б) $A(2;1) = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Нах. соб. зн: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $-\lambda(2-\lambda)-1=0$,

$-2\lambda+\lambda^2-1=0$, $\lambda^2-2\lambda-1=0$ $D=(2)^2-4\cdot 1(-1)=$

$=4+4=8$, $D=4\cdot 2$, $\lambda=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, $\lambda_1=1+\sqrt{2}>0$ – сис-ма не устойчива.

Лекция 4

26.10.19

§4. Детерминиров-ые и стохастические (вероятностные) модели.

<u>Стохас-ая модель</u> модель, в кот. присутст-ют параметры, носящие случайный, вероятностный хар-р. В отличие от стох-их моделей все остальные наз. детермир-ми моделями.

<u>Пример</u> стох-ой модели.

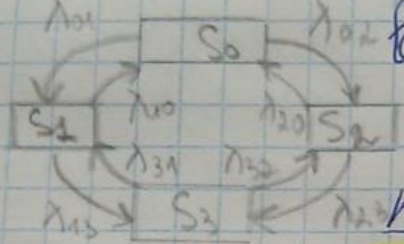
В сис-ме массового обслуживания. Пусть в нек. офисе есть 2 терминала, возможные их состояния: S_0 – оба свободны;

S_1 – 1т. занят, 2-ой свободен

S_2 – 2т. занят, 1– свободен.

S_3 – оба заняты.

Схематически, отн. к сис-ме массового обслуживания.



Это относ. к марковскому процессу. Он подразумевает, что вероят-ые характеристики сис-мы в будущем зависят только от состояния сис-мы в настоящий момент и не зависят от того, каким образом она попала в это состояние в прошлом.

Потоком соб-й наз. послед-ь некот-ых однородных соб-й, возникающих друг за другом в какие-то случайные моменты времени. Среднее число появления этих соб-й в ед. времени наз. интенсивностью потока λ

Можно показать, что на участке времени длиной t, не появ-ся ни одного из последующих соб-й, имеет вер-ь $e^{-\lambda t}$.

Обозн. ч/з P_0 В.-ь того, что сис-ма нах-ся в сост-и S_0 и т.д. $P_0, P_1, .., P_3$.
Обозн. ч/з Δt малый промежуток времени. Выразим В.-ь того, что в момент времени $t+\Delta t$ сис-ма будет в сост-и S_0. В состоянии S_0 сис-ма может придти 2-мя способами:

1) в мом. времени t сис-ма уже находилась в S_0 и за время Δt не вышла из нее, при этом учтем, что В.-ь того, что за Δt произошло хотя одно соб-е:
P(за Δt появ. х. одно соб) $= 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \cdot \Delta t$.

P_0 Δt
P_1 $t+\Delta t$
P_2
P_3

$P(t+\Delta t) = p(t)(1-\lambda\Delta t).$

2) сис-ма нах. в сост-и S_1 или S_2 и перешла в S_0, тогда В.-ь будет.

$P(t+\Delta t) = p_{s_1}(t)\lambda_{s_1}\Delta t$ или $+$

$+ P_{s_2}(t)\lambda_{s_2}\cdot\Delta t$

В.-ь того, что в мом. вр $t+\Delta t$ сис-ма будет нах. в сост-и S_0 запис-ся след. образом:

$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t] + p_1(t)\lambda_{10}\cdot$
$\cdot\Delta t + p_2(t)\cdot\lambda_{20}\Delta t$

$P_0(t+\Delta t) - p_0(t) = P_1(t)\lambda_{10}\Delta t + P_2(t)\lambda_{20}\Delta t -$
$- P_0(t)\cdot(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t.$

Устремим $\Delta t \to 0$, получим:

$P_0' = P_1\lambda_{10} + P_2\lambda_{20} - P_0(\lambda_{01}+\lambda_{02})$ другие:

$P_1' = P_0\lambda_{01} + P_3\lambda_{31} - P_1(\lambda_{10}+\lambda_{13}).$

$P_2' = P_0\lambda_{02} + P_3\lambda_{32} - P_2(\lambda_{20}+\lambda_{23}).$

$P_3' = P_1\lambda_{13} + P_2\lambda_{23} - P_3(\lambda_{31}+\lambda_{32}).$

Сис-ма с 4-мя неизвестными

Часто заданы предположения

что вер-ти сос-ия постоянна,
тогда произв-ое $=0$, получим (1)

Найти В-ти, если $\lambda_{01}=1$,
$\lambda_{10}=2$, $\lambda_{13}=2$, $\lambda_{20}=3$, $\lambda_{31}=3$, $\lambda_{02}=2$,
$\lambda_{23}=1$, $\lambda_{32}=2$

Решение:

$$\begin{cases} P_1 2 + 3P_2 - P_0 3 = 0, \\ P_0 + 3P_3 - 4P_1 = 0, \\ 2P_0 + 2P_3 - 4P_2 = 0 \\ 2P_1 + P_2 - 5P_3 = 0 \end{cases}$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

$$\begin{cases} 2P_1 + 3P_2 = 3P_0, \\ P_0 + 3P_3 = 4P_1, \\ P_0 + P_3 = 2P_2, \\ 2P_1 + P_2 = 5P_3, \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_0 = 4P_1 - 3P_3 \Rightarrow \\ 4P_1 - 3P_3 + P_3 = 2P_2 \\ 2P_1 - P_3 = P_2 \Rightarrow \\ 2P_1 + 2P_1 - P_3 = 5P_3 \Rightarrow 4P_1 = 6P_3 \end{cases}$$

$P_1 = 1{,}5P_3$

$P_2 = 2P_3$

$P_0 = 3P_3$

$7{,}5P_3 = 1$, $P_3 \approx 0{,}13(3)$

$0{,}2 + 0{,}27 + 0{,}4 + 0{,}13 = 1.$

З-чи по физике.

Таблица сост. как:

1. Под каждый объект в з-че выделить по строчке.

2. Первые столбцы заняты под действия/харак-ки этих объектов, в послед. столбце нах мы разместим связи между характеристиками, кот. соотв-ют опред-ые ф-лы (связи).

3. При заполнении в первую очередь польз-ся связями между харак-ми и действиями объектов и только в крайнем случае ф-лами.

4. После табл. в мат. модель запис. из неиспользов-ых ячеек столбцов отвед-ых под ф-лы.

! Хар-ки, кот. треб. узнать, желательно обозн. осн-ми неизвес-и.

№51.

В бассейн 4 трубы проведены, когда 1,2,3 тр. открыты бассейн наполняется за 12 мин, когда 2 и 4 — за 15 мин, если 1,3,4 — за 20 мин. За какое время наполнится бассейн, если все 4 трубы наполнят?

Решение:

$V_б = 1$

	v	t	V	$V = t \cdot v$
1,2,3 тр.	$v_1+v_2+v_3 = \frac{1}{12}$	12	1	✓
2,4	$v_2+v_4 = \frac{1}{15}$	15	1	✓
1,3,4	$v_1+v_3+v_4 = \frac{1}{20}$	20	1	✓
1,2,3,4	$v_1+v_2+v_3+v_4 =$	t - ?	1	$\frac{1}{v_1+v_2+v_3+v_4}$

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = 2(v_1+v_2+v_3+v_4).$$

$$\frac{4}{60} + \frac{3}{60} + \frac{5}{60} = 2(v_1+v_2+v_3+v_4).$$

$v_{общ} = \frac{1}{10}$ мин/v, $t = 10$ мин.

Ответ: 10 мин все вместе.

Мат. модель, нужно связь в табл. найти, при сост. этого не было, то имеем сами.

№2.

Танкер может заполн-ся ч/з 2 трубы, причем ч/з 1 трубу происходит на 5ч медленнее, чем ч/з 2-ую, при каких значениях t заполнение танкера ч/з 1 трубу его заполнение ч/з обе трубы одновр-о занимает не менее 6 часов.

Решение:

	v	t	V	$V=t\cdot v$
I	v	$\frac{1}{v}$	1	✓
II	$\frac{v}{1-5v}$	$\frac{1}{v}-5$	1	✓
I и II	$\frac{v(2-5v)}{1-5v}$	$t\geq 6$	$1-vx$	$1-vx=(v+1)(1/v-5))t$

$$t=\frac{1-vx}{v+1\cdot(1/v-5))}$$

$$\frac{(1-vx)(1-5v)-6(v(2-5v))}{v(2-5v)}\geq 0,$$

$$\frac{(1-vx)(1-5v)-12v+30v^2)}{v\cdot(2-5v)}\geq 0.$$

$$\frac{5v^2x-(x+5)v+1-12v+30v^2}{v(2-5v)}\geq 0,$$

$$\frac{5(x+6)\cdot v^2-(x+17)v+1}{v(2-5v)}\geq 0$$

$D=(x+17)^2-20(x+6)<0,$

$x^2+34x+189-20x-120<0,$

$x^2+14x+169<0$

Не имеет решения!

Не так поняли условие

Домашняя работа

26.10.19

Метод составления

1. Хар-ки, кот. требуется найти, обозначаем основными неизвестными.

2. Для каждого исследуемого объекта в з-че выделяем по строчке в таблице.

3. Первые столбцы отведены для действий / характеристик объектов, в последнем столбце / столбцах размещаем связи между известными характеристиками, которым соответствуют определенные формулы, связи.

4. При заполнении сначала пользуются связями между хар-ми и действиями объектов и только в

крайнем случае, ф-ли.

5. Используя таблицу в мат. модель записывают значение из неиспользов-ых столбцов, отвед-ых под ф-лы

6. Записываем ответ, проверяем.

9.11.19

Лекция №5.

„Чёткие и нечёткие модели

16.11 за янв к 10.45

п.1 Сведения из классич-ой теории множеств

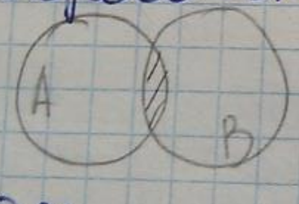
за 21.12 на 14.12

7 дек. посл. день

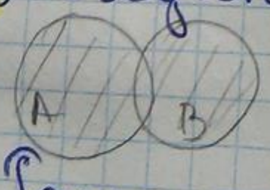
Если есть мн-ва A, B, C, точно не опред-ся никак, сов-ти эл-в

Операции над мн-ми:

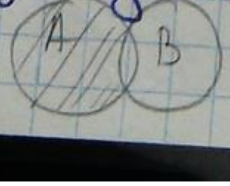
1) Пересечение $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$



2) Объединение $A \cup B = \{x : x \in A \text{ либо } x \in B\}$



3) Разность $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$

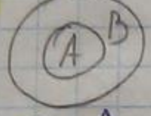


U - универс-ое мн-во

4) Дополнение $\bar{A} = CA = \{x : x \notin A \, (x \in U)\}$

Отношения между мн-ми:

1) Включение $A \subseteq B \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \forall(x)[x \in A \to x \in B]$



2) Равенство мн-в

$A = B \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} A \subset B$ и $B \subset A$ или

$A = B \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \forall(x)[x \in A \leftrightarrow x \in B]$

Осн. св-ва операций:

1° Коммутативность: $A \cap B = B \cap A$,

$A \cup B = B \cup A$.

2° Ассоциативность: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3° Дистрибутивность: $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

$A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

п2. Нечёткие мн-ва и операции над ними.

A,

$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}$ — нечеткое мн-во (описания

Ф-ция μ_A - ф-ция принадлеж-ности мн-ву A.

Нечёткое мн-во A описывает-ся ф-цией принадлежности μ_A, значения кот-ой расположе-ны в отрезке $[0,1]$

A Носитель нечёткого мн-ва - это (клас. обычное) мн-во тех эл-ов $\{x : \mu_A(x) \neq 0 \quad (\mu_A(x) > 0)\} = A$

Ядро нечёткого мн-ва $core\,A = \{x : \mu_A(x) = 1\}$

Высота нечёткого мн-ва $h_A = \sup \mu_A(x)$

Операции с нечёткими мн-ми.

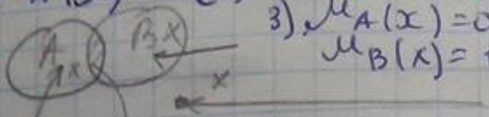
Для $\alpha \in (0,1]$ α-сечением не-четкого мн-ва A наз. мн-во (классич-ое) $A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$, а сечение A_0 совпадает с носителем A.

1 Пересечение: $A \cap B$ для нечеткого мн-ва хар-ся с ф-цией $\mu_{A \cap B}(x) =$

$= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

2. Объединение: $A \cup B$ харак-ся ф-цией $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$



3) $\left.\begin{array}{l}\mu_A(x)=0\\ \mu_B(x)=1\end{array}\right| \Rightarrow \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}=0$

4) $\left.\begin{array}{l}\mu_A(x)=0\\ \mu_B(x)=0\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\min\{\ldots\}=0\\ \max\{\ldots\}=0\end{array}$

1) $\left.\begin{array}{l}\mu_A(x)=1\\ \mu_B(x)=0\end{array}\right| \Rightarrow \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}=0$

2) $\left.\begin{array}{l}\mu_A(x)=1\\ \mu_B(x)=1\end{array}\right| \Rightarrow \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}=1$.

$\max\{\ldots\}=1$ во всех 3-ех случаях для $\cup$

min и max облад. св-ми 1-3 для $\cup$ и $\cap$ классических!

есть др. ф-ции для $\cup$ и $\cap$ мн-в.

Ф-ции, лежащие в основе $\cap$ и $\cup$ нечётких мн-в.

t-нормой (min) и s-нормой (max) (конормой) наз. ф-ции двух переменных, переводящих квадрат $[0;1] \times [0,1] \xrightarrow{\text{в отрезок}} [0,1]$ и удовл. след. аксиомам:

для $a, b, c \in [0;1]$

1. $t(a,1)=a$, $s(a,0)=a$ — граничные условия.

2. $t(a,b)=t(b,a)$, $s(a,b)=s(b,a)$ — ком-ь

3. $t(a,t(b,c))=t(t(a,b),c)$ и
$s(a,s(b,c))=s(s(a,b),c)$ — асс-ь.

4. Если $b<c$, то $t(a,b)\le t(a,c)$ и
$s(a,b)\le s(a,c)$ — монот-ь

Проверим акс. для max и min.

1-2 легко.

3 — $\min\{a,\min\{b,c\}\}=\min\{\min\{a,b\},c\}$

$\max\{a\ldots\}=\max\{a\ldots\}$ — вып-ся.

4 вып-ся при подстановке.

$\forall t,s$, облад-щих св-ми этими можно вв. своё $\cup$ и $\cap$.

• t-пересечение:
$A\overset{t}{\cap}B$, $\mu_{A\overset{t}{\cap}B}=t(\mu_A(x),\mu_B(x))$

• s-объединение: $A\overset{s}{\cup}B$
$\mu_{A\overset{s}{\cup}B}=s(\mu_A(x),\mu_B(x))$

<u>Примеры:</u>

Вероятностные нормы $a\cdot b$ —

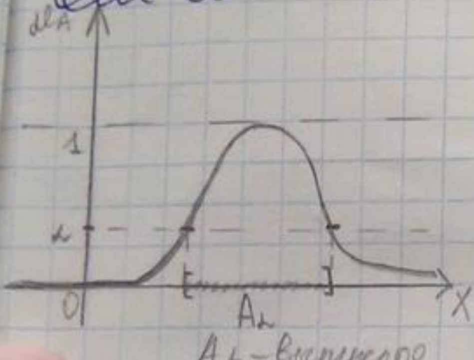
вероят-ая t-норма, а $a+b-a\cdot b$ − вероят-ая s-норма

Нормы Лукасевича

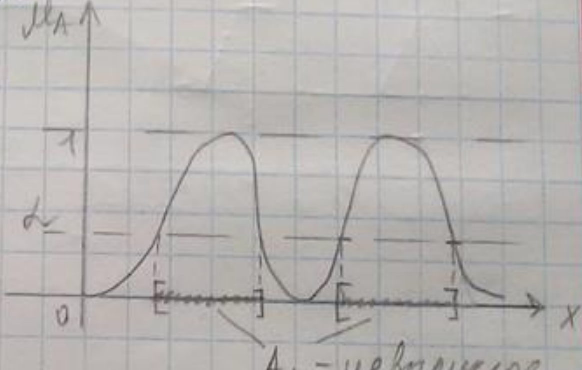
$\max\{a+b-1, 0\}$ − t-норма;

$\min\{a+b, 1\}$ − s-норма.

Рассм. нечеткие числа на унив-ом мн-ве $V=\mathbb{R}$



A_α − выпуклое



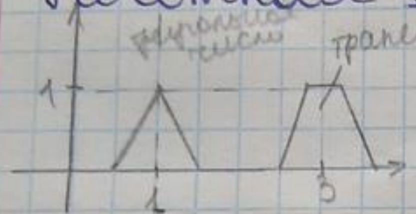
A_α − невыпуклое

Нечёткое мн-во A на унив-ом мн-ве $\mathbb{R}$ наз. **выпуклым**, если $\forall$ $\alpha\in[0,1]$ с α-сечением мн-ва A яв. выпуклыми. **Нечётким числом** будем наз. нечёткое мн-во на унив-ом мн-ве $\mathbb{R}$ с непрерывной и выпуклой ф-цией принадлежности.

$\forall$ непрерыв. ф-ции $f(x_1, \dots, x_n)$ её нечётким значением для нечетких аргументов $x_1, \ldots, x_n$ будем считать нечёткое число, α-сечение кот-го представляет из себя:

$$f_\alpha = \left[\inf_{\substack{x_1 \in (x_1)_\alpha \\ \ldots \\ x_n \in (x_n)_\alpha}} \{f(x_1, \ldots, x_n)\}, \sup_{\substack{x_1 \in (x_1)_\alpha \\ \ldots \\ x_n \in (x_n)_\alpha}} \{f(x_1, \ldots, x_n)\}\right]$$

Нечёткая 1, 3:



№1

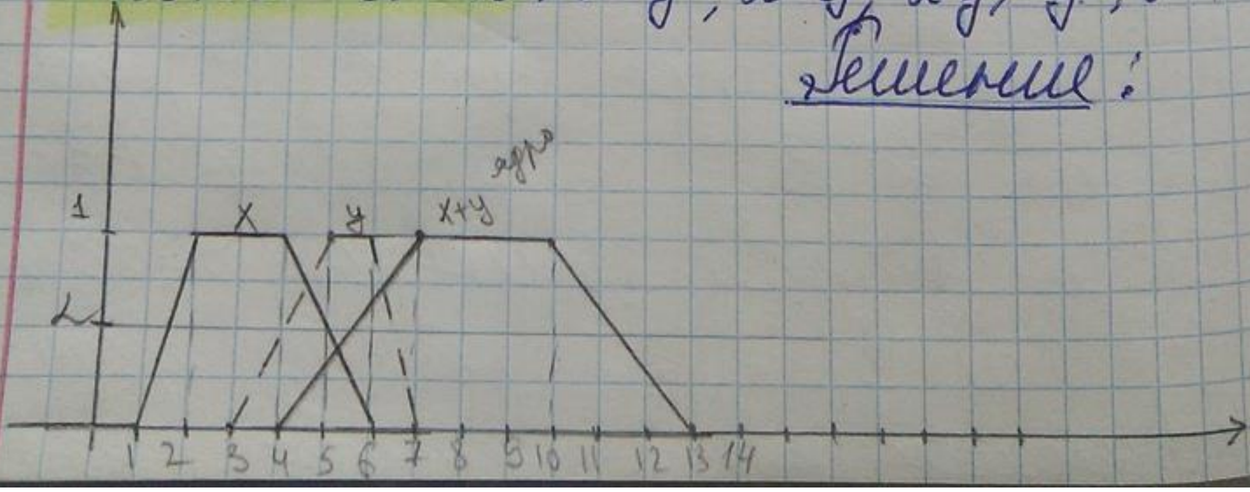
Даны 2 числа, хар-ся ф-ми с-ти:

$$\mu_x(a) = \begin{cases} 0, \text{ при } a<1 \text{ или } a>6 \\ a-1, \text{ при } a \in [1,2] \\ 1, \text{ при } a \in [2,4] \\ \frac{6-a}{2}, \text{ при } a \in [4,6] \end{cases}$$

$$\mu_y(b) = \begin{cases} 0, \text{ при } b<3 \text{ или } b>8 \\ \frac{b-3}{2}, \text{ при } b \in [3,5] \\ 1, \text{ при } b \in [5,6] \\ 7-b, \text{ при } b \in [6,7] \end{cases}$$

Выполнить: $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, x^2

Решение:



1) $x+y$, возь $\alpha = 1$: , то $x_\alpha = x_1 = [2,4]$

$y_\alpha = y_1 = [5,6]$

$\min\limits_{\substack{a\in[2,4]\\ b\in[5,6]}}\{a+b\} = 7$, $\max\limits_{\substack{a\in\{2,4\}\\ b\in\{5,6\}}}\{a+b\} = 10$

На нулевом уровне, $\alpha = 0$, то

$x_\alpha = x_0 = [1,6]$, $y_\alpha = y_0 = [3,7]$

$\min\limits_{\substack{a\in[1,6]\\ b\in[3,7]}}\{a+b\} = 4$, $\max\limits_{\substack{a\in[1,6]\\ b\in[3,7]}}\{a+b\} = 13$

Если α в середине, тогда будет:

$\alpha = (0,1)$, $x_\alpha = [\alpha+1, 6-2\alpha]$

$y_\alpha = [2\alpha+3, 7-\alpha]$

$\min\limits_{\substack{a\in[\alpha+1,6-2\alpha]\\ b\in[2\alpha+3,7-\alpha]}}\{a+b\} = 3\alpha+4$, $\max\limits_{\substack{a\subset[\alpha+1,6-2\alpha]\\ b\in[2\alpha+3,7-\alpha]}}\{a+b\} = 13-3\alpha$.

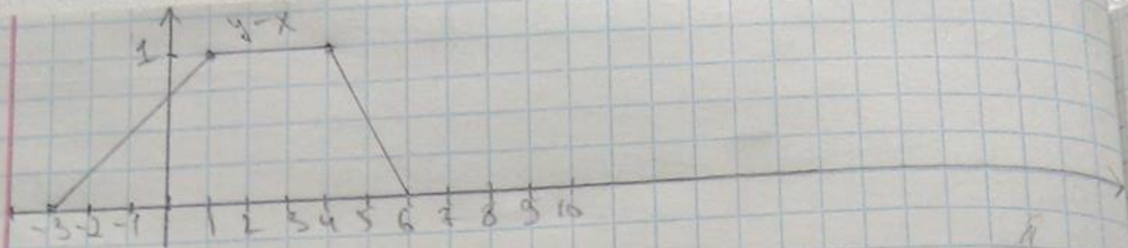
$$\mu_{x+y}(c) = \begin{cases} 0 \text{ для } c<4 \text{ и } c>13 \\ \frac{c-4}{3} \text{ для } c\in[4,7] \\ 1 \text{ для } c\in[7,10] \\ \frac{13-c}{3} \text{ для } c\in[10,13] \end{cases}$$

2) $x-y$, $\alpha = (0,1)$

$y-x$ посчитаем это.

$(y-x)_0 = [-3, 6]$ – носитель

$(y-x)_1 = [1,4]$



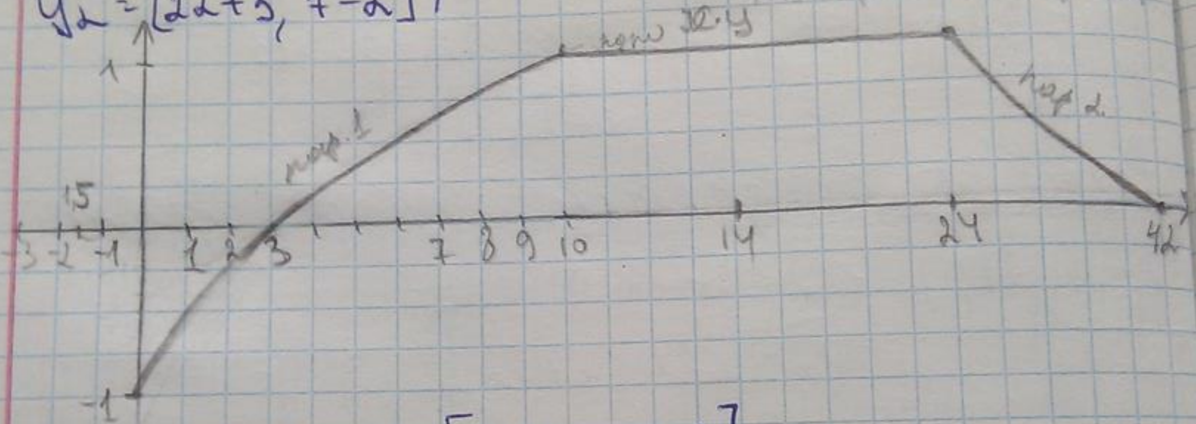
3) xy , $\alpha \in (0,1)$, тогда

$2\alpha^2+5\alpha+3 = c$ $\quad 2\alpha^2-10\alpha+42 = c$

$x_\alpha = [\alpha+1, 6-2\alpha]$

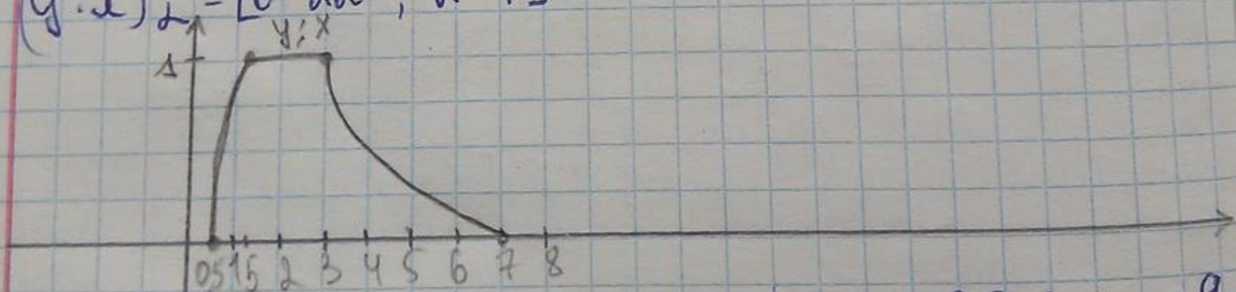
$y_\alpha = [2\alpha+3, 7-\alpha]$ $\Rightarrow (x\cdot y)_\alpha = [(\alpha+1)(2\alpha+3), (6-2\alpha)\cdot(7-\alpha)]$

1; 1,5 корни $\quad$ 3, 7 - корни



4) $y : x$, $x_\alpha = [\alpha+1, 6-2\alpha]$,
$y_\alpha = [2\alpha+3, 7-\alpha]$

$(y:x)_\alpha = \left[\frac{2\alpha+3}{6-2\alpha}, \frac{7-\alpha}{\alpha+1}\right]$



$\frac{2\alpha+3}{6-2\alpha} = c$, $2\alpha+3 = 6c-2c\alpha$, $\alpha = \frac{6c-3}{2+2c} = 3 - \frac{9}{2(c+1)}$

$7-\alpha = c\alpha + c$, $\alpha = \frac{7-c}{c+1} = -1 + \frac{8}{c+1}$.