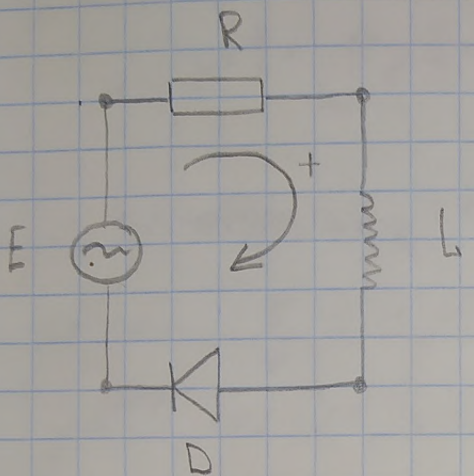
§6 Модели с разрывностью и модели с многозначностью

23.11.19

6.1. Примеры разрывных моделей

Пример 1. Рассмотрим цепь



Здесь работает I закон Кирхгофа => ток на всех элементах одинаков, обозначим его через i

D – Диод пропускает ток только в одну сторону

По II закону Кирхгофа сумма падений напряжения по единственному току = 0, т.е.

$U_E + U_R + U_L + U_D = 0$ (*)

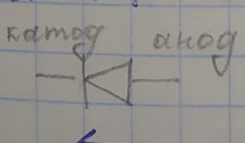
$U_R = i \cdot R$ Законы Ома

$U_L = i' L$

Заданая функция будет следующей: $U_E = -A\cos\omega t$

Подставив в (*) уравнения элементов, получим: $i'L + iR + U_D = A\cos\omega t$ (v)

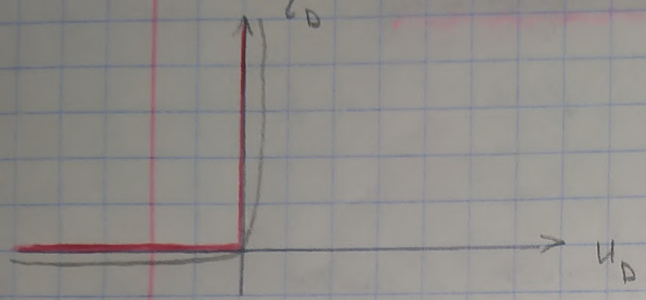
$\{ \; i_D$



$i_D > 0$ $i_D > 0$ $U_D = 0$

$i_D = 0$, то $U_D \in [0, -\infty)$

"Диод пробит" – когда начинает пропускать в обратную сторону }



Часто такие уравнения решаются методом припасовывания.

• Если $i > 0$, то

$i' L + iR = A\cos\omega t$ (1)

Согласно этому уравнению цепь работает, пока $i \geq 0$

• Если $U_D < 0$, то $i = 0$, а (v):

$U_D = A\cos\omega t$ (2)! (уравнение работает пока $U_D \leq 0$)

[0, → ?]

1) т.к. $\cos\omega 0 = 1 > 0$, то рассматриваем уравнение (1):

$$i' = -\frac{R}{L} i + \frac{A}{L}\cos\omega t$$

По формуле: $a(t) = -\frac{R}{L}$; $b(t) = \frac{A}{L}\cos\omega t$
обозначим

$\bar{a}(t)$ - первообразная для $a(t)$, тогда

$$i = e^{\bar{a}(t)} \cdot \int e^{-\bar{a}(t)}\, b(t)\, dt$$

$$\bar{a}(t) = -\frac{R}{L}t$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t}\, \frac{A}{L}\cos\omega t\, dt$$

Выпишем отдельно решение $\int$:

Пусть $\frac{R}{t} = c$, тогда:

$$\int e^{ct}\cos\omega t\, dt = \left\{\begin{array}{ll} u = \cos\omega t & du = -\omega\sin\omega t\, dt \\ e^{ct}dt = dv & v = \frac{1}{c}e^{ct} \end{array}\right\} =$$

$$= uv - \int v\,du = \frac{1}{c}e^{ct}\cos\omega t - \int \frac{1}{c}e^{ct}(-\omega\sin\omega t)\,dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \sin\omega t & du = \omega\cos\omega t\, dt \\ e^{ct}dt = dv & v = \frac{1}{c}e^{ct} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{c}e^{ct}\cos\omega t + \frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{c}e^{ct}\sin\omega t - \int \frac{1}{c}e^{ct}\,\omega\cos\omega t\, dt\right)$$

$$\int e^{ct}\cos\omega t\, dt = \frac{1}{c}e^{ct}\cos\omega t + \frac{\omega}{c^2}e^{ct}\sin\omega t - \frac{\omega^2}{c^2}\int e^{ct}\cos\omega t\, dt$$

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cdot \int e^{ct}\cos\omega t\, dt = \frac{e^{ct}}{c}\left(\cos\omega t + \frac{\omega}{c}\sin\omega t\right)$$

$$\int e^{ct}\cos\omega t\,dt = \frac{c^2}{c^2+\omega^2}\cdot\frac{e^{ct}}{c}\left(\cos\omega t + \frac{\omega}{c}\sin\omega t\right)$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\frac{A}{L}\left(\frac{R}{L\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)}e^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega t + \frac{L\omega}{R}\sin\omega t\right)+c\right)$$

$$\left\{\frac{A}{L}\cdot\frac{R}{L\left(\omega^2+\frac{R^2}{L^2}\right)} = \frac{A}{\cancel{L}}\cdot\frac{R}{\frac{L(L^2\omega^2+R^2)}{L^{\cancel{2}}}} = \frac{AR}{L^2\omega^2+R^2}\right\}$$

$$i = \frac{AR}{L^2\omega^2+R^2}\cdot\left(\cos\omega t + \frac{L\omega}{R}\sin\omega t + c\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Необходимо найти решение, при котором $i(0)=0$

$$0 = \frac{AR}{L^2\omega^2+R^2}(1+c) \Rightarrow c=-1$$

Получим окончательное решение:

$$i = \frac{AR}{L^2\omega^2+R^2}\cdot\left(\cos\omega t + \frac{L\omega}{R}\sin\omega t - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

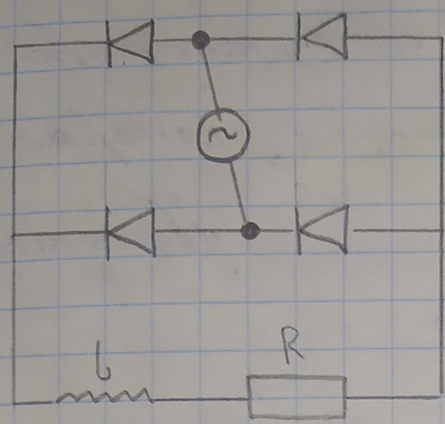
Теперь необходимо найти, при каком $t\neq 0$ $i(t)=0$?

Сначала $u_D=0$, но при переходе ко (2) $u_D = A\cos\omega t$ (cos будет <0)

Т.о., имеем разрыв

Пример 2.

Агрегат выпрямления



Двухполупериодный выпрямитель тока

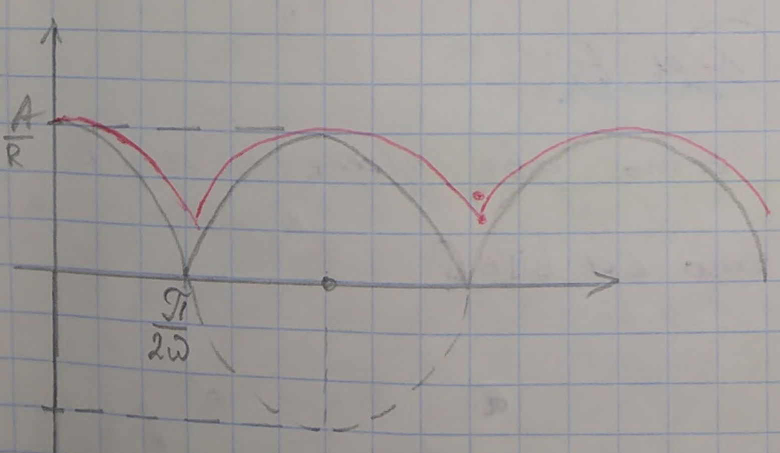
① Пусть $L = 0$, тогда

(1) $$i = \frac{A}{R} \cos \omega t$$

Это уравнение справедливо, пока $\cos \omega t \geq 0$

Когда это перестает выполняться, то получим

новое (1) $$i = -\frac{A}{R} \cos \omega t$$



② При $L > 0$

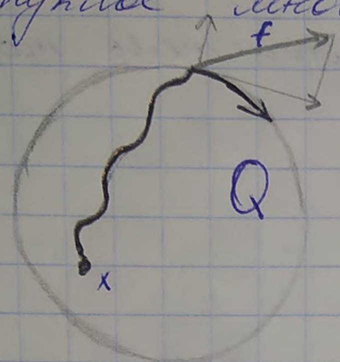
$$i = -\frac{A}{R} \cos \omega t \quad (2)$$

(√) $$i'L + iR + U_D = A \cos \omega t$$

$$U_D \in I(i) = \begin{cases} [-\infty; 0] & \text{при } i = 0 \\ 0 & \text{при } i > 0 \end{cases}$$ ← Оператор

6.2. Модели с многозначными функциями

Пример №1. Пусть есть некоторое выпуклое множество и точка, которая движется.



$f(t, x)$

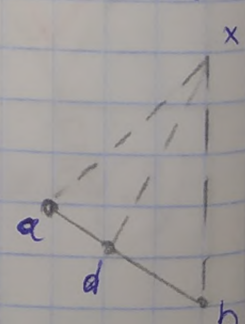
Касательная остается той же при другом f

! **Опр.** Проекцией точки x на выпуклое замкнутое мн-во Q наз-т ближайшую к x точку из Q

Теорема. Для выпуклого замкнутого мн-ва Q проекция $\forall$ точки x единственна

Док-во:

[П] Пусть у x есть две проекции: a и b. Тогда получим, что $[a; b] \in Q$



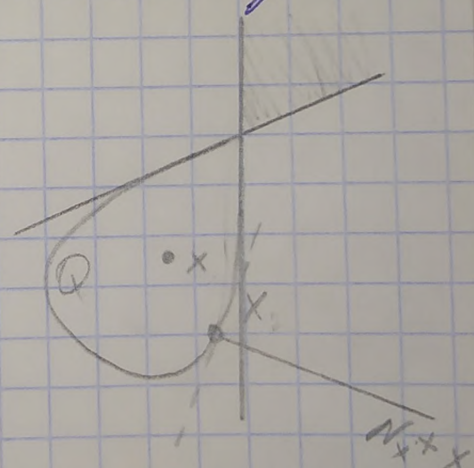
С др. стороны по предположению $ax = bx$, т.е. $\angle$ Δ равнобедренный, но тогда d расположена ближе к x, чем a и b. Это противоречит тому, что a и b - ближайшие к x и различные => противоречие. ч.т.д.

Опр. Нормальным конусом к множеству Q в точке $x \in Q$ назовём $N_x = \{ y : \langle y, z - x \rangle \le 0$ для всех $z \in Q \}$

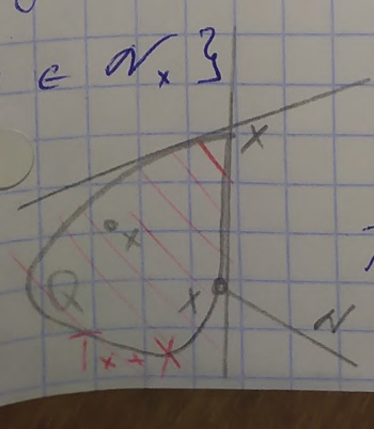
скал. произв.

P_x - проекция x на Q. Другими словами можно сказать, что N_x - мн-во таких элементов пространства, проекция которых совпадает с P_x

Если x_1 - внутренняя точка, то $N_{x_1} = \{0\}$



Опр. Касательным конусок к Q в т. $x \in Q$ наз-ся мн-во $T_x = \{ z : \langle z, y \rangle \le 0$ для всех $y \in N_x \}$



1) x внутри Q $N_x = \{0\}$

$T_x = R^n$