30.11.19

Лекция №8

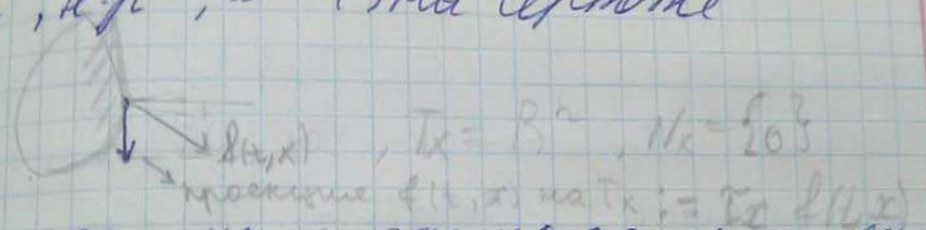
Если бы не было ограничений в виде Q, то пусть точка x движется по з-ну:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (*)$$

Ограничение накладывает след. отпечаток на ур-и!

1) пока (·)x внутри Q, она движ-ся по з-ну (*);

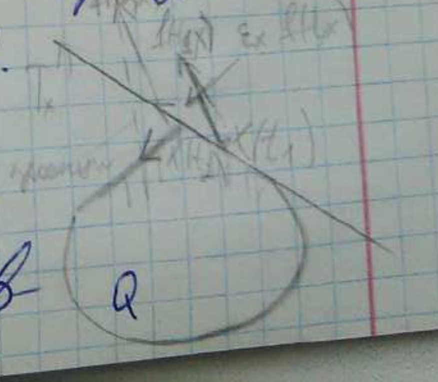
2) когда x выходит на границу, то она начин. движ-ся по касат-ой, составляющей функ f, н-р, в (·) на чертеже



тогда ур-е запис-ся: $\dot{x} = \tau_x f(t,x)$ (проекция на касат-ой конус)

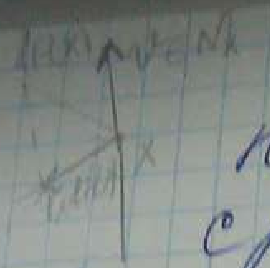
В 1сл $f(t,x) = \tau_x f(t,x)$ (т.е. совпадает со своей проекцией на касат-ый конус). Т.обр., в общ. случае движение x опис-ся 2-ым ур-ем

$\dot{x} = \tau_x f(t,x)$ – это ур-е с разрывной правой частью.



Пусть f-постоянна

Есть другое представление.



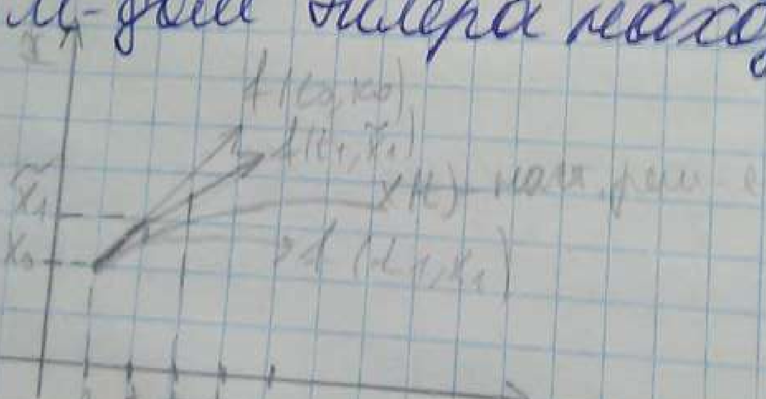
Можно показать, что полученное ДУ $\dot{x} = f(t,x)$ с разрывной пр. частью эк-вив-но диф-му включению:

(2) $\dot{x} \in f(t,x) - N_x$ (их много разностей нах-дит-ся по (...))

Работает и (1) и (2). Как реш-ся такие модели?

Описание метода Эйлера

ДУ $\dot{x} = f(t,x)$ при нач. усл-ии: $x(t_0) = x_0$, прибл. е решение м-дом Эйлера находят след. обр.



1) На оси t отклад. равные промежутки (малые). Вычисляют в (.) (t_0, x_0) f.

$\tilde{x}(t) = f(t_0, x_0)t + x_0 - f(t_0, x_0) \cdot t_0$

$\tilde{x}(t) = f(t_0, x_0) \cdot (t - t_0) + x_0$

2) Вычисляем $\tilde{x}(t_1) = f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) + x_0 := x_1$ цикл для этой точки повторяем, т.е. вычисл. f в (·) (t_1, x_1) и определяем на след. промежутках:

$$\tilde{x}(t) = f(t_1, x_1)(t - t_1) + x_1.$$

$kt + b$

$k = f(t_0x_0)$

$x_0 = f(t_0x_0)b$

$b = x_0 - f(t_0x_0) \cdot t_0.$

Пример

Есть шампур, кот. двиг-ют, то влево, то вправо. Нужно описать з-н движения.

Решение:

$$f(t; x) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \dots \\ -1 & \text{при } t \in [1,2] \cup [3,4] \cup [5,6] \dots \end{cases}$$

М-дом припасовывания решать будем. На котором t интервале. Нач. усл. $x(0) = 0$.

$\dot{x} = f(t, x)$

1) $t \in [0, 1]$, тогда $f(t, x) = 1$, $\dot{x} = 1$, $x = t + C$.

из того $x(0)=0 \Rightarrow 0=0+C \Rightarrow C=0$, тогда

$x=t \quad x(1)=1$.

2) $t\in[1,2]$, $f(t,x)=-1$

$\dot{x}=-1$, $x(1)=1$.

$\Downarrow$

$x=-t+C \Rightarrow 1=-1+C \Rightarrow C=2$

$x(t)=2-t$, $x(2)=0$.

3) $t\in[2,3]$, $f(t,x)=1$, $\dot{x}=1$, $x=t+C$

$x(2)=0$, $0=2+C \Rightarrow C=-2$

$x=t-2$, $x(3)=1$

4) $t\in[3,4]$, $f(t,x)=-1$, $\dot{x}=-1$, $x=-t+C$.

$x(3)=1$, $1=-3+C \Rightarrow C=4$

$x=4-t$

...

$\dot{x}=f(t,x)$, $x(0)=0$.

$t\in[0,1]$, $x=t$

$t\in[1,2]$, $x=2-t$

$t\in[2,3]$, $x=t-2$

$t\in[3,4]$, $x=4-t$

реш, что многозн., если есть раз

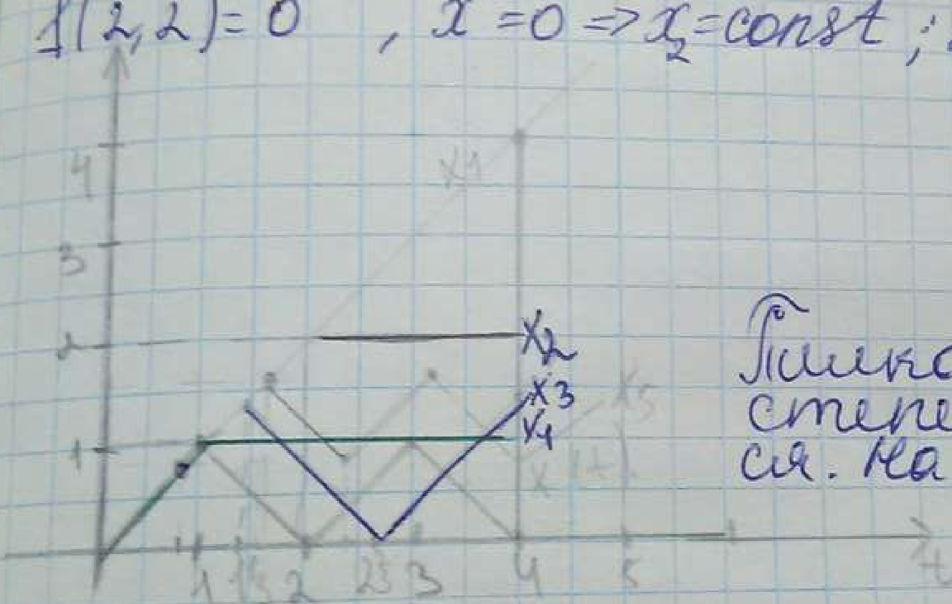
так: $F(t,x)=\begin{cases} f(t,x) \text{ при } t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N} \\ [-1,1] \text{ при } t\in\mathbb{N}\end{cases}$ ф-ция Эвиладзы

Построим теперь ломаные Эйлера.

[0,4]

1) $h=4$, при t_0 вычисл. $f(t_0,x_0)=1$,
$x_1=t$

2) [0,4] на 2 части ① [0,2] и ② [2,4].
[0,2] $x_2=t$, $x_2(2)=2$.
$f(2,2)=0$, $x'=0 \Rightarrow x_2=const$; $2=C \Rightarrow x_2=C$



Ломка будет постепенно сходится. На мал. числах искажения

3) [0,4] на 3 части делим, $[0, 1\frac{1}{3}]$, $[1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}]$, $[2\frac{2}{3}, 4]$

$x_3=t$, $x_3(1\frac{1}{3})=1\frac{1}{3}$

$F(1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})=-1$, $x_3'=-1 \Rightarrow x(1\frac{1}{3})=1\frac{1}{3}$,

$1\frac{1}{3}=-1\frac{1}{3}+c \Rightarrow c=2\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ на среднем промежутке $x_3=2\frac{2}{3}-t$ на $[1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}]$,

$x_3(2\frac{2}{3})=0$

На послед. промежутке:

$F(2\frac{2}{3}, 0) = 1$, $x_3 = t - 2\frac{2}{3}$ на $[2\frac{2}{3}; 4]$

$x_3(4) = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

4) $[0, 4]$ на 4

а) $[0, 1]$, $x_4 = t$, $x_4(1) = 1$

$F(1, 1) = [-1, 1] \ni v = 0$

б) $[1, 2]$, $\dot{x}_4 = 0$, $x_4 = c$

$x_4(1) = 1, c = 1$, $x = 1$

$\vdots$

$x_4 = 1$

5) $[0, 4]$ на 5 частей

$0,8$

а) $[0, 0,8]$, $\underline{x_5 = t}$, $x_5(0,8) = 0,8$

$x_5(1,6) = 1,6$

б) $[0,8, 1,6]$ $x_5 = t + c$, $0,8 = +0,8 + C$, $C = 0$, $\underline{x_5 = [illegible] t}$

в) $[1,6, 2,4]$, $x_5 = -t + c$, $1,6 = -1,6 + C$, $C = 3,2$, $\underline{x_5 = -t + 3,2}$

$x_5(2,4) = 0,8$

г) $[2,4, 3,2]$ $x = t + c$, $0,8 = 2,4 + C$, $C = -1,6$, $x_5 = t - 1,6$

$x_5(3,2) = 1,6$

д) $[3,2, 4]$ $x = -t + c$, $1,6 = -3,2 + C$, $C = 4,8$, $\underline{x_5 = 4,8 - t}$

$x(4) = 0,8$

Практика

Из олимпиады.

1) Придумали из 4 разных слов пин-код $x\,y\,z\,v$. Две первые и

две последние яви. квад. ми нат. чисел, а сумма средних цифр равна сумме крайних $x+v=y+z$. Все комбинации и найти наименьшее – это пин-пор.

Решение:

$xyzv$, $x+v=y+z$

$10x+y=n^2$

$10z+v=m^2$

16, 25, 36, 49, 64, 81 → наим. 1649

2) Самолет летел сначала со ск. 220 км/ч, когда ему осталось пролететь на 385 км, чем он пролетел, он изменил ск. на 330 км/ч. Ср. ск. самолета оказ. равно 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет.

Решение:

Строим таблицу со значениями:

	v	t	S	$S=v\cdot t$
I	220	$x/220$	x	✓
II	330	$(x-385)/330$	$x-385$	✓
среднее	250	$\frac{x}{220}+\frac{x-385}{330}$	$2x-385$	$2x-385=250\cdot\left(\frac{x}{220}+\frac{x-385}{330}\right)$

$\cdot 660$

$1320x-385\cdot 660=250\cdot 3x+250\cdot 2x-250\cdot 2\cdot 385$

$132x-385\cdot 66=25\cdot 3x+25\cdot 2x-25\cdot 2\cdot 385$

$132x-75x-50x=385\cdot 66-25\cdot 2\cdot 385$

$7x=385(66-50)$

$x=55\cdot 16=880$ км – 1 часть

1) $880\cdot 2-385=1760-385=1375$

Ответ: 1375 км – общее расстояни

3) Мне вдвое больше лет, чем Вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам тепер[ь] Вам будет столько лет, ск. мне теперь, когда сумма наших возрастов будет рав[н]а 63 годам. Ск. лет каждому?

Люди	Сейчас	Было	Будет	Разность
1	x	y	$63-x$	
2.	y	$\frac{x}{2}$	x	

Разност $x-y = y-\frac{x}{2} = 63-x-x$

$$\begin{cases} x-y=y-\frac{x}{2}, \\ x-y=63-2x. \end{cases} \quad \begin{cases} x+\frac{x}{2}=2y, \\ 3x=63+y \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x-63. \\ 1,5x-6x+126=0 \end{cases}$$

$126=4,5x$

$x=126:4,5$

$x=28$ лет.

1) $y=3\cdot28-63=84-63=21.$

Ответ: 28 и 21 лет.