Л.П. Петрова

О языке теории нечетких множеств

Опыт описания основных понятий

Язык теории нечетких множеств рождается и развивается в тесной связи с приложениями (см., например, [1] – [7]) и не всегда является достаточно четким и однозначным. Цель этой работы – попытаться привести существующие описания нечётких множеств в соответствие с привычными математическими стандартами, устранив при этом некоторые нестыковки и излишества.

1. Основные определения

Начнём с замечания о том, что к способам задания обычного множества A можно отнести описание его с помощью функции:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, \ \textit{если } x\in A,\\ 0, \ \textit{если } x\notin A.\end{cases}$$

Расширяя область значений функции до отрезка $[0, 1]$, определим нечёткие множества.

Определение. *Нечётким множеством (н-множеством)* $\tilde{A}$ назовём объект, который описывает функция $\mu_{\tilde{A}}$, определённая на любом элементе x и принимающая значения из отрезка $[0, 1]$. Функцию $\mu_{\tilde{A}}$ будем называть *функцией принадлежности* н-множеству $\tilde{A}$, а значение функции $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – *степенью принадлежности* элемента x к н-множеству $\tilde{A}$.

Определение. *Носителем* н-множества $\tilde{A}$ называют множество $\left(\operatorname{supp}\tilde{A}=\right)A=\left\{x:\, \mu_{\tilde{A}}(x)>0\right\}$.

Естественно считать, что нечёткое множество $\tilde{A}$ – это пара, составленная из его носителя и функции принадлежности, $\tilde{A}=\left(A,\, \mu_{\tilde{A}}\right)$, причём функция принадлежности является основной, определяющей частью этой пары.

Определение. Н-множество называется *пустым*, если его носителем является пустое множество или, что то же, функция принадлежности тождественно равна нулю.

Это определение эквивалентно классическому определению пустого множества, поэтому и его обозначение $\varnothing$ оставим традиционным.

Определение. *Высотой* н-множества $\tilde{A}$ называют число $\left(\operatorname{hgt}\left(\tilde{A}\right)\right)=h\left(\tilde{A}\right)=\sup\limits_{x}\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)$; $h\left(\varnothing\right)=0$.

Определение. Н-множество $\tilde{A}$ называют *нормальным*, если $h\left(\tilde{A}\right)=1$, и *субнормальным*, если $0<h\left(\tilde{A}\right)<1$.

Определение. Н-множество $\tilde{A}'=\left(A',\,\mu_{\tilde{A}'}\right)$ называют *нормализацией* субнормального н-множества $\tilde{A}=\left(A,\,\mu_{\tilde{A}}\right)$ ($\tilde{A}'=\operatorname{norm}\left(\tilde{A}\right)$), если $\mu_{\tilde{A}'}\left(x\right)=\dfrac{\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)}{h\left(\tilde{A}\right)}$ при любом x.

Определение. *Ядром* нормального н-множества называют множество $\operatorname{core}\tilde{A}=\left\{x:\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)=1\right\}$.

Определение. Для числа $0\le\alpha<1$ *α-сечением* н-множества $\tilde{A}$ назовём множество $A_\alpha=\left\{x:\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)>\alpha\right\}$ и *1-сечением* – множество $A_1=\operatorname{core}\tilde{A}=\left\{x:\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)=1\right\}$.

Определение. Н-множество $\tilde{A}=\left(A,\,\mu_{\tilde{A}}\right)$, носитель A которого содержится в некотором линейном пространстве L, назовём *выпуклым*, если

$$\forall\left(x_1,\,x_2\in A\right)\forall\left(\lambda\in\left[0,\,1\right]\right)\left[\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\right)\ge\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x_1\right),\,\mu_{\tilde{A}}\left(x_2\right)\right\}\right].$$

Очевидно, любое α-сечение ($\alpha\in\left[0,\,1\right]$) выпуклого н-множества является выпуклым множеством. Но верно и обратное утверждение о том, что если для любого $\alpha\in\left[0,\,1\right]$ A_α – выпуклое множество, то $\tilde{A}$ является выпуклым. Действительно, в противном случае нашлись бы такие x_1 и x_2 из A и $\lambda\in\left[0,\,1\right]$, что $\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\right)<\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x_1\right),\,\mu_{\tilde{A}}\left(x_2\right)\right\}$. Тогда для произвольного $\alpha\in\left[\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\right),\,\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x_1\right),\,\mu_{\tilde{A}}\left(x_2\right)\right\}\right)$ $x_1,\,x_2\in A_\alpha$, а $\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\notin A_\alpha$, что противоречит выпуклости всех A_α.

Итак, условие выпуклости всех α-сечений можно считать вторым эквивалентным определением выпуклости $\tilde{A}$.

2. Соотношения между нечёткими множествами

Определение. Говорят, что н-множество $\tilde{A}$ содержится в н-множестве $\tilde{B}$ (обозначение $\tilde{A} \subset \tilde{B}$), если для любого элемента x выполнено неравенство $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.

Определение. Два н-множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются равными ($\tilde{A} = \tilde{B}$), если $\mu_{\tilde{A}} \equiv \mu_{\tilde{B}}$.

Очевидно, $\tilde{A} = \tilde{B}$ в том и только в том случае, когда $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ и $\tilde{B} \subset \tilde{A}$. Сохраняются также свойства транзитивности включения и равенства, коммутативности равенства.

3. Операции над нечёткими множествами

Определяя операции объединения, пересечения и разности для нечётких множеств, следует помнить о том, чтобы для обычных множеств эти операции были эквивалентны классическим и наследовали основные их свойства.

Наиболее естественным обобщением пересечения и объединения являются операции, определённые впервые Л.А. Заде.

Определение. *Пересечением по Заде* н-множеств $\tilde{A} = \left(A, \mu_{\tilde{A}}\right)$ и $\tilde{B} = \left(B, \mu_{\tilde{B}}\right)$ называют н-множество $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{C} = \left(C, \mu_{\tilde{C}}\right)$, функция принадлежности которого определяется равенством $\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$.

Определение. *Объединением по Заде* н-множеств $\tilde{A} = \left(A, \mu_{\tilde{A}}\right)$ и $\tilde{B} = \left(B, \mu_{\tilde{B}}\right)$ называют н-множество $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{C} = \left(C, \mu_{\tilde{C}}\right)$, функция принадлежности которого определяется равенством $\mu_{\tilde{C}}(x) = \max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$.

Легко проверяется, что для обычных множеств определённые таким образом операции эквивалентны классическим операциям пересечения и объединения, сохраняют свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности относительно друг друга.

Поскольку мы отказались от применения универсального множества, то вместо операции дополнения н-множества, которая фигурирует в работах по теории нечётких множеств, определим более общую операцию разности двух н-множеств.

Определение. *Разностью* н-множеств $\tilde{A}=\left(A,\,\mu_{\tilde{A}}\right)$ и $\tilde{B}=\left(B,\,\mu_{\tilde{B}}\right)$ называют н-множество $\tilde{A}\setminus\tilde{B}=\tilde{C}=\left(C,\,\mu_{\tilde{C}}\right)$, функция принадлежности которого определяется равенством

$$\mu_{\tilde{C}}\left(x\right)=\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right\}=\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right\}.$$

Нетрудно видеть, что для обычных множеств операция эквивалентна обычной операции вычитания множеств.

Утверждение. Справедливы законы двойственности $\tilde{A}\setminus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)=\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)\cap\left(\tilde{A}\setminus\tilde{C}\right)$, $\tilde{A}\setminus\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)=\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)\cup\left(\tilde{A}\setminus\tilde{C}\right)$.

Доказательство.

$$\mu_{\tilde{A}\setminus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)}\left(x\right)=\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}\cup\tilde{C}}\left(x\right)\right\}=\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\max\left\{\mu_{\tilde{B}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{C}}\left(x\right)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{0,\,\min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{C}}\left(x\right)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right\},\,\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{C}}\left(x\right)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{B}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{C}}\left(x\right)\right\}=\mu_{\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)\cap\left(\tilde{A}\setminus\tilde{C}\right)}\left(x\right).$$

$$\mu_{\tilde{A}\setminus\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\left(x\right)=\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}\cap\tilde{C}}\left(x\right)\right\}=\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\min\left\{\mu_{\tilde{B}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{0,\,\max\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right\},\,\max\left\{0,\,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{C}}\left(x\right)\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{B}}\left(x\right),\,\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{C}}\left(x\right)\right\}=\mu_{\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)\cup\left(\tilde{A}\setminus\tilde{C}\right)}\left(x\right).$$

4. О других определениях пересечения и объединения

Определение пересечения и объединения н-множеств по Заде – не единственный возможный вариант введения подобных операций. При помощи любых функций $T:\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ и $S:\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$, удовлетворяющих приводимым ниже аксиомам *треугольной нормы* (для T) *треугольной конормы* (для S) можно определить T*-пересечение* S-объединение формулами:

$$\tilde{A}\cap_T\tilde{B}=\tilde{C},\ \mu_{\tilde{C}}(x)=T\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right);$$

$$\tilde{A}\cup_S\tilde{B}=\tilde{D},\ \mu_{\tilde{D}}(x)=S\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right).$$

Приведенные выше определения по Заде соответствуют функциям

$$T(a,b)=\min\{a,b\},\ S(a,b)=\max\{a,b\}.$$

Аксиомы треугольной нормы T (t-нормы).
1t) $T(a,1)=a$ (*граничное условие*);

2) $b<c \to T(a,b)\le T(a,c)$ (*условие монотонности*):

3) $T(a,b)=T(b,a)$ (*коммутативность*):

4) $T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$ (*ассоциативность*).

Аксиомы треугольной конормы S (s-нормы).
1s) $S(a,0)=a$, 2) – 4).

Аксиомы гарантируют, что так определенные операции обладают свойствами ассоциативности и коммутативности и для обычных множеств эквивалентны классическим операциям пересечения и объединения. Однако законам дистрибутивности определённые таким образом операции могут не удовлетворять. Например, пара *вероятносных* операций, образованная t-нормой $T(a,b)=a\cdot b$ и s-нормой $S(a,b)=a+b-a\cdot b$, а также пара операций *по Лукасевичу*, образованная t-нормой $T(a,b)=\max\{a+b-1,\,0\}$ и s-нормой $S(a,b)=\min\{a+b,\,1\}$, не обладают свойствами дистрибутивности, как показывают следующие примеры.

1) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\ne\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{16}$;

2) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}\ne\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$;

3) $\max\left\{\frac{3}{4}+\min\left\{\frac{3}{4}+\frac{3}{4},\,1\right\}-1,\,0\right\}=\frac{3}{4}\ne$

$$\ne\min\left\{\max\left\{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1,\,0\right\}+\max\left\{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1,\,0\right\},\,1\right\}=1$$

4) $\min\left\{\frac{1}{4}+\max\left\{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}-1,\,0\right\},\,1\right\}=\frac{1}{2}\ne$

$$\ne\max\left\{\min\left\{\frac{1}{4}+\frac{2}{4},\,1\right\}+\min\left\{\frac{2}{4}+\frac{3}{4},\,1\right\}-1,\,0\right\}=\frac{3}{4}.$$

Остаётся открытым вопрос о том, какие пары операций пересечения и объединения целесообразно рассматривать. Не ограничивая права выбора, предлагаем особо отметить пары, обладающие свойством взаимной дистрибутивности, следующим определением.

Определение. t-норму T и s-норму S назовём *согласованной парой, если* для любых чисел $a, b, c \in [0, 1]$ выполнены равенства $T\left(a, S\left(b,c\right)\right) = S\left(T\left(a,b\right), T\left(a,c\right)\right)$ и $S\left(a, T\left(b,c\right)\right) = T\left(S\left(a,b\right), S\left(a,c\right)\right)$.

Литература

1. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств./ Пер. с франц. Под ред. С.И. Травкина. – М.: Радио и связь, 1982.

2. Кофман А., Алуха Х. Хил. Введение теории нечетких множеств в управление предприятием./ А. Кофман, Х. Хил Алуха. Пер. с исп. Под ред. В.В. Краснопрошина, Н.А. Лепешинского – Минск: Вышэйшая школа, 1992.

3. Аверин А.Н. и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986.

4. Прикладные нечеткие системы / Под ред. Т.Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М.: Мир, 1993.

5. В.В. Круглов, М.И. Дли, Р.Ю. Голунов. Нечёткая логика и искусственные нейронные сети. – М.: Физматлит, 2001.

6. С.Д. Штовба, Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. http://matlab.exponenta.Tu/fuzzylogic/book1/index.php.

7. Г.Э. Яхъяева, Основы теории нечётких множеств. – http://www.intuit.Tu/depaTtment/ds/fuzzysets/1/.