Операции над классическими множествами

1) объединение $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$;

2) Пересечение $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$;

если U – универсальное множество, то

3) дополнение $cA = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$;

4) Разность $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Отношения классических множеств

1) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall(\boldsymbol{x} \in \mathrm{A})[\boldsymbol{x} \in \mathrm{B}]$;

2) $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{x} \in \mathrm{A} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{B}]$;

Основные свойства

$A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность);

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность);

$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$ и

$A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность).

Нечёткое множество – функционал μ со значениями из отрезка $[0, 1]$.

Носитель – множество A = $\{x\colon \mu_A(x) \neq 0\}$

или A = $\{x\colon \mu_A(x) > 0\}$.

Ядро – множество coreA = $\{x\colon \mu_A(x) = 1\}$.

Высота – $h_A = \sup \mu_A(x)$.

Нормальное нечёткое множество – $h_A=1$, иначе ***субнормальное*** ($h_A<1$).

Функции, определяющие пересечения , объединения, дополнения

t-норма и ***s-норма*** – функции [0, 1] x [0, 1]→ [0, 1]:

1. t(1, a)=a и s(0, a)=a (граничные условия);
2. b < c → f(a, b) ≤ f(a, c) (монотонность)
3. f(a, b)=f(b, a) (коммутативность);
4. f(f(a, b), c)=f(a, f(b, c)) (ассоциативность),

f – это t или s, числа $a, b, c \in [0, 1]$ произвольны.

Функция c: [0, 1]→ [0, 1]: основные

1. c(0)=1, c(1)=0 (граничные условия);
2. a < b → c(a) ≥ c(b) (монотонность);

Дополнительные 3) непрерывность;

4) $\forall\left(a \in [0,1]\right)\left[c\left(c\left(a\right)\right) = a\right]$

Операции

Пересечение: $\mu_{A \overset{t}{\bigcap} B}(x) = t(\mu_A(x), \mu_B(x))$;

Объединение: $\mu_{A \overset{s}{\bigcup} B}(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x))$;

Дополнение: $\mu_{c(A)}(x) = c(\mu_A(x))$;

Разность: $\mu_{A \setminus B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\}$

Примеры

t-нормы:

1) $\min\{a, b\}$; 2) $a \cdot b$; 3) $\max\{a+b-1, 0\}$.

s-нормы:

1) $\max\{a, b\}$; 2) $a+b-a \cdot b$; 3) $\min\{a+b, 1\}$.

c:

1) $c(a) = \begin{cases} 1, & a \leq t \\ 0, & a > t \end{cases}$, где $a \in [0,1]$ и $t \in [0,1)$;

2) $c(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi a)$;

3) $c_\lambda = \frac{1-a}{1+a\lambda}$, где $\lambda \in (-1, \infty)$;

4) $c_\omega(a) = (1 - a^\omega)^{1/\omega}$, где $\omega \in (0, \infty)$.

Вопросы и задачи

1) Интерпретировать классическую теорию по новому ;
2) Проверить аксиомы для примеров;
3) Доказать, что $\min\{a, b\}$ – наибольшая из всех t-норм, а $\max\{a, b\}$ – наименьшая из всех s-норм.
4) Для каких пар объединения и пересечения выполнен закон дистрибутивности и для каких нет?
5) Придумать расширение понятия разности, через специального типа функции c.