Г.А.Колупанова, Л.П.Петрова

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие

ВОРОНЕЖ – 2009

ББК 22.176
К61

Рецензенты:
Садовский Б.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор (ВГУ),
Кафедра функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета.

Основы дискретной математики. Практикум: Уч.мет.пособие. Г.А.Колупанова, Л.П.Петрова – Воронеж. ВЭПИ - 104с.

Пособие подготовлено на кафедре прикладной информатики и математики Воронежского экономико-правового института, содержит задачи и упражнения по основным понятиям теории множеств, математической логики, теории графов, нечетких множеств. Кроме того, один из разделов пособия посвящен численным методам.
Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная информатика (в экономике)».

Содержание

Элементы теории графов

Нечеткие множества и нечеткие отношения

Численные методы

1. Численные методы решения нелинейных уравнений

Рассматриваются три итерационных метода:
- метод половинного деления (метод бисекции);
- метод хорд;
- метод касательных (метод Ньютона).

Пример.

Решить уравнение x^3-5=0 тремя указанными методами. Отыскание корней проводится в два этапа. Первый этап является этапом локализации (или отделения) корней, второй – этапом итерационного уточнения корня.

Первый этап – этап локализации: Корень ищем на отрезке [a,b]. Подбираем такой отрезок, чтобы функция $f(x)=x^3-5$ на концах этого отрезка принимала значения разных знаков. В данном случае, можно брать $a = 1$, $b = 2$, т.к. f(1)=-4, f(2)=3, т.е. функция f(x) на концах отрезка [1,2] принимает значения разных знаков. Следовательно, т.к. функция f(x) непрерывна, на отрезке [1,2] есть точка, в которой функция равна нулю (по теореме Больцано-Коши).

Второй этап – этап итерационного уточнения корня, его можно делать одним из трех методов. Задана точность вычисления ε=0,01. Вычисления надо заканчивать, когда будет выполнено неравенство $|f(x_i)|<\varepsilon$.

1.1. Метод бисекции (половинного деления)

Расчётная формула: $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Или в общем виде:

$$x_i=\frac{a+b}{2}$$

$$f(x)=x^3-5$$

Решение оформляем в виде таблицы:

в каждом столбце таблицы делаем такие действия: отрезок [a,b] делим пополам, получаем точку x_i, в этой точке вычисляем значение функции $f(x_i)$, смотрим на знак получившегося значения и берем следующий отрезок – одну из половин отрезка [a,b], причем ту, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Повторяем итерацию.

№ итерации	0	1	2	3	4	5	6
a	1	1,5	1,5	1,625	1,6875	1,6875	1,7032
b	2	2	1,75	1,75	1,75	1,7188	1,7188
f(a)	-4	-1,625	-1,625	-0,7090	-0,1946	-0,1945	-0,0592
f(b)	3	3	0,3594	0,3594	0,3594	0,0778	0,0778
Отрезок [a,b]	[1,2]	[1,5;2]	[1,5;1,75]	[1,625;1,75]	[1,6875;1,75]	[1,6875;1,7188]	[1,7032;1,7188]
Середина отрезка $x_i=\frac{a+b}{2}$	x_0=1,5	x_1=1,75	x_2=1,625	x_3=1,6875	x_4=1,7188	x_5=1,7032	**x_6=1,7110**
x_i^3	3,375	5,3594	4,2910	4,8054	5,0778	4,9408	5,0090
$f(x_i)$	-1,625	0,3594	-0,7090	-0,1946	0,0778	-0,0592	0,0090
Следующий отрезок	[1,5;2]	[1,5;1,75]	[1,625;1,75]	[1,6875;1,75]	[1,6875;1,7188]	[1,7032;1,7188]	[1,7032;1,7110]
Выполнение неравенства $\lvert f(x_i)\rvert<\varepsilon$	-	-	-	-	-	-	+

Ответ: приближенное значение корня $x^*=x_6=1{,}71$.

1.2. Метод хорд

$f(x) = x^3-5$

Расчётная формула

$$x_0 = \left(\frac{a}{b-a} - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\right)\cdot(b-a).$$ Или в общем виде:

$$x_i = \left(\frac{a}{b-a} - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}\right)(b-a)$$

Решение оформляем в виде таблицы:
в каждом столбце таблицы ищем точку x_i (по расчетной формуле), отрезок [a,b] делится этой точкой на два отрезка [a,x_i] и [x_i,b], выбираем тот отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Повторяем итерацию.

№ итерации	0	1	2
a	1	1,5714	1,6879
b	2	2	2
f(a)	-4	-1,1198	-0,1910
f(b)	3	3	3
Отрезок [a,b]	[1,2]	[1,5714;2]	[1,6879;2]
b-a	1	0,4286	0,3121
$\frac{a}{b-a}$	1	3,6664	5,4082
f(b)- f(a)	7	4,1198	3,1910
$\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$	-0,5714	-0,2718	-0,5985
$\frac{a}{b-a}$ - $\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$	1,5714	3,9382	6,0067
x_i= $\frac{a}{b-a}$ -	1,5714	1,6879	1,8747

$\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$			
x_i^3	3,8802	4,8089	6,5885
$f(x_i)$	-1,1198	-0,1910	1,5885
Выполнение неравенства $\lvert f(x_i) \rvert < \varepsilon$	-	-	-

№ итерации	3	4
a	1,6879	1,7079
b	1,8747	1,8747
f(a)	-0,1910	-0,0177
f(b)	1,5885	1,5885
Отрезок [a,b]	[1,6879;1,8747]	[1,7079;1,8747]
b-a	0,1868	0,1711
$\frac{a}{b-a}$	9,0359	9,9819
f(b)- f(a)	1,7795	1,6062
$\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$	-0,1073	-0,0110
$\frac{a}{b-a}$ - $\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$	9,1432	9,9929
$x_i = \frac{a}{b-a} - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}$	1,7079	**1,7098**
x_i^3	4,9823	-0,0177
$f(x_i)$	4,9983	-0,0017
Выполнение неравенства $\lvert f(x_i) \rvert < \varepsilon$	-	+

Ответ: приближенное значение корня $x^*=x_4=1,71$.

1.3. Метод касательных.
Расчётная формула

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.   Или в общем виде: $x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$f(x) = x^3-5$

$f'(x)=3x^2$

$f''=6x$

Решение оформляем в виде таблицы:

Напомним, что в этом методе за x_0 берем тот конец отрезка [a,b], в котором знак функции и знак второй производной совпадают (это делаем в каждой итерации, т.е. в каждом столбце), а следующий отрезок берем тот, на концах которого функция имеет разные знаки (один конец – точка x_{i+1}, которая получилась в этом столбце таблицы, а другой – один из концов предыдущего отрезка).

№ итерации	0	1
Отрезок [a,b]	[1,2]	[1;1,75]
f(a)	-4	-4
f(b)	3	0,3594
$f''(a)$	6	6
$f''(b)$	12	10,5
x_i	2	1,75
$f(x_i)$	3	0,3594
$f'(x_i)$	12	9,1875
$\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	0,25	0,0391
$x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	1,75	**1,7109**
x_{i+1}^3	5,3594	5,0081
$f(x_{i+1})$	0,3594	0,0081

Выполнение неравенства $\lvert f(x_{i+1}) \rvert<\varepsilon$	-	+

Ответ: приближенное значение корня $x^*=x_1=1{,}71$.
Вывод: скорость сходимости самая высокая у метода Ньютона, самая низкая – у метода половинного деления.

Задачи для самостоятельного решения

1. Методом половинного деления с точностью до 0,001 найти приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

1) $x^3-2x-1=0$
2) $x^5+0{,}2x-0{,}84=0$
3) $x^4-4x^3+4x^2-4=0$
4) $x^3-0{,}2x^2-0{,}2x-1{,}2=0$
5) $4x^3+3x^2-9x+2=0$
6) $x^3-3x^2-7x+4=0$
7) $e^x+x-2=0$
8) $\sin x+x-1=0$

2. Методом хорд с точностью до 0,001 найти приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

1) $x^4-4x-1=0$
2) $x^3-3x^2+5x-4=0$
3) $x^3-x^2-2x+1=0$
4) $x^3+2x^2-3x-7=0$
5) $x^3+3x^2+2x+5=0$
6) $x^3-2x^2+3x-5=0$
7) $e^x+x-2=0$
8) $\sin x+x-1=0$

3. Методом касательных с точностью до 0,001 найти приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

1) $2x^3-5x^2+1=0$
2) $x^3-2x^2-4x-7=0$
3) $x^3-x^2-9x+9=0$

4) $5x^3-x-1=0$

5) $x^3+x^2-3=0$

6) $3x^3-0,9x-6=0$

7) $e^x+x-2=0$

8) $\sin x+x-1=0$

2. Решение систем линейных уравнений методом Зейделя

Пример. Методом Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение. Приведем эту систему к виду, удобному для итерации,

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 \end{cases}$$

В качестве нулевого приближения решения возьмем: $x_1^{(0)}=1{,}2$, $x_2^{(0)}=0$, $x_3^{(0)}=0$. Применяя метод Зейделя, последовательно получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1\cdot 0 - 0{,}1\cdot 0 = 1{,}2 \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2\cdot 1{,}2 - 0{,}1\cdot 0 = 1{,}06 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2\cdot 1{,}2 - 0{,}2\cdot 1{,}06 = 0{,}948 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1{,}2 - 0{,}1\cdot 1{,}06 - 0{,}1\cdot 0{,}948 = 0{,}9992 \\ x_2^{(2)} = 1{,}3 - 0{,}2\cdot 0{,}9992 - 0{,}1\cdot 0{,}948 = 1{,}00536 \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2\cdot 0{,}9992 - 0{,}2\cdot 1{,}00536 = 0{,}999098 \end{cases}$$

и т.д.

Результаты вычислений с точностью до четырех знаков помещены в таблице:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2000	0,0000	0,0000
1	1,2000	1 ,0600	0,9480
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1.0001	1,0001
4	1 ,0000	1,0000	1,0000

Точные значения корней:. x_1=1, x_2=1, x_3=1.

Задачи для самостоятельного решения

Методом Зейделя решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} 20x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 20x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 20x_3 = 14 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 15x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 16x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 16x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 18x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 18x_3 = 18 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 25x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$;

3. Интерполирование

Интерполирование является одним из основных типов точечной аппроксимации. *Задачей аппроксимации* является нахождение значений функции в точках, не совпадающих с табличными.

Задача интерполирования ставится так: для данной функциональной зависимости $y = f\left(x\right)$ требуется построить многочлен, принимающая в заданных точках x_i те же значения

y_i, что и функция $f(x)$. При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых.

Если один многочлен используется для приближения на всём интервале изменения аргумента, то интерполяцию называют глобальной. Глобальная интерполяция осуществляется с помощью полинома Лагранжа или полинома Ньютона, причем есть полином Ньютона для интерполирования вперед и для интерполирования назад.

Если же для различных частей изменения аргумента используются свои многочлены, то такая интерполяция называется *кусочной* или *локальной.* Приближение называется *интерполяцией*, т.к. точки, в которых вычисляют значения функции, находятся *внутри* интервала. Если требуется найти значения функции *вне* интервала, то такие приближения называют *экстраполяцией*.

Пример.

Функция задана таблицей:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
y=f(x)	$y_0 = 3$	$y_1 = 1$	$y_2 = 5$	$y_3 = 7$

Найти f(2,1).

Решение:

Будем интерполировать функцию f(x).

Можно использовать кусочную интерполяцию – линейную или параболическую, или глобальную.

I. Кусочная (локальная) интерполяция.

1) Используем **линейную** интерполяцию: сначала определим отрезок, в который попадает число 2,1 – это отрезок [2,3], для этого отрезка выпишем уравнение прямой, проходящей через точки A(2,1) и B(3,5) (точки берутся из таблицы).

Уравнение AB: $\dfrac{y-1}{5-1} = \dfrac{x-2}{3-2}$ => y-1=4(x-2) => y=4x-7.

Теперь берем x=2,1 и подставляем в найденное уравнение, получаем f(2,1)=4·2,1-7=1,4

Ответ: f(2,1)=1,4

2) Используем **квадратичную** (или параболическую) интерполяцию: сначала определим отрезок, в который попадает число 2,1 – это отрезок [2,4] или [0,3], для каждого из этих отрезков выпишем уравнение параболы, проходящей через точки A(2,1), B(3,5) и C(4,7) (для отрезка[2,4]) и $A_1(0,3)$, A(2,1) и B(3,5) (для отрезка[0,3]) - точки берутся из таблицы. Заметим, что квадратичная интерполяции не является однозначной, т.к. проводится по трём ближайшим к точке узлам (можно брать третьим узел левее отрезка, на который попадает точка, или правее).

A) для отрезка[2,4] парабола проходит через точки A(2,1), B(3,5) и C(4,7), уравнение параболы $y=ax^2+bx+c$. Надо найти коэффициенты a,b,c. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 5 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 7 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4a + 2b + c \\ 5 = 9a + 3b + c \\ 7 = 16a + 4b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 5a + b \\ 2 = 7a + b \end{cases} \Rightarrow$$

a=-1, b=9, c=-13.

Итак, уравнение параболы $y=-x^2+9x-13$, теперь берем x=2,1 и подставляем в найденное уравнение, получаем f(2,1)=1,49.

Ответ: f(2,1)=1,49.

B) для отрезка[0,3] парабола проходит через точки $A_1(0,3)$, A(2,1) и B(3,5), уравнение параболы

$y=a_1 x^2+b_1 x+c_1$. Надо найти коэффициенты a_1 ,b_1 ,c_1. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 3 = a_1 \cdot 0^2 + b_1 \cdot 0 + c_1 \\ 1 = a_1 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + c_1 \\ 5 = a_1 \cdot 3^2 + b_1 \cdot 3 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = c_1 \\ 1 = 4a_1 + 2b_1 + 3 \\ 5 = 9a_1 + 3b_1 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ 4a_1 + 2b_1 = -2 \\ 9a_1 + 3b_1 = 2 \end{cases}$$

=> a_1=10/6, b_1=-13/3, c_1=3.

Итак, уравнение параболы $y=10/6\cdot x^2-13/3\cdot x+3$, теперь берем x=2,1 и подставляем в найденное уравнение, получаем f(2,1)=1,25

Ответ: f(2,1)=1,25.

II. Глобальная интерполяция.

При глобальной интерполяции один многочлен используется для приближения на всём интервале изменения аргумента.

Можно строить три интерполяционных многочлена: интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования вперед и интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования назад. Но многочлен Ньютона строится в предположении, что узлы x_i и x_{i+1} для всех i равно отстоят друг от друга. В данном примере это не так. Поэтому для данного примера строим только интерполяционный многочлен Лагранжа. Ниже приведем формулы для построения многочлена Ньютона.

А) Интерполяционный многочлен Лагранжа.

В нашем случае n=3, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$L\left(x\right)=$

$y_0 \cdot l_0(x)+y_1 \cdot l_1(x)+y_2 \cdot l_2(x)+y_3 \cdot l_3(x)=3 \cdot l_0(x)+1 \cdot l_1(x)+5 \cdot l_2(x)+7 \cdot l_3(x)$.

Выписываем многочлены $l_i(x)$ (i=0,1,2,3).

$$l_0(x)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)(x_0-x_1)}=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-2)(0-3)(0-4)}=$$

$$-\frac{1}{24}\cdot(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-3)(2-4)}=$$

$$\frac{1}{4}\cdot x(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-2)(3-4)}=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot x(x-2)(x-4)$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$

$$\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-2)(4-3)}=\frac{1}{8}\cdot x(x-2)(x-3)$$

L(x)= $3\cdot l_0(x)+1\cdot l_1(x)+5\cdot l_2(x)+7\cdot l_3(x)$=-1/8·(x-2)(x-3)(x-4)+1/4·x(x-3)(x-4)-5/3·x(x-2)(x-4)+7/8·x(x-2)(x-3).

Полученный многочлен можно преобразовать (раскрыть все скобки и привести подобные), а затем подставить x=2,1, а можно подставлять сразу.

Подставляем в полученное выражение, получаем f(2,1)=1,376.

В) Интерполяционный многочлен Ньютона.

$$P_n(x)=f(x_0)\varphi_0+\frac{\Delta f(x_0)}{1!h}\varphi_1(x)+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}\varphi_2(x)+$$

$$+\ldots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\varphi_n(x).$$

Эта формула – это интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования *вперёд* (от узла x_0 по системе возрастающих узлов $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$), где $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),\ x\in[a,b-h]$- о*ператор разности*,

$\Delta^2 f=\Delta(\Delta f);\ \Delta^3 f=\Delta(\Delta^2 f);\ldots,\ \Delta^n f=\Delta(\Delta^{n-1} f)$ - это операторы разности высших порядков,

$$\varphi_0=1,\ \varphi_1=x-x_0,\ \varphi_2=(x-x_0)(x-x_1),\ldots,\ \varphi_n=$$

$$=(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).$$

Есть интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования *назад*

$$\bar{P}_n(x) = f(x_n)\psi_0 + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!h}\psi_1(x) + \\ + \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!h^2}\psi_2(x) + \ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\psi_n(x), \quad (8)$$

где

$$\psi_0 = 1,\ \psi_1(x) = x - x_n,\ \psi_2(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}), \ldots,$$
$$\psi_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Функция задана таблицей:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
y=f(x)	$y_0 = 1$	$y_1 = 2$	$y_2 = 1{,}5$	$y_3 = 4$	$y_4 = 4{,}5$

Найти с помощью интерполирования f(1,6).

2.Функция задана таблицей:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
y=f(x)	$y_0 = 1{,}5$	$y_1 = 2$	$y_2 = 1{,}8$	$y_3 = 4$	$y_4 = 4{,}5$

Найти с помощью интерполирования f(1,4).

3.Функция задана таблицей:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
y=f(x)	$y_0 = 1$	$y_1 = 2$	$y_2 = 1{,}5$	$y_3 = 4$	$y_4 = 4{,}5$

Найти с помощью интерполирования f(2,6).

4.Функция задана таблицей:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
y=f(x)	$y_0 = 1{,}5$	$y_1 = 2$	$y_2 = 1{,}8$	$y_3 = 4$	$y_4 = 4{,}5$

Найти с помощью интерполирования f(2,4).

5. Найти уравнение параболы, проходящей через точки (2,0), (4,3), (6,5), (8,4), (10,1).

6. Даны точки (0,3), (2,1), (3,5), (4,7). Составить уравнение полинома, принимающего указанные значения при заданных значениях аргумента.
7. Построить многочлен, график которого проходит через точки (2,3), (4,7), (5,9), (10,19).
8. Даны десятичные логарифмы чисел: lg2,0=0,30103, lg2,1=0,32222, lg2,2=0,34242, lg2,3=0,36173, lg2,4=0,38021, lg2,5=0,39794. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти lg2,03.
9. Зная квадраты чисел 5, 6, 7,8, найти квадрат числа 6,25. Указание: применить интерполяционную формулу Ньютона.

4. Численное интегрирование

Методы численного интегрирования основаны на аппроксимации подынтегральной функции простыми зависимостями, в частности, многочленами.

4.1 Метод прямоугольников

Этот метод является простейшим методом численного интегрирования. Интеграл заменяется интегральной суммой. В качестве точек $\xi_i,\ i=1, 2,\ldots, n$ выбирают левые x_{i-1} или правые x_i границы элементарных отрезков.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i + R_n\ , \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i + R_n\ . \qquad (2)$$

Более точной, и поэтому чаще используемой является формула прямоугольников, в которой $\xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$ (середина элементарного отрезка).

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\Delta x_i + R_n\,. \qquad (3)$$

4.2 Метод трапеций

Метод трапеций использует линейную интерполяцию подынтегральной функции.

В частности, если промежуток $[a,\ b]$ разбивается на n равных частей и $\Delta x_i = h = \dfrac{b-a}{n}$, то формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) + R_n, \qquad (4)$$

где $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$..

4.3. Метод Симпсона (метод парабол)

Следующим шагом повышения точности численного интегрирования является кусочно-квадратная аппроксимация. Формула называется формулой Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right) + R_n. \qquad (5)$$

В этой формуле первая сумма соответствует точкам с нечётными номерами, а вторая – с чётными номерами ($[a,\ b]$ разбивается на чётное число частей $n = 2m$).

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, используя формулы:

1.прямоугольников (формулы (1), (2) и (3)); 2.трапеций;

3.Симпсона;

4. непосредственным интегрированием.

Разобьем промежуток интегрирования на n частей, возьмем n=10. Составим таблицу значений функции f(x)=$\dfrac{1}{1+x^2}$ в точках x_i (i=0,1,…,10) и в точках $x_{i-½}$ (серединах отрезков).

x_i	$f(x_i)$
0	1
0,1	0,9901
0,2	0,9615
0,3	0,9174
0,4	0,8621
0,5	0,8000
0,6	0,7353
0,7	0,6711
0,8	0,6098
0,9	0,5525
1	0,5

$x_{i-½}$	$f(x_{i-½})$
0,05	0,9975
0,15	0,9780
0,25	0,9412
0,35	0,8909
0,45	0,8316
0,55	0,7678
0,65	0,7030
0,75	0,6400
0,85	0,5806
0,95	0,5256

1.Вычисляем интеграл по формулам прямоугольников:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx\text{(по формуле (1))}\approx 0{,}749$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx\text{(по формуле (2))}\approx 0{,}699$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx\text{(по формуле (3))}\approx 0{,}7856$$

2.Вычисляем интеграл по формуле трапеций: Здесь h=0,1, n=10.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx\text{(по формуле (4))}\approx 0{,}7850$$

3.Вычисляем интеграл по формуле Симпсона:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx\text{(по формуле (5))}\approx 0{,}7854$$

4.Вычисляем интеграл непосредственно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctqx}\,\Big|_0^1 = \text{arctq1-arctq0} = \pi/4 \approx 0{,}7854$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы, используя формулы (методы):

1. прямоугольников (формулы (1), (2) и (3));
2. трапеций;
3. Симпсона;
4. непосредственным интегрированием.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

2. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$;

3. $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$;

4. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Замечание: данный интеграл равен ln2, поэтому задание можно формулировать так: вычислить ln2 = $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ с точностью до 0,01.

5. Вычислить $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$.

6. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

7. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$.

8. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$.

5. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

5.1. Метод Эйлера

Решаем задачу Коши для обыкновенного дифференциальных уравнения первого порядка.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f\left(x, y(x)\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Простейшим методом решения является *метод Эйлера.* Расчетная формула

$$y_{i+1} \approx y_i + f\left(x_i, y_i\right)h. \qquad (2)$$

Пример. Методом Эйлера проинтегрировать уравнение $x^2y' - xy = 1$ при начальном условии $y(1) = 0$ в промежутке $[1, 2]$ с шагом $h = 0.2$.

Решение. Здесь f(x,y)=$\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ (*)

Вычисления будем проводить по формуле (2): $y_{i+1} \approx y_i + f\left(x_i, y_i\right)h$.

Заполняем таблицу по такой схеме:

0) в первую строку ставим x_i , шаг h=0,2.
1) в первый столбец ставим данные из начального условия (это первая и вторая строки), $f(x_0,y_0)$ вычисляем по формуле (*), получаем: $f(x_0,y_0)=0+1=1$.

2) Во втором столбце вычисляем y_1 по формуле (2): $y_1 \approx y_0 + f(x_0,y_0)h = 0+1\cdot 0{,}2 = 0{,}2$, затем вычисляем $f(x_1,y_1)$ по формуле (*): $f(x_1,y_1)=0{,}2/1{,}2+1/(1{,}2)^2=0{,}6964$.
3) Дальше – по аналогии.

x_i	x_0= 1	x_1= 1,2	x_2= 1,4	x_3= 1,6
y_i	y_0= 0	y_1= 0,2	y_2=0,3393	y_3=0,4898
$f(x_i,y_i)$	$f(x_0,y_0)$=1	$f(x_1,y_1)$=0,6964	0,7526	0,6968

x_i	x_4 =1,8	x_5= 2
y_i	y_4=0,6092	y_5=0,7386
$f(x_i,y_i)$	0,6471	

Ответ: таблица значений функции y(x):

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	0	0,2	0,3393	0,4898	0,6092	0,7386

5.2. Метод Эйлера с выравниванием (модифицированный метод Эйлера)

При решении задачи (1) *методом Эйлера с выравниванием* на каждом отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ вместо одной переменной вводятся две переменные y_i и v_i по формулам:

$$\begin{cases} v_i = y_{i-1} + h\cdot f\left(x_{i-1},\, y_{i-1}\right); \\ y_i = y_{i-1} + \dfrac{h}{2}\Big(f\left(x_{i-1},\, y_{i-1}\right) + f\left(x_i,\, v_i\right)\Big). \end{cases}$$

Пример. Методом Эйлера с выравниванием проинтегрировать уравнение $x^2y' - xy = 1$ при начальном условии $y(1)=0$ в промежутке $[1,\,2]$ с шагом $h=0.2$.

Решение. Здесь $f(x,y)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ (*)

Вычисления будем проводить по формулам:

$$\begin{cases} v_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, v_{i+1}) \end{cases} \qquad (4)$$

Все вычисления заносим в таблицу. Заполняем таблицу по такой схеме:

1) В первую строку ставим x_i , шаг h=0,2.
2) Первый столбец заполняем так: сначала ставим данные из начального условия (это первая и вторая строки), третью строку вычисляем по формуле (*) (это в каждом столбце), получаем: $f(x_0,y_0)=0+1=1$. Четвертую строку вычисляем по первому соотношению из формул (4), пятую строку вычисляем по формуле (*) (это в каждом столбце) и шестую строку вычисляем по второму соотношению из формул (4).
3) Дальше – по аналогии.

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	0	0,1861	0,3475	0,4936	0,6296	0,7556
$f(x_i,y_i)$	1	0,8495	0,7584	0,6991	0,6584	
v_{i+1}	0,2	0,356	0,4992	0,6334	0,7613	
$f(x_{i+1},v_{i+1})$	0,8611	0,7646	0,7026	0,6605	0,6306	
y_{i+1}	0,1861	0,3475	0,4936	0,6296	0,7556	

Ответ:

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y	0	0,19	0,35	0,49	0,63	0,76

5.3. Метод Рунге – Кутта

При решении задачи (1) методом Рунге – Кутта определяются четыре числа:

$$k_1 = h \cdot f(x, y), \quad k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3).$$

Если положить $y(x+h)=y(x)+\Delta y$, то можно доказать, что $\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$. Получаем такую схему вычислений:

№ Этапа	x	y	$k_j = h \cdot f(x, y)$	Добавка
I	x_0 $x_0+\frac{h}{2}$ $x_0+\frac{h}{2}$ x_0+h	y_0 $y_0+\frac{k_1}{2}$ $y_0+\frac{k_2}{2}$ y_0+k_3	$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$ $k_2 =$ $= h \cdot f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}\right)$ $k_3 =$ $= h \cdot f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2}{2}\right)$ $k_4 = h \cdot f(x_0+h, y_0+k_3)$	$\Delta y_0 =$ $=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+$ $+2k_3+k_4)$
II	$x_1 =$ $= x_0+h$ и т.д.	$y_1 =$ $= y_0+\Delta y_0$ и т.д.	$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1)$ и т.д.	

Пример. Методом Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $x^2y' - xy = 1$ при начальном условии $y(1)=0$ в промежутке $[1, 2]$ с шагом $h=0.2$.

Решение. Здесь f(x,y)=$\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}$.

I этап. $x_0=1,\ y_0=0$. Найдём числа k_1, k_2, k_3, k_4:

$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.2 \cdot \left(\frac{0}{1}+\frac{1}{1^2}\right) = 0.2;$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.2 \cdot \left(\frac{0 + \frac{0.2}{2}}{1 + \frac{0.2}{2}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)^2} \right) = 0.18;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2},\, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.2 \cdot \left(\frac{0 + \frac{0.18}{2}}{1 + \frac{0.2}{2}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)^2} \right) = 0.18;$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_0 + h,\, y_0 + k_3\right) = 0.2 \cdot \left(\frac{0 + 0.18}{1 + 0.2} + \frac{1}{(1 + 0.2)^2} \right) = 0.17\ .$$

Теперь вычислим добавку $\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 0.18$ и значения координат следующей узловой точки $x_1 = x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2$,

$y_1 = y(x_1) = y(x_0) + \Delta y_0 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0.18 = 0.18$ (по формуле $y(x+h) = y(x) + \Delta y$). Переходим ко второму этапу:

IIтап.

$$x_1 = 1.2,\ y_1 = 0.18,\ k_1 = 0.2\left(\frac{0.18}{1.2} + \frac{1}{1.2^2}\right) = 0.17,\ k_2 = 0.15,\ k_3 = 0.15,$$

$k_4 = 0.14,\ \Delta y_1 = 0.15,\ y_2 = y(1.4) = 0.33$ и т.д.

Ответ:

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y	0	0.18	0.33	0,49	0,62	0,75

Замечание: этот ответ почти не отличается от ответа, полученного при решении предыдущим методом.

Задачи для самостоятельного решения

1. Тремя методами (методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта) проинтегрировать уравнение $y'=y-\dfrac{2x}{y}$ при начальном условии $y(0)=1$ в промежутке $[0;1]$ с шагом $h=0.2$.

2. Тремя методами (методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта) проинтегрировать уравнение $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$ при начальном условии $y(0)=1$ в промежутке $[0;1]$ с шагом $h=0.2$.

3. Тремя методами (методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта) проинтегрировать уравнение $y'=y^2-\dfrac{2x}{y}$ при начальном условии $y(0)=1$ в промежутке $[0;1]$ с шагом $h=0.2$.

4. Тремя методами (методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера и методом Рунге-Кутта) проинтегрировать уравнение $y'= 2y+e^{2x}$ при начальном условии $y(0)=1$ в промежутке $[0;1]$ с шагом $h=0.2$.

5. Найти методом Эйлера четыре значения функции y, определяемой уравнением $y'=x+y$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0,1$.

6. Найти методом Эйлера три значения функции y, определяемой уравнением $y'=1+x+y^2$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0,1$.

7. Найти методом Эйлера четыре значения функции y, определяемой уравнением $y'=x^2+y^3$, при начальном условии $y(0)=0$, полагая $h=0,1$.

8. Найти методом Эйлера четыре значения функции y, определяемой уравнением $y'=y^2+\dfrac{y}{x}$, при начальном условии $y(2)=4$, полагая $h=0,1$.

6.Численные методы оптимизации. Методы спуска

Рассмотрим некоторые методы оптимизации, а именно *методы спуска.* Идея всех методов спуска состоит в том, чтобы исходя из начального приближения – точки $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}\right)\in D$ - перейти в следующую точку $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\, x_2^{(1)},\ldots,\, x_n^{(1)}\right)\in D$ так, чтобы значение функции уменьшалось (не увеличивалось) $\Phi\left(x^{(1)}\right)\le\Phi\left(x^{(0)}\right)$.

Будем рассматривать два метода.

6.1. Метод координатного спуска

Пусть в области D задано нулевое приближение $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$. Рассмотрим функцию $\Phi\left(x_1,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ при фиксированных значениях $x_2^{(0)},\, x_3^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$ как функцию одной переменной. Найдём $\min\limits_{x_1\in D}\Phi\left(x_1,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$. Значение x_1, на котором этот минимум достигается, обозначим $x_1^{(1)}$. Тогда $\Phi\left(x_1^{(1)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)\le\Phi\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$. Далее при фиксированных значениях $x_1^{(1)},\, x_3^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$ рассматривается функция $\Phi\left(x_1^{(1)},\, x_2,\, x_3^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}\right)$ как функция одной переменной x_2 и находится $\min\limits_{x_2\in D}\Phi\left(x_1^{(1)},\, x_2,\, x_3^{(0)},\ldots,\, x_n^{(0)}\right)$. Значение, на котором этот минимум достигается, обозначается $x_2^{(1)}$ и т.д. После n шагов получим $\Phi\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)\le\Phi\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$, перейдя из точки

$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ в точку $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$. Если при этом окажется, что $\Phi\left(x^{(1)}\right) = \Phi\left(x^{(0)}\right)$, то точка $x^{(0)}$ - точка локального экстремума и процесс закончен. Если $\Phi\left(x^{(1)}\right) < \Phi\left(x^{(0)}\right)$, то процесс повторяется с начальной точкой $x^{(1)}$. Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится какое – либо условие окончания цикла, например,

$$\left|\Phi\left(x^{(n+1)}\right) - \Phi\left(x^{(n)}\right)\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

где ε - заданная точность.

Заметим, что центральным звеном рассматриваемого алгоритма является поиск минимума функции одной переменной.

6.2. Метод градиентного спуска

Напомним, что градиент функции (вектор – функции) определяется формулой $grad\Phi(x) = \nabla\Phi(x) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(x)\right)$. Вектор $\nabla\Phi(x)$ ортогонален линиям уровня $\Phi(x) = C = const$, его направление совпадает с направлением максимального роста функции $\Phi(x)$. В точке минимума функции $\nabla\Phi(x) = 0$.

Определим итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h \cdot \nabla\Phi\left(x^{(k)}\right), \tag{2}$$

где $h > 0$ - шаг спуска, $x^{(0)}$ - заданное начальное приближение к точке минимума. Заметим, что если $\nabla\Phi\left(x^{(k)}\right) \neq 0$, то для достаточно малых значений h выполняется цепочка неравенств $\ldots < \Phi\left(x^{(k)}\right) < \ldots < \Phi\left(x^{(0)}\right)$. Формула (2) представляет собой *метод градиентного спуска* с постоянным шагом h спуска. Итерационный процесс продолжается до выполнения какого –

либо условия окончания алгоритма, например (1), либо $\left\| \nabla \Phi\left(x^{(k+1)}\right) \right\| < \varepsilon$, где ε - заданная точность, $\|\cdot\|$ - длина вектора.

Пример. $\Phi(x) = \dfrac{x_1^{\,2}}{4} + x_2^{\,2}$. Ищем $\min \Phi(x)$ методом градиентного спуска.

$\nabla \Phi(x) = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = \left(\dfrac{2x_1}{4}, 2x_2 \right) = \left(\dfrac{x_1}{2}, 2x_2 \right)$. По формуле (2) имеем $x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - h \cdot \dfrac{x_1^{(k)}}{2}$, $x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - h \cdot 2x_2^{(k)}$. Пусть нулевое приближение $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \right) = (1; 1)$; $h = 0.1$; $\Phi\left(x^{(0)}\right) = 1.25$.

Первые три шага спуска дают следующие приближения:

1) $x_1^{(1)} = 0.95,\ \ x_2^{(1)} = 0.80;$

2) $x_1^{(2)} = 0.9025,\ x_2^{(2)} = 0.64;$

3) $x_1^{(3)} = 0.8544,\ x_2^{(3)} = 0.5120,\ \Phi\left(x^{(3)}\right) = 0.446.$

И т.д.

Задачи для самостоятельного решения

Найти минимум функции методом координатного спуска.

1. $z=x^2+(y-1)^2$
2. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$
3. $z=x^3+y^3-3xy$
4. $z=xy+50/x+20/y$ $(x>0,\ y>0)$
5. $u=x+0{,}25y^2/x+z^2/y+2/z$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$

Найти минимум функции методом градиентного спуска.

6. $z=x^2+(y-1)^2$
7. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$
8. $z=x^3+y^3-3xy$
9. $z=xy+50/x+20/y$ $(x>0,\ y>0)$

Множества и бинарные отношения.

1. Прямое произведение множеств.

Пусть имеются два множества A и B (необязательно различных).

Определение. ***Прямым произведением (декартовым произведением) множеств*** A и B называется множество $A\times B$, состоящее из всех упорядоченных пар элементов (a,b), в которых первый элемент a принадлежит A, а второй b принадлежит B.

Пример. A={1,2,3}, B={k,m}.

$A\times$ B={(1,k), (1,m),(2,k), (2.m), (3,k),(3,m)}.

Порядок следования пар может быть любым, но расположение элементов в каждой паре определяется порядком следования перемножаемых множеств. Поэтому $A\times B\neq B\times A$, если $A\neq B$.

Операция прямого произведения обобщается на любое количество множеств. Запись: $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$.

Пример. $R\times R=R^2$. Это множество точек плоскости, точнее пар вида (a,b), где a,b из R и являются координатами точек плоскости.

Заметим, что координатное представление точек плоскости, предложенное французским математиком и философом Декартом, исторически первый пример прямого произведения, потому и названо декартовым.

2.Бинарные отношения. Способы задания бинарных отношений.

Бинарным отношением R называется всякое подмножество прямого произведения $A\times$ B. Обозначается так: $R\subseteq A\times B$, $(a, b)\subseteq R$ или aRb.

Пример. A={6,7,8,9},B={2,3}.Тогда прямое произведение будет $A\times$ B={(6,2),(6,3),(7,2),(7,3),(8,2),(8,3),(9,2),(9,3)}.

Бинарные отношения на этом множестве $A\times B$ можно задавать по-разному:

1) Можно задать бинарное отношение перечислением элементов этого множества, например, R_1 - это множество, состоящее из 4-х упорядоченных пар: $R_1 = \{(6,2),(7,2),(8,2),(9,2)\}$.
2) Можно задать бинарное отношение с помощью правила, например, R_2 состоит из тех пар (a,b), в которых a делится на b $R_2=\{(6,2), (6,3), (8,2), (9,3)\}$.
Во многих случаях удобно использовать графическое изображение бинарного отношения. Оно можно осуществлять двумя способами: с помощью точек плоскости; с помощью стрелок.

В дальнейшем будем рассматривать важный частный случай, а именно: будем рассматривать бинарные отношения на прямом произведении с равными сомножителями $M \times M$.
Способы задания бинарных отношений – любой способ задания множеств. Обычно бинарные отношения задаются либо списком, либо матрицей.
Матрица составляется так: Если $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, то бинарному отношению $R \subseteq M \times M$ соответствует матрица C размера $n \times n$ и элемент матрицы c_{ij} равен 1, если $a_i R a_j$ и равен 0 в противном случае.
Пример. M={1,2,3,4}; R – «быть меньше».
Это отношение можно представить (задать) списком:
R ={(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)} или матрицей

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

3. Свойства бинарных отношений.

Бинарное отношение – понятие весьма широкое. Обычно интересуются бинарными отношениями, подчиненными некоторым дополнительным условиям. Рассмотрим некоторые из них.
1. ***Рефлексивность.*** Бинарное отношение R называется ***рефлексивным,*** если каждый элемент множества связан этим

отношением сам с собой aRa (или, по-другому, для любого элемента a из M пара (a,a) принадлежит R).

Примеры: «жить в одном городе», «учиться в одной группе», равенство и равновеликость обладают свойством рефлексивности, а перпендикулярность – нет.

2. ***Симметричность.*** Бинарное отношение R называется ***симметричным***, если из того, что элемент a связан с элементом b этим отношением, вытекает, что и элемент b связан с элементом a этим же отношением, т.е. aRb→ bRa (или, по-другому, для любых элементов a и b из M из того, что пара (a,b)$\subseteq$ R, вытекает, что пара (a,b)$\subseteq$ R).

Примеры (два первых) те же, равенство, равновеликость и перпендикулярность обладают свойством симметричности.

3. ***Антисимметричность.*** Бинарное отношение R называется ***антисимметричным***, если из того, что элемент a связан с элементом b этим отношением и элемент b связан с элементом a этим отношением, вытекает, что и элемент a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b не выполняется одновременно aRb и bRa.

Например, отношение «быть начальником» - антисимметрично.

4.***Транзитивность.*** Бинарное отношение называется ***транзитивным***, если из того, что элемент a связан с элементом b отношением R, a элемент b, в свою очередь, связан с элементом c этим же отношением, вытекает, что и элемент a связан с элементом c отношением R : aRb, bRc → aRc

(для любых трех элементов a,b,c из M из того, что пары (a,b) и (b,c) принадлежат R ,следует, что пара (a,c) $\subseteq$ R) .

Примеры те же.

5.***Толерантность.*** Бинарное отношение называется ***толерантным,*** если оно рефлексивно и симметрично.

Пример (муха – слон). Введем на множестве существительных русского языка бинарное отношение R по следующему правилу: будем говорить, что существительные a и b связаны отношением R, если они различаются не более чем одной буквой и при этом число букв в каждом из них одинаково. Нетрудно проверить, что введенное отношение толерантно.

6. ***Эквивалентность.*** Б.О. называется ***отношением эквивалентности*** или просто ***эквивалентностью,*** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначение $\sim$.

Отношение эквивалентности является обобщением понятия равенства. Отношение эквивалентности обладает очень важным и интересным свойством: оно разбивает заданное множество на непустые непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности). Каждое из этих множеств состоит из эквивалентных между собой элементов и только из них.

Пример.

Рассмотрим множество студентов на курсе. Будем говорить, что студент a связан со студентом b отношением R, если оба студента из одной группы. Это отношение есть отношение эквивалентности, разбивающее заданное множество студентов на классы – студенческие группы. Заметим, что множество студенческих групп – это не то же самое, что исходное множество студентов на курсе. Например, число студентов на курсе – 75, а число групп – 3.

Замечание. Задание на исследуемом множестве объектов отношения эквивалентности позволяет эти объекты определенным образом классифицировать, т.е. относить каждый конкретный объект к той или иной группе (классу). У этой процедуры есть вполне серьезное название – *операция факторизации,* результат операции называется ***фактор-множество.***

4. Операции над бинарными отношениями

Т.к. отношения на M задаются подмножествами, $R \subseteq M_1 \times M_2$ (или $R \subseteq M^2$, если $M_1=M_2=M$), для них можно определить те же операции, что и над множествами: ***объединение, пересечение, разность и дополнение.***

Кроме того, определяют и другие операции над отношениями, а именно: ***обратное отношение, составное отношение, транзитивное замыкание и рефлексивное замыкание.*** Определим каждую операцию.

1.Объединение $R_1 \cup R_2$: $R_1 \cup R_2=\{(a,b): (a,b) \in R_1$ или $(a,b) \in R_2\}$.

2.Пересечение $R_1 \cap R_2$: $R_1 \cap R_2=\{(a,b): (a,b) \in R_1$ и $(a,b) \in R_2\}$.

3.Разность $R_1 \backslash R_2$: $R_1 \backslash R_2=\{(a,b): (a,b)\in R_1$ и $(a,b)\notin R_2\}$.

4.Дополнение $\overline{R}$: $\overline{R}=U\backslash R$, где $U= M_1\times M_2$ (или $U= M^2$).

5.Обратное отношение R^{-1}: a R^{-1}b тогда и только тогда, когда bRa:

$R^{-1}=\{(a,b): (b,a)\in R\}$.

Например, если R – «быть моложе», то R^{-1} – «быть старше».

6. Составное отношение (композиция)$R_1\circ R_2$.

Пусть заданы множества M_1,M_2, M_3 и отношения $R_1\subseteq M_1\times M_2$ и , $R_2\subseteq M_2\times M_3$. Составное отношение действует из M_1 в M_2 посредством отношения R_1, а затем из M_2 в M_3 посредством R_2, т.е. пара $(a,b)\in R_1\circ R_2$, если существует такое $c\in M_2$, что $(a,c)\in R_1$ и $(c,b)\in R_2$:

$R_1\circ R_2=\{(a,b): \exists\ c\in M_2: (a,c)\in R_1$ и $(c,b)\in R_2\}$.

В частности, если отношение R определено на множестве M, т.е. $R\subseteq M^2$, то составное отношение определяется так:

$R\circ R=\{(a,b): \exists\ c\in M: (a,c)\in R$ и $(c,b)\in R\}$.

Например, если R – «быть сыном», то $R\circ R$ – «быть внуком».

Обозначим $R\circ R=R^{(2)}$. Используя это обозначение, можно определить $R^{(n)}$ для любого n из N, n>1 следующим образом:

$R^{(n)}=\{(a,b):\exists c\in M:(a,c)\in R$ и $(c,b)\in R^{(n-1)}\}$.

7. Транзитивное замыкание R^0: оно состоит из таких пар (a,b) (a и b из M), для которых в M существует цепочка из (k+2) элементов M, $k\geq 0$: $a,c_1,c_2,\ldots,c_k,b$, между соседними элементами которой выполняется отношение R:

$R^0=\{(a,b): (a,c_1)\in R, (c_1,c_2)\in R,\ldots, (c_k,b)\in R\}$.

Эту операцию R^0 можно определить и как бесконечное объединение:

$R^0=R\cup R^{(2)}\cup R^{(3)}\cup\ldots\cup R^{(n)}\cup\ldots$

Например, для отношения R – «быть сыном» составное отношение (композиция) $R\circ R=R^{(2)}$ – «быть внуком», $R\circ R\circ R=R^{(3)}$ – «быть правнуком» и т.д. Тогда объединение всех этих отношений есть транзитивное замыкание R^0 – «быть прямым потомком»

Если отношение R транзитивно, то транзитивное замыкание R^0 совпадает с R, т.е. $R^0= R$.

Рефлексивное замыкание R^*. По определению $R^*=R^0\cup E$, где E – тождественное отношение, т.е. E==$\{(a,a): a\in M\}$.

Если R транзитивно и рефлексивно, то $R^* = R$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Верно ли, что любое отношение либо симметрично, либо антисимметрично?
2. Является ли отношением эквивалентности «Иметь одинаковые остатки при деление на 7»?
3. На какие классы разбивается множество натуральных чисел отношением «Иметь одинаковые остатки при деление на 7»?
4. На какие классы разбивается множество русских слов?
5. На какие классы разбивается множество слов предложения?
6. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности:
   1) «Равноудаленность от Москвы» (на множестве городов);
   2) «Принадлежность одному роду» (на множестве живых существ);
   3) «Быть двоюродным братом или сестрой» (на множестве людей);
   4) «Иметь общую границу» (на множеству государств)?
7. Какие из следующих отношений являются рефлексивными, какие – симметричными, какие – транзитивными:
   1) «Быть сестрой»;
   2) «Быть начальником»;
   3) «Быть другом»;
   4) «Быть отцом»;
   5) «Иметь одинаковый цвет глаз» (оттенки цветов не учитываются)?
8. Является ли отношением эквивалентности равносильность уравнений?
9. На множестве X={2, 4,6,8} задано отношение «Быть делителем». Какими свойствами оно обладает?
10. Можно ли разбить множество треугольников на такие классы: разносторонние, равнобедренные и равносторонние?

Соответствия

1. Соответствия. Основные понятия

Определение. Соответствием между множествами А и В называется подмножество G прямого произведения $A \times B$, т.е. $G \subseteq A \times B$.

Если $(a,b) \in G$, то говорят, что «b соответствует а при соответствии G».

Множество А в этом случае называется областью отправления, В – областью прибытия или А – ***область определения***, обозначается: $пр_1 G=\{a: (a,b) \in G\}$; В – ***область значений***, обозначается: $пр_2 G=\{b: (a,b) \in G\}$.

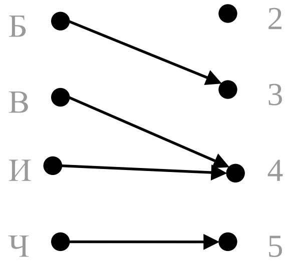
1. Если множества А и В конечны, то $A \times B$ можно изобразить в виде таблицы, столбцы которой «нумеруются» элементами А, строки – элементами В. Например, соответствие «студент – оценка»:

	Большаков(Б)	Васильев(В)	Иванов(И)	Чубова(Ч)
«2»				
«3»	+			
«4»		+	+	
«5»				+

Соответствие G между элементами А и В изображаются совокупностью заштрихованных клеток таблицы или каким-нибудь значком (например, «+»).

2. Для наглядного изображения соответствий применяются также графы: элементы каждого из множеств А и В изображаются точками на плоскости и если «b соответствует а при соответствии G», то от а к b проводят стрелку.

Например, соответствие «студент – оценка»:



3. Многие соответствия обозначаются специальными знаками, поставленными между a и b: например, a||b, $a \perp b$, a=b, a>b и т.п. В общем случае пишут aGb или aRb.

Дадим определения ***основных понятий.***

Образом элемента a в множество B при соответствии G называется множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$.

Прообразом элемента b в множество A при соответствии G называется множество всех $a \in A$, которым соответствует $b \in B$.

Образом множества $C \subseteq$ $пр_1G$ называется объединение образов всех элементов $a \in C$.

Прообразом множества $D \subseteq$ $пр_2G$ называется объединение прообразов всех элементов $b \in D$.

2. Свойства соответствий

Соответствия бывают:

Всюду (полностью) определенные соответствия – если $пр_1G=A$.

Частично определенные соответствия – в противном случае.

Сюръективные соответствия – если $пр_2G=B$.

Функциональные (однозначные) соответствия – если образом любого элемента $a \in$ $пр_1G$ является единственный элемент $b \in$ $пр_2G$.

Взаимнооднозначное соответствие – если оно:
- всюду определено;
- сюръективно;
- функционально;
- прообразом любого элемента $b \in$ $пр_2G$ является единственный элемент $a \in$ $пр_1G$.

Пример 1. Пусть G – множество всех пар действительных чисел (x,y), удовлетворяющих соотношению $(x-3)^2+(y-2)^2 \leq 1$. Графически такое соответствие G представляет собой круг радиуса 1 с центром в точке (3,2). Таким образом, круг G задает соответствие между R и R (осью абсцисс и осью ординат). Определить, что представляют из себя:

а) образы и прообразы чисел 2,3,4;

б) образы и прообразы отрезков [2,3], [2,4].

Каковы свойства соответствия G?

Решение.
а) Образом числа $2 \in$ пр$_1$G (на оси абсцисс) при соответствии G является единственное число $2 \in$ пр$_2$G (на оси ординат). Образ числа 3 при соответствии G есть множество всех действительных чисел отрезка [1,3], а образ числа 4 – число3.
Прообразом числа $2 \in$ пр$_2$G (на оси ординат) при соответствии G будет множество всех действительных чисел отрезка [2,4] $\subseteq$ пр$_1$G (на оси абсцисс), прообразом числа 3 при соответствии G – число 3, а прообраза числа 4 при соответствии G не существует.
б) Образом множества чисел отрезка [2,3] $\subseteq$ пр$_1$G является объединение образов всех чисел отрезка, т.е. отрезок [1,3] $\subseteq$ пр$_2$G. Аналогично, образом отрезка [2,4] $\subseteq$ пр$_1$G будет отрезок [1,3] $\subseteq$ пр$_2$G.
Прообраз отрезка [2,3] $\subseteq$ пр$_2$G – отрезок [2,4] $\subseteq$ пр$_1$G, а прообраз отрезка [2,4] $\subseteq$ пр$_2$G – также отрезок [2,4] $\subseteq$ пр$_1$G.
Свойства соответствия G будут зависеть от области определения соответствия.

Если соответствие G установлено на множестве действительных чисел, т.е. G$\subseteq$ R$\times$R, то оно является:
- частично определенным, т.к. пр$_1$G$\neq$R (пр$_1$G$\subset$ R);
- не сюръективным, т.к. пр$_2$G$\neq$R (пр$_2$G$\subset$ R);
- не функциональным, т.к. для любого числа отрезка [2,4] =пр$_1$G (кроме чисел 2,4) отсутствует единственность образа;
- не взаимно однозначным, т.к. отсутствуют необходимые условия: G не является всюду определенным на R, не сюръективно, не функционально, а также для любого числа отрезка [1,3] =пр$_2$G (кроме чисел 1,3) отсутствует единственность прообраза.

2) Если определить соответствие G$\subseteq$[2,4] $\times$[1,3], то очевидно, оно будет всюду определенным и сюръективным, однако останется не функциональным и не взаимно однозначным.

Пример 2. Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами английских и русских слов. Каковы свойства этого соответствия?
Данное соответствие ***не является***:

- всюду определенным (всегда можно найти английское слово, не содержащееся в словаре);
- сюръективным (по отношению русских слов, имеющихся в словаре);
- функциональным (одному английскому слову ставится в соответствие, как правило, несколько русских);
- взаимно однозначным (в силу предыдущего).

Определение. Пусть дано соответствие $G \subseteq A \times B$. Тогда соответствие $H \subseteq B \times A$ называется ***обратным*** к G (обозначается G^{-1}), если H таково, что $(b,a) \in H$ т. и т. т. , к. $(a,b) \in G$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте граф соответствия «Больше» для множеств $X=\{2,4,6\}$и $Y=\{1,3,5\}$. Найдите образ числа 4 и полный прообраз числа 5.
2. Для множеств $X=\{25,16,7,6\}$и $Y=\{5,2,3,9,1\}$задайте график соответствия «Делится на». Постройте граф этого соответствия. Найдите образ числа 6 и полный прообраз числа2. Какой элемент имеет пустой прообраз? Для какого элемента полный прообраз совпадает со всем множеством X? Найдите область определения и множество значений этого соответствия.
3. Пусть $X=\{$мама, папа, рама, яма$\}$и $Y=\{$а, м, р, п, ф, я$\}$. Задайте график соответствия «В слово х входит буква у» и постройте граф этого соответствия. Найдите образ слова «мама» и полный прообраз буквы «м». Найдите букву с пустым прообразом.
4. Пусть X – множество учащихся в классе, Y – множество парт в том же классе. Каждому учащемуся сопоставляется парта, за которой он сидит. Что такое полный прообраз данной парты? Что такое образ множества всех учащихся?
5. Что такое полный прообраз данной окружности при соответствии «Вписан» между треугольниками и окружностями? Из скольких элементов состоит образ данного треугольника?
6. Пусть X – множество всех натуральных чисел, кроме 1. Обозначим через R соответствие «Делится». Является ли это

соответствие: 1) отображением X в X; 2) сюръективно ли оно; 3) инъективно ли оно; 4) функционально ли оно; 5) всюду ли оно определено? Ответьте на те же вопросы, если X – множество простых чисел.

7. Множество X состоит из всех квадратов на плоскости, а множество Y – из всех окружностей на той же плоскости. Каждому квадрату x сопоставляется вписанная в него окружность. Является ли это соответствие отображением X в Y. Инъективно ли оно? Что является полным прообразом данной окружности? Станет ли это соответствие инъективным, если заменить X на множество Z квадратов, стороны которых параллельны осям координат?

Элементы математической логики

1. Алгебра высказываний

1.1 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.

Определение. *Элементарной конъюнкцией* называют конъюнкцию переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Например, $A,\ \bar{A},\ A \wedge \bar{B} \wedge C \wedge \bar{D}$ являются элементарными конъюнкциями.

Определение. Дизъюнкция одной или нескольких элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ).

Например, $\bar{A},\ A \vee \bar{A} \wedge B$ являются ДНФ.

Определение. ДНФ называется *совершенной* (СДНФ), если каждая элементарная конъюнкция в ней содержит все переменные с отрицаниями или без.

В приведённом выше примере $\bar{A}$ является СДНФ, а $A \vee \bar{A} \wedge B$ не является СДНФ, но $A \wedge B \vee A \wedge \bar{B} \vee \bar{A} \wedge B$ эквивалентная ей СДНФ.

Теорема. Любую логическую формулу, не эквивалентную константе 0, можно представить в виде СДНФ, т.е. для каждой формулы найдётся эквивалентная ей СДНФ с таким же набором букв.

Приведём алгоритм построения СДНФ. Сначала строится таблица истинности для формулы. Затем по тем строкам, в которых формула принимает значение **1,** строят элементарные конъюнкции следующим образом. Если буква в данной интерпретации имеет нулевое значение, то оно включается в элементарную конъюнкцию с отрицанием, а если она равна единице, то – без отрицания.

Например, для формулы $A \vee B \to (\neg C \leftrightarrow B)$ таблица истинности имеет вид

A	B	C	$A \vee B$	$\to$	$(\neg C$	$\leftrightarrow B)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

По строкам, в которых формула принимает значение 1, строим элементарные конъюнкции по указанному правилу, получаем:

A	B	C	$A \vee B \;\to\; (\neg C \leftrightarrow B)$	
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1	$\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\bar{B}C$
1	1	0	1	$AB\bar{C}$
1	1	1	0	

И, наконец, полученные элементарные конъюнкции соединяются знаками дизъюнкции $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C}$. В результате получается СДНФ данной формулы.

A	B	C	$A \vee B \;\to\; (\neg C \leftrightarrow B)$	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$A \vee \bar{B} \vee \bar{C}$
1	0	0	0	$\bar{A} \vee B \vee C$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$

СКНФ (совершенные конъюнктивные нормальные формы) определяются аналогичным образам (меняя местами конъюнкцию и дизъюнкцию), а получаются по строкам с нулевыми значениями формулы. Для нашего примера и $\left(A\vee\bar{B}\vee\bar{C}\right)\wedge\left(\bar{A}\vee B\vee C\right)\vee\left(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}\right)$ – СКНФ формулы $A\vee B\rightarrow\left(\neg C\leftrightarrow B\right)$.

1.2. Равносильные формулы алгебры логики

Определение. Две формулы алгебры логики А и В называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них высказываний.

Обозначается это так: А≡В.

Важнейшие равносильности математической логики можно разбить на три группы:

I. Основные равносильности.

1. x&x≡x (закон идемпотентности)
2. $x\vee x\equiv x$ (закон идемпотентности)
3. x&1≡x
4. $x\vee 1\equiv 1$
5. x&0≡0
6. $x\vee 0\equiv x$
7. $x\,\&\,\bar{x}\equiv 0$ (закон противоречия)
8. $x\vee\bar{x}\equiv 1$ (закон исключенного третьего)
9. $\bar{\bar{x}}\equiv x$ (закон снятия двойного отрицания)
10. $x\,\&\,(y\vee x)\equiv x$ (закон поглощения)
11. $x\vee(y\,\&\,x)\equiv x$ (закон поглощения)

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

1. $x\leftrightarrow y\equiv(x\rightarrow y)\,\&\,(y\rightarrow x)$
2. $x\rightarrow y\equiv\bar{x}\vee y$
3. $\overline{x\,\&\,y}\equiv\bar{x}\vee\bar{y}$ (закон де Моргана)
4. $\overline{x\vee y}\equiv\bar{x}\,\&\,\bar{y}$ (закон де Моргана)
5. $x\,\&\,y\equiv\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}$

6. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

1. $x\&y \equiv y\&x$
2. $x \vee y \equiv y \vee x$
3. $x\&(y\&z) \equiv (x\&y)\&z$
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$
5. $x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$
6. $x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$

Используя равносильности групп I,II,III, можно часть формулы алгебры логики или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования называются равносильными. Равносильные преобразования формул применяются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Примеры.

1. Упростить формулу $A \equiv (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \& y$.

Решение. Подвергнем формулу А равносильным преобразованиям: $A \equiv (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \& y \equiv$

$(\overline{\overline{x \vee y}} \vee \bar{x} \vee y) \& y \equiv (x \vee y \vee \bar{x} \vee y) \& y \equiv$

$((x \vee \bar{x}) \vee (y \vee y)) \& y \equiv (1 \vee y) \& y \equiv 1 \& y \equiv y$

2. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

Решение. Запишем условие задачи в виде формулы алгебры логики и после равносильных преобразований получим ответ на вопрос задачи. Обозначим латинскими буквами A, B, C простые высказывания, входящие в сложное высказывание:

А – математическую логику изучал первый студент;

В - математическую логику изучал второй студент;

С - математическую логику изучал третий студент.

Тогда условие задачи записывается в виде: $(A \to C)\,\&\,(\overline{B \to C})$. Подвергаем формулу равносильным преобразованиям: $(A \to C)\,\&\,(\overline{B \to C}) \equiv$

$$(\overline{A} \vee C)\,\&\,(\overline{\overline{B} \vee C}) \equiv (\overline{A} \vee C)\,\&\,(\overline{\overline{B}}\,\&\,\overline{C}) \equiv$$

$$(\overline{A} \vee C)\,\&\,(B\,\&\,\overline{C}) \equiv (\overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}) \vee (\overline{A}\,\&\,C\,\&\,\overline{C}) \equiv$$

$$(\overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}) \vee 0 \equiv \overline{A}\,\&\,B\,\&\,\overline{C}$$

Конъюнкция истинна, когда истинны все ее составляющие. По условию полученный ответ верный, т.е. первый студент не изучал логику, второй – изучал, третий – не изучал.

Задачи для самостоятельного решения

Записать условие задачи в виде формулы алгебры логики и после равносильных преобразований получить ответ на вопрос задачи.

1.В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1) Андреев: « Я убирал 9-ый класс, а Савельев – 7-ой».
2) Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев – 8-ой».
3) Савельев: «Я убирал 8-ый класс, а Костин – 10-ый».
Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а в другом – ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

2. Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.
1) Клод утверждал, что Жак лжет.
2) Жак обвинял во лжи Дика.
3) Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

3. Четыре студентки A, B, C, D посещают институт по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:
1) Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
2) C и D не смогут пойти на занятия во вторник в связи в большой загруженностью в понедельник.
3) Если C выйдет в среду или D – в четверг, то B согласится побывать на занятиях в пятницу.
4) Если A не пойдет в институт в четверг, то B пойдет в среду.
5) Если A или D будут в институте в среду, то C сможет пойти в пятницу.
6) Если D не пойдет в пятницу, то A придется сходить в институт во вторник, а C – в четверг.

4. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

5. Пять школьников A,B,C,D и E из пяти различных городов Воронежской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:
A: «Я приехал из Россоши, а D – из Лисок».
B: «Я приехал из Россоши, а C – из Боброва».
C: «Я приехал из Россоши, а D – из Калача».
D: «Я приехал из Лисок, а E – из Острогожска».
E: «Я приехал из Острогожска, а A – из Калача»
Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое – ложно.

6. Семья, состоящая из отца О, матери М и трех дочерей А, В, С купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:
1) Если отец смотрит передачу, то и мать смотрит передачу.
2) Дочери В и С, обе или одна из них, смотрят передачу.
3) Из двух членов семьи – мать и дочь А – смотрят передачу одна и только одна.
4) Дочери А и В или обе смотрят, или обе не смотрят.
5) Если дочь С смотрит передачу, то отец и дочь В тоже смотрят.
Кто из членов семьи в этот вечер смотрит передачу?

7. Четыре друга – A, B, C, D решили провести каникулы в четырех различных городах – Москве, Ярославле, Сочи и Адлере. Определите, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:
1) Если А не едет в Москву, то С не едет в Ярославль.
2) Если В не едет ни в Москву, ни в Адлер, то А едет в Москву.
3) Если С не едет в Адлер, то В едет в Сочи.
4) Если D не едет в Москву, то В не едет в Москву.
5) Если D не едет в Ярославль, то В не едет в Москву.

8. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

9. Если Марианна – не дочь дона Педро, то либо Хосе Игнасиас – отец Марианны, либо Луис Альберто – не ее брат. Если Луис Альберто – брат Марианны, то Марианна – дочь дона Педро и Хосе Игнасиас лжет. Если Хосе Игнасиас лжет, то либо Луис Альберто – не брат Марианны, либо Хосе Игнасиас – ее отец. Следовательно, Марианна – дочь дона Педро.

10. Для того, чтобы произведение ab было положительно, необходимо и достаточно, чтобы a и b были оба положительны или оба отрицательны. Условие положительности b достаточно для того, чтобы a не было положительно. Следовательно, отрицательность b есть необходимое условие положительности произведения ab, а если a не является отрицательным, то неверно, что ab положительно.

11. В некотором регионе построят либо гидроэлектростанцию, либо тепловую электростанцию, либо атомную электростанцию. Для построения гидроэлектростанции необходимо соорудить водохранилище. Сооружение водохранилища приведёт к экологической катастрофе. Если построить атомную электростанцию, то экологической катастрофы тоже не миновать. Следовательно, чтобы миновать экологическую катастрофу в регионе необходимо строить тепловую электростанцию.

12. Хотя бы одно из неравенств $x > a$ или $y < b$ выполнено тогда и только тогда, когда $z < c$ или одновременно $u > d$ и $v < e$. Если не выполняется неравенство $u > d$, то не выполняется и неравенство $z < c$. Следовательно, для справедливости неравенства $u > d$ достаточно, чтобы было $y < b$, а для верности неравенства $x > a$ необходимо, чтобы было $u > d$.

13. Если предприниматель откроет свой офис в центре города, то у него будет много клиентов, или его разорят конкуренты. Конкуренты разорят предпринимателя, или неверно, что клиентов у него будет много. Если предприниматель не откроет свой офис в центре города, то конкуренты не разорят его. Значит, для того, чтобы конкуренты не разорили предпринимателя, необходимо и достаточно, чтобы он не открывал своего офиса в центре города.

14. x делится на 8 или сумма цифр числа x равна 13 или x=0. Если равенство x=0 не выполнено, то сумма цифр числа x не равна 13. Если x=0, то x делится на 8. Следовательно, для равенства x=0 необходимо и достаточно делимости x на 8.

15. Руководство компании или создаст для выпуска новой продукции крупное производство, или мелкое предприятие, или продаст патент другой фирме. Если оно создаст крупное производство, то компания разорится из-за недостаточного рынка сбыта. Если создать малое предприятие, то оно не будет прибыльным. Вследствие этого компания тоже разорится. Следовательно, руководство компании продаст патент другой фирме.

16. Если $x+y$ четное число, то x=3 или y=7. Если x=3, то y=7. Для того, чтобы x=7, необходима четность суммы $x+y$. Следовательно, $x+y$ четно тогда и только тогда, когда y=7.

17. Если сумма $n+m$ не делится на 3, то n не делится на 3 или m не больше 2. $n+m$ не делится на 3 или $n \cdot m$ больше 4. Следовательно, чтобы n делилось на 3, а m было больше 2, необходимо, чтобы $n \cdot m$ было больше 4.

18. Для того, чтобы число x удовлетворяло второму или третьему уравнению, достаточно, чтобы оно удовлетворяло первому. Если x удовлетворяет третьему уравнению, то оно удовлетворяет и первому. Чтобы x не удовлетворяло третьему уравнению, необходимо, чтобы оно не удовлетворяло второму. Следовательно, x удовлетворяет третьему уравнению в том и только том случае, когда оно удовлетворяет первому.

19. Если число a удовлетворяет данному уравнению, то ему удовлетворяет и b. Для того, чтобы ему удовлетворяло a или c, достаточно, чтобы этому уравнению удовлетворяло b. Чтобы a не удовлетворяло данному уравнению, необходимо, чтобы ему не удовлетворяло c. Следовательно, a удовлетворяет этому уравнению в том и только том случае, когда ему удовлетворяет b.

20. Положительное число T является периодом функции f в том и только в том случае, когда x принадлежит области определения f только вместе с $x+T$ и выполнено равенство $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$. Число x принадлежит области определения f, но $f\left(x+T\right)\neq f\left(x\right)$. Следовательно, $x+T$ не принадлежит области определения функции или T не является периодом f.

21. Неверно, что для вещественного числа x и для натурального числа n неравенства $xn>10n$ и $x\leq 10$ выполнены одновременно. Неравенство $xn>10n$ выполнено. Следовательно, $x>10$.

22. Неверно, что x большее нуля, число a меньше нуля, а их произведение $ax>0$ одновременно. Для x выполнено неравенство $ax>0$, причём число a меньше нуля. Следовательно, x не больше нуля.

23. Функции f является возрастающей в том и только в том случае, когда для $x_1<x_2$ выполнено неравенство $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$. $x_1<x_2$, но неверно, что $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$. Следовательно, f не является возрастающей.

24. Для того чтобы функция $y\left(x\right)$ удовлетворяла первому и второму уравнениям системы, достаточно, достаточно чтобы оно удовлетворяло третьему. Если $y\left(x\right)$ удовлетворяет второму уравнению, то $y\left(x\right)$ удовлетворяет и третьему уравнению. Чтобы $y\left(x\right)$ не удовлетворяла второму уравнению, необходимо, чтобы $y\left(x\right)$ не удовлетворяла первому уравнению. Следовательно, $y\left(x\right)$ удовлетворяет второму уравнению в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет третьему.

25. Для того, чтобы дробь $\frac{a}{b}$ была меньше нуля, необходимо и достаточно, чтобы a было положительно, а b отрицательно, или a отрицательно, а b положительно. Отрицательность a есть достаточное условие для отрицательности b. Следовательно, для того, чтобы дробь $\frac{a}{b}$ была меньше нуля, необходимо, чтобы b было отрицательно.

26. Найти совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы для следующих булевых функций:

1. $(A \to C) \wedge (A \vee B \vee C) \to (B \to C)$.
2. $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (C \to A \wedge \overline{B})$.
3. $(\overline{A} \vee C \to B) \wedge (B \to C) \wedge (B \to A)$.
4. $A \wedge \overline{B} \leftrightarrow C \to \overline{A}$.
5. $(\overline{A} \to B \vee C) \wedge (C \to B) \to (A \to B)$.
6. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$.
7. $A \vee (\overline{B} \leftrightarrow C) \to \overline{A}$.
8. $(A \to B \vee C) \to (\overline{B} \to A)$.
9. $(A \to B \wedge C) \wedge (B \vee (\overline{C} \to A))$.
10. $(A \wedge B \to C) \to (\overline{C} \to A)$.
11. $(A \wedge \overline{C} \vee B) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee \overline{B})$.
12. $(A \to C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge B \wedge \overline{C}$.
13. $\neg(A \to B) \wedge A \wedge \neg(B \wedge C)$.
14. $\neg(\overline{A} \to B \vee C) \wedge (C \to B)$.

15. $(A \to C) \vee \neg(B \to C) \vee \neg(B \to A)$.

16. $(\bar{B} \wedge \bar{C} \to A) \vee \neg(B \to C)$.

17. $(\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \vee C) \to (A \wedge \bar{B} \leftrightarrow \bar{C})$.

18. $\neg\left[(A \to C) \wedge (A \vee B \vee C) \to (B \to C)\right]$.

19. $\neg\left[(\bar{A} \vee C \to B) \wedge (B \to C) \wedge (B \to A)\right]$.

20. $(\bar{A} \to \neg(B \vee C)) \wedge ((C \to B) \to (A \to B))$.

21. $C \to ((C \vee B) \wedge (C \vee \neg A) \to B \wedge A)$.

22. $(\neg A \to C \vee \neg B) \to (C \to (B \to A))$.

23. $(C \to B) \wedge (\neg A \to \neg(B \wedge C))$.

24. $(A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \to A)$.

25. $(C \vee \neg B \vee A) \to (\neg C \vee (B \to A))$.

26. $(C \wedge B \to A) \wedge (\neg B \to C)$.

27. $(\neg B \wedge A \to C) \wedge (B \vee \neg A)$.

28. $(C \vee (B \to A)) \to (C \to (\neg B \vee A))$.

29. $(C \to (\neg C \vee B) \wedge A) \vee \neg C$.

30. $\neg((B \to C) \vee A) \vee (C \to (B \to A))$.

2. Алгебра предикатов.

2.1. Определение. Примеры. Способы задания предикатов.

Предикат – повествовательное предложение, содержащее предметные переменные, определенные на соответствующих множествах; при замене переменных конкретными значениями этих множеств предложение обращается в высказывание, т.е. принимает значения 1 или 0.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. «Река x впадает в Черное море» - это неопределенное высказывание. В зависимости от значений переменной x данное предложение истинно или ложно, т.е. задается некоторое отображение множества рек на двухэлементное множество {1,0}. Обозначим эту конструкцию P(x). Тогда P(Волга)=0; P(Днепр)=!; P(Обь)=0.

Пример 2. Рассмотрим фразу « x старше y», заданную на множестве людей. Обозначим это отношение буквой R, тогда R (Борис, Юля)=1, т.е. Борис старше Юли; R (Борис, Сергей)=0, т.е. Борис не старше Юли.

Таким образом, множество людей отображается на множество {1,0}.

Определение. Функция, все значения которой принадлежат множеству {0,1}, называется ***предикатом.***

Предикаты задаются по-разному:

- с помощью высказывательной формы (пример 1);
- с помощью формулы (пример 2);
- с помощью таблицы.

Например, пусть на множестве первых 15-ти натуральных чисел задан предикат «быть простым числом». Построим таблицу, в верхней строке которой первые 15 натуральных чисел, в нижней – элементы множества {0,1} в соответствии со смыслом заданного предиката.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P(x)	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0

Такой способ задания годится только для предикатов, область определения которых - конечное множество.

2.2 Логические связки и формулы. Формализация.

Будем обозначать предикаты так же, как и высказывания, заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$. В случаях, когда требуется подчеркнуть, что предикат содержит некоторые переменные, то будем перечислять эти переменные в скобках справа от предиката $A\left(x_1, x_2, y, z, \ldots\right)$.

Высказывания и предикаты могут соединяться с помощью так называемых логических связок в более сложные логические формулы. Логические связки (логические операции) определяют логическую форму предложения. Опишем основные пять логических операций.

Определение. Образование одного предиката из другого с помощью частицы “не”, или эквивалентного по смыслу языкового оборота называют логической операцией *отрицание* и обозначают либо чертой над предикатом $\overline{A}$ (читают - “не A”), либо знаком $\neg$, стоящим перед предикатом, т.е. $\neg A$.

Определение. Соединение двух предикатов в сложное предложение, совпадающее по смыслу с соединением с помощью союза “и”, называют логической операцией *конъюнкция,* которую обозначают знаком &, или $\wedge$, ($A \& B$, $A \wedge B$, читают - “A и B”), или точкой, как знак арифметического умножения, иногда опуская её $\left(A \cdot B,\ AB \right)$.

Определение. Соединение двух предикатов в сложное предложение, совпадающее по смыслу с соединением с помощью союза “или”, называют логической операцией *дизъюнкция,* которую обозначают знаком $\vee$, ($A \vee B$, читают - “A или B”).

Определение. Соединение двух предикатов в сложное предложение, совпадающее по смыслу с соединением с помощью словосочетания “если…, то…”, называют логической операцией *импликация*, которую обозначают знаком $\rightarrow$, ($A \rightarrow B$, читают - “если A, то B”).

Определение. Соединение двух предикатов в сложное предложение, совпадающее по смыслу с соединением с помощью словосочетания “…тогда и только тогда, когда…”, называют логической операцией *двойная импликация*, которую обозначают знаком $\leftrightarrow$, ($A \leftrightarrow B$, читают - “A тогда и только тогда, когда B”).

Определение. Предикат, не содержащий ни одной логической операции, называется *простым.*

Для экономии скобок в записях логических формул принят следующий приоритет введенных логических операций: 1) $\neg$ - отрицание; 2) $\wedge$ - конъюнкция; 3) $\vee$ - дизъюнкция; 4) $\rightarrow$ - импликация и 5) $\leftrightarrow$ - двойная импликация.

Логической формализацией списка предикатов (или одного предиката) назовём процедуру превращения этого списка в список логических формул, таким образом, что простые предикаты в предложениях заменены на буквы, причём разным предикатам соответствуют разные буквы, а разным вхождениям одного и того же предиката в список соответствуют одинаковые буквы, словосочетания же, выражающие логические связки, заменены соответствующими логическими операциями.
Например, рассуждение - "Если мама поедет в командировку, то Коля поедет в лагерь. Мама поедет в командировку или в дом отдыха. Если мама поедет в дом отдыха, то Лена поедет к бабушке. Если Лена не поедет к бабушке, то Коля поедет в лагерь." формализуется следующим образом. Простые предикаты "мама поедет в командировку", "Коля поедет в лагерь", "мама поедет в дом отдыха", "Лена поедет к бабушке" обозначим соответственно буквами A, B, C, D. Заменяя на логические операции на словосочетания "если…, то…", "…или…" и "не…", получим следующий список логических формул, соответствующий данному рассуждению: $A \to B,\ A \vee C,\ C \to D,\ \neg D \to B$.

2.3. Кванторы

В логике предикатов рассматриваются такие операции как кванторы. Если $A(x)$ некоторый предикат, содержащий переменную x, то предложение "Для любого x выполнено $A(x)$" (или эквивалентное ему по смыслу) в логике предикатов имеет следующую формализацию $\forall(x)\left[A(x)\right]$. Знак "$\forall$" обозначает логическую операцию, называемую *квантором общности.* Если $A(x)$ простой предикат, то разрешается опускать квадратные скобки $\forall(x)A(x)$. Аналогично вводится понятие квантора существования. Предложение "Существует x, для которого выполнено $A\left(x\right)$" имеет формализацию $\exists\left(x\right)\left[A\left(x\right)\right]$ или $\exists\left(x\right)A\left(x\right)$.

2.4. Эквивалентные соотношения. Префиксная нормальная форма.

Говорят, что формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Среди нормальных форм логики предикатов выделяются (имеют важное значение) так называемые ***префиксные нормальные формы (пнф).*** В них кванторные операции или полностью отсутствуют, или используются после всех операций логики.

Справедливо утверждение о том, что всякая формула логики предикатов путем равносильных преобразований может быть приведена к префиксной нормальной форме. При этом следует использовать равносильности логики предикатов, которые позволяют выносить за скобки кванторы существования и всеобщности, т.е. следующие равносильности:

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$$

$$\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$$

$$\forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \,\&\, Q(x))$$

$$p \,\&\, \forall x P(x) \equiv \forall x (p \,\&\, P(x))$$

$$p \vee \forall x P(x) \equiv \forall x (p \vee P(x))$$

$$p \to \forall x P(x) \equiv \forall x (p \to P(x))$$

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$c \vee \exists x P(x) \equiv \exists x (c \vee P(x))$$

$$c \,\&\, \exists x P(x) \equiv \exists x (c \,\&\, P(x))$$

$$c \to \exists x P(x) \equiv \exists x (c \to P(x))$$

$$\exists x P(x) \,\&\, \exists x Q(x) \equiv \exists x \exists y (P(x) \,\&\, Q(y))$$

Пример. Привести предикатную формулу

$\forall x\exists yP(x,y)\,\&\,\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}$ к префиксной нормальной форме.

Решение. Проводя равносильные преобразования, получим:

$$\forall x\exists yP(x,y)\,\&\,\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}\equiv \forall x\exists yP(x,y)\,\&\,\forall x\overline{\forall yQ(x,y)}\equiv$$

$$\forall x\exists yP(x,y)\,\&\,\forall x\exists y\overline{Q(x,y)}\equiv$$

$$\forall x(\exists y(P(x,y\,\&\,\exists\overline{Q(x,y)}))\equiv \forall x\exists y(P(x,y)\,\&\,\exists z\overline{Q(x,z)})\equiv$$

$$\forall x\exists y\exists z(P(x,y)\,\&\,\overline{Q(x,z)})$$

Задачи для самостоятельного решения

Привести предикатную формулу к префиксной нормальной форме.

1. $\exists x\forall yP(x,y)\rightarrow\forall x\exists yQ(x,y)$
2. $(\exists x\forall yP_1(x,y)\vee\exists xP_2(x))\rightarrow\exists y\forall zP_3(y,z)$
3. $\neg(\exists x\forall zP_1(x,z)\rightarrow\exists y\exists zP_2\,\&\,\neg\exists y\exists zP_3(y,z)$
4. $(\exists x\forall zP_1(x,z)\vee\neg\forall x\forall yP_2(x,y))\rightarrow\neg\forall zP_3(z)$
5. $(\forall x\exists y\forall zP_1(x,y,z)\vee\neg\forall yP_2(y))\rightarrow\neg\forall x\forall zP_3(x,z)$

Элементы теории графов

1. Матричное задание графов.

Графы задаются при помощи матриц:

1)матрица инцидентности (инциденций);

2)матрица смежности;

3)список ребер

1)**Матрицей инцидентности н-графа** называется матрица (a_{ij}) размера $m\times n$, где m - число вершин, n - число ребер, построенная по правилу:

a_{ij}=1,если i-ая вершина инцидентна j-ому ребру; 0 – в противном случае.

2)**Матрицей инцидентности** орграфа называется матрица (a_{ij}), размера $m\times n$, где m-число вершин, n-число ребер, построенная по правилу:

a_{ij}= -1, если i-ая вершина является началом j-ого ребра;

1, если i-ая вершина является концом j-ого ребра;

0, если вершина и ребро не инцидентны;

2 (или любое другое число, неравное -1,1,0), если ребро является петлей.

3) **Матрицей смежности** называется квадратная матрица, номера строк и столбцов которой совпадают номерами вершин, а элемент ее равен числу ребер, соединяющих вершины (в случае н-графа), в случае орграфа – элемент a_{ij} равен числу ребер, имеющих начало в i-ой вершине, а конец – в j-ой вершине.

Список ребер графа – это два столбца: в левом перечислены все ребра, в правом – инцидентные им вершины (для н-графа порядок вершин произволен, для орграфа – первой указывается начало ребра, второй – конец ребра).

2. Степени вершин графов.

Введем некоторые определения.

Локальной степенью (или просто степенью) вершины $x \in X$ н-графа называется количество ребер $\rho(x)$,инцидентных этой вершине.

В н-графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу всех ребер (т.е. эта сумма – четное число).Петля дает вклад 2 в сумму степеней вершины. Отсюда следует, что в н-графе число вершин нечетной степени четно.

Для вершин орграфа определяются две локальные степени: $\rho(x)$ – число ребер, выходящих из вершины x и $\rho(x)$ – число ребер, входящих в эту вершину. Петля дает вклад 1 в обе эти степени. В орграфе $\rho \sum = \sum \rho$ =m, где m – число ребер.

3. Маршруты, цепи и циклы.

Пусть G =(X, E)- н-граф. *Маршрутом длины* m называется последовательность m ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину

Замечание. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью.* Цепь, не содержащая повторяющихся вершин (не пересекающая себя), называется *простой цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом.* Простая замкнутая цепь называется *простым циклом.*

Две вершины называются *связанными*, если существует маршрут с началом в одной вершине и концом в другой.

Определение. Граф называется *связным*, если все его вершины связаны между собой.

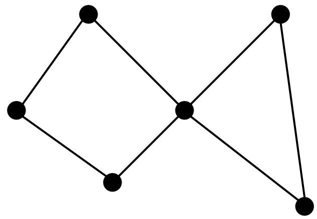
Выше мы рассмотрели ряд понятий для н-графа – маршрут, цепь, цикл и пр. Для орграфов все основные понятия сохраняются, меняются только названия: вместо маршрута – путь, вместо цикла – контур, итак: *цикл* – это замкнутый путь в н-графе, *контур* – это ориентированный цикл в орграфе. Но заметим, что на практике (а графы в основном имеют прикладное значение) все эти ряды терминов забываются и пользуются какими-то словами, которые сохранились в памяти. Граф – это наглядный образ, достоинство которого и состоит в том, что он требует минимального количества слов и символов.

4. Эйлеровы графы. Гамильтоновы графы.

Для практики большое значение имеют задачи о нахождении различного рода маршрутов. Наиболее известны из них два: эйлеров цикл и гамильтонов цикл. Задачи, касающиеся этих циклов, часто встречаются на практике. Например, в ситуации, когда качество выполнения операций (работ, мероприятий) существенно зависит от последовательности, в которой они выполняются.

Эйлеровым путем в графе G называется такой путь, в котором каждое ребро встречается один раз, или иначе: *контур или путь, который содержит все ребра или дуги графа, называется* ***эйлеровым.*** Вопрос о существовании эйлерова графа дает следующая теорема: Конечный н-граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связан и степени всех его вершин четны.

Пример эйлерова графа



Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется ***гамильтоновым.*** Граф называется ***гамильтоновым,*** если в нем есть гамильтонов цикл

Условий, гарантирующих существование в графе гамильтонова цикла, не установлено. Известны только некоторые критерии для частных случаев. Так, например, известно, что если для любой пары вершин графа сумма локальных степеней больше или равна числу вершин графа, то в таком графе существует гамильтонов цикл.

5. Расстояние. Эксцентриситет. Диаметр. Центр.

Расстоянием между вершинами x_i и x_j (обозначается $r(x_i, x_j)$) называется число дуг в пути минимальной длины. Если между этими вершинами не существует никакого пути, то расстояние принимается за бесконечное $r(x_i\ x_j)=\infty$. .Для фиксированной вершины x величина $e(x)=\max\{r(x, x_i), x_i \in X\}$ называется ***эксцентриситетом*** *вершины* x. Таким образом, эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее. Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется ***диаметром*** графа G и обозначается d(G). Вершина x называется *периферийной,* если $e(x)=d(x)$. Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его ***радиусом*** и обозначается r(G). Вершина a называется *центральной,(*или ***центром),*** если $e(a)=r(a)$. В роли центра могут выступать несколько вершин.

6. Остовные деревья, алгоритмы их построения.

Остовом графа *G* (или покрывающим деревом) называется любое дерево графа G, покрывающее все вершин, но не обязательно при этом включает все его ребра.

Ребра, не вошедшие в остов, называются *хордами.*

Очевидно, что любой связанный граф содержит хотя бы одно покрывающее дерево.

1.Часто ребра снабжены какой-либо весовой характеристикой, и покрываюшее дерево требуется выбрать из оптимальных соображений: min-го или max-го веса покрывающего дерева. Для нахождения, например, остова min-го веса поступают следующим образом: из всех предложенных ребер выбирают ребро с наименьшим весом. Затем на каждом следующем шаге из оставшегося числа рассматривается наименьшее по весу ребро. Если оно не образует цикла с ранее выбранными ветвями графа, то оно вводится в остов. Построение прекращается после n-1-го шага.

2. Второй алгоритм строит так называемые связки. Связка представляет собой некоторое поддерево искомого покрывающего дерева. Для построения связки последовательно выделяют отдельные вершины, объединенные некоторыми ребрами. По мере рассмотрения все новых и новых ребер исходного графа связки постепенно нарастают и объединяются до тех пор, пока не будет получена одна связка, включающая в себя все вершины графа – искомое покрывающее дерево. При образовании связок следует наблюдать за тем, чтобы не образовались циклы. Процедуру выделения вершин и ребер во время выполнения алгоритма называют ***окрашиванием.***

7. Оптимизационные задачи на графах.

7.1 Построение кратчайших путей в графах.

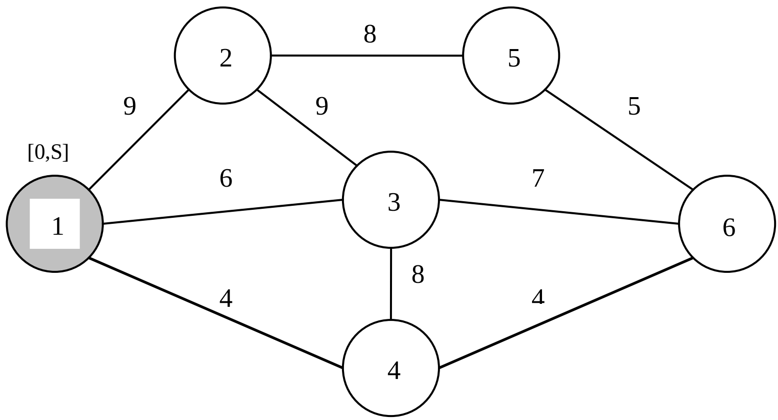
Пример.

Некоторая строительная фирма осуществляет несколько строительных проектов в трех районах. Сеть, показанная на рис., отражает варианты перевозок к шести объектам строительства фирмы и от них. Узлы сети соответствуют местоположению компании (узел 1) и объектов строительства.

Расстояния между объектами показаны над дугами. Длины дуг не обязательно пропорциональны расстояниям.

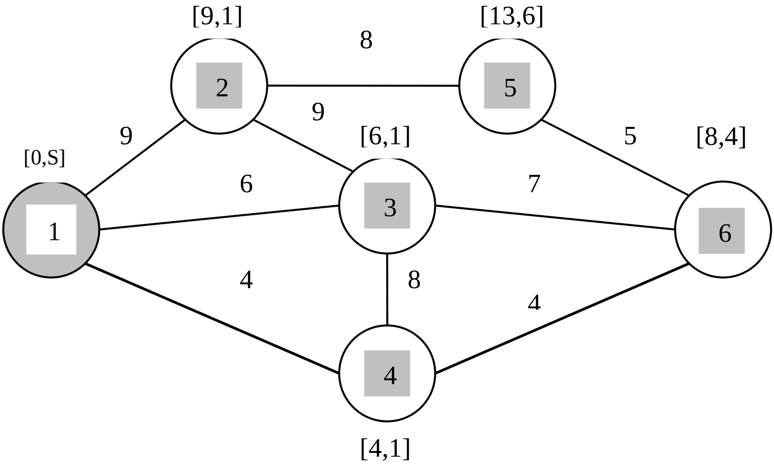
Фирма хотела бы определить пути, которые минимизировали бы общее расстояние от местоположения компании до каждого объекта. Т.е. необходимо определить кратчайший путь от фирмы (узла 1) до каждого из всех других узлов на сети. Определять кратчайший путь будем ***методом меток***.

Рассмотрим сеть:



Начнем с присвоения постоянной метки узлу 1. Буква S означает, что узел 1 является начальным, стартовым узлом, а 0 означает, что расстояние между узлом 1 и самим собой равно нулю. Итак, узлу 1 присвоена постоянная метка. Узел 1 затеняем. Чтобы выполнить первый шаг (или итерацию) процедуры присвоения меток, мы должны рассмотреть каждый узел, в который можно попасть непосредственно из узла 1; в данном случае мы видим узлы 2, 3 и 4. Рассмотрим сначала узел 2. Расстояние от узла 1 до узла 2 –9 км, поэтому узлу 2 присваевается временная метка [9,1]. Затем, рассмотрев таким же образом узел 3, присваеваем ему временную метку [6,1] и узлу 4 – временную метку [4,1]. Теперь рассматриваем все узлы с временными метками и выбираем узел с минимальным расстоянием, в данном случае это узел 4, метка становится постоянной, затемняем узел. Следующий шаг проводим от узла

4, рассматриваем узлы, непосредственно связанные с узлом 4 и не имеющие постоянных меток, т.е. узлы 3 и 6. У узла 3 есть теперь две временные метки: одна была раньше [6,1] и вторая появилась сейчас - [12,4], из них выбираем лучшую. В данном случае это [6,1]. Узел 6 имеет временную метку [8,4]. Рассматриваем все узлы с временными метками и выбираем тот узел, в метке которого кратчайшее расстояние. Это узел 3, метка становится постоянной, узел затеняем.



Следующий шаг (итерация) начинается в узле 3, *последнем*, который помечен постоянной меткой. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все узлы не станут иметь постоянные метки. Например, постоянная метка в узле 6 говорит нам, что наименьшее расстояние от узла 1 до узла 6 составляет 8 км по пути 1-4-6.

7.2. Построение коммуникационной сети минимальной длины.

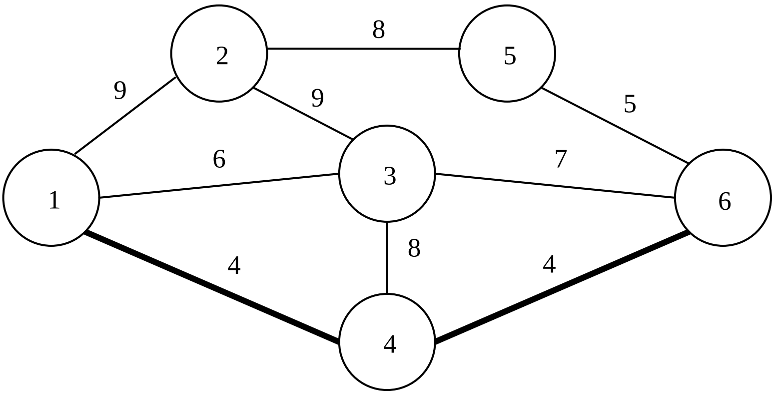
Коммуникационная сеть минимальной длины, или *дерево кратчайших расстояний,* - это совокупность дуг сети, имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех узлов сети.

Рассмотрим задачу регионального вычислительного центра.

Центр должен установить специальные линии связи между пятью локальными потребителями и новым центральным компьютером. Чтобы сократить затраты, общая протяженность линий связи в сети должна быть минимальной. Хотя центральный компьютер может быть связан с каждым потребителем в отдельности, более экономичным было бы установить прямую связь с частью потребителей, а остальных связать через них. Определение такой системы связи минимальной длины представляет собой пример дерева кратчайших расстояний.

Метод, который может быть использован для решения этой задачи, очень прост – это алгоритм нахождения покрывающего дерева минимального веса.

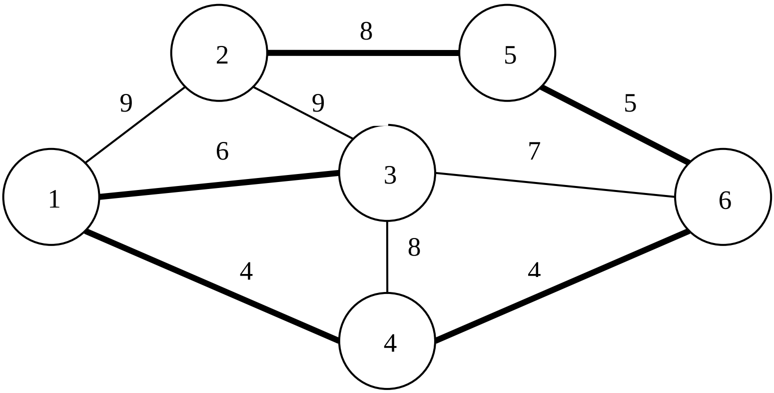
Рассмотрим сеть:



Обращаясь к сети этой задачи и начиная с узла 1, мы находим, что ближайшим является узел 4 с расстоянием 4.

Соединяем узел 1 и узел 4 жирной линией.

На втором шаге метода находим, что несвязанный узел, ближайший к одному из связанных узлов, есть узел 6 с расстоянием 8 км от узла 1.Добавляя узел 6 к множеству связанных узлов, выделяем дугу 1-4. Повторение шага, заключающегося в добавлении ближайшего несвязанного узла к связанному сегменту сети, дает нам решение задачи о дереве кратчайших расстояний:



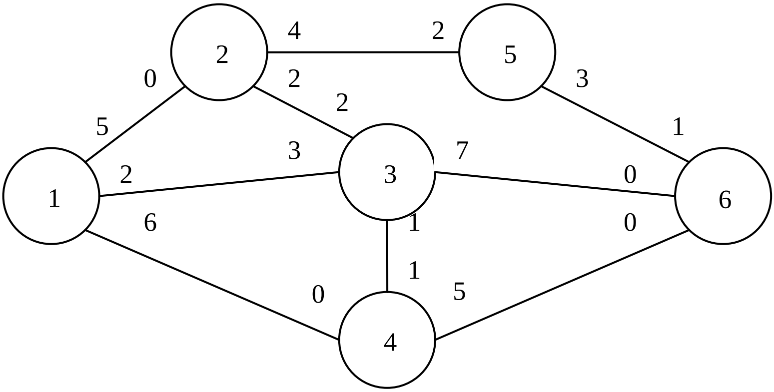
Минимальная длина дерева представлена суммой расстояний на дугах, образующих дерево. В данном случае сумма равна 27 км.

Этот алгоритм может применяться к другим сетевым моделям, которые характеризуются другими показателями – затратами, временем и т.д.

7.3. Задача определения максимального потока.

Рассмотрим сеть с одним узлом входа, или источником, и одним узлов выхода, или стоком. При постановке задачи о максимальных потоках задается вопрос: какова максимальная величина потока (количество машин, сообщений, жидкости и т.д.), который может войти в систему и выйти из нее в заданный период времени? Максимум, или верхнее ограничение на поток, в дуге сети будем рассматривать как *пропускную способность*, или *мощность* дуги. Предполагаем, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел.

В качестве примера рассмотрим систему автомобильных дорог. Сеть с показателями мощностей дуг представлена на рисунке:

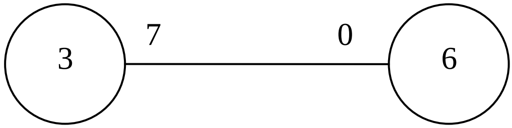


Мощность потока зависит от направления потока. Например, дорога, отображенная дугой 1-2, имеет мощность 5000 автомобилей в час в направлении от 1 к 2; проектировщики предполагают, что здесь будет введено одностороннее движение, поэтому мощность дуги в направлении от 2 к 1 равна нулю. Алгоритм построения максимального потока, рассматриваемый далее, основан на использовании здравого смысла:

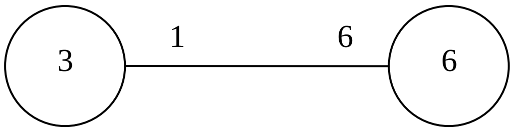
- Найдите путь от входного узла (источника) до выходного узла (стока), который характеризуется отличными от нуля мощностями на всех его дугах в направлении потока.
- Увеличьте потоки на выбранном пути настолько, насколько это возможно.
- Продолжайте искать такие пути от источника до стока и увеличивайте поток на этих путях настолько, насколько это возможно.
- Остановите процесс поиска тогда, когда таких новых путей не станет (не будет путей от источника до стока с отличными от нуля мощностями всех дуг на пути в направлении потока).

Далее будет дан алгоритм максимального потока по шагам, но сначала рассмотрим процесс *распределения мощностей потоков.*

Этот процесс позволяет перераспределить поток, используя фиктивные потоки в обратном направлении. Рассмотрим, например, дугу 3-6 на рис.:



Первоначальная мощность потока в направлении 3-6 составляла 7000 автомобилей в час, в направлении 6-3 поток запрещен. Если допустить, что в направлении 6-3 будет двигаться поток 6000 автомобилей в час, то мы пересмотрим мощности потока и получим результат, показанный на рис:



Отметим, что мы уменьшили мощность потока в направлении 3-6 на 6000 авт. в час и одновременно на ту же величину увеличили мощность потока в направлении 6-3, т.е. в этом направлении появился фиктивный поток. Фиктивный поток не означает, что автомобили будут посланы в направлении 6-3, просто поток в направлении 3-6 будет ограничен по сравнению с первоначальным. И результатом этого будет являться то, что поток, первоначально направленный по дуге 3-6, будет распределен между другими дугами сети.

Этот процесс распределения мощностей потоков представляет собой важную часть метода максимального потока.

Рассмотрим теперь ***шаги метода максимального потока.***

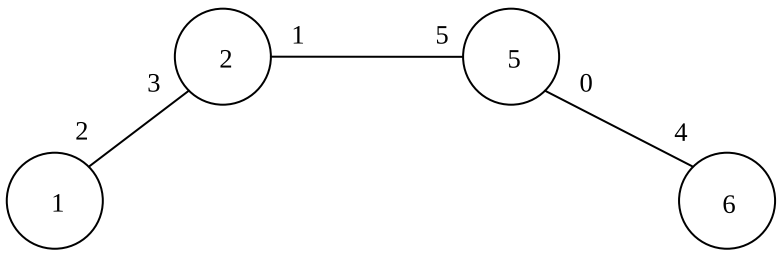
Шаг 1. Найдите какой-нибудь путь от узла-источника до узла-стока, который образован дугами, каждая из которых имеет в направлении потока мощность, превышающую нулевую. Если такой путь не обнаружен, то оптимальное решение достигнуто.

Шаг 2. Найдите наименьшее значение мощности дуги P_t на пути, выбранном на шаге 1.

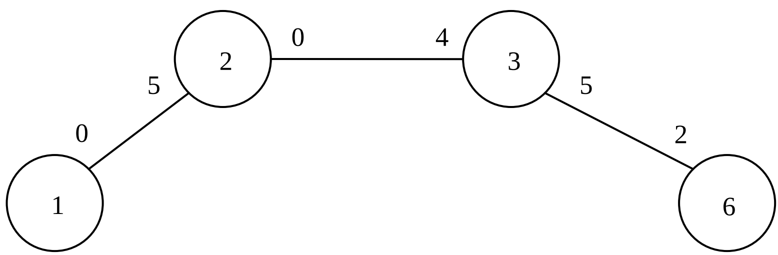
Шаг 3. На пути, выбранном на шаге1, сократите на P_t мощности потоков на всех дугах в направлении потока и увеличьте на P_t мощности потоков в обратном направлении.
Перейдите к шагу 1.

Хотя процедура будет различной в зависимости от выбора путей на шаге 1, тем не менее алгоритм приведет к нахождению максимального потока. Рассмотрим этот алгоритм на примере, приведенном на рис.1:

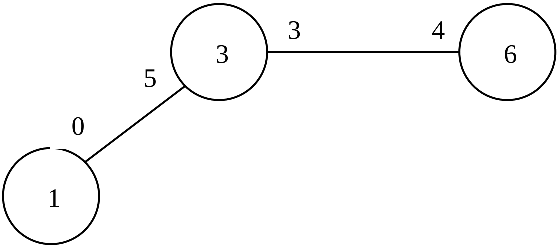
*Итерация 1.*Выбран путь 1-2-5-6 Мощность Pt,определяемая дугой 5-6,составляет 3. Пересмотренная сеть показана на рисунке:



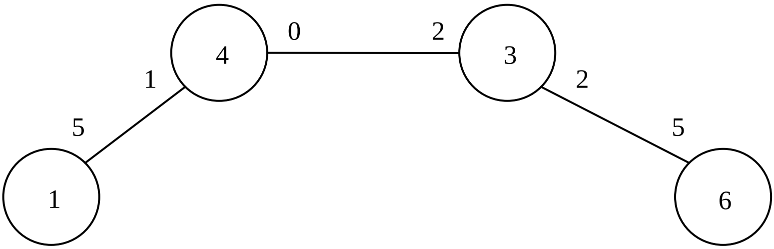
*Итерация 2.*Выбран путь 1-2-3-6. Мощность P_t, определяемая дугой 1-2 (или дугой 2-3) составляет 2
Пересмотренная сеть показана на рисунке:
.



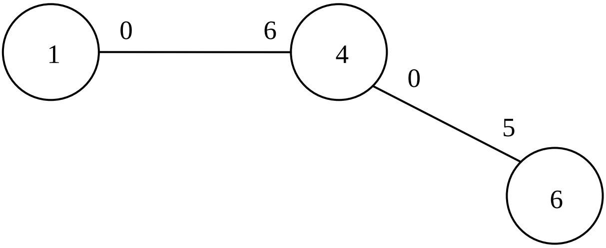
Итерация 3. Выбран путь 1-3-6 P_t=2 (дуга 1-3).
Пересмотренная сеть показана на рисунке:



Итерация 4. Выбран путь 1-4-3-6. P_t=1 (дуга 4-3).
Пересмотренная сеть показана на рисунке:
.

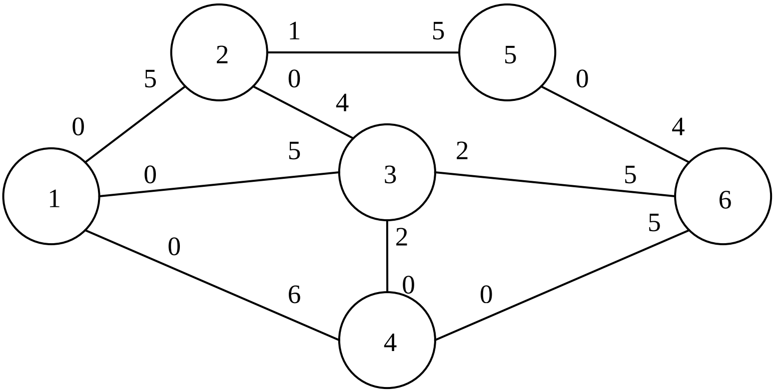


Итерация 5. Выбран путь 1-4-6. P_t=5 (дуга 1-4 или 4-6).
Пересмотренная сеть показана на рисунке:



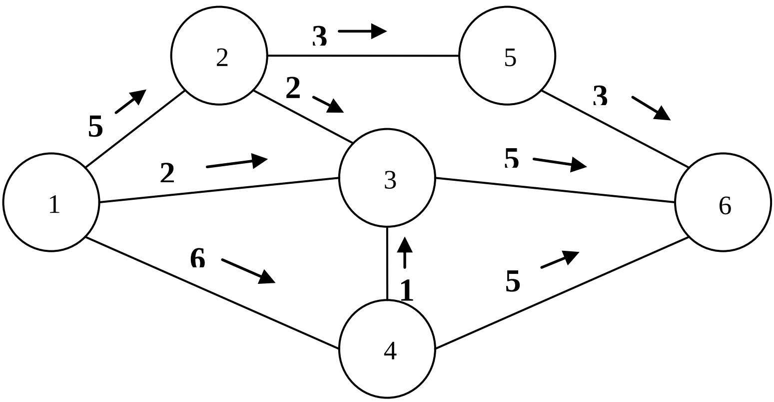
.

Теперь мы имеем следующие пересмотренные показатели мощностей дуг:



Потоки по дугам для достижения максимального общего потока могут быть найдены путем сравнения конечных и первоначальных мощностей по дугам. Если конечная мощность потока меньше первоначальной мощности, то поток проходит по дуге с величиной, равной разнице между первоначальной и конечной мощностями. Рассмотрим, например, дугу 3-6, конечная мощность меньше первоначальной, поэтому дуга имеет величину 7-2=5 в направлении 3-6.

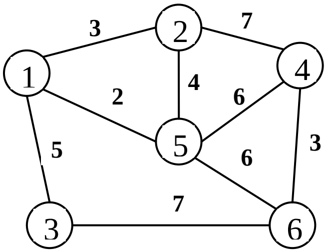
Сравнивая конечную и начальную мощность потока для всех дуг сети, мы получаем конечную модель потока.



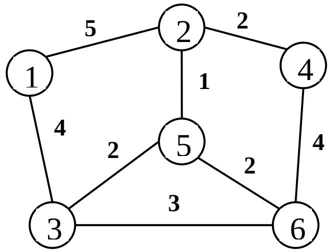
Максимальный поток V=13 тыс.авт.в час. Заметим, что для каждого узла сети поток входящий равен потоку выходящему (это необходимо контролировать).

Задачи для самостоятельного решения

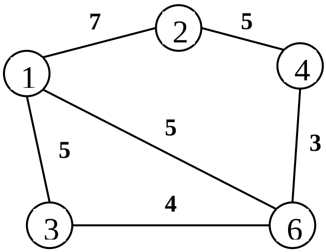
1. Определить кратчайшие пути от узла с номером 1 до каждого из остальных узлов сети. Построить дерево минимальной длины.



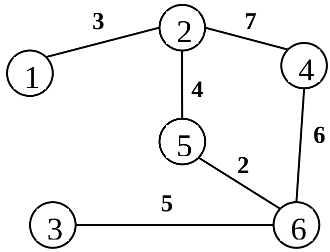
1) ,



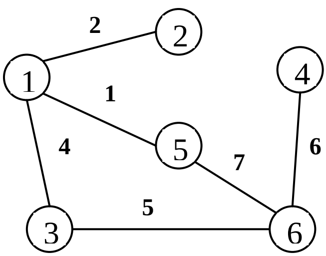
2) ,



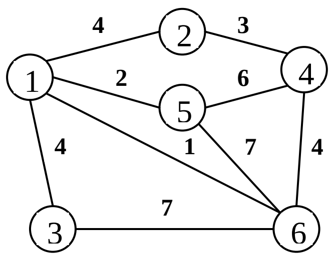
3) ,



4) ,

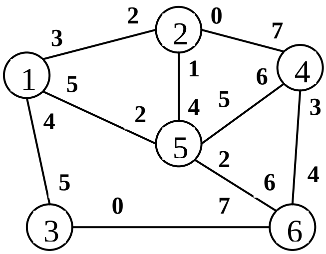


5) ,

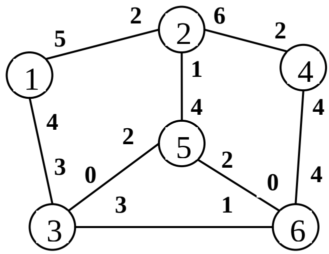


6) .

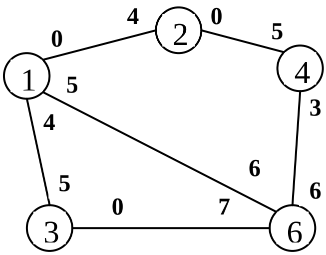
2. Определить максимальный поток в следующих сетях.



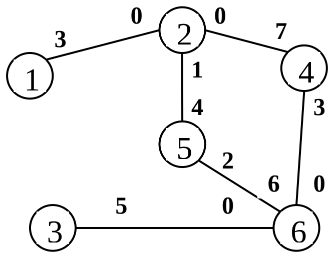
1) ,



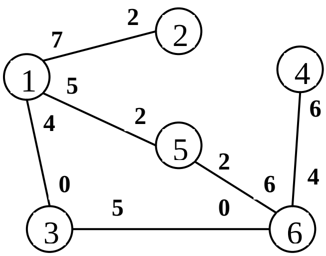
2) ,



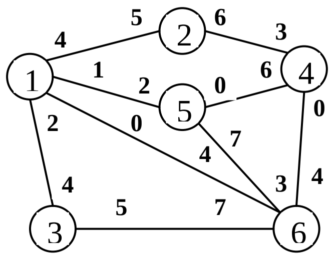
3) ,



4) ,

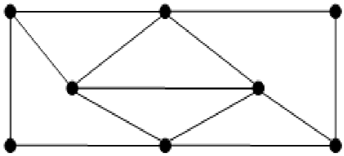


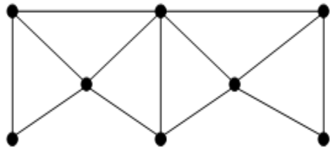
5) ,

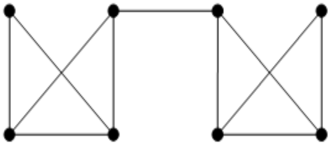


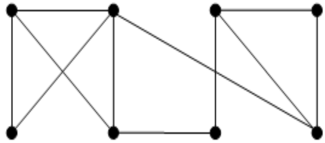
6) .

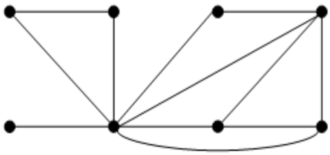
3. Для следующих неориентированных графов выписать матрицы инцидентности и смежности, матрицу расстояний, определить эксцентриситеты вершин, радиус, диаметр и центр графа. Определить имеет ли граф гамильтонов цикл, является ли граф эйлеровым. Выписать любой остов графа.

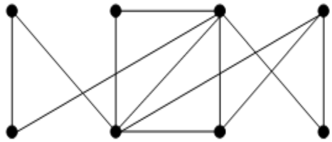
1)  ,

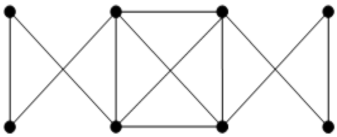
2)  ,

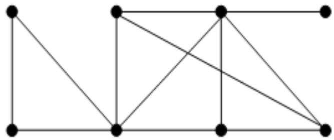
3)  ,

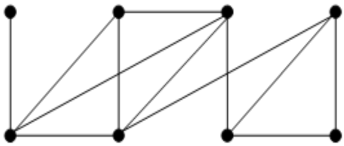
4)  ,

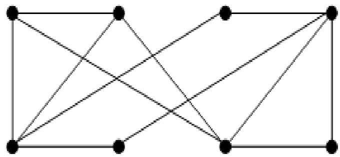
5)  ,

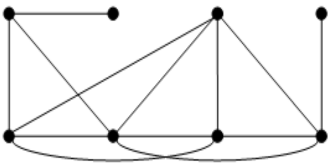
6)  ,

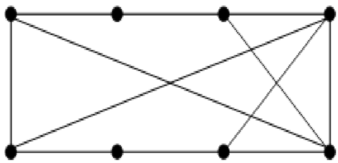
7) 

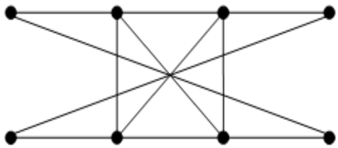
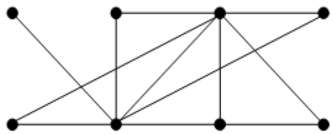
8)  ,

9)  ,

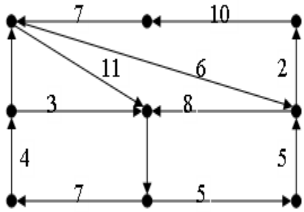
10)  ,

11)  ,

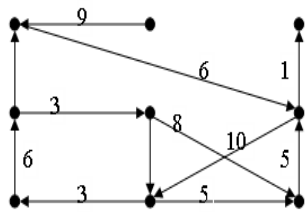
12)  ,

13)  , 14)  .

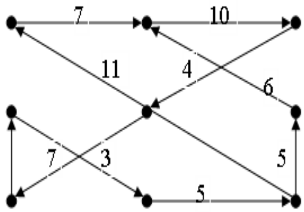
4. Для следующих орграфов выписать матрицы инцидентности и матрицы смежности. Определить кратчайшие расстояния от любой из вершин до остальных вершин графа.

1) 

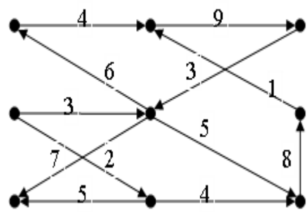
,

2) 

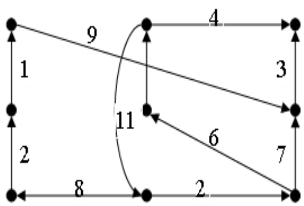
,

3) 

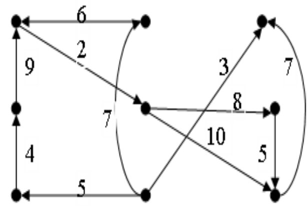
,

4) 

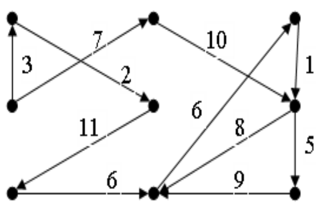
,

5) 

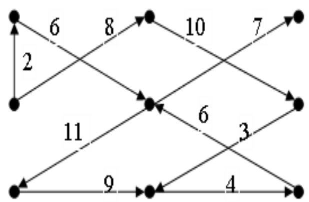
,

6) 

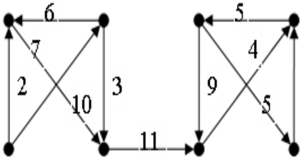
,

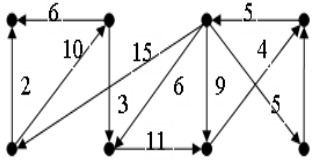
7) 

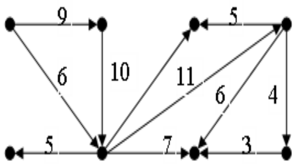
,

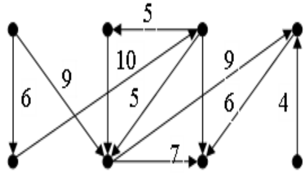
8) 

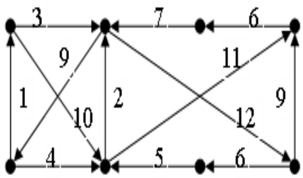
,

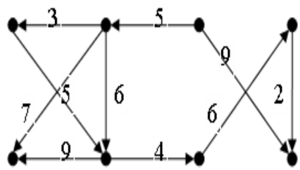
9)  ,

10)  ,

11)  ,

12)  ,

13)  ,

14)  .

4. Нарисуйте сеть, представленную следующей таблицей:

Из узла	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5
В узел	2	3	4	5	6	7	5	6	7	5	6	8	9
Расстояние	1	5	2	13	12	11	6	10	4	12	14	3	9

Из узла	6	6	7	7	8	9
В узел	8	9	8	9	10	10
Расстояние	6	5	8	10	5	2

На этой сети найдите кратчайший маршрут между узлами 1 и 10. Какова длина кратчайшего пути между узлами 1 и 10? Проходит ли кратчайший путь через узел 3?

5. Нарисуйте сеть, представленную следующей таблицей:

Из узла	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5
В узел	2	3	6	5	6	5	5	6	3	5	6	8	9
Расстояние	1	5	2	13	12	11	3	10	4	12	14	5	9

Из узла	6	6	7	7	8	9
В узел	8	9	8	4	10	1
Расстояние	6	5	8	14	5	4

На этой сети найдите кратчайший маршрут между узлами 1 и 9. Какова длина кратчайшего пути между узлами 1 и 9? Проходит ли кратчайший путь через узел 4?

5. Нарисуйте сеть, представленную следующей таблицей:

Из узла	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5
В узел	2	3	4	3	4	7	2	3	7	5	6	8	9
Расстояние	1	5	2	10	12	11	6	14	4	12	14	3	9

Из узла	6	6	7	7	8	9
В узел	8	9	8	9	7	10
Расстояние	6	3	8	11	5	7

На этой сети найдите кратчайший маршрут между узлами 1 и 7. Какова дина кратчайшего пути между узлами 1 и 7? Проходит ли кратчайший путь через узел 5?

6. Нарисуйте сеть, представленную следующей таблицей:

Из узла	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5
В узел	2	3	6	5	6	3	5	6	8	5	2	8	9
Расстояние	1	5	2	13	12	11	6	10	4	12	14	3	9

Из узла	6	6	7	7	8	9
В узел	8	9	8	9	10	10
Расстояние	6	8	8	4	5	4

На этой сети найдите кратчайшие маршруты от узла 1 до всех других. Какова длина кратчайшего пути от узла 1 до узла 10? Проходит ли этот кратчайший путь через узел 3?

Нечеткие множества и нечеткие отношения

1. Операции над нечёткими множествами

Определим некоторые операции над нечёткими множествами следующим образом:

$\mu_{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}}(u)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(u),\ \mu_{\tilde{B}}(u)\}$,

$\mu_{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}}(u)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(u),\ \mu_{\tilde{B}}(u)\}$;

$\mu_{\tilde{A}\otimes\tilde{B}}(u)=\mu_{\tilde{A}}(u)\cdot\mu_{\tilde{B}}(u)$,

$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(u)=\mu_{\tilde{A}}(u)+\mu_{\tilde{B}}(u)-\mu_{\tilde{A}}(u)\cdot\mu_{\tilde{B}}(u)$;

$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(u)=1-\mu_{\tilde{A}}(u)$;

$\mu_{\tilde{A}\backslash\tilde{B}}(u)=\max\{0,\ \mu_{\tilde{A}}(u)-\mu_{\tilde{B}}(u)\}$.

Пример. Вычислим $\left(\left(\tilde{A}\bigcap\overline{\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)}\right)\oplus\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)\right)\backslash\bar{\tilde{A}}$ для $\tilde{A}=\{(a,0.4),\ (б,0.7)\}$, $\tilde{B}=\{(a,0.3),\ (б,0.8)\}$ и $\tilde{C}=\{(a,1),\ (б,0.2)\}$.

Решение. *Шаг 1* $\tilde{B}\otimes\tilde{C}=\{(a,\ 0.3),\ (б,\ 0.16)\}$,

шаг 2 $\overline{\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)}=\{(a,0.7),\ (б,0.84)\}$,

шаг 3 $\left(\tilde{A}\bigcap\overline{\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)}\right)=\{(a,0.4),\ (б,0.7)\}$,

шаг 4 $\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)=\{(a,1),\ (б,0.8)\}$,

шаг 5 $\left(\left(\tilde{A}\bigcap\overline{\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)}\right)\oplus\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)\right)=\{(a,1),\ (б,0.94)\}$,

шаг 6 $\bar{\tilde{A}}=\{(a,0.6),\ (б,0.3)\}$, *шаг 7* $\left(\left(\tilde{A}\bigcap\overline{\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)}\right)\oplus\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)\right)\setminus\overline{\overline{\tilde{A}}}=\left\{(a,0.4),\ (б,0.64)\right\}.$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1-30 определить результат операций над нечёткими множествами.

1. $\tilde{A}=\left\{(a,0.9),(б,0.7),(в,0.6),(г,0.3),(д,0),(е,1)\right\}$,

$\tilde{B}=\left\{(a,0.6),(б,0.8),(в,0.5),(г,0),(д,1),(е,0.9)\right\}$

и $\tilde{C}=\left\{(a,0.1),(б,0.2),(в,1),(г,0.9),(д,0.7),(е,0.6)\right\}$

$\left(\tilde{A}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\bigcap\tilde{C}\right)}\oplus\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)\right)\setminus\tilde{A}=?$

2. $\tilde{A}=\left\{(a,0.3),(б,0.5),(в,0.6),(г,0.3),(д,0),(е,0.2)\right\}$,

$\tilde{B}=\left\{(a,0.6),(б,0.8),(в,0.5),(г,0.1),(д,1),(е,0.9)\right\}$ и

$\tilde{C}=\left\{(a,0.1),(б,0.2),(в,1),(г,0.8),(д,0.7),(е,0.6)\right\}$.

$\left(\tilde{A}\oplus\overline{\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)}\right)\otimes\left(\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)\setminus\tilde{A}\right)=?$

3. $\tilde{A}=\left\{(a,0.9),(б,0.6),(в,0.4),(г,0.2),(д,0.5),(е,1)\right\}$,

$\tilde{B}=\left\{(a,0.6),(б,0.8),(в,0.5),(г,0),(д,1),(е,0.9)\right\}$ и

$\tilde{C}=\left\{(a,0.6),(б,0.8),(в,1),(г,0.4),(д,0.7),(е,0.5)\right\}$.

$\left(\tilde{A}\bigcup\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\oplus\overline{\left(\tilde{B}\bigcup\tilde{C}\right)}\right)\setminus\tilde{A}=?$

4. $\tilde{A}=\left\{(a,0.9),(б,0.7),(в,0.6),(г,0.2),(д,0),(е,1)\right\}$,

$\tilde{B}=\left\{(a,0.6),(б,0.7),(в,0.5),(г,0),(д,1),(е,0.9)\right\}$ и

$\tilde{C}=\left\{(a,0.1),(б,0.2),(в,1),(г,0.9),(д,0.7),(е,0.6)\right\}$.

$$\left(\tilde{A}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\setminus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)\right)\oplus\tilde{A}=?$$

5. $\tilde{A}=\{(a,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.8)\}$.

$$\left(\tilde{A}\setminus\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\right)\oplus\left(\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\cup\tilde{A}\right)=?$$

6. $\tilde{A}=\{(a,1),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.3),\ (г,0.1),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.6)\}$.

$$\left(\tilde{A}\cap\overline{\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)}\otimes\left(\tilde{B}\oplus\tilde{C}\right)\right)\setminus\tilde{A}=?$$

7. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.3),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.8)\}$.

$$\left(\tilde{A}\otimes\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)\oplus\overline{\left(\tilde{B}\setminus\tilde{C}\right)}\right)\oplus\overline{\tilde{A}}=?$$

8. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.6)\}$.

$$\left(\overline{\tilde{B}}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\oplus\left(\tilde{A}\cup\tilde{C}\right)\right)\setminus\tilde{C}=?$$

9. $\tilde{A}=\{(a,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.8),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\tilde{A}\oplus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)\right)\setminus\overline{\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)}=?$

10. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.6),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0.5),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\left(\overline{\tilde{A}}\cup\tilde{B}\right)\otimes\tilde{C}\oplus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)\right)\setminus\left(\tilde{A}\cap\overline{\tilde{C}}\right)=?$

11. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.2),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\overline{\left(\tilde{A}\otimes\tilde{B}\right)}\cap\tilde{C}\setminus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)\right)\oplus\tilde{A}=?$

12. $\tilde{A}=\{(a,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.8)\}$.

$\tilde{A}\setminus\left(\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\oplus\tilde{A}\right)}\oplus\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\right)=?$

13. $\tilde{A}=\{(a,1),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.3),\ (г,0.1),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\tilde{A}\setminus\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\oplus\tilde{A}\right)}\right)\oplus\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)=?$

14. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.3),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.8)\}$.

$\left(\tilde{A}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\oplus\tilde{B}\right)\oplus\left(\tilde{A}\setminus\tilde{C}\right)$=?

15. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\tilde{A}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\oplus\left(\tilde{B}\cup\left(\tilde{C}\setminus\tilde{A}\right)\right)$=?

16. $\tilde{A}=\{(a,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.8),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\tilde{A}\cap\overline{\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\otimes\tilde{A}\right)}\cup\left(\tilde{B}\oplus\tilde{C}\right)$=?

17. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.6),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0.5),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\tilde{A}\setminus\overline{\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)}\right)\setminus\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)$=?

18. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.2),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$$\tilde{A}\otimes\left(\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\setminus\left(\tilde{B}\cup\tilde{C}\right)\right)\oplus\left(\tilde{A}\setminus\bar{\tilde{C}}\right)=?$$

19. $\tilde{A}=\{(а,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(а,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(а,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.8)\}$.

$$\left(\tilde{C}\cap\overline{\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)}\right)\cup\left(\tilde{A}\oplus\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\right)=?$$

20. $\tilde{A}=\{(а,1),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(а,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.3),\ (г,0.1),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(а,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.6)\}$.

$$\left(\left(\tilde{C}\cup\overline{\left(\tilde{A}\cap\tilde{B}\right)}\right)\setminus\tilde{A}\right)\otimes\left(\tilde{B}\oplus\tilde{C}\right)=?$$

21. $\tilde{A}=\{(а,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(а,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(а,0.3),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.8)\}$.

$$\left(\tilde{A}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}\right)\oplus\left(\left(\tilde{B}\oplus\tilde{A}\right)\setminus\tilde{C}\right)=?$$

22. $\tilde{A}=\{(а,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(а,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(а,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.6)\}$.

$$\left(\tilde{C}\otimes\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{A}\right)}\oplus\left(\tilde{A}\cup\tilde{C}\right)\right)\setminus\tilde{B}=?$$

23. $\tilde{A}=\{(а,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.8),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\tilde{C}\cap\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\right)\cup\left(\tilde{A}\oplus\overline{\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)}\right)=?$

24. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.6),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0.5),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\tilde{A}\otimes\left(\tilde{B}\cup\left(\tilde{C}\setminus\tilde{A}\right)\right)\oplus\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}=?$

25. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.2),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$\left(\tilde{A}\otimes\left(\tilde{A}\setminus\tilde{C}\right)\oplus\tilde{B}\right)\oplus\overline{\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)}=?$

26. $\tilde{A}=\{(a,0.8),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.8)\}$.

$\left(\tilde{B}\setminus\overline{\left(\tilde{A}\cup\bar{\tilde{C}}\right)}\right)\oplus\left(\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\cap\tilde{A}\right)=?$

27. $\tilde{A}=\{(a,1),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (e,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.3),\ (г,0.1),\ (д,1),\ (e,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (e,0.6)\}$.

$$\left(\tilde{A}\bigcap\overline{\left(\tilde{B}\setminus\tilde{C}\right)}\right)\bigcup\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)=?$$

28. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.3),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.8)\}$.

$$\tilde{B}\otimes\left(\overline{\left(\tilde{A}\bigcap\tilde{C}\right)}\bigcup\left(\tilde{B}\setminus\tilde{C}\right)\right)\oplus\left(\tilde{A}\setminus\overline{\tilde{C}}\right)=?$$

29. $\tilde{A}=\{(a,1),\ (б,0.7),\ (в,0.6),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.3),\ (г,0.1),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.1),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.6)\}$.

$$\left(\tilde{C}\bigcap\overline{\left(\tilde{A}\bigcup\tilde{B}\right)}\right)\setminus\left(\tilde{A}\oplus\left(\tilde{B}\otimes\tilde{C}\right)\right)=?$$

30. $\tilde{A}=\{(a,0.9),\ (б,0.7),\ (в,0.5),\ (г,0.3),\ (д,0),\ (е,1)\}$,

$\tilde{B}=\{(a,0.6),\ (б,0.8),\ (в,0.5),\ (г,0),\ (д,1),\ (е,0.9)\}$ и

$\tilde{C}=\{(a,0.3),\ (б,0.2),\ (в,1),\ (г,0.9),\ (д,0.7),\ (е,0.8)\}$.

$$\left(\tilde{C}\setminus\left(\overline{\left(\tilde{A}\bigcap\tilde{B}\right)}\right)\bigcup\tilde{A}\right)\otimes\left(\tilde{B}\oplus\tilde{C}\right)=?$$

2. Нечеткая арифметика.

Определение. *Нечетким числом* называется выпуклое нормальное нечеткое множество с кусочно-непрерывной функцией принадлежности, заданное на множестве действительных чисел.

Определение . *Нечеткое число* $\tilde{\mathrm{A}}$ называется *положительным (отрицательным)* если $\mu_A(u)=0$ для всех $u<0\ \ (u>0)$.

Определение. *Принцип обобщения Заде.* Если $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - функция от n независимых переменных и аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заданы нечеткими числами $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$, соответственно, то значением функции $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ называется нечеткое число $\tilde{y}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{y}}(y^*) = \sup_{\substack{y^* = f\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) \\ x_i^* \in \operatorname{supp}\left(\tilde{x}_i\right),\ i=1,\ldots,n}} \min_{i=1,\ldots,n} \left\{\mu_{\tilde{x}_i}\left(x_i^*\right)\right\}.$$

Определение. α*-уровневый принцип обобщения.* Если $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - функция от n независимых переменных и аргументы x_i заданы нечеткими числами $\tilde{x}_i = \left\{\left(\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}\right) : \alpha \in [0, 1]\right\}$, $i = 1, \ldots, n$, то значением функции $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ называется нечеткое число $\tilde{y} = \left\{\left(\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha\right) : \alpha \in [0, 1]\right\}$, где

$$\underline{y}_\alpha = \inf_{\substack{x_{i,\alpha} \in \left[\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}\right] \\ i=1,\ldots,n}} \left\{f\left(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \ldots, x_{n,\alpha}\right)\right\}$$

и

$$\overline{y}_\alpha = \sup_{\substack{x_{i,\alpha} \in \left[\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}\right] \\ i=1,\ldots,n}} \left\{f\left(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \ldots, x_{n,\alpha}\right)\right\}.$$

Применение α-уровневого принципа обобщения при вычислении нечётких значений функций сводится к решению для каждого α-уровня следующей задачи оптимизации: найти максимальное и минимальное значения функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии, что аргументы могут принимать значения из соответствующих α-уровневых множеств. Количество α-уровней выбирают так, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений.

Пример. Найти нечеткое число $\tilde{y} = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$, если числа $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ заданы следующими трапециевидными функциями принадлежности

$$\mu_{\tilde{x}_1}(x) = \begin{cases} 0,\ если\ x < 1\ или\ x > 4, \\ x-1,\ если\ x \in [1, 2], \\ 1,\ если\ x \in (2, 3), \\ 4-x,\ если\ x \in [3, 4], \end{cases} \quad и\ \ \mu_{\tilde{x}_2}(x) = \begin{cases} 0,\ если\ x < 2\ или\ x > 8, \\ x-2,\ если\ x \in [2, 3], \\ 1,\ если\ x \in (3, 4), \\ 2-0,25x,\ если\ x \in [4, 8]. \end{cases}$$

Решение. Будем использовать 3 следующих α-уровня: {0, 0.5, 1}. Нечеткие аргументы на этих уровнях задаются так:

$\tilde{x}_1 = (1, 4)_0 \cup (1.5, 3.5)_{0.5} \cup (2, 3)_1$ и

$\tilde{x}_2 = (2, 8)_0 \cup (2.5, 6)_{0.5} \cup (3, 4)_1$. По α-уровневому принципу обобщения получаем: $\tilde{y} = (2, 32)_0 \cup (3.75, 21)_{0.5} \cup (6, 12)_1$.

Задачи для самостоятельного решения

Для нечётких чисел $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ вычислить приближённое значение арифметических операций $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1 : \tilde{x}_2$, $\tilde{x}_1{}^2$, используя α-уровневый принцип со значениями $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$, если эти числа характеризуются следующими функциями принадлежностей.

31. $$\mu_{x_1}(x) = \begin{cases} 0\ \ при\ \ x < 1\ или\ x > 6, \\ x-1\ \ при\ \ x \in [1, 2], \\ 1\ \ при\ \ x \in [2, 4], \\ \dfrac{6-x}{2}\ \ при\ \ x \in [4, 6], \end{cases} \quad и\ \mu_{x_2}(x) = \begin{cases} 0\ \ при\ \ x < 3\ или\ x > 8, \\ \dfrac{x-3}{2}\ \ при\ \ x \in [3, 5], \\ 1\ \ при\ \ x \in [5, 6], \\ 7-x\ \ при\ \ x \in [7, 8]. \end{cases}$$

32.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-4 \; или \; x>-1,\\ x+4 \;\; при \;\; x\in[-4,-3],\\ \dfrac{-1-x}{2} \;\; при \;\; x\in[-3,-1],\end{cases} \quad и \quad \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<3 \; или \; x>8,\\ \dfrac{x-3}{2} \;\; при \;\; x\in[3,5],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[5,6],\\ 7-x \;\; при \;\; x\in[7,8].\end{cases}$$

33.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1 \; или \; x>6,\\ x-1 \;\; при \;\; x\in[1,2],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[2,4],\\ \dfrac{6-x}{2} \;\; при \;\; x\in[4,6],\end{cases} \quad и \quad \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-4 \; или \; x>-1,\\ x+4 \;\; при \;\; x\in[-4,-3],\\ \dfrac{-1-x}{2} \;\; при \;\; x\in[-3,-1].\end{cases}$$

34. $$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1 \; или \; x>4,\\ \dfrac{x-1}{2} \;\; при \;\; x\in[1,3],\\ 4-x \;\; при \;\; x\in[3,4],\end{cases} \quad и \quad \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<3 \; или \; x>8,\\ \dfrac{x-3}{2} \;\; при \;\; x\in[3,5],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[5,6],\\ 7-x \;\; при \;\; x\in[7,8].\end{cases}$$

35. $$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1 \; или \; x>6,\\ x-1 \;\; при \;\; x\in[1,2],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[2,4],\\ \dfrac{6-x}{2} \;\; при \;\; x\in[4,6],\end{cases} \quad и \quad \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1 \; или \; x>4,\\ \dfrac{x-1}{2} \;\; при \;\; x\in[1,3],\\ 4-x \;\; при \;\; x\in[3,4].\end{cases}$$

36.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1 \; или \; x>4,\\ \dfrac{x-1}{2} \;\; при \;\; x\in[1,3],\\ 4-x \;\; при \;\; x\in[3,4],\end{cases} \quad и \quad \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-4 \; или \; x>-1,\\ x+4 \;\; при \;\; x\in[-4,-3],\\ \dfrac{-1-x}{2} \;\; при \;\; x\in[-3,-1].\end{cases}$$

37.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<-4 \; \textit{или} \; x>-1,\\ x+4 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-4,\,-3],\\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-3,\,-2],\\ -1-x \;\; \textit{при} \;\; x\in[-2,\,-1],\end{cases} \;\; \textit{и} \;\; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<3 \; \textit{или} \; x>8,\\ \dfrac{x-3}{2} \;\; \textit{при} \;\; x\in[3,\,5],\\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[5,\,6],\\ 7-x \;\; \textit{при} \;\; x\in[7,\,8].\end{cases}$$

38.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<1 \; \textit{или} \; x>6,\\ x-1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[1,\,2],\\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[2,\,4],\\ \dfrac{6-x}{2} \;\; \textit{при} \;\; x\in[4,\,6],\end{cases} \;\; \textit{и} \;\; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<-4 \; \textit{или} \; x>-1,\\ x+4 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-4,\,-3],\\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-3,\,-2],\\ -1-x \;\; \textit{при} \;\; x\in[-2,\,-1].\end{cases}$$

39.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<-4 \; \textit{или} \; x>-1,\\ x+4 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-4,\,-3],\\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-3,\,-2],\\ -1-x \;\; \textit{при} \;\; x\in[-2,\,-1],\end{cases} \;\; \textit{и} \;\; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<-4 \; \textit{или} \; x>-1,\\ x+4 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-4,\,-3],\\ \dfrac{-1-x}{2} \;\; \textit{при} \;\; x\in[-3,\,-1].\end{cases}$$

40.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<-4 \; \textit{или} \; x>-1,\\ x+4 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-4,\,-3],\\ 1 \;\; \textit{при} \;\; x\in[-3,\,-2],\\ -1-x \;\; \textit{при} \;\; x\in[-2,\,-1],\end{cases} \;\; \textit{и} \;\; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; \textit{при} \;\; x<1 \; \textit{или} \; x>4,\\ \dfrac{x-1}{2} \;\; \textit{при} \;\; x\in[1,\,3],\\ 4-x \;\; \textit{при} \;\; x\in[3,\,4].\end{cases}$$

41. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1 \text{ или } x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \text{ при } x\in[-1,1],\\ 2-x \text{ при } x\in[1,2],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<3 \text{ или } x>8,\\ \dfrac{x-3}{2} \text{ при } x\in[3,5],\\ 1 \text{ при } x\in[5,6],\\ 7-x \text{ при } x\in[7,8].\end{cases}$

42. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1 \text{ или } x>6,\\ x-1 \text{ при } x\in[1,2],\\ 1 \text{ при } x\in[2,4],\\ \dfrac{6-x}{2} \text{ при } x\in[4,6],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1 \text{ или } x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \text{ при } x\in[-1,1],\\ 2-x \text{ при } x\in[1,2].\end{cases}$

43.

$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1 \text{ или } x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \text{ при } x\in[-1,1],\\ 2-x \text{ при } x\in[1,2],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-4 \text{ или } x>-1,\\ x+4 \text{ при } x\in[-4,-3],\\ \dfrac{-1-x}{2} \text{ при } x\in[-3,-1].\end{cases}$

44. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1 \text{ или } x>4,\\ \dfrac{x-1}{2} \text{ при } x\in[1,3],\\ 4-x \text{ при } x\in[3,4],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1 \text{ или } x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \text{ при } x\in[-1,1],\\ 2-x \text{ при } x\in[1,2].\end{cases}$

45.

$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1 \text{ или } x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \text{ при } x\in[-1,1],\\ 2-x \text{ при } x\in[1,2],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-4 \text{ или } x>-1,\\ x+4 \text{ при } x\in[-4,-3],\\ 1 \text{ при } x\in[-3,-2],\\ -1-x \text{ при } x\in[-2,-1].\end{cases}$

46.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2 \; или \; x>2,\\ x+2 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2],\end{cases} \; и \; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<3 \; или \; x>8,\\ \dfrac{x-3}{2} \;\; при \;\; x\in[3,\,5],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[5,\,6],\\ 7-x \;\; при \;\; x\in[7,\,8].\end{cases}$$

47.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-4 \; или \; x>-1,\\ x+4 \;\; при \;\; x\in[-4,\,-3],\\ \dfrac{-1-x}{2} \;\; при \;\; x\in[-3,\,-1],\end{cases} \; и \; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2 \; или \; x>2,\\ x+2 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2].\end{cases}$$

48.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2 \; или \; x>2,\\ x+2 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2],\end{cases} \; и \; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1 \; или \; x>4,\\ \dfrac{x-1}{2} \;\; при \;\; x\in[1,\,3],\\ 4-x \;\; при \;\; x\in[3,\,4].\end{cases}$$

49.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-4 \; или \; x>-1,\\ x+4 \;\; при \;\; x\in[-4,\,-3],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-3,\,-2],\\ -1-x \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\end{cases} \; и \; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2 \; или \; x>2,\\ x+2 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2].\end{cases}$$

50.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2 \; или \; x>2,\\ x+2 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2],\end{cases} \; и \; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-1 \; или \; x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2].\end{cases}$$

51. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>5, \\ x-1 \ \textit{при} \ x\in[1,\,2], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[2,\,3], \\ \dfrac{5-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[3,\,5], \end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<3 \ \textit{или} \ x>8, \\ \dfrac{x-3}{2} \ \textit{при} \ x\in[3,\,5], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[5,\,6], \\ 7-x \ \textit{при} \ x\in[7,\,8]. \end{cases}$

52. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>6, \\ x-1 \ \textit{при} \ x\in[1,\,2], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[2,\,4], \\ \dfrac{6-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[4,\,6], \end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>5, \\ x-1 \ \textit{при} \ x\in[1,\,2], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[2,\,3], \\ \dfrac{5-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[3,\,5]. \end{cases}$

53.

$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>5, \\ x-1 \ \textit{при} \ x\in[1,\,2], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[2,\,3], \\ \dfrac{5-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[3,\,5], \end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<-4 \ \textit{или} \ x>-1, \\ x+4 \ \textit{при} \ x\in[-4,\,-3], \\ \dfrac{-1-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[-3,\,-1]. \end{cases}$

54. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>4, \\ \dfrac{x-1}{2} \ \textit{при} \ x\in[1,\,3], \\ 4-x \ \textit{при} \ x\in[3,\,4], \end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>5, \\ x-1 \ \textit{при} \ x\in[1,\,2], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[2,\,3], \\ \dfrac{5-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[3,\,5]. \end{cases}$

55.

$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<1 \ \textit{или} \ x>5, \\ x-1 \ \textit{при} \ x\in[1,\,2], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[2,\,3], \\ \dfrac{5-x}{2} \ \textit{при} \ x\in[3,\,5], \end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<-4 \ \textit{или} \ x>-1, \\ x+4 \ \textit{при} \ x\in[-4,\,-3], \\ 1 \ \textit{при} \ x\in[-3,\,-2], \\ -1-x \ \textit{при} \ x\in[-2,\,-1]. \end{cases}$

56. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<-1 \ \textit{или} \ x>2,\\ \dfrac{x+1}{2} \ \textit{при} \ \ x\in[-1,\,1],\\ 2-x \ \ \textit{при} \ \ x\in[1,\,2],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<1 \ \textit{или} \ x>5,\\ x-1 \ \textit{при} \ \ x\in[1,\,2],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[2,\,3],\\ \dfrac{5-x}{2} \ \ \textit{при} \ \ x\in[3,\,5].\end{cases}$

57. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<1 \ \textit{или} \ x>5,\\ x-1 \ \textit{при} \ \ x\in[1,\,2],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[2,\,3],\\ \dfrac{5-x}{2} \ \ \textit{при} \ \ x\in[3,\,5],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<-2 \ \textit{или} \ x>2,\\ x+2 \ \textit{при} \ \ x\in[-2,\,-1],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[-1,\,1],\\ 2-x \ \ \textit{при} \ \ x\in[1,\,2].\end{cases}$

58.

$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<-4 \ \textit{или} \ x>3,\\ \dfrac{x+4}{2} \ \ \textit{при} \ \ x\in[-4,\,-2],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[-2,\,-1],\\ \dfrac{3-x}{4} \ \ \textit{при} \ \ x\in[-1,\,3],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<3 \ \textit{или} \ x>8,\\ \dfrac{x-3}{2} \ \ \textit{при} \ \ x\in[3,\,5],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[5,\,6],\\ 7-x \ \ \textit{при} \ \ x\in[7,\,8].\end{cases}$

59. $\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<1 \ \textit{или} \ x>6,\\ x-1 \ \textit{при} \ \ x\in[1,\,2],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[2,\,4],\\ \dfrac{6-x}{2} \ \ \textit{при} \ \ x\in[4,\,6],\end{cases}$ и $\mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x<-4 \ \textit{или} \ x>3,\\ \dfrac{x+4}{2} \ \ \textit{при} \ \ x\in[-4,\,-2],\\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x\in[-2,\,-1],\\ \dfrac{3-x}{4} \ \ \textit{при} \ \ x\in[-1,\,3].\end{cases}$

60.

$$\mu_{x_1}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-4 \; или \; x>3,\\ \dfrac{x+4}{2} \;\; при \;\; x\in[-4,\,-2],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ \dfrac{3-x}{4} \;\; при \;\; x\in[-1,\,3],\end{cases} \quad и \;\; \mu_{x_2}(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-2 \; или \; x>2,\\ x+2 \;\; при \;\; x\in[-2,\,-1],\\ 1 \;\; при \;\; x\in[-1,\,1],\\ 2-x \;\; при \;\; x\in[1,\,2].\end{cases}$$

3. Нечеткие отношения.

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{\mathrm{R}}$ на $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ называется *рефлексивным,* если для любого $x\in\mathrm{X}$ выполняется равенство $\mu_R(x,\,x)=1$.

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{\mathrm{R}}$ на $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ называется *антирефлексивным,* если для любого $x\in\mathrm{X}$ выполняется равенство $\mu_R(x,\,x)=0$.

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{\mathrm{R}}$ на $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ называется *симметричным,* если для любой пары $(x,\,y)\in\mathrm{X}\times X$ выполняется равенство $\mu_R(x,\,y)=\mu_R(y,\,x)$.

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{\mathrm{R}}$ на $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ называется *асимметричным,* если выражение $\mu_R(x,\,y)>0 \;\Rightarrow\; \mu(y,\,x)=0$ справедливо для любой пары $(x,\,y)\in\mathrm{X}\times X$.

Определение. Нечеткие отношения $\tilde{\mathrm{R}}$ на $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ и $\tilde{\mathrm{R}}^{-1}$ на $\mathrm{Y}\times\mathrm{X}$ называется *обратными,* если для любой пары $(x,\,y)\in\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ выполняется равенство $\mu_R(x,\,y)=\mu_{R^{-1}}(y,\,x)$.

Определение. *Максминной композицией* (произведением) нечетких отношений $\tilde{\mathrm{R}}$ и $\tilde{\mathrm{G}}$, заданных на $\mathrm{X}\times\mathrm{Z}$ и

$Z\times Y$ соответственно, называется нечеткое отношение $\tilde{F}=\tilde{R}\circ\tilde{G}$ на множестве $X\times Y$ с функцией принадлежности

$$\mu_F(x,\ y)=\sup_{z\in Z}\min\{\mu_R(x,\ z),\ \mu_G(z,\ y)\},.$$

Определение. *Минимаксной композицией* (произведением) нечетких отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{G}$, заданных на $X\times Z$ и $Z\times Y$ соответственно, называется нечеткое отношение $\tilde{F}=\tilde{R}\bullet\tilde{G}$ на множестве $X\times Y$ с функцией принадлежности $\mu_F(x,\ y)=\inf\limits_{z\in Z}\max\{\mu_R(x,\ z),\ \mu_G(z,\ y)\},.$

Определение. *Максмультипликативной композицией* (произведением) нечетких отношений $\tilde{R}$ и $\tilde{G}$, заданных на $X\times Z$ и $Z\times Y$ соответственно, называется нечеткое отношение $\tilde{F}=\tilde{R}*\tilde{G}$ на множестве $X\times Y$ с функцией принадлежности $\mu_F(x,\ y)=\sup\limits_{z\in Z}\{\mu_R(x,\ z)\cdot\mu_G(z,\ y)\},.$

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{R}$ на $X\times X$ называется *максминтранзитивным,* если $\tilde{R}\circ\tilde{R}\subseteq\tilde{R}$.

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{R}$ на $X\times X$ называется *минмакстранзитивным,* если $\tilde{R}\bullet\tilde{R}\supseteq\tilde{R}$.

Определение. Нечеткое отношение $\tilde{R}$ на $X\times X$ называется *максмультитранзитивным,* если $\tilde{R}*\tilde{R}\subseteq\tilde{R}$.

Определение. Транзитивным замыканием $\tilde{R}$ нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется следующее отношение $\hat{R}=\tilde{R}\cup\tilde{R}^2\cup\tilde{R}^3\cup\ldots\cup\tilde{R}^n\cup\ldots$, где

$\tilde{R}^n=\underbrace{\tilde{R}\circ\tilde{R}\circ\ldots\circ\tilde{R}}_{n\ раз}$ для максминного или

$\tilde{R}^n=\underbrace{\tilde{R}*\tilde{R}*\ldots*\tilde{R}}_{n\ раз}$ для максмультипликативного

транзитивного замыкания. Минимаксное транзитивное замыкание определяется формулой $\hat{\mathrm{R}} = \tilde{\mathrm{R}} \cap \tilde{\mathrm{R}}^2 \cap \tilde{\mathrm{R}}^3 \cap \ldots \cap \tilde{\mathrm{R}}^n \cap \ldots$, где

$$\tilde{\mathrm{R}}^n = \underbrace{\tilde{\mathrm{R}} \bullet \tilde{\mathrm{R}} \bullet \ldots \bullet \tilde{\mathrm{R}}}_{n\ раз}.$$

Для X, состоящего из n элементов верно, что $\tilde{\mathrm{R}}^{n+k} = \tilde{\mathrm{R}}^n$ при любом натуральном k. Поэтому транзитивное замыкание в этом случае вычисляется за конечное число шагов.

Пример. Найти максминную ($\tilde{\mathrm{F}}_1$), минимаксную ($\tilde{\mathrm{F}}_2$) и максимультипликативную ($\tilde{\mathrm{F}}_3$) композиции нечетких отношений $\tilde{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix}$ и $\tilde{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{bmatrix}$.

Решение. В случае конечных множеств X, Y, Z матрица нечеткого отношения $\tilde{\mathrm{F}} = \tilde{\mathrm{R}} \circ \tilde{\mathrm{G}}$ получается как максминное произведение матриц $\tilde{\mathrm{R}}$ и $\tilde{\mathrm{G}}$. Эта операция выполняется как обычное произведение матриц, в котором операция поэлементного умножения заменена на нахождение минимума, а суммирование - на нахождение максимума. Аналогично определяются операции минимаксной и максимультипликативной композиции. Таким образом получаем $\tilde{\mathrm{F}}_1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$;

$$\tilde{\mathrm{F}}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,8 & 0,8 \end{bmatrix}; \ \tilde{\mathrm{F}}_3 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,06 \\ 0,5 & 0,32 \end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить максминную, минимаксную и максмультипликативную копозиции пар нечётких отношений.

1.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,2	0,7	0,3
X2	0,1	0,4	0,8

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	1	0,5	0,6	0,4
Y2	0,2	0	0.9	0,1
Y3	0,7	0,4	0,7	0,6

2.

R1	Y1	Y2
X1	0,8	0,4
X2	0,54	0,9
X3	0,1	0,28
X4	0,37	0

R2	Z1	Z2
Y1	0,9	0,63
Y2	0,38	1

3.

R2	Z1	Z2	R2
Y1	0,9	0,63	Y1
Y2	0,38	1	Y2

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,44	0,67	0,62	0,3
Y2	0,58	0,55	0,44	0,81
Y3	0,56	0,76	0,37	0,15

4.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,06	0,83	0,22
X2	0,63	0,43	0,97
X3	0,58	0,48	0,71

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,82	0,66	0,62	0,5
Y2	0,58	0,55	0,44	0,37
Y3	0,56	0,76	0,37	0,2

5.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,71	0,83	0,29
X2	0,63	0,8	0,9
X3	0,8	0,42	0,7

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,22	0,67	0,2	0,3
Y2	0,58	0,18	0,44	0,81
Y3	0,6	0,76	0,37	0,15

6.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,07	0,9	0,29
X2	0,33	0,48	0,7
X3	0,58	0,4	0,71

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,46	0,67	0,62	0,3
Y2	0,5	0,55	0,44	0,81
Y3	0,56	0,76	0,37	0,23

7.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,2	0,5	0,3
X2	0,9	0,4	0,6

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	1	0,5	0,7	0,4
Y2	0,8	0,1	0.9	0,1
Y3	0,7	0,4	0,7	0,6

8.

R1	Y1	Y2
X1	0,8	0,4
X2	0,54	0,9
X3	0,1	0,28
X4	0,37	0

R2	Z1	Z2
Y1	0,9	0,63
Y2	0,38	1

9.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,83	0,83	0,2
X2	0,3	0,4	0,97
X3	0,58	0,42	0,71

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,44	0,67	0,62	0,3
Y2	0,16	0,55	0,49	0,81
Y3	0,56	0,76	0,37	0,55

10.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,8	0,3	0,2
X2	0,3	0,4	0,9
X3	0,5	0,2	0,1

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,4	0,6	0,6	0,3
Y2	0,1	0,5	0,4	0,1
Y3	0,5	0,7	0,3	0,5

11.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,3	0,3	0,2
X2	0,3	0,4	0,7
X3	0,8	0,2	0,1

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,4	0,8	0,3	0,2
Y2	0,1	0,3	0,4	0,9
Y3	0,5	0,5	0,2	0,1

12.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,5	0,6	0,4
X2	0	0.9	0,1
X3	0,4	0,7	0,6

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	1	0,2	0,3	0,3
Y2	0,5	1	0,1	0,1
Y3	0,6	0,3	1	0,3

13.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	1	0,2	0,3
X2	0,5	1	0,1
X3	0,6	0,3	1

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,2	0,5	0,6	0,4
Y2	0	0	0.9	0,1
Y3	1	0,4	0,7	0,6

14.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	1	0,3	0,2
X2	0,3	0,4	0
X3	1	0,2	0,1

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,4	0,1	0,2	0,3
Y2	0,1	0,5	0,4	0,6
Y3	0,5	0,7	0,8	0,9

15.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0	0,8	0,2
X2	0,3	0,4	0,9
X3	0,5	0,2	0,7

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,3	0,2	0,3	0
Y2	0,5	0,4	1	0
Y3	0,6	0,3	0,5	0,7

16.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	1	1	0,2
X2	0,3	0,4	0,9
X3	0,8	0,4	0,7

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0	0,5	0,6	0,4
Y2	1	0	0.9	0,1
Y3	0	0,4	0,7	0,6

17.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,3	0	1
X2	0,3	1	0,9
X3	0,7	0,2	1

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,7	1	0,2	0,3
Y2	0,1	0,5	0,5	0,1
Y3	0,6	0,6	0,3	1

18.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,5	0,6	0,4
X2	0	0.9	0,1
X3	0,4	0,7	0,6

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0	0,7	0,6	0,3
Y2	0,6	1	0	0,8
Y3	0,6	0,7	0,7	0

19.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,8	0,3	0,2
X2	0,7	0	0,9
X3	0,8	0,4	0,4

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	1	0,3	0,2	0,7
Y2	0,3	0,4	0	0,8
Y3	1	0,2	0,1	0,5

20.

R1	Y1	Y2	Y3
X1	0,1	0,2	0,3
X2	0,5	0,4	0,6
X3	0,7	0,8	0,9

R2	Z1	Z2	Z3	Z4
Y1	0,9	0	0,8	0,2
Y2	1	0,3	0,4	0,9
Y3	0,6	0,5	0,2	0,7

Найти транзитивные замыкания отношений, заданных следующими матрицами.

21.

R	X1	X2	X3
X1	0,8	0,3	0,2
X2	0,3	0,4	0,9
X3	0,5	0,2	0,1

22.

R	X1	X2	X3
X1	0,4	0,6	0,6
X2	0,1	0,5	0,4
X3	0,5	0,7	0,3

23.

R	X1	X2	X3
X1	0,7	0,2	0,3
X2	0,5	0,4	0,1
X3	0,6	0,7	0,5

24.

R	X1	X2	X3
X1	1	0,5	0,7
X2	0,8	0,1	0.9
X3	0,7	0,4	0,7

25.

R	X1	X2	X3
X1	0,5	0,6	0,4
X2	0	0.9	0,1
X3	0,4	0,7	0,6

26.

R	X1	X2	X3
X1	1	0,2	0,3
X2	0,5	1	0,1
X3	0,6	0,3	1

27.

R	X1	X2	X3
X1	0	0,8	0,2
X2	0,3	0,4	0,9
X3	0,5	0,2	0,7

28.

R	X1	X2	X3
X1	0,3	0,2	0,3
X2	0,5	0,4	1
X3	0,6	0,3	0,5

29.

R	X1	X2	X3
X1	1	0,3	0,2
X2	0,3	0,4	0
X3	1	0,2	0,1

30.

R	X1	X2	X3
X1	0,1	0,2	0,3
X2	0,5	0,4	0,6
X3	0,7	0,8	0,9

Литература.

1.Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Учебное пособие для вузов. Под. Ред. В.А.Садовничего-;4-е изд.,стер.-М.: Высшая школа;2003.

2.Оре О., Теория графов. Пер. с агл. Изд-во «Наука», М.,1968.

3.Акимов О.Е., Дискретная математика: логика, группы, графы.- М.Лаборатория Базовых знаний,2001.

4.Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности.- М. «Финансы и статистика»,2001.

5.Москинова Т.И. Дискретная математика. Математика для менеджеров в примерах и упражнениях. Учебное пособие.- М. Логос – 2000.

6.Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.. Элементы дискретной математики. Учебник. М. Инфра-М. Новосибирск, изд. НГТУ, 2002.

7.Воронов М.В., Мещерякова Г.П.. Математика для студентов гуманитарных факультетов. Ростов н\Д, Феникс, 2002.

8.Асеев Г.Т., Абрамов О.М., Ситников Д.Э.. Дискретная математика. Учебное пособие. Ростов н\Д, Феникс, Харьков, Торсинг, 2003.

9.Козлов В.П.. Математика для юристов. Курс лекций для студентов высших учебных заведений. Киров, частный издатель А.А.Михеев, 1998.

10.Аронович А.Б., Афанасьева М.Ю., Суворов Б.П. Сборник задач по исследованию операций. М. Изд-во МГУ,1997.

11.Редькин Н.П.. Дискретная математика. Курс лекций для студентов-механиков. СПб: изд-во «Лань» - 2003.

12.Крейн С.Г. Математическое программирование. Учебное пособие. Воронеж: изд-во ВГУ, 1983.

13.Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. СПб: изд-во «Питер»,2000.

14.Романовский И.В. Дискретный анализ. Учебное пособие для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике. 3-е изд. пер. и дополн. СПб: Невский Диалект. БХВ .Петербург,2003.

15.Козлов В.Н. Математика и информатика. Учебное пособие. СПб: изд-во СПб ГТУ, 2001.

16.Фролькис В.А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. 2-е изд. СПб, Питер, 2002.
17. Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. Учебное пособие.- М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.
18. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Математическая логика: Конспекты лекций. Воронежский государственный педагогический университет. 2003. –48с.
19. Колупанова Г.А., Петрова Л.П. Основы дискретной математики: Учебное пособие.– Воронеж. ВЭПИ - 2007.

Учебное издание

Галина Андреевна Колупанова
Любовь Петровна Петрова

Задачи и упражнения по численным методам, теории множеств, теории графов, математической логики, по нечетким множествам и нечетким отношениям. Методические указания.