(a, b) = \max\{a, b\}$ и $c(a) = 1 - a$.

Альтернативное представление нечётких множеств

Пусть $\alpha \in (0, 1]$. α***–сечением (***α***–срезом)*** нечёткого множества A называют множество $A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \ge \alpha\}$ и A_0 по определению равен A – носителю нечёткого множества.

Любое нечёткое множество моет быть представлено как совокупность всех его сечений, т.е. $\{A_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$

Нечёткое множество на линейном пространстве **L** называют ***выпуклым***, если $\mu_A(\alpha x + (1-\alpha) y) \ge \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ для любых $\alpha \in [0, 1]$ и $x, y \in \mathrm{L}$. Или в терминах сечений: нечёткое множество выпукло в том и только в том случае, когда любое его сечение – выпуклое множество.

Задача. Доказать эквивалентность этих определений выпуклости.

Нечёткие числа и операции с ними

Положим **R** – универсальное множество.

Нечётким числом называют выпуклое нечёткое множество на **R** с кусочно-непрерывной функцией принадлежности.

Сечения нечётких чисел обозначим через $[\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha]$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – непрерывная вещественная функция *n* вещественных переменных, её значением на нечётких числах в качестве аргументов называют нечёткое число, определяемое сечениями $[\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha]$, где $\underline{y}_\alpha = \inf\limits_{\substack{x_1 \in [\underline{x}_{1\alpha}, \overline{x}_{1\alpha}] \\ \dots \\ x_n \in [\underline{x}_{n\alpha}, \overline{x}_{n\alpha}]}} f(x_1, \dots x_n)$ и

$$\overline{y}_\alpha = \sup\limits_{\substack{x_1 \in [\underline{x}_{1\alpha}, \overline{x}_{1\alpha}] \\ \dots \\ x_n \in [\underline{x}_{n\alpha}, \overline{x}_{n\alpha}]}} f(x_1, \dots x_n).$$

Примеры.

Задачи и вопросы:

1) Написать программы вычисления функции принадлежности результата арифметических операций для трапециевидных чисел;
2) Написать программы вычисления функций принадлежности объединения, пересечения, дополнения, множественной разности для трапециевидных чисел;
3) Придумать арифметические операции, не расширяющие «нечёткость» результата. Например, ввести некий коэффициент, уменьшающий размер отрезков срезов относительно их середины. Или вычислять слой результата по другим слоям аргументов.