50
вариантов заданий

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ 2019

ТИПОВЫЕ
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

- 50 вариантов заданий
- Ответы и решения
- Критерии оценок
- Бланки ответов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

50 вариантов заданий
Ответы и решения
Критерии оценок
Бланки ответов

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА
2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ** 2019. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; **под ред. И. В. Ященко**. — М. : Издательство «Экзамен», 2019. — 263, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 50 вариантов. Тесты от разработчиков»)

ISBN 978-5-377-13516-6

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

Книга содержит 50 вариантов комплектов типовых тестовых заданий по математике, составленных с учетом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена по математике профильного уровня 2019 года.

Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов по математике профильного уровня, степени трудности заданий.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов, приводятся решения всех заданий части 2 пяти вариантов.

Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 12,39.
Усл. печ. л. 33. Тираж 50 000 экз. Заказ 6136/18

ISBN 978-5-377-13516-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион ☐☐
Код предмета ☐☐
Название предмета ☐☐☐☐☐☐☐☐☐
С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка
Номер варианта ☐☐☐

ВНИМАНИЕ! *Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета*

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1		21	
2		22	
3		23	
4		24	
5		25	
6		26	
7		27	
8		28	
9		29	
10		30	
11		31	
12		32	
13		33	
14		34	
15		35	
16		36	
17		37	
18		38	
19		39	
20		40	

☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐-☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 2

Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта

Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

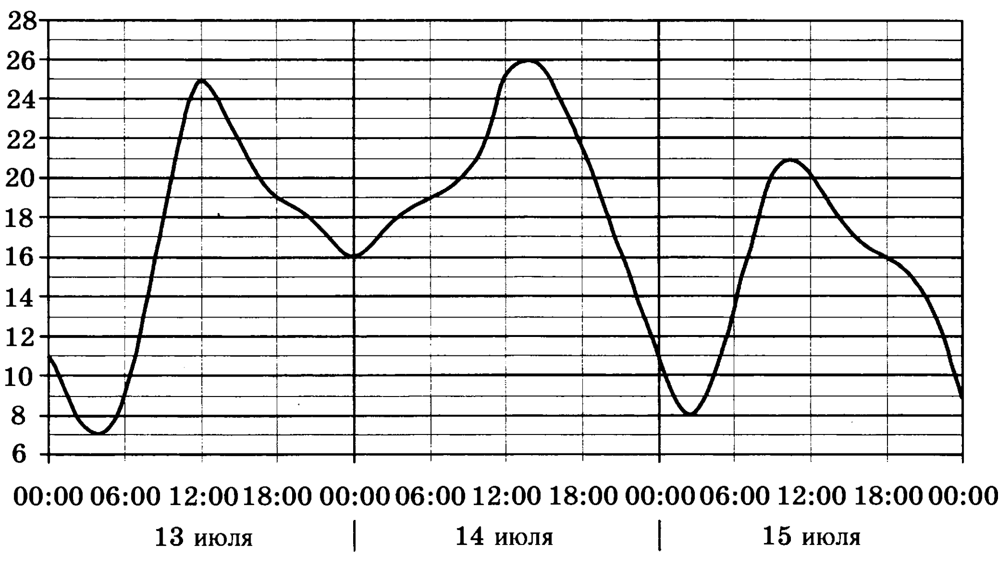
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

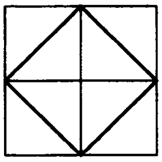
Часть 1

1. Розничная цена учебника 230 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 8200 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 14 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



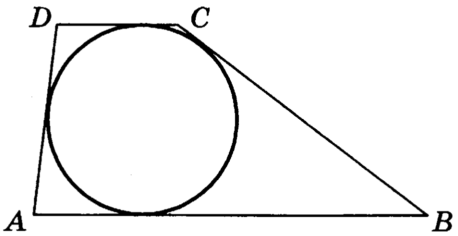
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



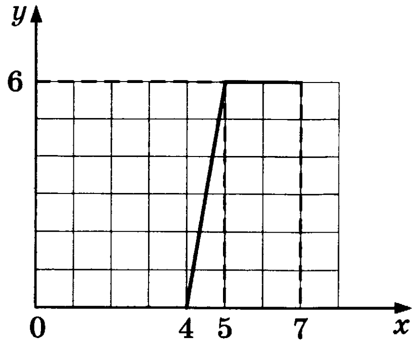
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 55% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_2 (10 - 5x) = 3 \log_2 5$.

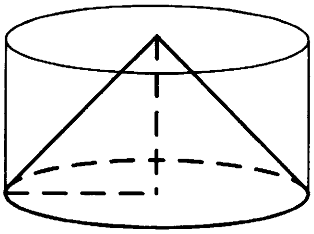
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 25 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $14\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{12}-\sqrt{48}\right)\cdot\sqrt{3}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}6$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 7{,}4\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 33 300 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 14 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 4 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2(x-8)+10$ на отрезке $[-9;\ 5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi+x)\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi;\ \frac{17\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и ребром MB.

15. Решите неравенство $0{,}5^{-\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 10^{x} \cdot x^{-2} \geqslant \dfrac{32^{-\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 40^{x}}{16x^{2}}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 2$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 9% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax + 3)(y + x - a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет от одного до пяти решений.

19. На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Может ли оказаться так, что первое число равно 8, а шестое равно 5?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1000, а двадцатое равно 62?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1000, а последнее число равно 9?

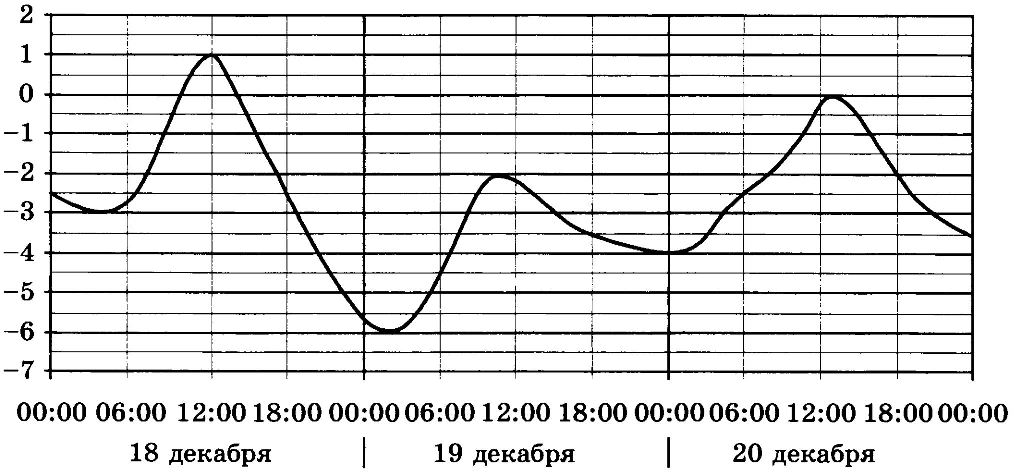
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

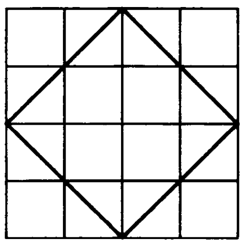
Часть 1

1. Розничная цена учебника 156 рублей, она на 30% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 4000 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 18 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



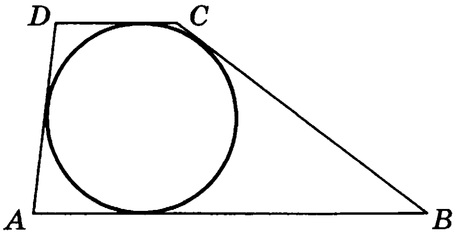
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



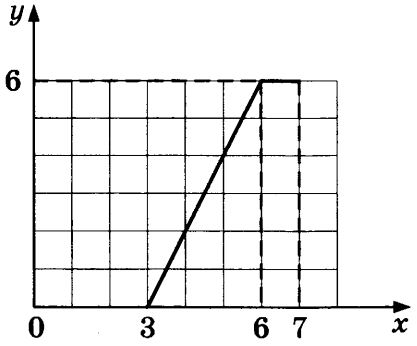
4. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 60% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(5-2x)=2\log_3 5$.

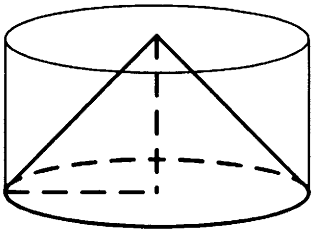
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 5 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7)-F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{50}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 3$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}7$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 9{,}3\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25 110 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 19 рабочих, а во второй — 27 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+9)^2(x-5)-5$ на отрезке $[-19; -5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $AB = 2\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{2x+2}{x+4}} \cdot 18^{2x} \cdot 3x^{-2} \leqslant \frac{27^{-\frac{x+1}{x+4}} \cdot 12^{x}}{9x^{2}}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 4$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 18% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19. На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Может ли оказаться так, что первое число равно 12, а седьмое равно 2?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1200, а двадцать пятое равно 63?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1200, а последнее число равно 5?

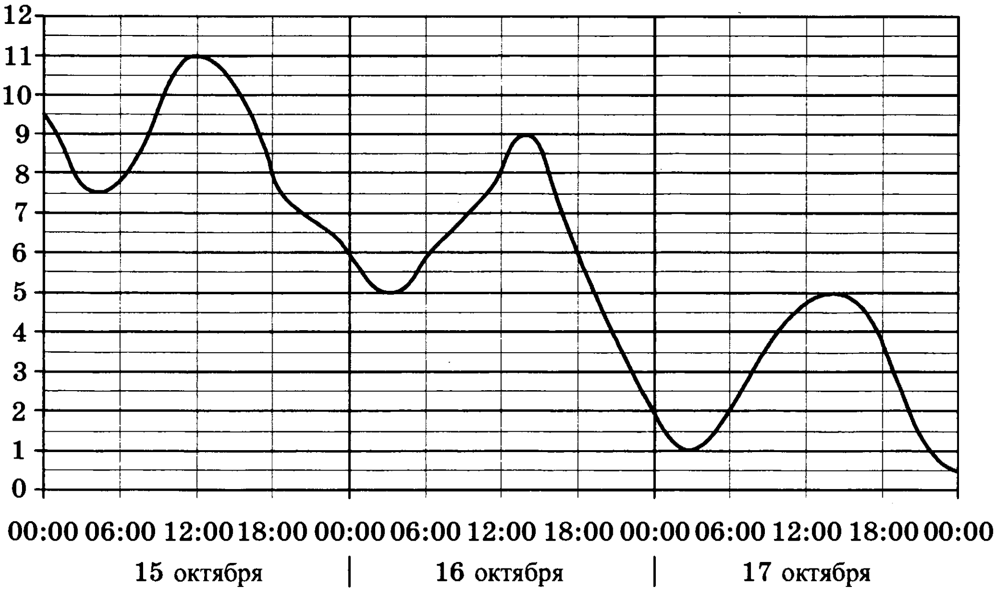
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

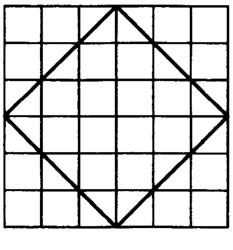
Часть 1

1. Розничная цена учебника 204 рубля, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 7500 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 17 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



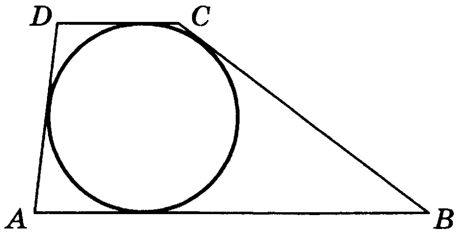
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



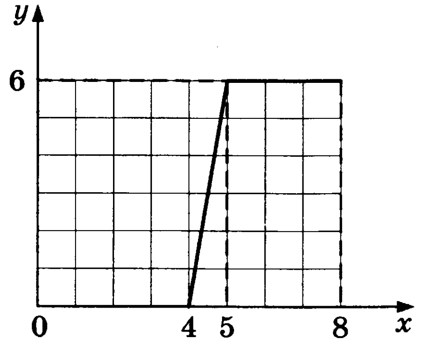
4. На фабрике керамической посуды 30% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 65% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(12-x)=3\log_3 4$.

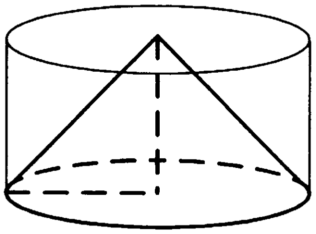
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 25 и 3. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $21\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{72}-\sqrt{98}\right)\cdot\sqrt{8}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 3$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}8$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\nu T\log_2\dfrac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=7{,}9\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 14 220 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй — 10 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 2 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 8)^2(x - 9) + 1$ на отрезке $[-4; 8{,}5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi+x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\,0\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды $MBKL$, если $AB = 6$.

15. Решите неравенство $0{,}2^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 15^{2x} \cdot 25x^{-2} \geqslant \dfrac{25^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 9^{x}}{5x^{2}}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 5$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax + 3)(y + x - a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6000.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

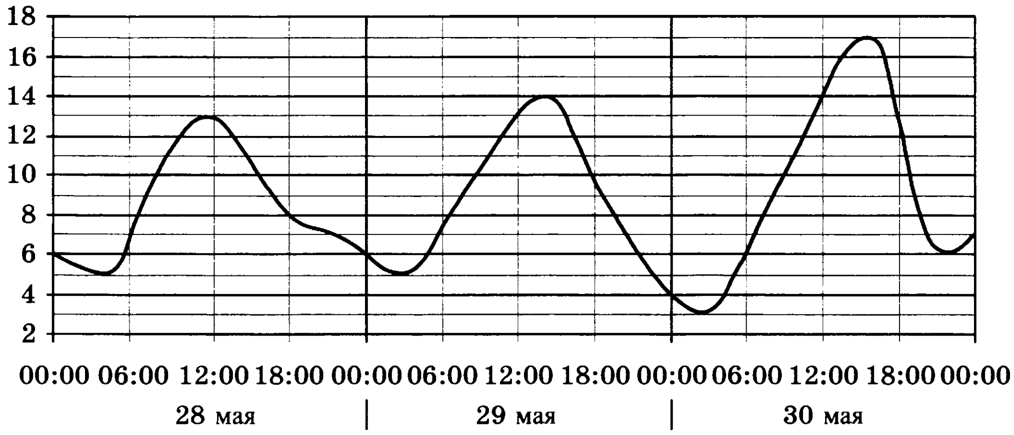
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

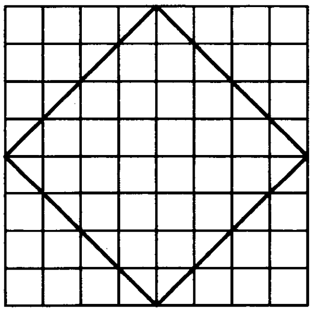
Часть 1

1. Розничная цена учебника 125 рублей, она на 25% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5800 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 29 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



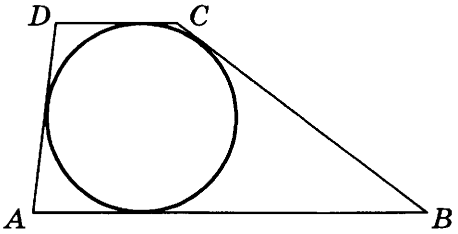
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



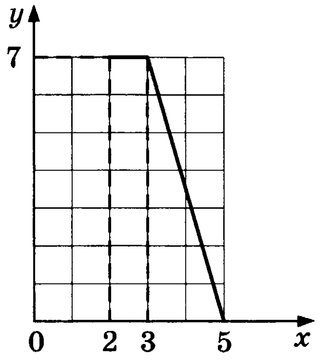
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(14-x)=2\log_3 5$.

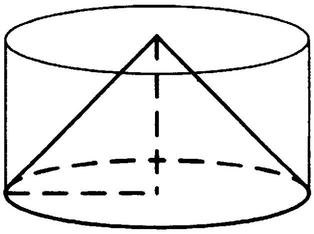
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 13 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $80\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{96}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{6}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}8$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 6{,}3\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 28 350 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2(x-10)+8$ на отрезке $[-14; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin\frac{5\pi}{6}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды $MCKL$, если $AB = 4$.

15. Решите неравенство $0{,}25^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 14^x\cdot x^{-2}\leqslant\dfrac{2^{-\frac{3x-2}{x+2}}\cdot 112^x}{4x^2}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 10$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 25% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax-2)(y+x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 2160.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

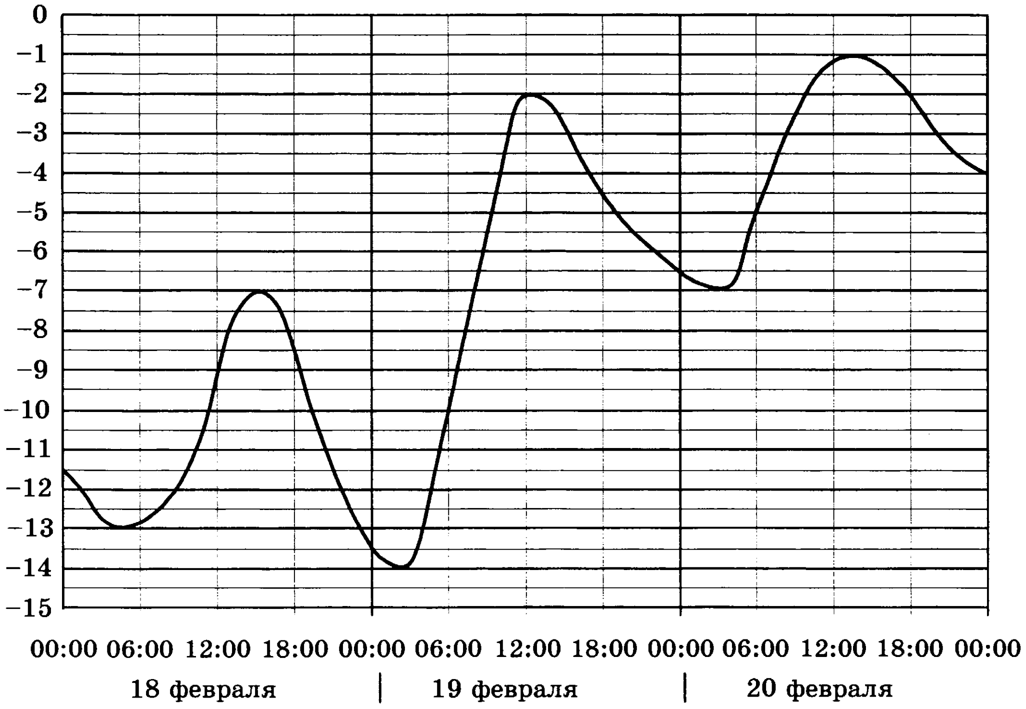
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

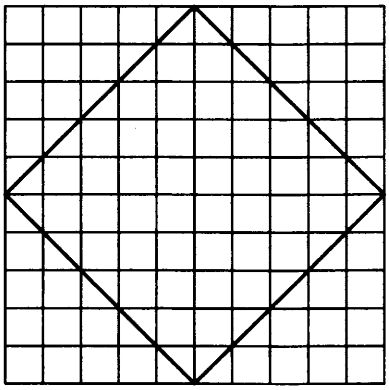
Часть 1

1. Розничная цена учебника 115 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5000 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 18 февраля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



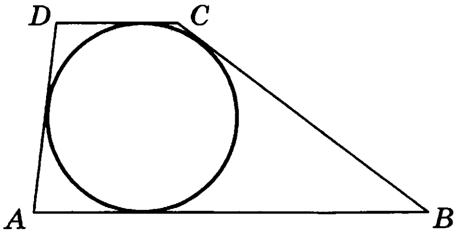
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



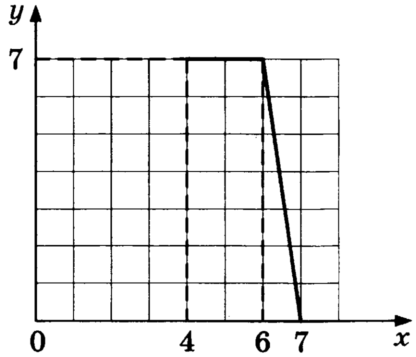
4. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 75% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(15-5x)=3\log_3 5$.

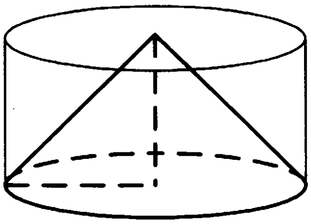
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 12 и 2. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $41\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{72}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1$ атмосфера, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 18{,}3\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 21 960 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 21 рабочий. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 5 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x+5)^2(x-1)+7$ на отрезке $[-17;\ -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) = \cos\pi$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости α, если $AB = 9$.

15. Решите неравенство $0{,}25^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 30^x\cdot x^{-2}\leqslant\dfrac{16^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 15^x}{8x^2}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 1$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 33% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+3)(y+x-a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6750.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

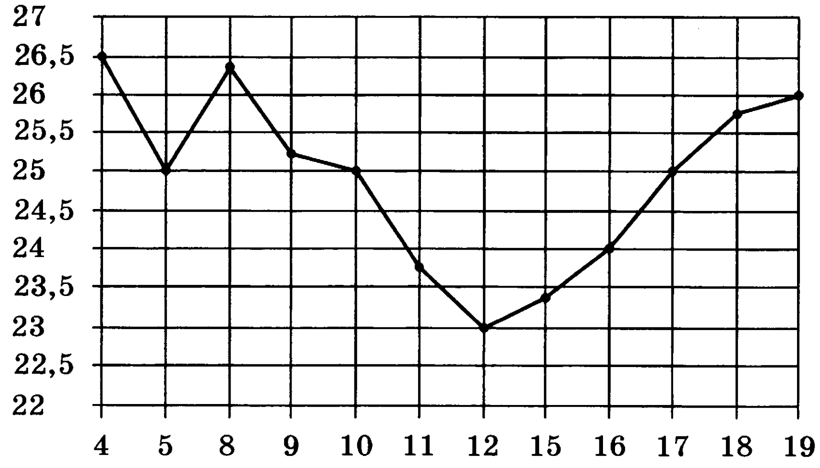
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

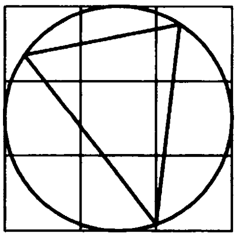
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 17 955 человек, что составляет 63% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена нефти в долларах США за баррель. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов за данный период. Ответ дайте в долларах США за баррель.



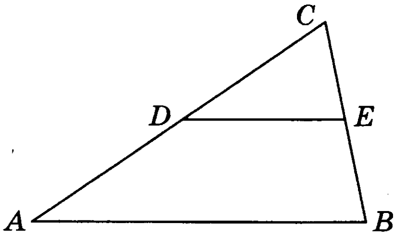
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



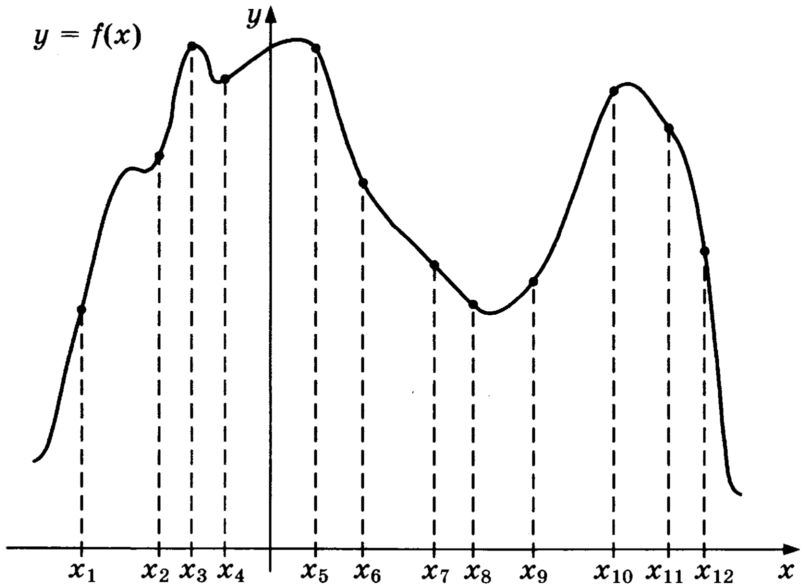
4. Монету бросают 8 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно шесть раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно один раз»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_{81}(8x+8)} = 4$.

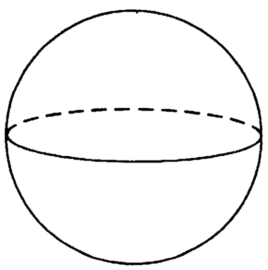
6. Площадь треугольника ABC равна 36, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, ... , x_{12}. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 80. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 35 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 86 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 344 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 4^{x^2-14x+50}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|=15-2\cdot 3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\dfrac{x}{6}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?

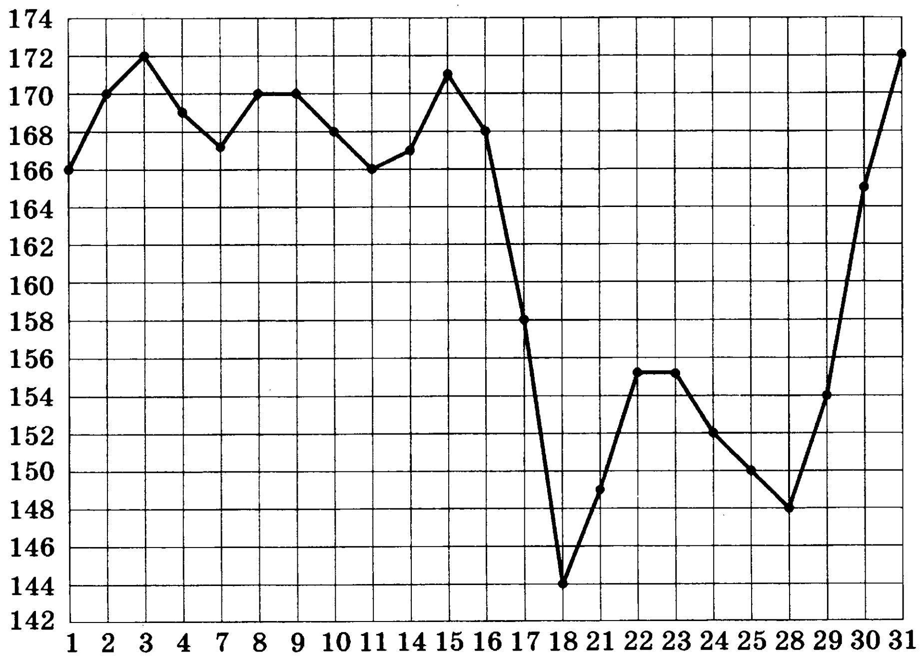
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

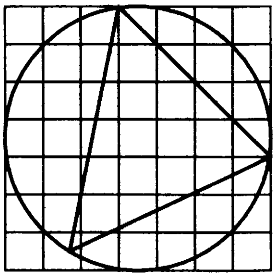
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 19 125 человек, что составляет 51% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.



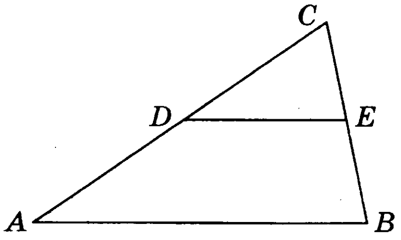
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



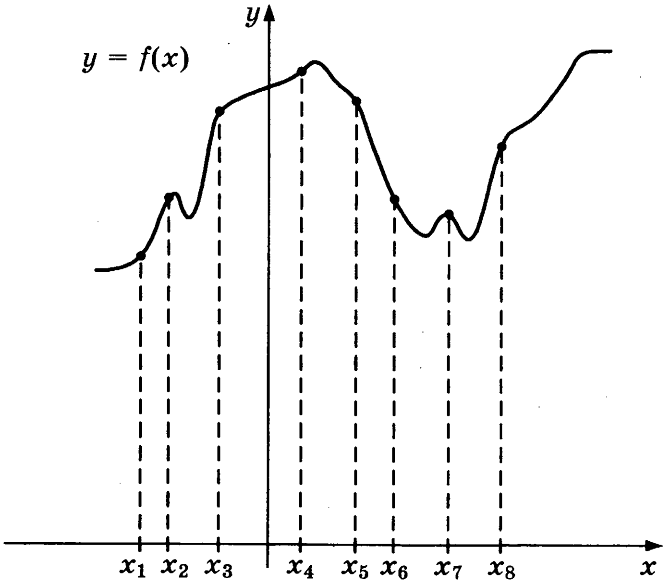
4. Монету бросают 10 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно пять раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно семь раз»?

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_4(9x+9)} = 6$.

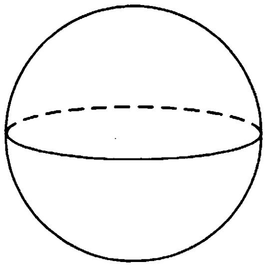
6. Площадь треугольника *ABC* равна 40, *DE* — средняя линия, параллельная стороне *AB*. Найдите площадь трапеции *ABED*.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_8. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 16. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $5\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 2\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 10$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 16,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 63 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 168 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 174 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 15 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2-16x+67}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4^x-5\right)^2+2\cdot4^x=9\left|4^x-5\right|$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0; 1].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-3)}\dfrac{x}{10}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 5\sqrt{2}$.

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 17% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{2\pi ax - 4x^2} + \cos 2\sqrt{2\pi ax - 4x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Вити нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Витя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Витя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 5 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?

б) Мог ли Витя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 6 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?

в) Сначала у Вити были вёдра объёмами 2 литра и 4 литра, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Витя, он не сможет получить через несколько шагов ровно 3 литра воды в одном из вёдер?

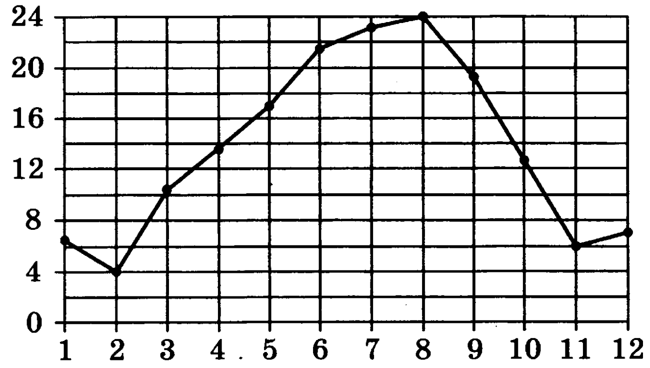
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

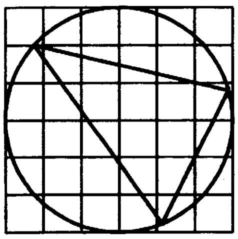
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 20 930 человек, что составляет 46% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наименьшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



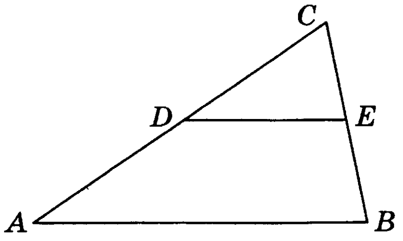
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



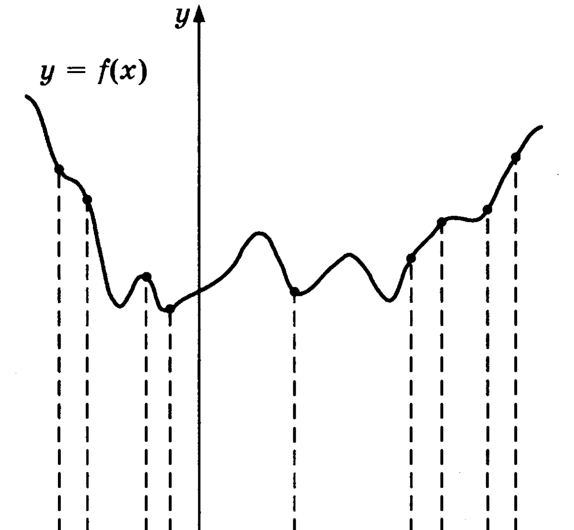
4. Монету бросают 9 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно семь раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно один раз»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(2x+5)} = 3$.

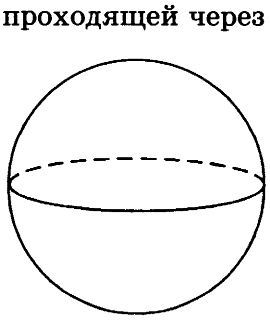
6. Площадь треугольника *ABC* равна 44, *DE* — средняя линия, параллельная стороне *AB*. Найдите площадь трапеции *ABED*.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, \ldots, x_9$. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 120. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $3\sin\frac{19\pi}{12}\cdot\cos\frac{19\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 36$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 64 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 60 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 300 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 325 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2-18x+85}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\left(3^x-5\right)^2+3^x+19=15\left|3^x-5\right|$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0; 1].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $3\sqrt{2}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-4)}\dfrac{x}{12}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 6\sqrt{2}$.

17. 15-го августа планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 21% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{\pi a x - x^2} + \cos 2\sqrt{\pi a x - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Жени нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Женя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Женя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 6 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 литров?

б) Мог ли Женя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 7 литров и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Жени были вёдра объёмами 5 литров и 10 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Женя, он не сможет получить через несколько шагов ровно 6 литров воды в одном из вёдер?

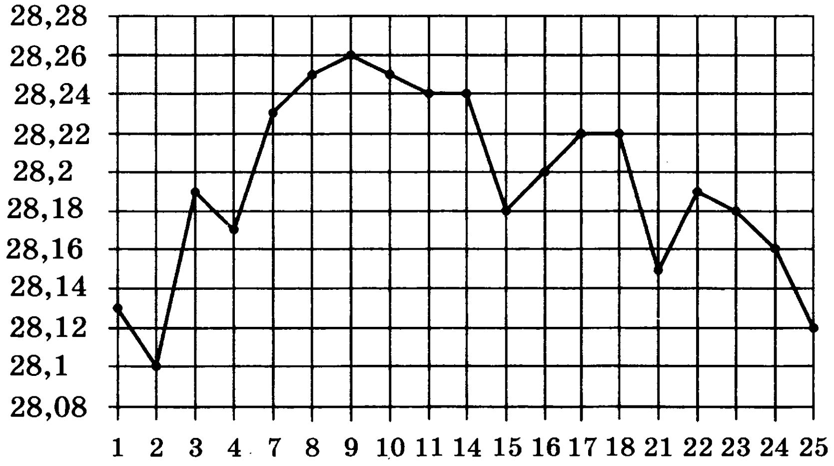
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

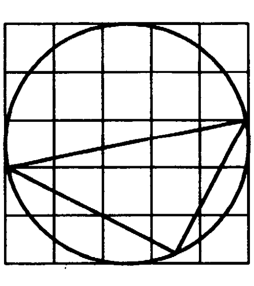
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 24 650 человек, что составляет 85% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни в феврале 2006 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.



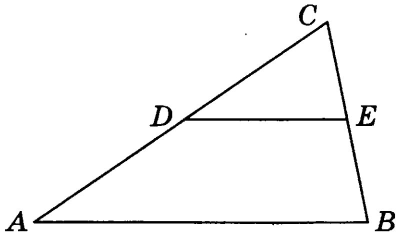
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



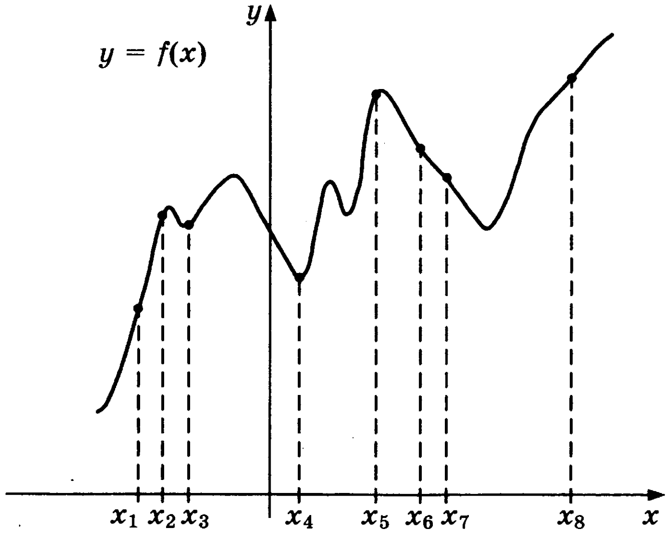
4. Монету бросают 10 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно восемь раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно девять раз»?

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_8(2x-3)} = 5$.

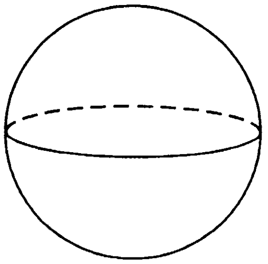
6. Площадь треугольника ABC равна 76, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_8. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 208. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 46,2 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 82 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 123 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 63 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 45 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2+30x+229}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(5^x-6\right)^2-6\left|5^x-6\right|+5^2=25-5^x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние между плоскостью α и ребром MC.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\dfrac{x}{20}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 10\sqrt{2}$.

17. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два с половиной раза (до $t_1 = 2{,}5t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $9000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} + \cos\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Ромы нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Рома переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Рома через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 4 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 литров?

б) Мог ли Рома через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 8 литров и 10 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 11 литров?

в) Сначала у Ромы были вёдра объёмами 4 литра и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Рома, он не сможет получить через несколько шагов ровно 5 литров воды в одном из вёдер?

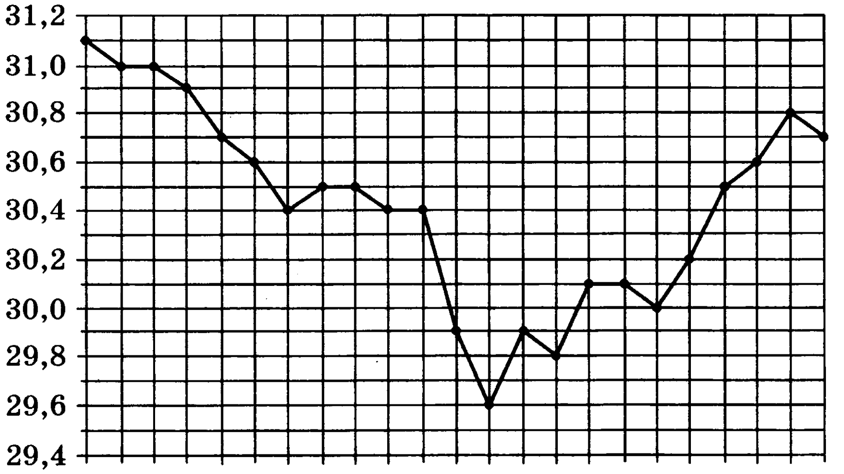
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

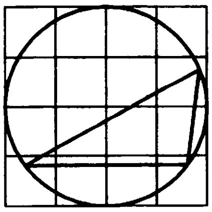
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 24 840 человек, что составляет 72% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.



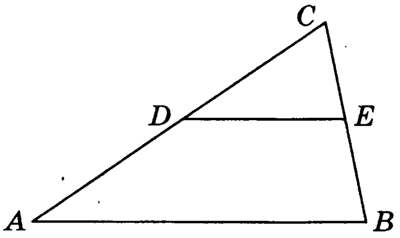
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



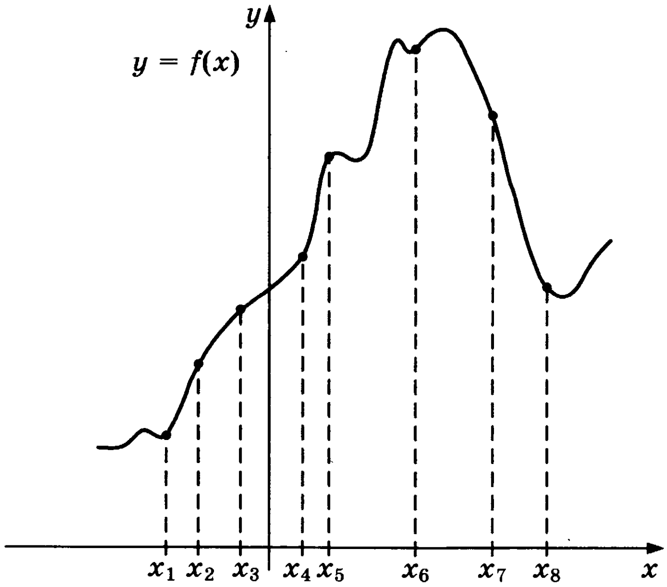
4. Монету бросают 9 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно пять раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно два раза»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(2x+6)}=6$.

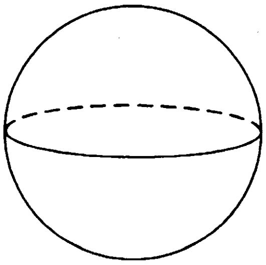
6. Площадь треугольника ABC равна 80, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_8. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x)>0$?



8. Площадь поверхности шара равна 8. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $2\sin\frac{23\pi}{12}\cdot\cos\frac{23\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 58,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 54 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 153 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 120 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 9^{x^2-6x+10}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4^x-8\right)^2-10\left|4^x-8\right|=3\cdot4^x-36$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [2; 3].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 12. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью AMB.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-2)}\dfrac{x}{8}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 2\sqrt{2}$.

17. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 25% (до $t_1 = 1{,}25t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $7000 - t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{\pi ax - x^2} - \sin\sqrt{\pi ax - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Игоря нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Игорь переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Игорь через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 3 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

б) Мог ли Игорь через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 11 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

в) Сначала у Игоря были вёдра объёмами 6 литров и 12 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Игорь, он не сможет получить через несколько шагов ровно 7 литров воды в одном из вёдер?

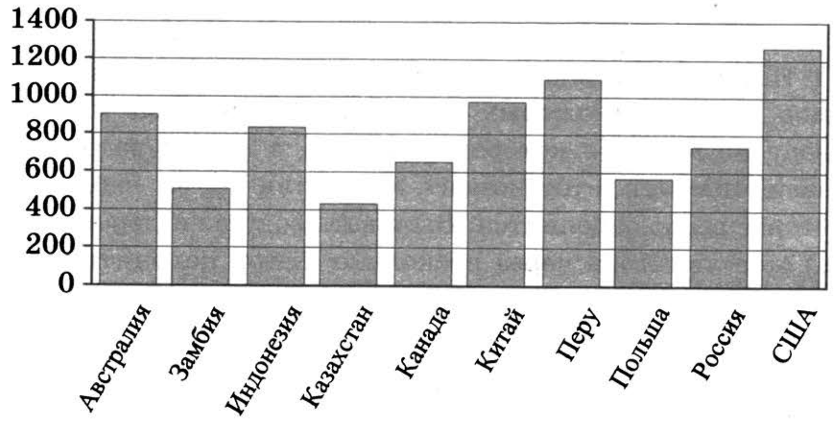
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

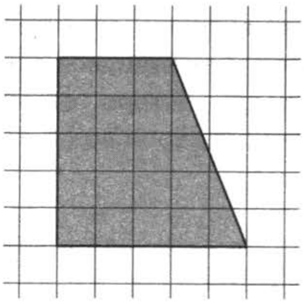
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 августа составляли 43 364 кВт · ч, а 1 сентября — 43 544 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за август, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Замбия?



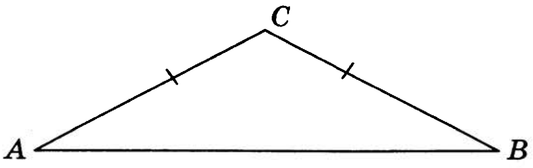
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



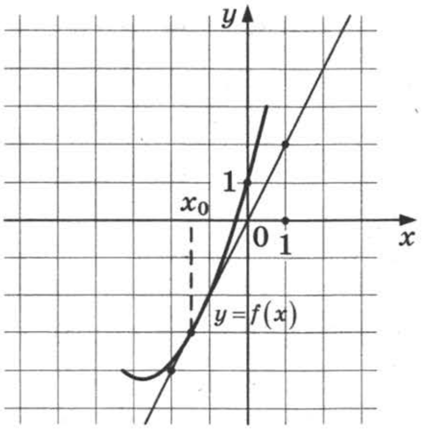
4. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Серёжа и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Серёжа и Маша окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2(15 + x) = \log_2 3$.

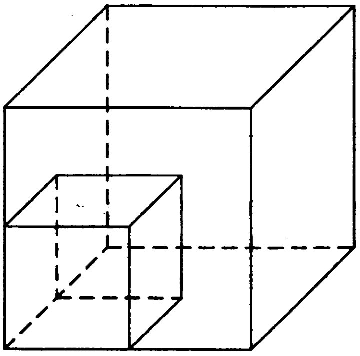
6. В треугольнике ABC угол C равен 118°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 4 раза?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\operatorname{tg}(-300^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 70 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Семь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов десять таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y=(10-x)e^{10-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{18}{(x-2)^2}=7\left(\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{3}{x-2}\right)+2$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;\ 2]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[4]{25}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\right)\geq 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 8$ и $AC = 5$.

17. 31 декабря 2016 года Василий взял в банке 5 460 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2 \\ 2x+y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 54, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

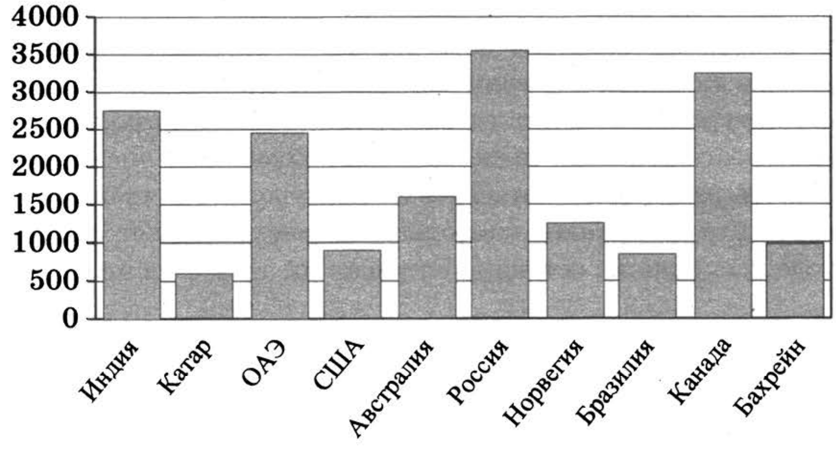
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

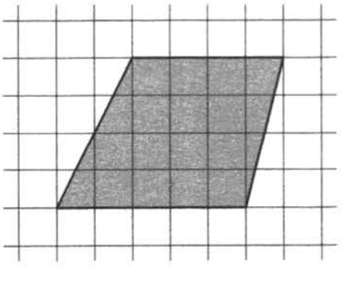
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 марта составляли 46 987 кВт · ч, а 1 апреля — 47 157 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за март, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 2 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Россия, десятое место занимал Катар. Какое место занимала Норвегия?



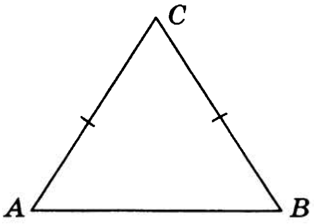
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



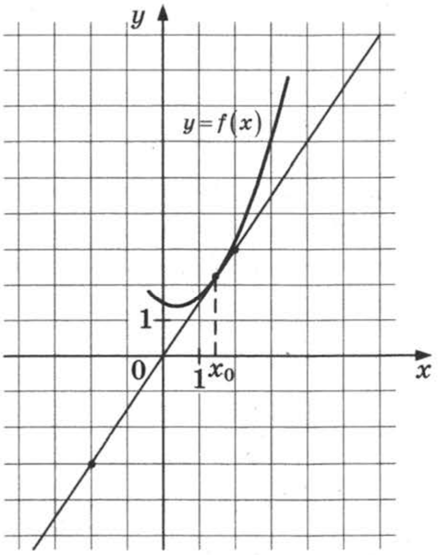
4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Антон и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Антон и Маша окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_7 (9 + x) = \log_7 2$.

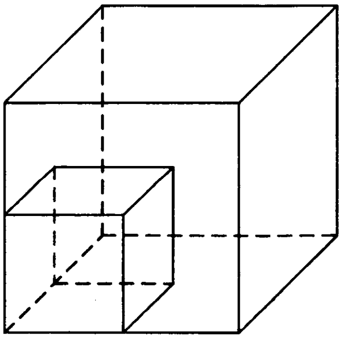
6. В треугольнике ABC угол C равен 66°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 7 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-600^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (25 - x)e^{25 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{20}{(x+3)^2}=8\left(\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}\right)+1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[6]{4}}\left(\log_{\frac{1}{5}}(x+3)\right)\ge 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 12$ и $AC = 7{,}5$.

17. 31 декабря 2016 года Виктор взял в банке 3 972 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Виктор переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Виктор выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3x-2y+z=2x^2+y^2 \\ -x+y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 11, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 24, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

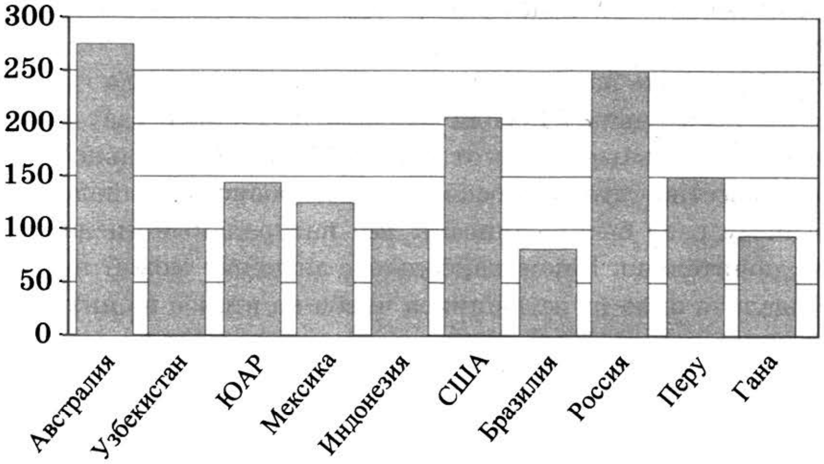
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 13

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

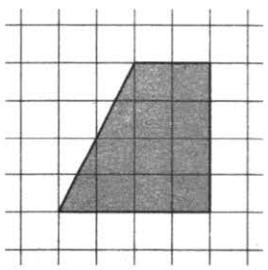
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 сентября составляли 54 209 кВт · ч, а 1 октября — 54 399 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за сентябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 10 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки золота в 10 странах мира (в тоннах) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке золота занимала Австралия, десятое место — Бразилия. Какое место занимала ЮАР?



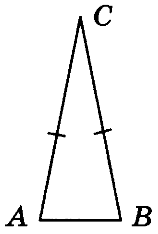
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



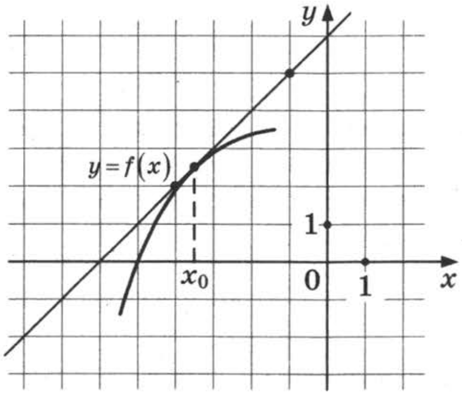
4. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Дима и его сестра Катя. Какова вероятность того, что Дима и Катя не окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_5 (1 + x) = \log_5 4$.

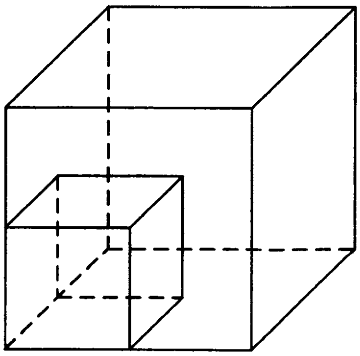
6. В треугольнике ABC угол C равен 20°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 11 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-17\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(1050^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 75 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (16 - x)e^{16-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{2}{x-1}\right) - 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[9]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 15$ и $AC = 8{,}5$.

17. 31 декабря 2016 года Александр взял в банке 3 276 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Александр переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Александр выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} -x-3y+2z=x^2+3y^2 \\ x-3y-4z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 13, если сначала по одному разу были написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

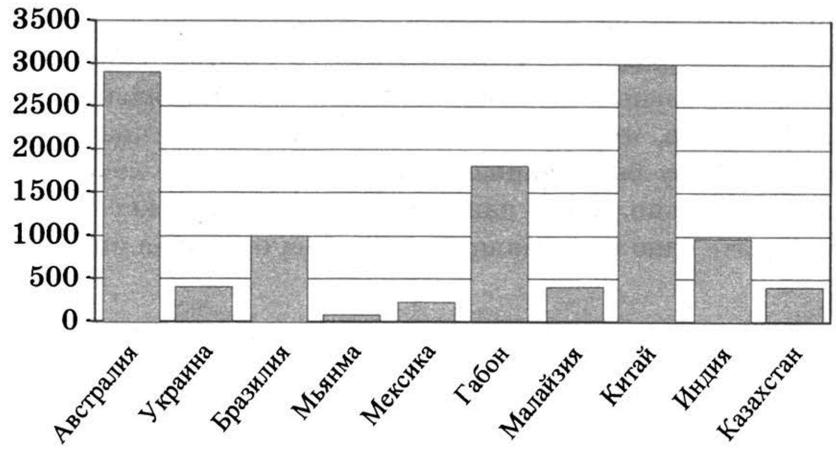
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 14

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

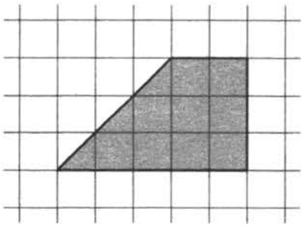
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 июля составляли 88 219 кВт · ч, а 1 августа — 88 369 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за июль, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение добычи марганцевой руды в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2015 год. Среди представленных стран первое место по добыче марганцевой руды занимал Китай, десятое место — Мьянма. Какое место занимал Габон?



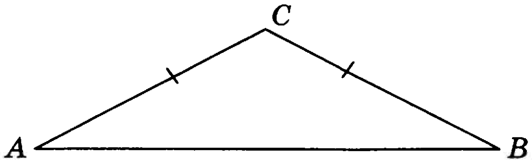
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



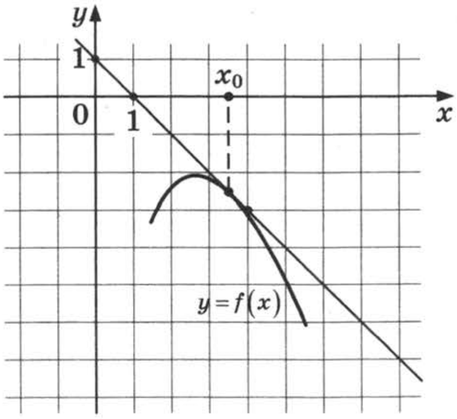
4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Максим и его сестра Вика. Какова вероятность того, что Максим и Вика не окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2 (16 + x) = \log_2 3$.

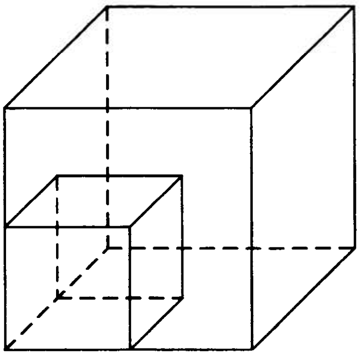
6. В треугольнике ABC угол C равен 146°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 15 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-29\sqrt{3}\operatorname{tg}(-60^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 95 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 440 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Восемь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (14 - x)e^{14-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\left(\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{25}{(x-2)^2}\right)=\frac{x-2}{2}-\frac{5}{x-2}+16$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку [3; 8].

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[4]{36}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right)\geq 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 24$ и $AC = 12{,}5$.

17. 31 декабря 2016 года Сергей взял в банке 2 648 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x-3y+2z=x^2+2y^2 \\ -2x+y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 20, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

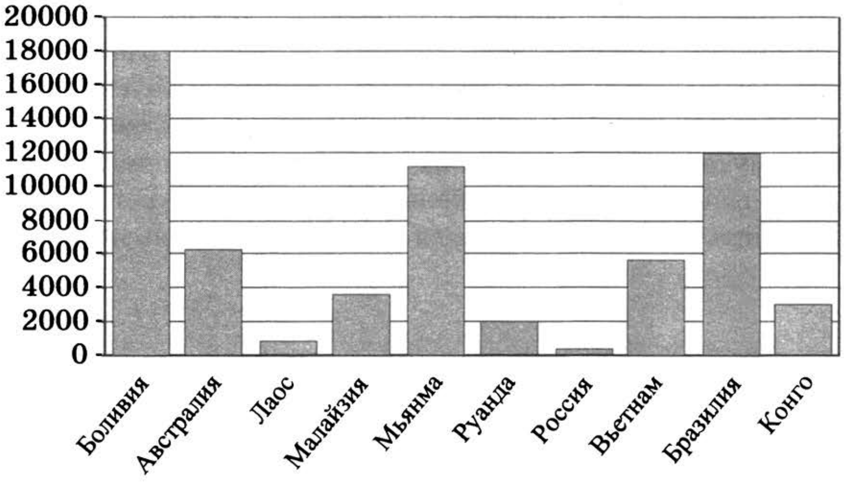
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 15

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

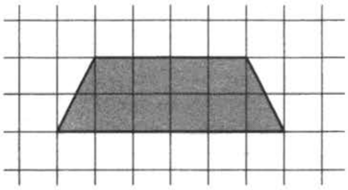
Часть 1

1. **Показания счётчика электроэнергии 1 января составляли 14 836 кВт · ч, а 1 февраля — 15 036 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за январь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 4 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.**

2. **На диаграмме показано распределение выплавки олова в 10 странах мира (в тоннах) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке олова занимала Боливия, десятое место — Россия. Какое место занимала Руанда?**



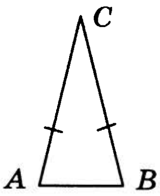
3. **На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.**



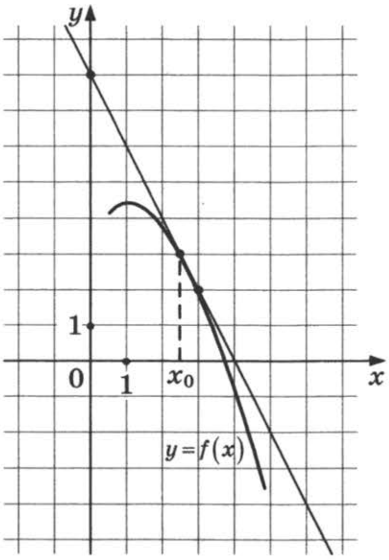
4. Семнадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Серёжа и его сестра Таня. Какова вероятность того, что Серёжа и Таня окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2(12 + x) = \log_2 11$.

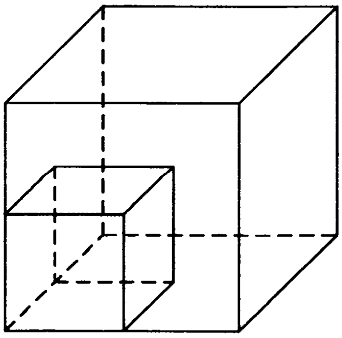
6. В треугольнике ABC угол C равен 26°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 17 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $13\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-930^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 180 - 10p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 450 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов четырнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (18 - x)e^{18 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{9}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)^2}{16} = 3 \cdot \left(\frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{4}\right) - \frac{1}{2}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[0;\ 2]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 5$, а $C_1L = 3$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[8]{16}}\left(\log_{\frac{1}{4}}(x+2)\right) \geq 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 16$ и $AC = 10$.

17. 31 декабря 2016 года Алексей взял в банке 2 184 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+y+z=2x^2+3y^2 \\ -x+2y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 24, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

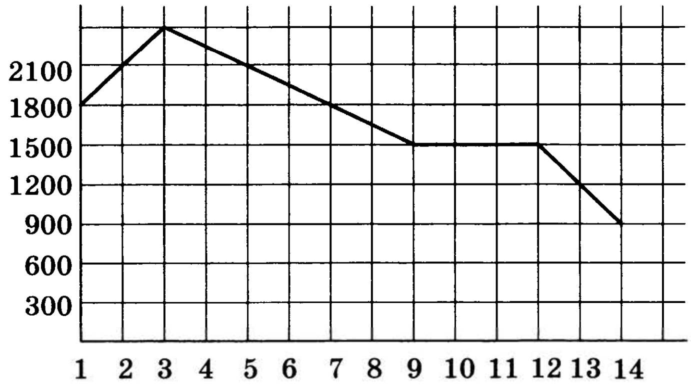
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 16

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

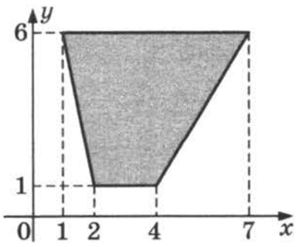
Часть 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 220 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1).

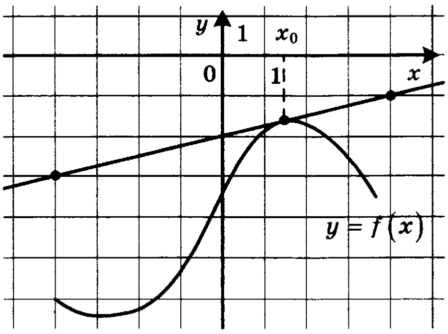


4. Андрей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

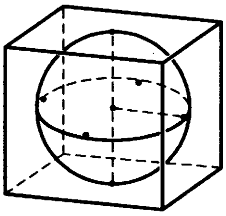
5. Найдите корень уравнения $x^2 - 15 = (x - 15)^2$.

6. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Шар, объём которого равен 14π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД двигателя будет 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ дайте в кельвинах.

11. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\sin x - 3\sqrt{3}x + 0{,}5\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK, пересекает отрезок A_1K.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \le 2$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|10\cdot 0{,}2^{1-x} - a\right| - \left|5^x + 2a\right| = 0{,}04^{-x}$ имеет ровно два неотрицательных решения.

19. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \ge 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 17

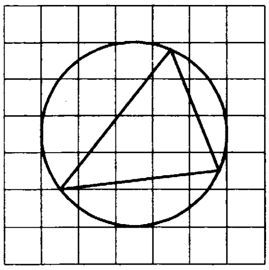
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. **Показания счётчика электроэнергии 1 ноября составляли 12 625 кВт · ч, а 1 декабря — 12 802 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 80 копеек? Ответ дайте в рублях.**

2. **На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Рязани во все дни с 15 по 27 сентября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какой была средняя температура в Рязани 18 сентября 2010 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.**

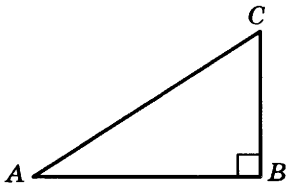
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



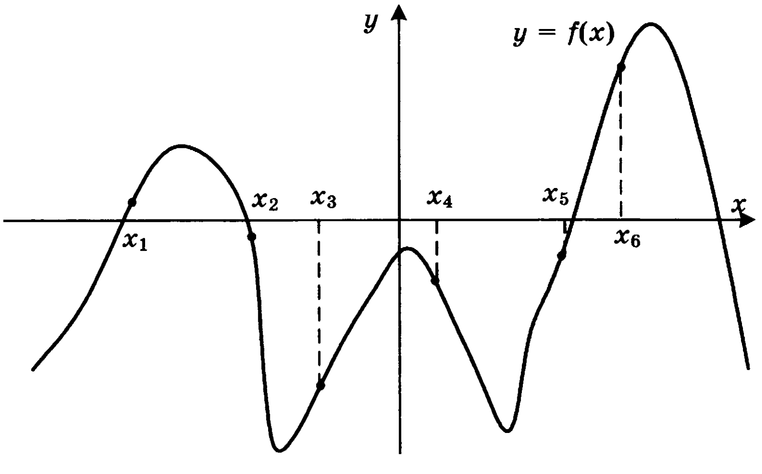
4. В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

5. Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

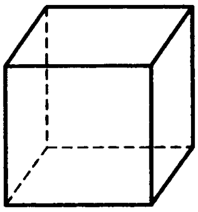
6. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4}=p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 313,6 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12. Найдите точку минимума функции $y=(1-2x)\cos x+2\sin x+3$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}{2\sin x-1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};\ 6\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит апофему грани *ASB* в отношении 1 : 2, считая от вершины *S*.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.

15. Решите неравенство $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \le 0$.

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, найдите это решение.

19. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

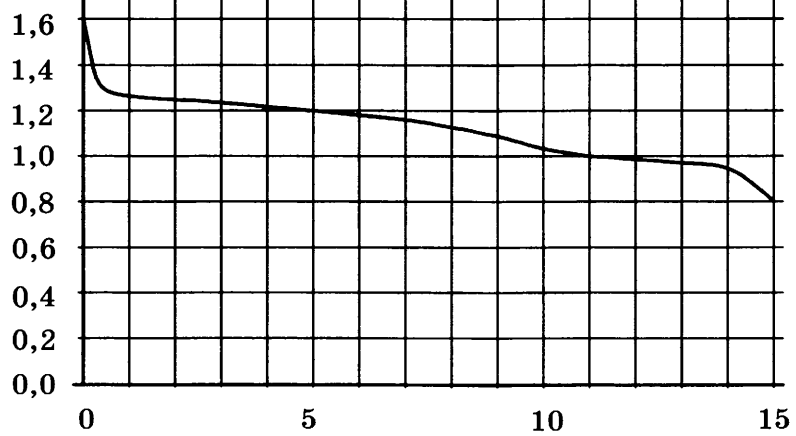
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 18

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

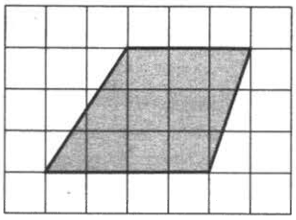
Часть 1

1. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 18 рублей. Если на счету осталось меньше 18 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

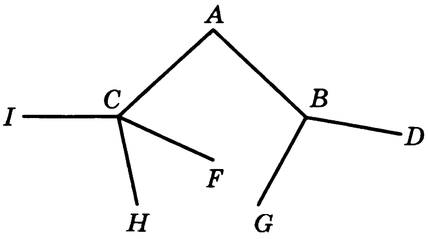
2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

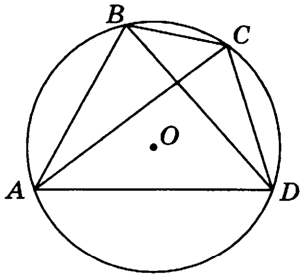


4. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.

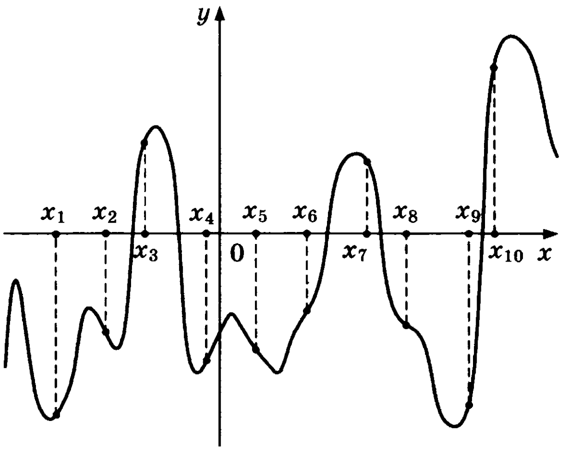


5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5-x)=-2$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 132°, угол ABD равен 61°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна?



8. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\ \%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в кельвинах) КПД этого двигателя будет 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 13x - 13\text{tg}\, x - 18$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

15. Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150°$.

17. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t}=2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 19

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

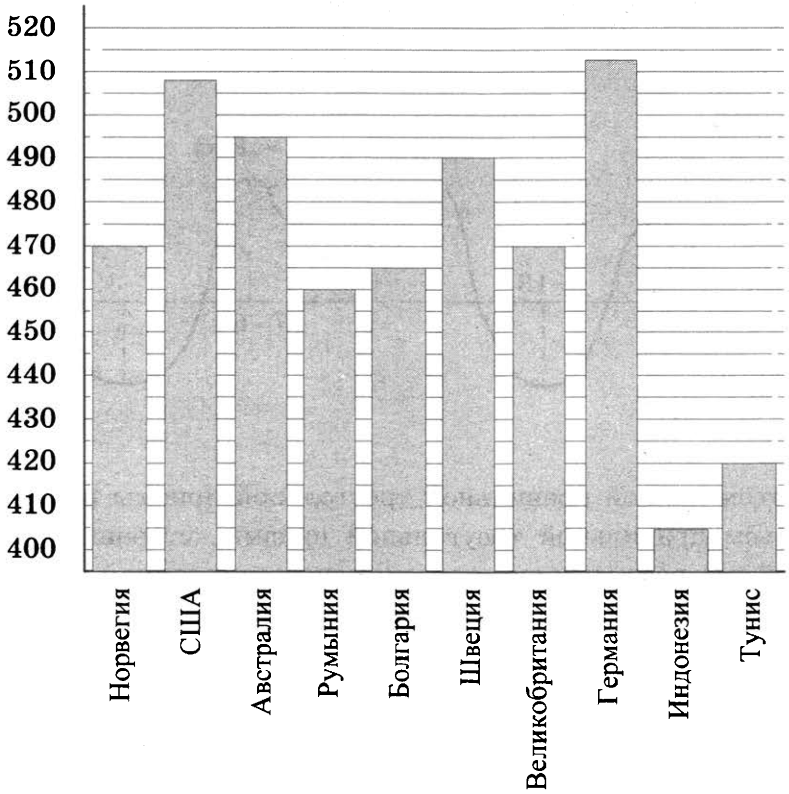
Часть 1

1. Цена на принтер была понижена на 20% и составила 4800 рублей. Сколько рублей стоил принтер до понижения цены?

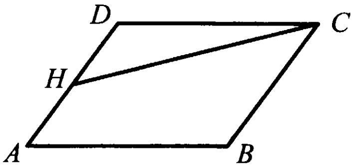
1

2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Австралии. Определите, какое место с конца занимает Тунис.

2



3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AHCB$.

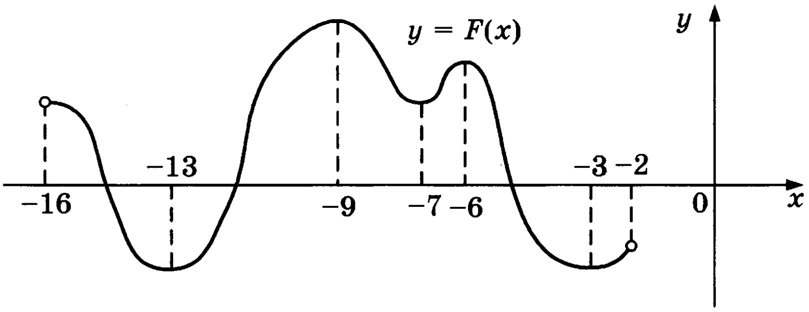


4. По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5. Найдите корень уравнения $\log_6(4-x)=\log_6 7$.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21°, угол CAD равен 30°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график первообразной $y=F(x)$ некоторой функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-16;-2)$. Пользуясь рисунком, найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-15;-8]$.

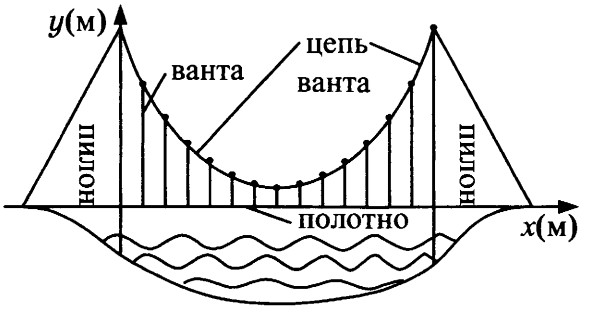


8. Объём данной правильной треугольной призмы равен 80. Найдите объём правильной треугольной призмы, сторона основания которой в 4 раза меньше стороны основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $9^{\frac{4}{9}} \cdot 81^{\frac{5}{18}}$.

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0021x^2 - 0{,}47x + 31$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

15. Решите неравенство $x^3 + 5x^2 + \dfrac{28x^2 + 5x - 30}{x - 6} \le 5$.

16. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM : MB = 3 : 1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD = 2\sqrt{2}$.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

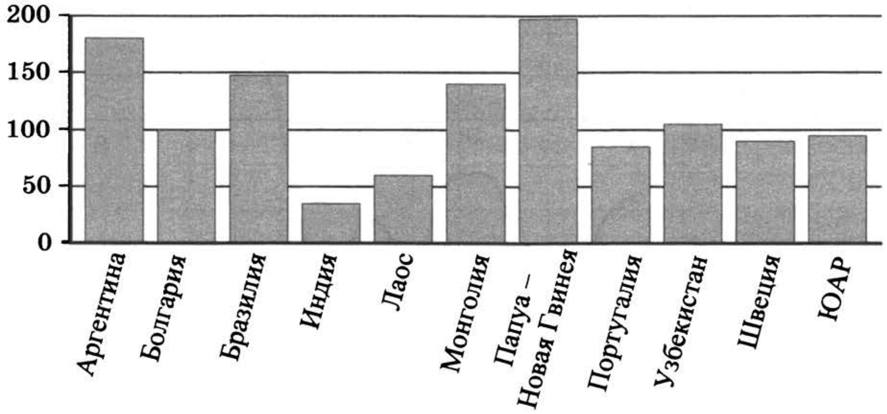
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 20

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

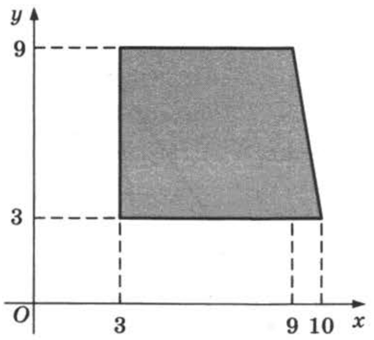
Часть 1

1. **В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Женя живёт в квартире 87. На каком этаже живёт Женя?**

2. **На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?**



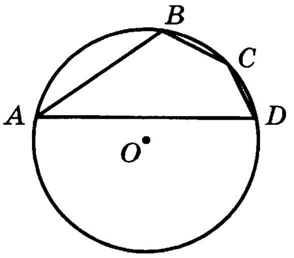
3. **Найдите площадь прямоугольной трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 3), (10; 3), (9; 9), (3; 9).**



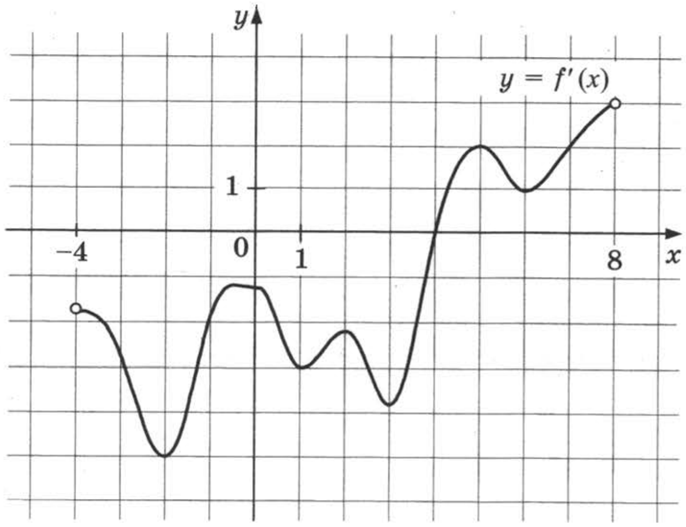
4. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x+2} = \frac{1}{8x-4}$.

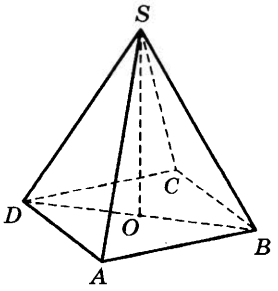
6. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 25°. Найдите угол C четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 10$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-\dfrac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

11. Плиточник должен уложить 300 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 5 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 5 дней раньше, чем наметил. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 49}{x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки A, делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC и SA, пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

15. Решите неравенство $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22$.

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

17. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 21

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

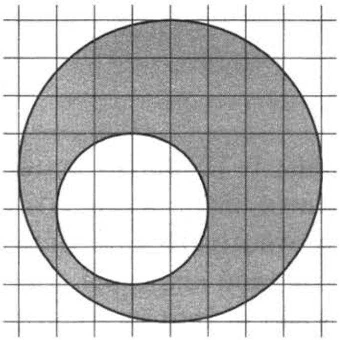
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет роз для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество роз сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, розы стоят 100 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

1

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, сколько дней за данный период средняя температура в Калининграде была меньше 16 градусов Цельсия.

2

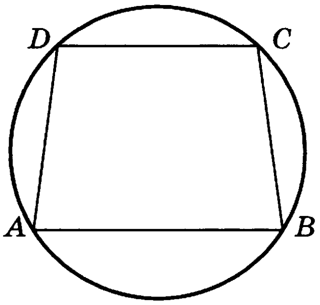
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 2. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



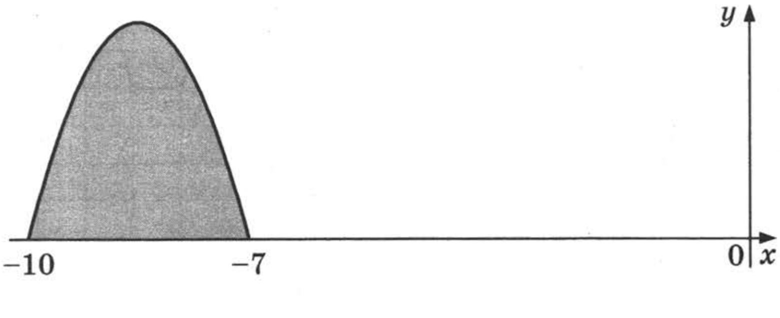
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

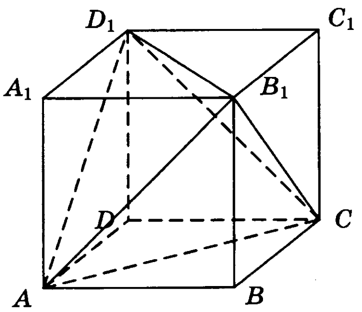
6. Основания равнобедренной трапеции равны 32 и 24. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 20. Найдите высоту трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.
Функция $F(x)=-\frac{4}{9}x^3-\frac{34}{3}x^2-\frac{280}{3}x-\frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^9}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_П = 25$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_В = 85$ °C до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_В-T_П}{T-T_П}$, где $c=4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 140 м.

11. Расстояние между городами A и B равно 500 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y=\sqrt{x^2+10x+55}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(49^{\sin x}\right)^{\cos x}=7^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8$, $AC = 12$ и $AA_1 = 5$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}>\sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}6$ и сторона $AC = 24$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}\left(4x^2+8\right)=\log_{a-3,5}\left(4(a-3)x+9\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

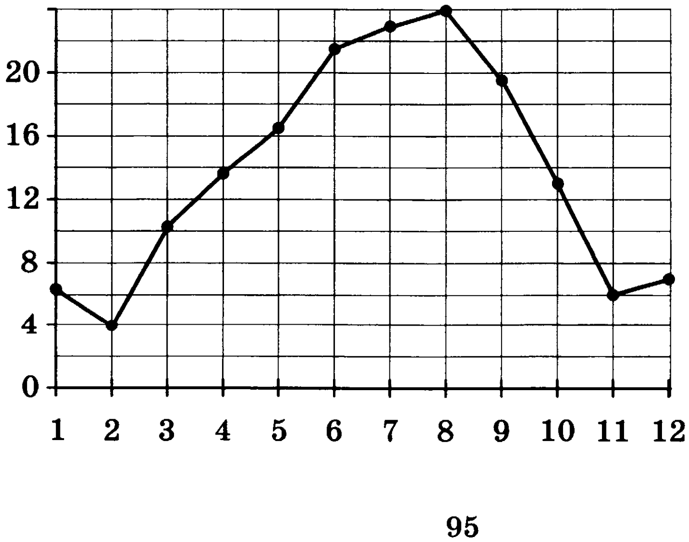
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 22

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

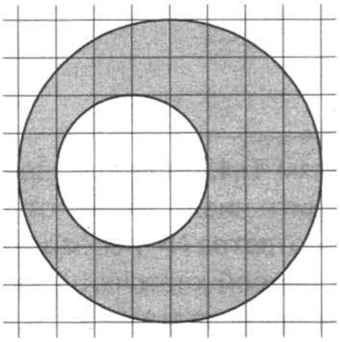
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3 ☐

3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 5. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4 ☐

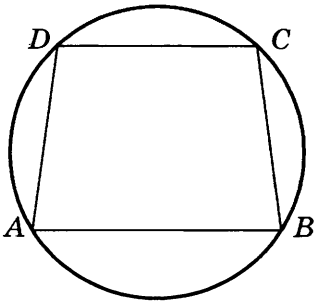
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

5 ☐

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 ☐

6. Основания равнобедренной трапеции равны 48 и 20. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 26. Найдите высоту трапеции.

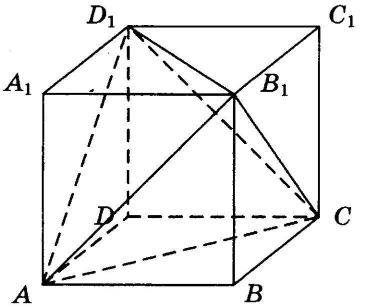


7 ☐

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x)=-\frac{1}{4}x^3-6x^2-\frac{189}{4}x-1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 6. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5^{\frac{4}{7}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{45^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{П}} = 25$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 57$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{В}}-T_{\text{П}}}{T-T_{\text{П}}}$, где $c = 4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через час следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(81^{\sin x}\right)^{\cos x} = 9^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 5$, $AC = 8$ и $AA_1 = 4$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ и сторона $AC = 45$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+2,5}\left(x^2+3\right)=\log_{a+2,5}\left((a+4)x+4\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

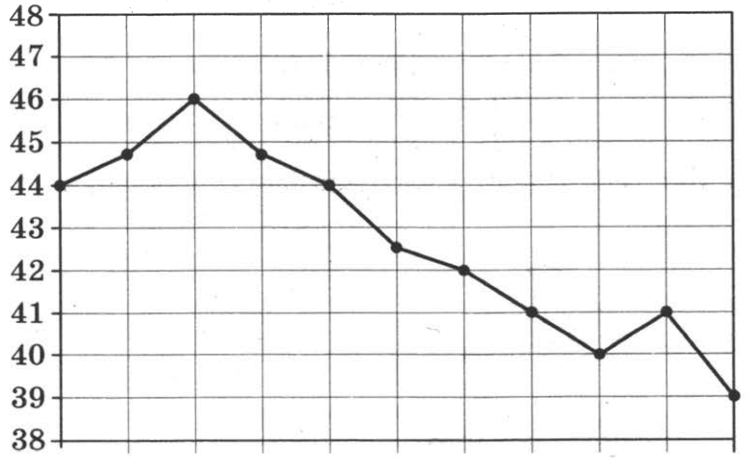
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 23

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

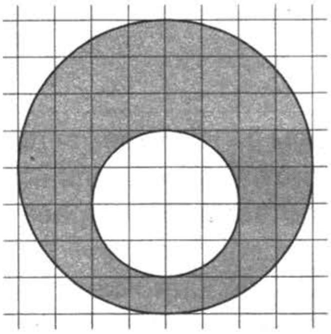
Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1100 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет лилий для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество лилий сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, лилии стоят 120 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



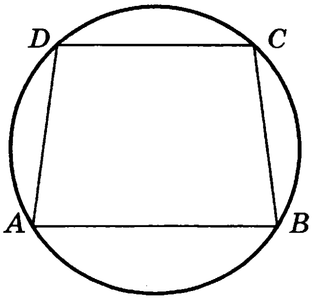
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

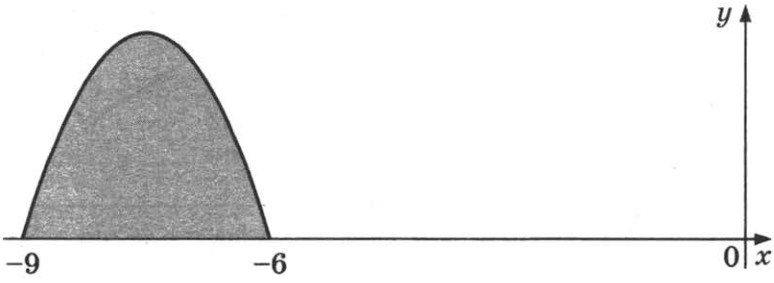
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 72 и 30. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 39. Найдите высоту трапеции.

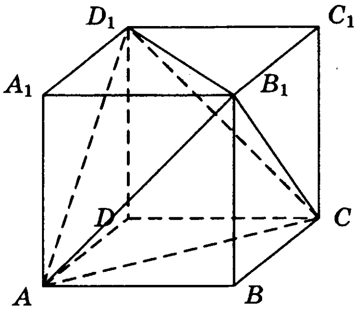


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x)=-\frac{10}{27}x^3-\frac{25}{3}x^2-60x-\frac{5}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 21. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(4^{\frac{4}{7}}\cdot7^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{28^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_П = 25$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_В = 49$ °C до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_В-T_П}{T-T_П}$, где $c=4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 66 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 110 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y=\sqrt{x^2-18x+100}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(36^{\sin x}\right)^{\cos x}=6^{\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 10$, $AC = 12$ и $AA_1 = 7$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-1}>\sqrt{x-1}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и сторона $AC = 18$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 180 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{2,5-a}\left(x^2+1\right)=\log_{2,5-a}\left((a-4)x+2\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 2$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{18}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 100?

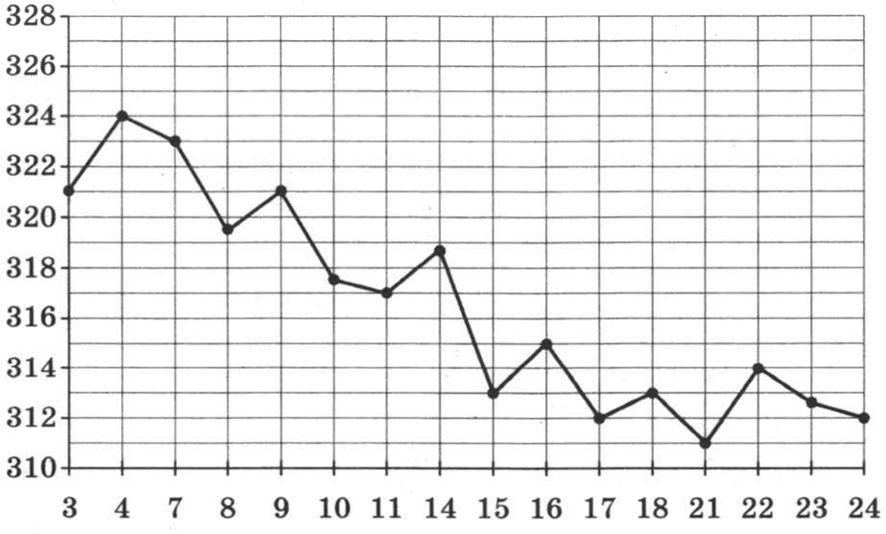
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 24

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

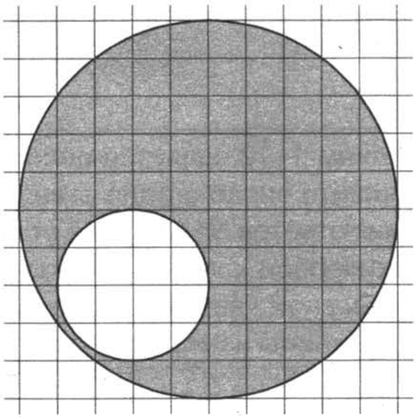
Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 900 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



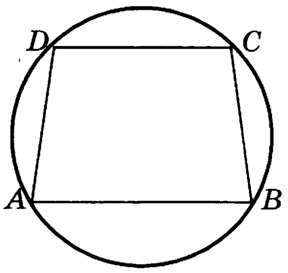
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

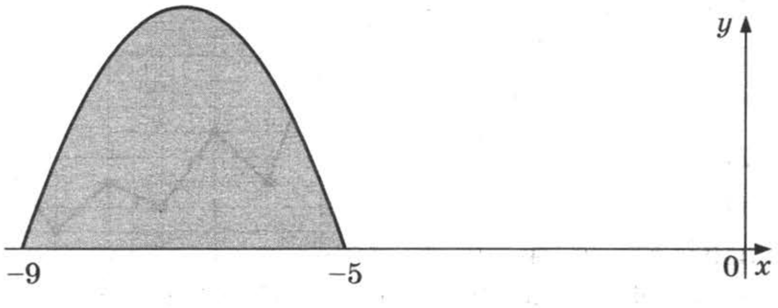
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 96 и 28. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 50. Найдите высоту трапеции.

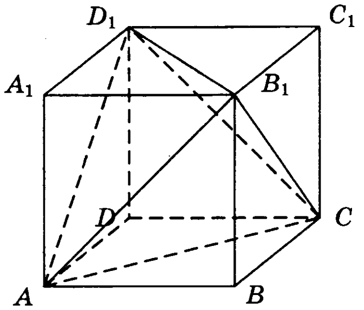


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{21}{4}x^2-\frac{135}{4}x-\frac{13}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



☐ 9

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(7^{\frac{3}{5}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^{9}}$.

☐ 9

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_П = 15$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 1{,}4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_В = 75$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_В - T_П}{T - T_П}$, где $c = 4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}8$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 168 м.

☐ 10

11. Расстояние между городами А и В равно 600 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

☐ 11

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$ принимает наименьшее значение?

☐ 12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(64^{\sin x}\right)^{\cos x} = 8^{\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

☐
☐ 13

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 10$, $AC = 16$ и $AA_1 = 5$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}>\sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и сторона $AC = 36$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-7,5}\left(x^2+2\right)=\log_{a-7,5}\left((a-6)x+2\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{16}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 75?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 25

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

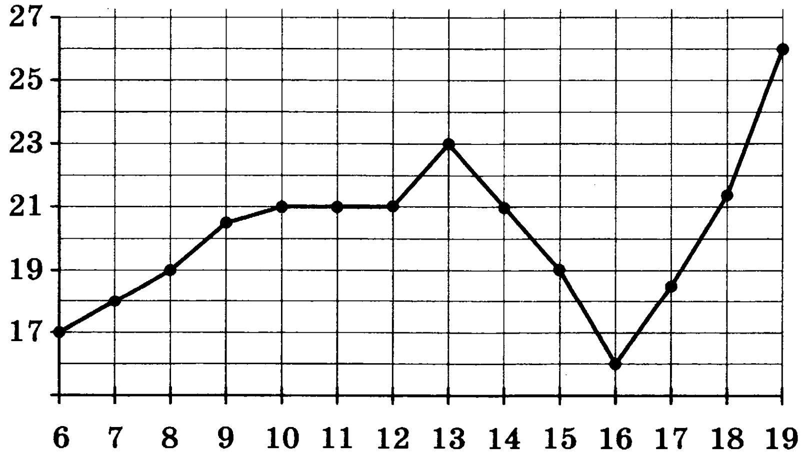
Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

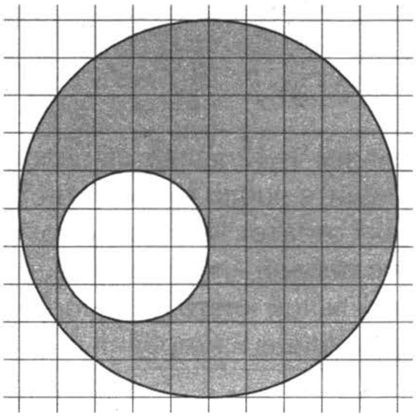
1

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

3



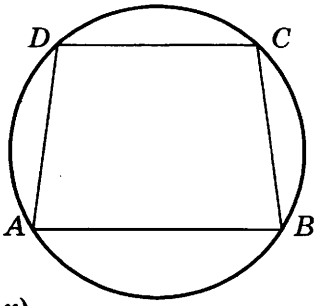
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

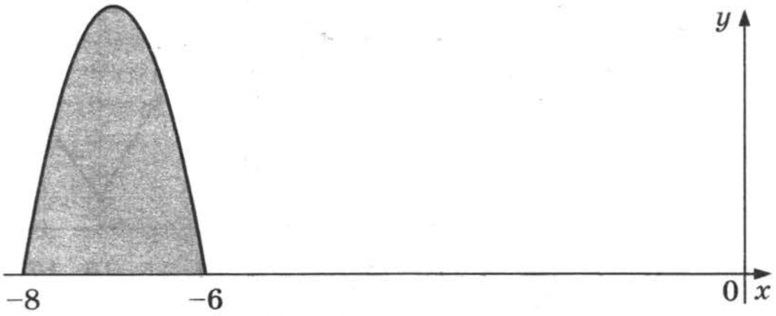
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 120 и 50. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 65. Найдите высоту трапеции.

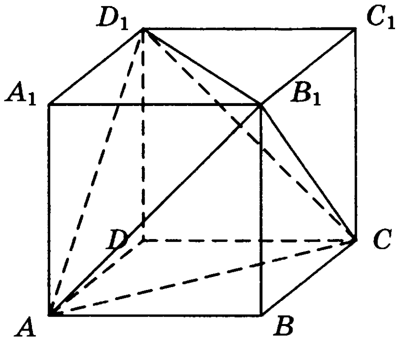


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x)=-x^3-21x^2-144x-\frac{11}{4}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 27. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(4^{\frac{4}{7}}\cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{44^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}}$ = 20 °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды m = 0,2 кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}}$ = 68 °C до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{в}}-T_{\text{п}}}{T-T_{\text{п}}}$, где $c=4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а α = 1,7 — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 136 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 240 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y=\sqrt{x^2+30x+248}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $49^{\cos^2 x} = 7^{\sqrt{2}\cos^2 x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 14$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-3} > \sqrt{x-3}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}8$ и сторона $AC = 30$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 230 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1800 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1600 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{6,5-a}\left(x^2+3\right) = \log_{6,5-a}\left((a-8)x-3\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_9 = a_{27}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 150?

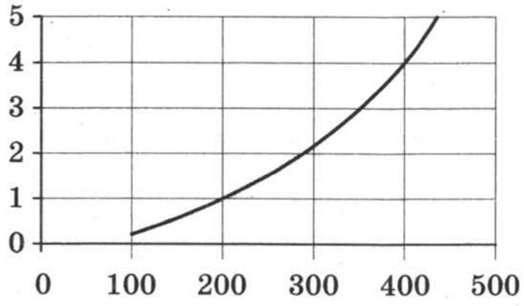
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 26

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

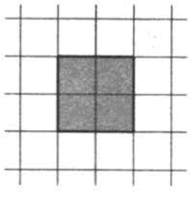
Часть 1

1. Шоколадка стоит 35 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 200 рублей в воскресенье?

2. Когда самолет находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат — сила (в тоннах силы). В некоторый момент подъёмная сила равнялась одной тонне силы. Определите по рисунку, на сколько километров в час надо увеличить скорость, чтобы подъёмная сила увеличилась до 4 тонн силы.



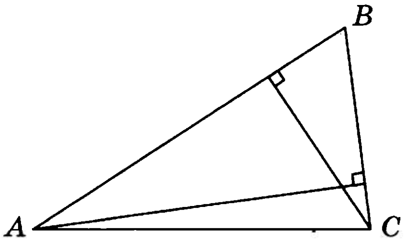
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



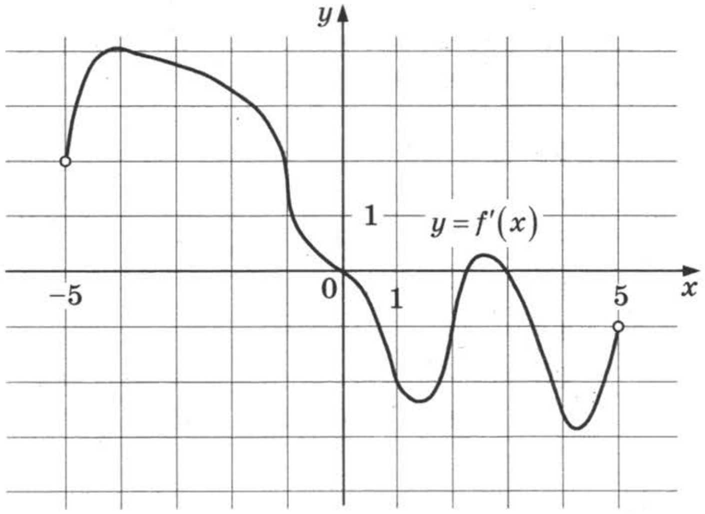
4. В небольшом магазине работают два продавца — Василий и Сергей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Василий, а Сергей свободен.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x+5}{3}}=5$.

6. В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3;\ 4]$.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 30. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 12 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = (1-2x)\cos x + 2\sin x + 7$ принадлежащую промежутку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $5^{x+3}-5^{x+2}-5^{x}<6^{\frac{x}{2}+3}-6^{\frac{x}{2}+2}+3\cdot 6^{\frac{x}{2}+1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 180 и известно отношение $AC : AB = 3 : 2$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+3)x+(a+4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?

в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9. Ответ обоснуйте.

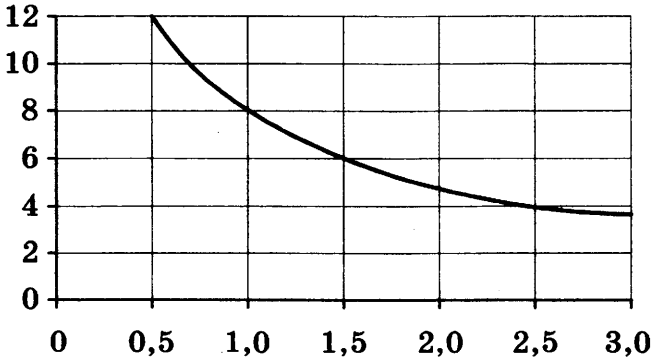
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 27

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

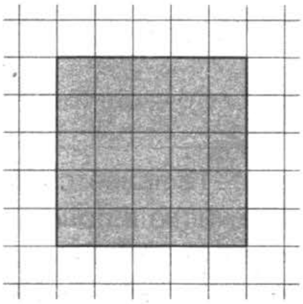
Часть 1

1. Шоколадка стоит 25 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 480 рублей в воскресенье?

2. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Ток в цепи электродвигателя уменьшился с 12 до 6 ампер. На сколько омов при этом увеличилось сопротивление цепи?



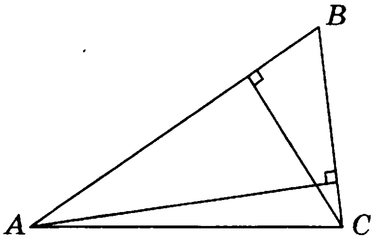
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



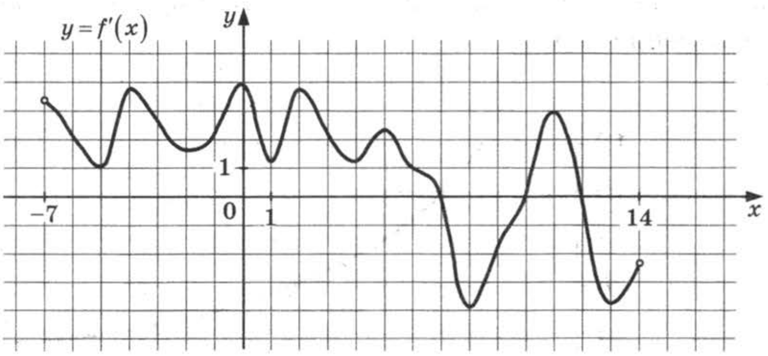
4. В небольшом магазине работают два продавца — Александр и Алексей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,5. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Александр, а Алексей свободен.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x+25}{13}}=5$.

6. В треугольнике со сторонами 15 и 5 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f\,(x)$, определенной на интервале $(-7;\ 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f\,(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;\ 9]$.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 10. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_7 81}{\log_7 3}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 20 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y=(3-2x)\cos x+2\sin x+4$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2-5\cos x-\cos 2x=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=6$ и диагональю $BD=11$. Все боковые рёбра пирамиды равны 6. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF=BE=5$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $5^{x+2}+5^{x+1}-5^{x}<3^{\frac{x}{2}+1}-3^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{x}{2}-1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 144 и известно отношение $AC : AB = 3 : 1$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 10 месяцев нужно выплатить банку 1 179 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+2)x+(a+5)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

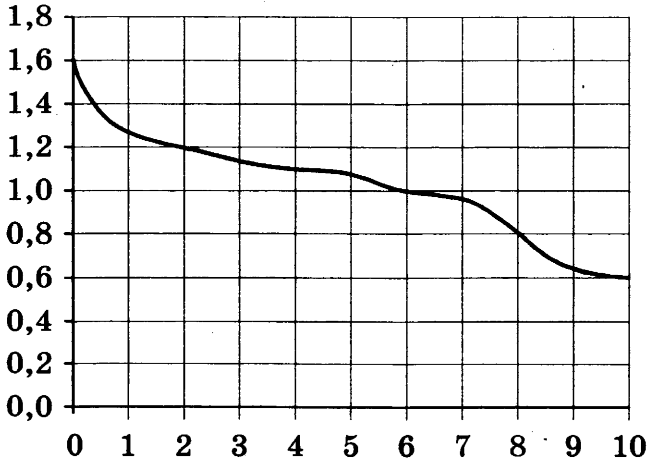
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 28

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

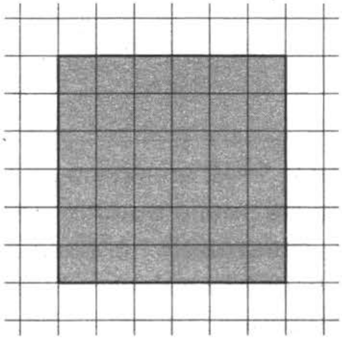
Часть 1

1. Шоколадка стоит 30 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 500 рублей в воскресенье?

2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадет с 1,2 вольт до 1 вольта.



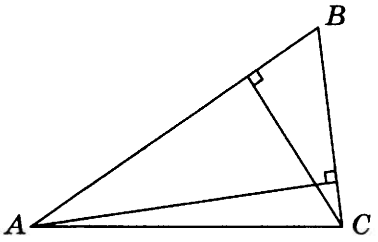
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



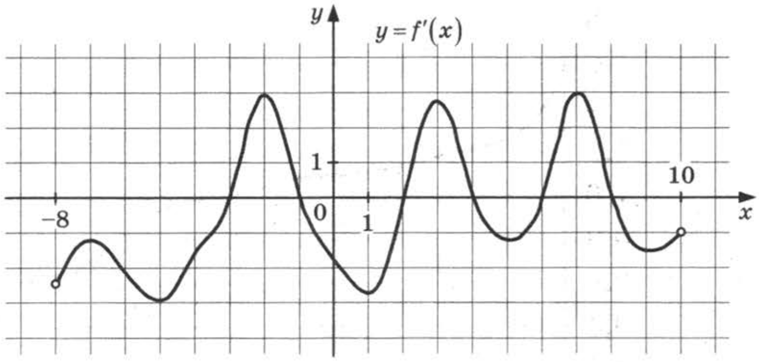
4. В небольшом магазине работают два продавца. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени оба продавца свободны.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{7x+41}{17}}=3$.

6. В треугольнике со сторонами 10 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 3. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−8; 10). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [−6; 7].



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 32. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_6 121}{\log_6 11}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 80 мг. Период его полураспада составляет 15 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 10 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 15 минут, второй и третий — за 21 минуту, а первый и третий — за 35 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = (4-5x)\cos x + 5\sin x + 17$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\cos 2x + 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 7$ и диагональю $BD = 10$. Все боковые рёбра пирамиды равны 7. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $7^{x+2}-7^{x+1}-2\cdot 7^{x}>2^{\frac{x}{3}+1}+2^{\frac{x}{3}-1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 200 и известно отношение $AC : AB = 2 : 3$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 9 месяцев нужно выплатить банку 1 024 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^{2}+2(a-1)x+(a-4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 12 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 9?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

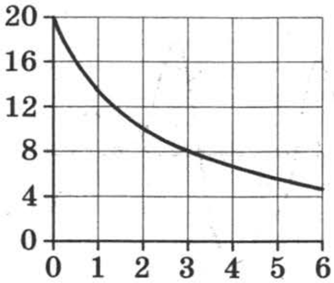
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 29

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

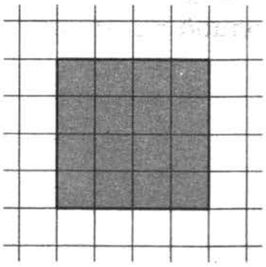
Часть 1

1. Шоколадка стоит 20 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 210 рублей в воскресенье?

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, за сколько минут количество реагента уменьшилось с 20 граммов до 8 граммов.



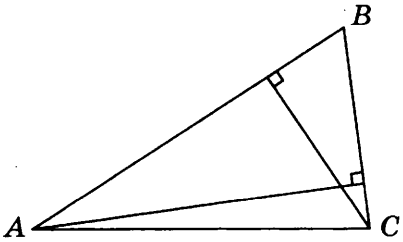
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



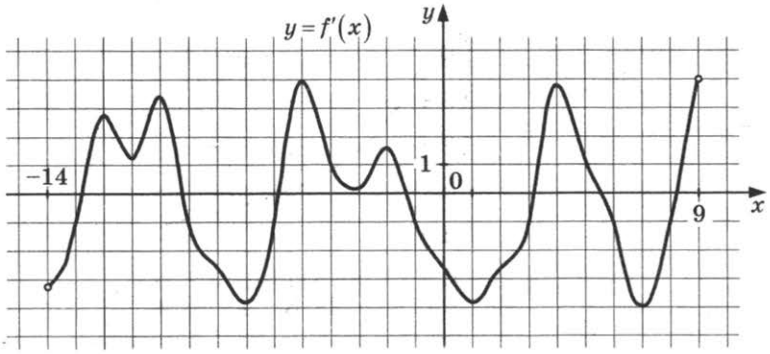
4. В небольшом магазине работают два продавца. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,45. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени оба продавца свободны.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x+27}{3}}=11$.

6. В треугольнике со сторонами 14 и 7 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−14; 9). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [−12; 7].



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 52. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{13}32}{\log_{13}2}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 156 мг. Период его полураспада составляет 8 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 39 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 12 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 20 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y=(3-5x)\cos x+5\sin x+9$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sqrt{2}\cos x+2-\cos 2x=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\ \dfrac{13\pi}{2}\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5$ и диагональю $BD=8$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF=BE=3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $3^{x+3}+3^{x+2}-3^x<2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{x}{2}-1}+2^{\frac{x}{2}-2}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 110 и известно отношение $AC : AB = 1 : 4$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 8 месяцев нужно выплатить банку 900 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+1)x+(a-4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 18 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?

в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

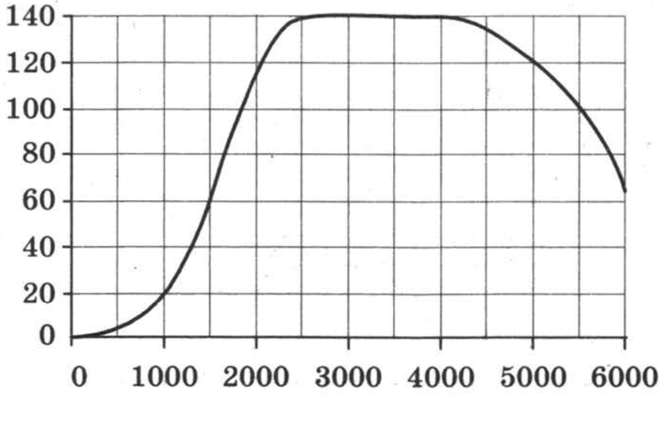
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 30

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

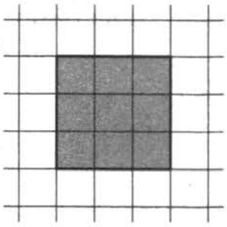
Часть 1

1. Шоколадка стоит 15 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 110 рублей в воскресенье?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н · м. На сколько оборотов в минуту увеличилось число оборотов двигателя, если крутящий момент возрос с 20 до 60?



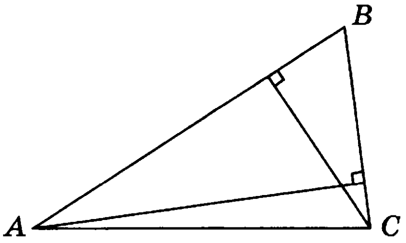
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



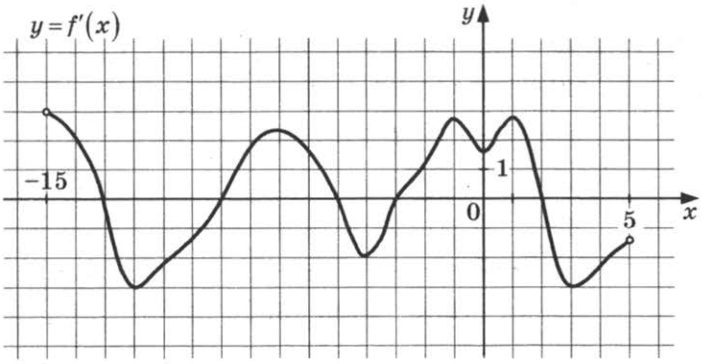
4. В небольшом магазине работают два продавца — Андрей и Иван. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,45. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Иван, а Андрей свободен.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{4x+40}{17}}=4$.

6. В треугольнике со сторонами 12 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-15; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-14; 4]$.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 38. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{10}64}{\log_{10}2}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 128 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 1 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 21 минуту, второй и третий — за 28 минут, а первый и третий — за 36 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y=(2-5x)\cos x+5\sin x+28$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\cos 2x+8\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-3=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2};5\pi\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=7$ и диагональю $BD=11$. Все боковые рёбра пирамиды равны 7. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF=BE=4$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $5^{x+3}+5^{x+1}+2\cdot 5^{x}<2^{\frac{x}{4}+6}+2^{\frac{x}{4}+1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 224 и известно отношение $AC : AB = 4 : 3$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 7 месяцев нужно выплатить банку 1 080 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a-2)x+(a+3)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 21 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

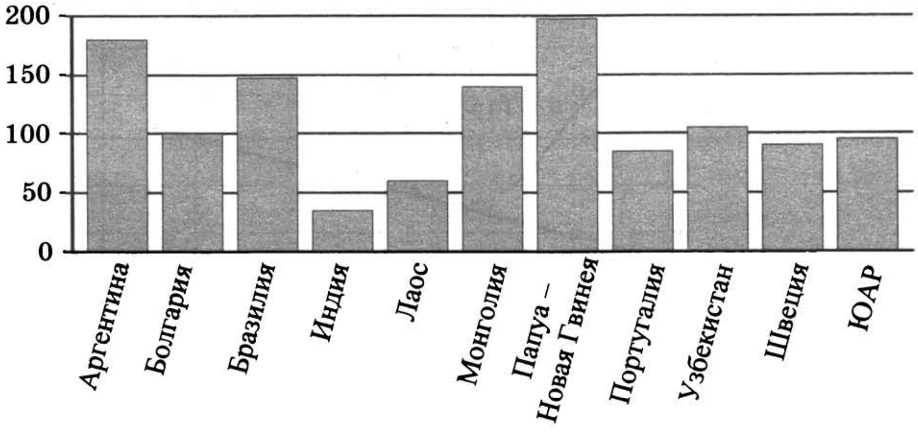
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 31

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

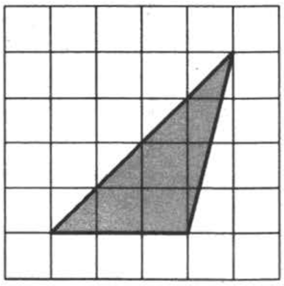
Часть 1

1. Футболка стоит 160 рублей. Какое наибольшее число футболок можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20% ?

2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?



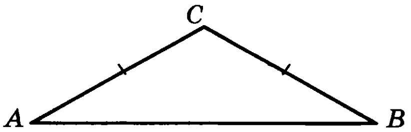
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



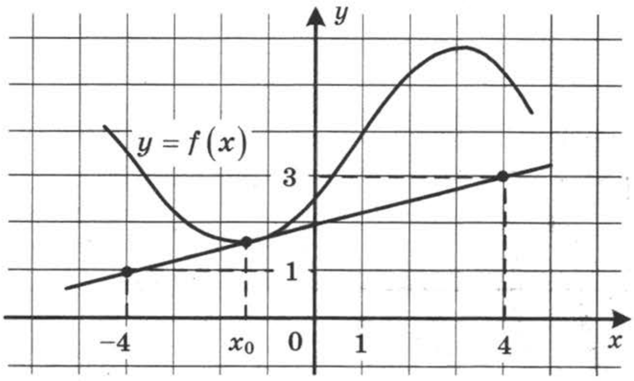
4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

5. Найдите корень уравнения $4^{3+5x} = 0,8 \cdot 5^{3+5x}$.

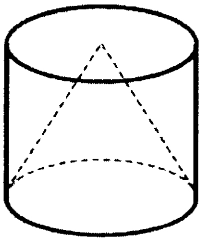
6. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 29°, *AC* = *BC*. Найдите угол *C*.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Объём цилиндра равен 12. Чему равен объём конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

10. Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наименьшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

11. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

12. Найдите точку минимума функции $y = (x+17)^2 e^{30-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5^{x^2-4x+1} + 5^{x^2-4x} = 30$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причём $BP : PB_1 = 1 : 3$.

а) Пусть M — середина A_1C_1. Докажите, что прямые MP и AC перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

15. Решите неравенство $\dfrac{x^2-2x-1}{x-2} + \dfrac{2}{x-3} \le x$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 60 и 80.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t-\sin t}=2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

19. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили так же и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 32

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

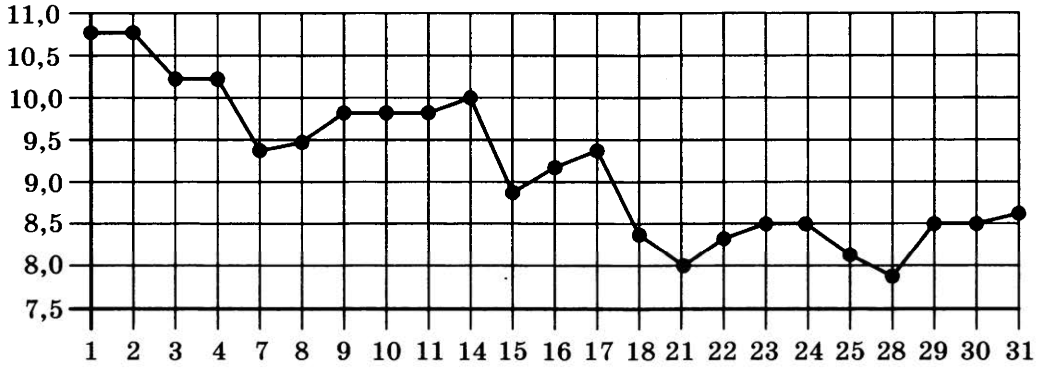
Часть 1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

1

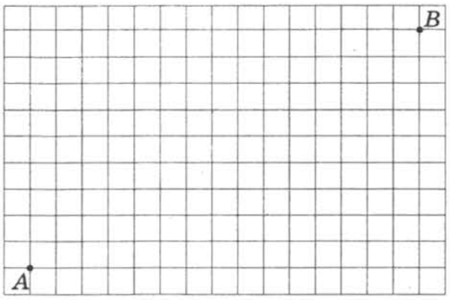
2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.

2



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B. Найдите длину отрезка AB.

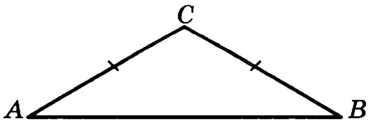
3



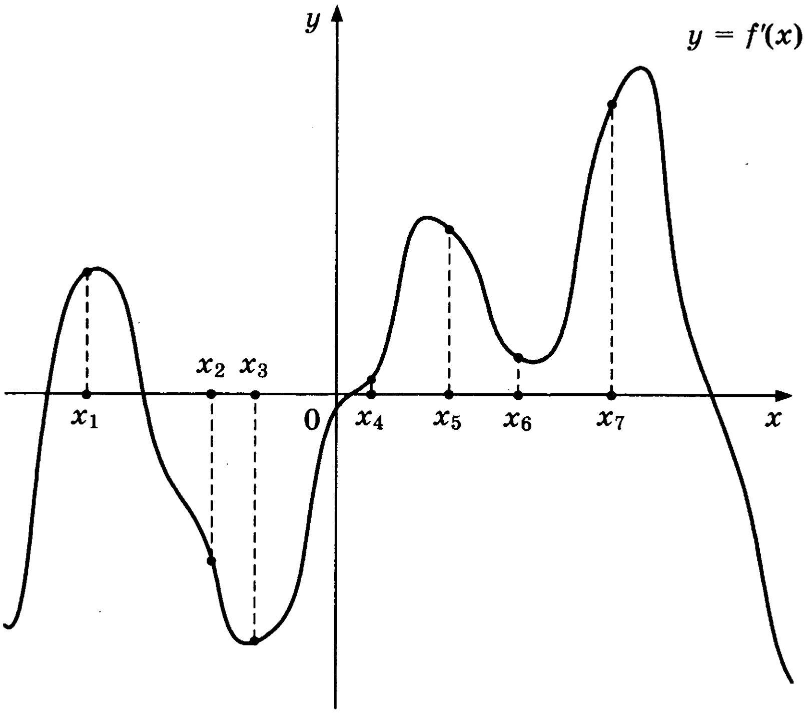
4. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{14+5x}=7$.

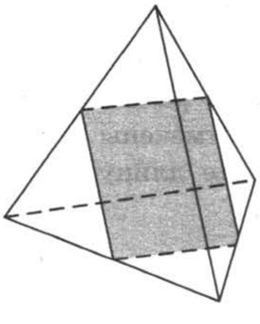
6. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120°, $AB=\sqrt{3}$. Найдите AC.



7. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



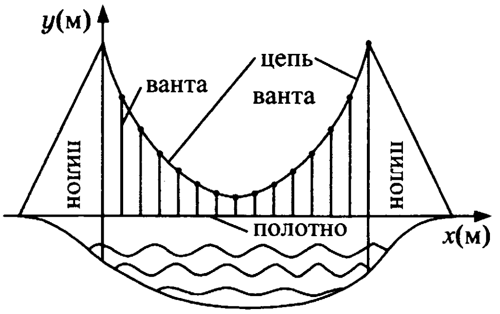
8. Рёбра правильного тетраэдра равны 14. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.



Часть 2

9. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi;\ 2\pi)$.

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0013x^2 - 0{,}35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении 1 : 3, считая от вершины B.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

15. Решите неравенство $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \ge 0$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30°$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

18. Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{2a + x^2 - 4\log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log^2_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

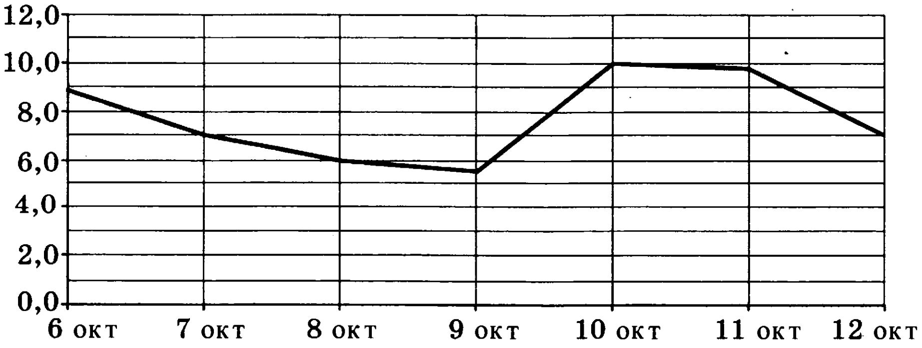
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 33

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

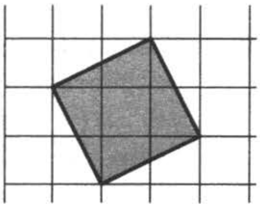
1. Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?

2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.



Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от 6,5 °C до 9 °C.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите его площадь.

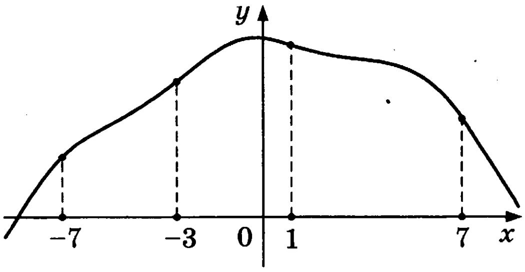


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

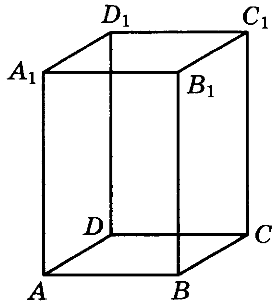
5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-3}=2$.

6. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 11$, $DC = 33$, $AC = 28$.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7, -3, 1, 7. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



Часть 2

9. Найдите значение выражения: $\left(3^{\log_7 5}\right)^{\log_3 7}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 200$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

11. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6^{x^2-4x}+6^{x^2-4x-1}=42$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2;4]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 6, точка M — середина ребра BC, точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.

а) Найдите отношение, в котором плоскость CMF делит отрезок SA, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $\log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2)\le 0$.

16. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM:MB=1:2$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD=2\sqrt{3}$.

17. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3 696 300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left|x^2-x-6\right|=(y-1)^2+x-7,\\ 3y=2x+a\end{cases}$$

имеет ровно один или два корня.

19. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 34

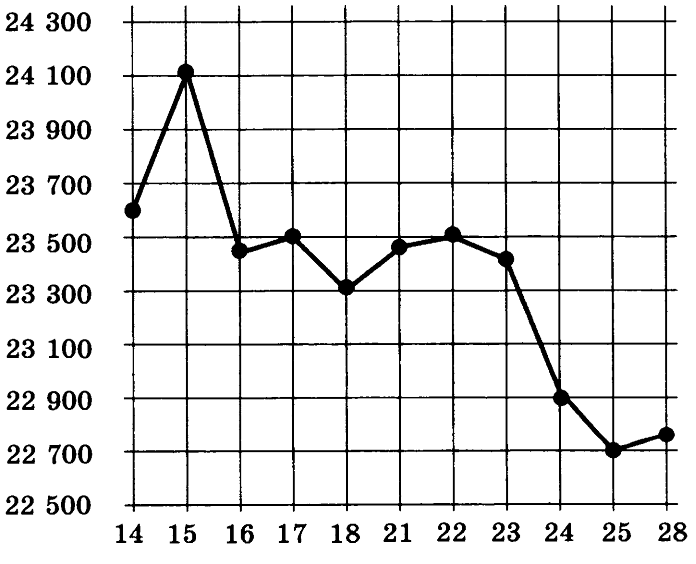
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

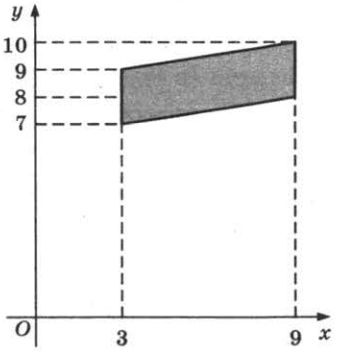
1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Какое наименьшее количество пачек нужно купить на все дни конференции?

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



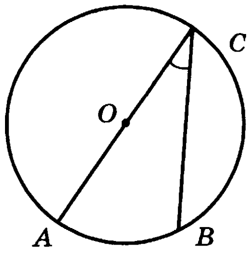
3. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (3; 7), (9; 8), (9; 10), (3; 9).



4. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

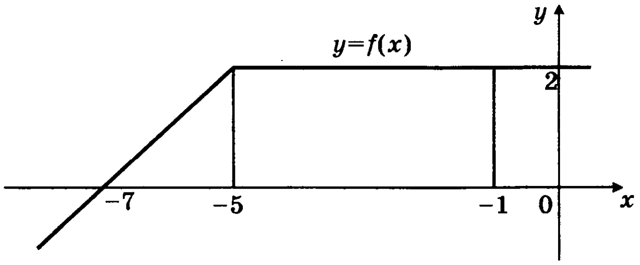
5. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

6. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 1/5 окружности. Ответ дайте в градусах.

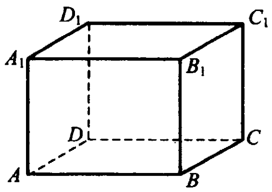


7. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, найдите интеграл

$$\int_{-7}^{-1} f(x)dx.$$



8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C, C_1 и A.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3{,}5$.

10. Зависимость температуры (в кельвинах) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально, и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0{,}2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 11\operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

15. Решите неравенство $4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \le 0$.

16. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

19. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

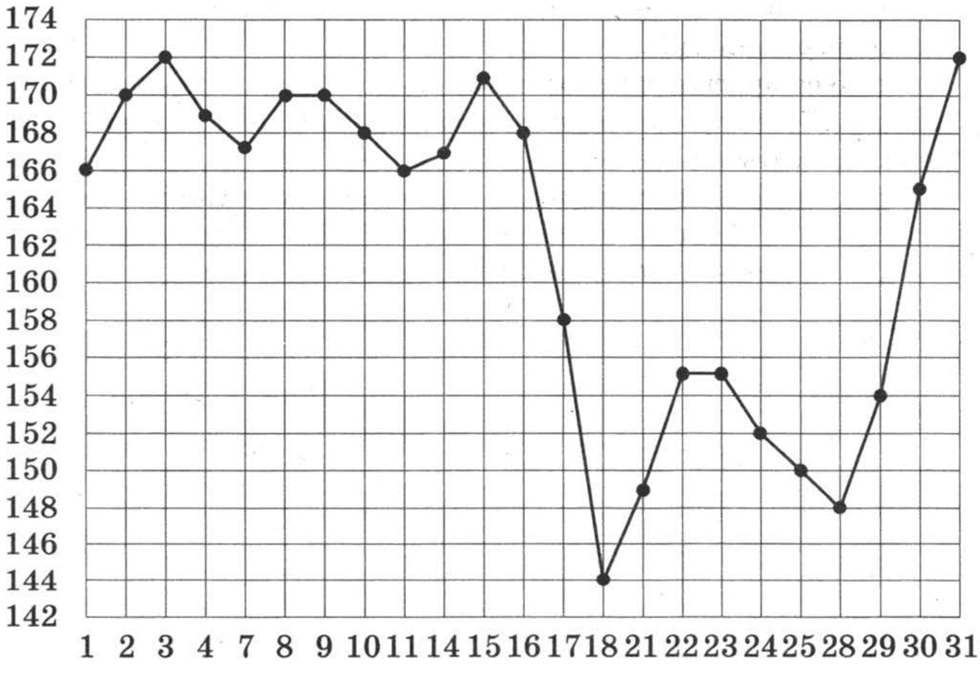
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 35

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

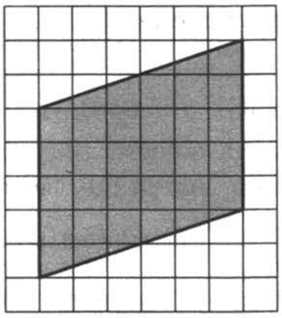
Часть 1

1. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

2. На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.



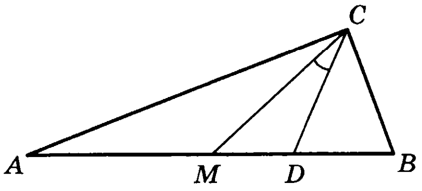
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



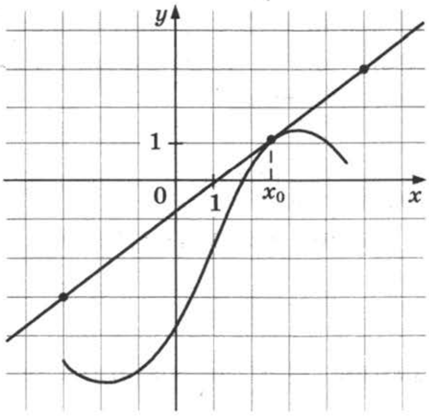
4. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист А., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

5. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+6} = 81^x$.

6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $6\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}15^\circ\cdot\operatorname{tg}105^\circ$.

10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E}=65\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U=\dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 60 В? Ответ дайте в омах.

11. Из точки А в точку В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=4x-\ln(4x)+16$ на отрезке $\left[\frac{1}{8};\ \frac{5}{8}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\cdot 9^{x^2-4x+1}+42\cdot 6^{x^2-4x}-15\cdot 4^{x^2-4x+1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;3]$.

14. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB, AC и SA, отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду, объём которой в 8 раз меньше объёма пирамиды $SABC$.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA=2\sqrt{5}$, $AB=AC=10$, $BC=4\sqrt{5}$.

15. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$.

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 3$.

17. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left|2x^2 + y^2 - 1\right| + y^2 + 4y = 0, \\ y = 0,5x + a \end{cases}$$

имеет два или три корня.

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 2?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{4}{3}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 20?

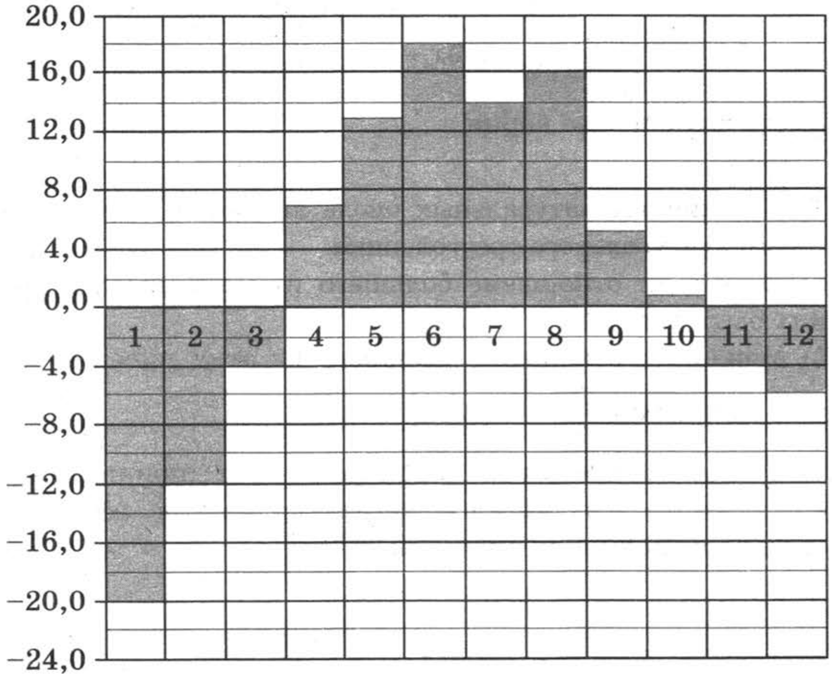
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 36

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

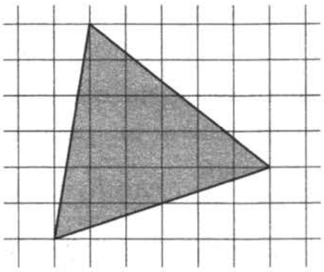
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 21 дюйму. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1973 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

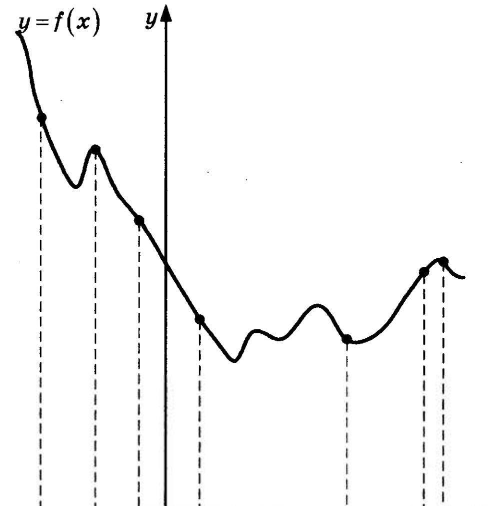


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

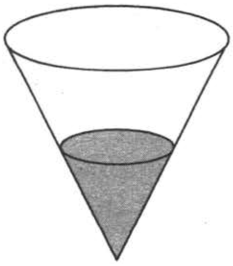
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x}=4^{2x}$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 9$, $\operatorname{tg} A=\frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 54 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(252^2 - 23^2) : 275$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 10 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?

11. Если смешать 45-процентный раствор кислоты и 97-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x}{x^2+144}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1)}=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 3$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}} < \sqrt{16^{\frac{2x+1}{x}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC = 3\sqrt{2}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2 + x + 2a^2 + 1\right)^2 = 8a^2\left(x^2 + x + 1\right)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 286$?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 37

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

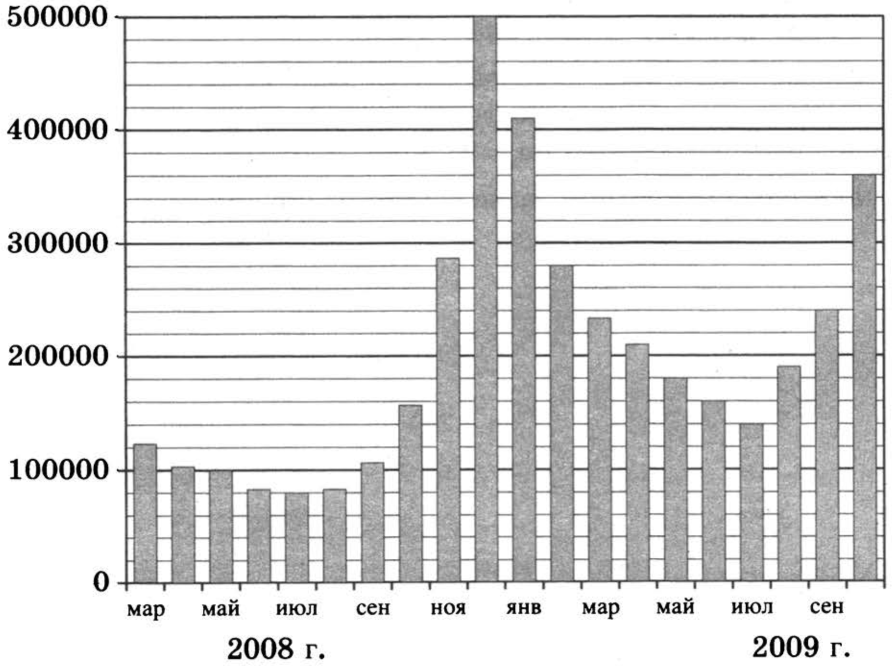
Часть 1

1

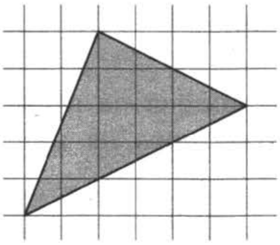
1. Диагональ экрана телевизора равна 35 дюймам. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2

2. На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наименьшее месячное количество запросов со словом СНЕГ с января по октябрь 2009 года.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

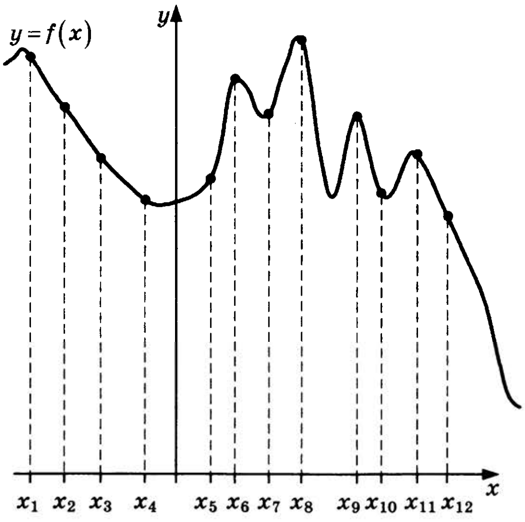


4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9. Результат округлите до тысячных.

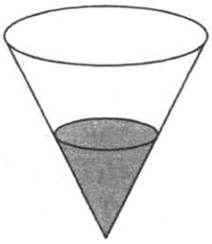
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{18-3x} = 64^x$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{\sqrt{3}}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$ высоты. Объём жидкости равен 5 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(168^2 - 11^2) : 179$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 8 километров?

11. Если смешать 54-процентный раствор кислоты и 61-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 46-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 56-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 54-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 196}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos x = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 2 : 3$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 2 : 1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt[3]{8^{5x+3}}<\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{2x+1}{x}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC=4\sqrt{6}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 7 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(2x^2+x+3a^2+5\right)^2=12a^2\left(2x^2+x+5\right)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $2a_{k+2}=3a_{k+1}-a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n=2a_2-a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 286$?

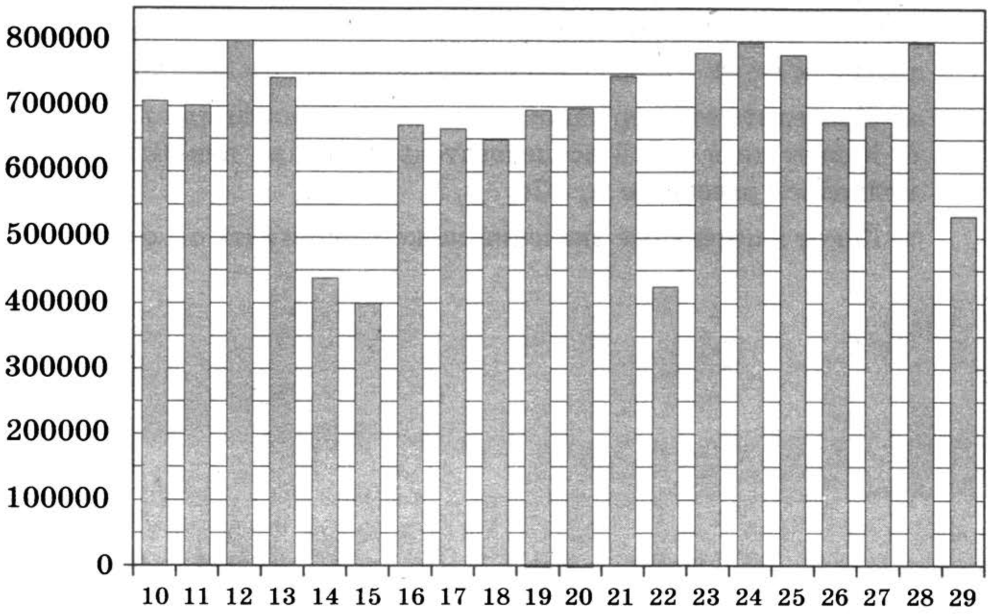
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 38

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

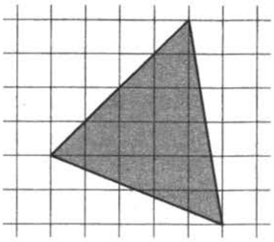
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 37 дюймам. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, каково наименьшее суточное количество посетителей сайта РИА Новости в период с 16 по 21 ноября.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

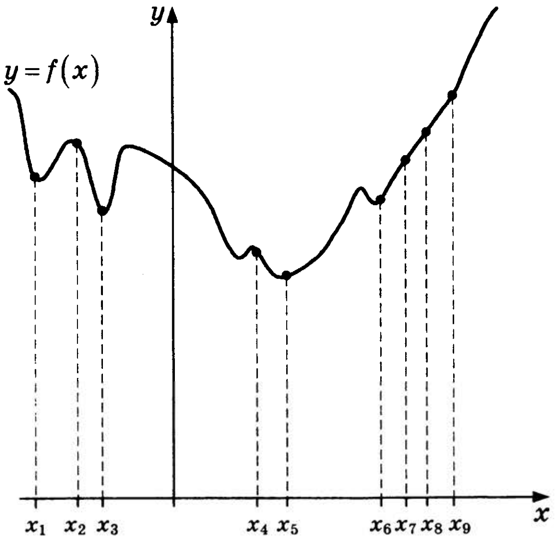


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что одновременно хотя бы на одном кубике выпало число 1 и ни на одном кубике не выпало число 6.

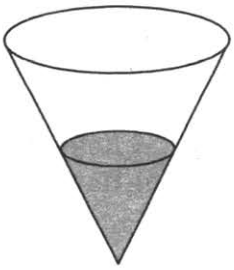
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9^x$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 15$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(246^2 - 17^2) : 263$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?

11. Если смешать 29-процентный раствор кислоты и 33-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 19-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 39-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 29-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x}{x^2+121}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin x+\sqrt{\frac{3}{2}(1-\cos x)}=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2};\ -5\pi\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 2 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 1 : 3$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC = 8\sqrt{3}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(6x^2-6x+a^2+6\right)^2=8a^2\left(x^2-3x+3\right)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=5a_{k+1}-a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $3a_n = 4a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 283$?

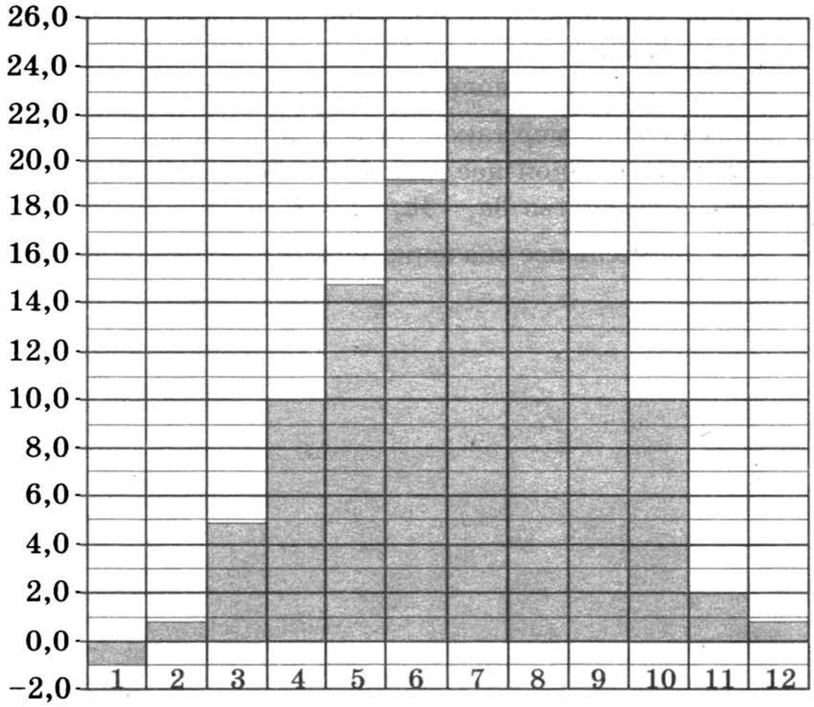
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 39

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

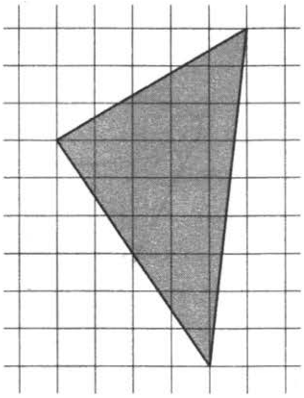
Часть 1

1. **Диагональ экрана телевизора равна 31 дюйму. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.**

2. **На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру с апреля по октябрь 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.**



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

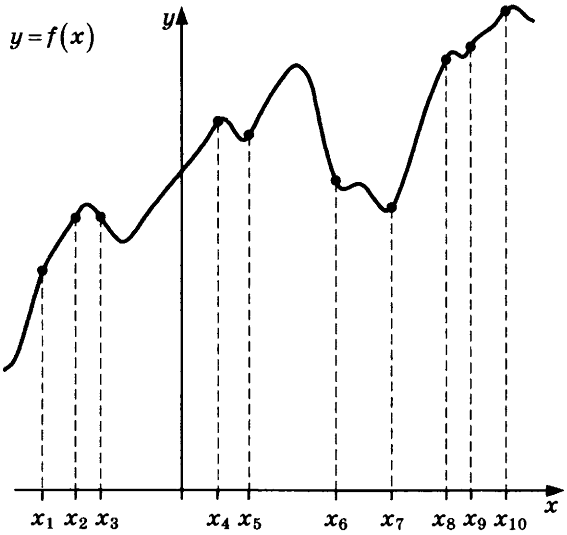


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 5, но не делится на 30.

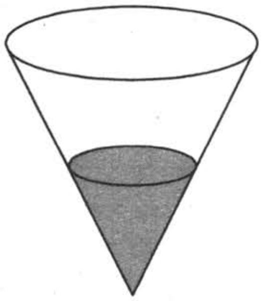
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{13-5x} = 16^{3x}$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 12$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 152 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(651^2 - 17^2) : 668$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где R = 6400 км — радиус Земли.

Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 6,4 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 11,2 километра?

11. Если смешать 40-процентный раствор кислоты и 90-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 40-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x}{x^2+625}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 4 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 2 : 5$, а на ребре — точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 7$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt[6]{64^{3x-1}} > \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1-3x}{x-1}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC = 6\sqrt{7}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(3x^2-3x+a^2+9\right)^2=12a^2\left(x^2-x+3\right)$$

имеет ровно один корень.

19

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $6a_{k+2} = 7a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $5a_n = 6a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 404$?

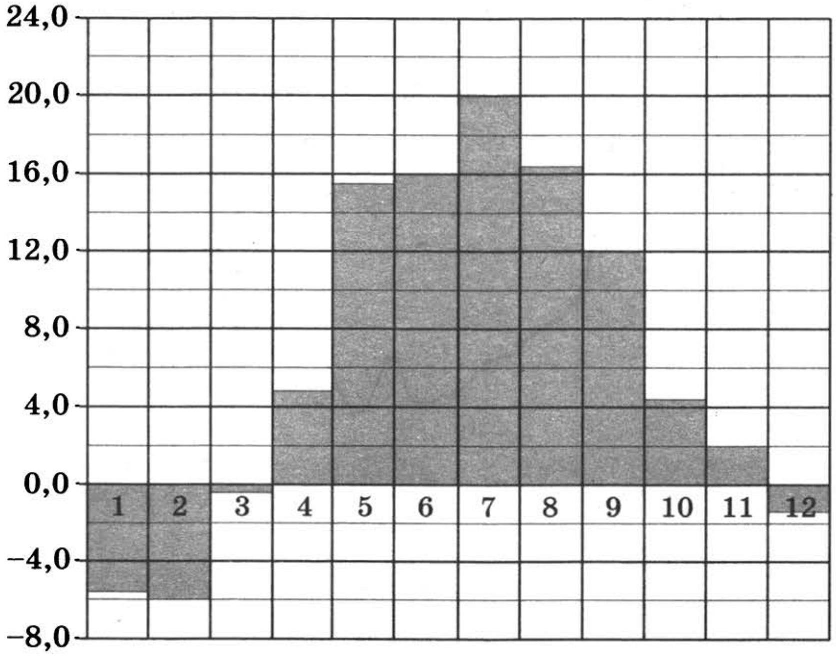
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 40

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

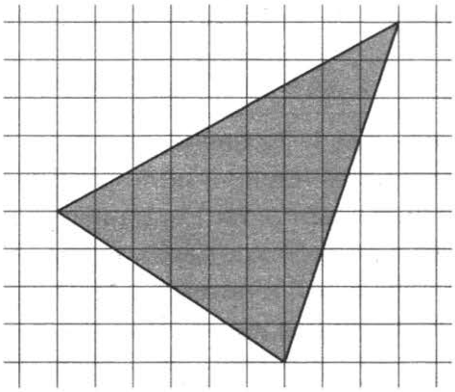
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 57 дюймам. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с апреля по ноябрь 2003 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

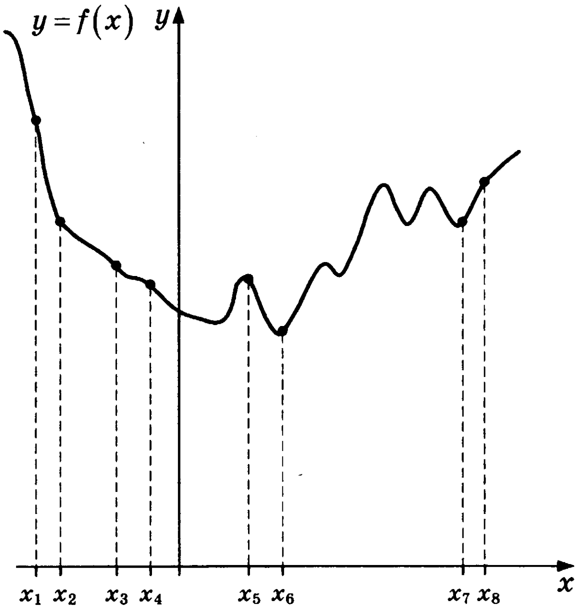


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до тысячных.

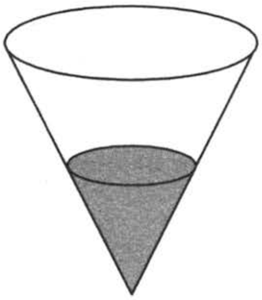
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{15-x} = 36^x$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 14$, $\operatorname{tg} A = \frac{20}{3\sqrt{10}}$. Найдите AC.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 192 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(573^2 - 11^2) : 584$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 9,6 километра?

11. Если смешать 14-процентный раствор кислоты и 98-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 70-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 74-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 14-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x}{x^2+289}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\sin x+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot(\cos x+1)}=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 4 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 3 : 2$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 3 : 1$. Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

15. Решите неравенство $\sqrt{625^{\frac{4-2x}{x-1}}}>\sqrt[3]{125^{2x+1}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC=3\sqrt{14}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(2x^2-2x+3a^2+2\right)^2=24a^2\left(x^2-x+1\right)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $7a_{k+2} = 8a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $6a_n = 7a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 190$?

19

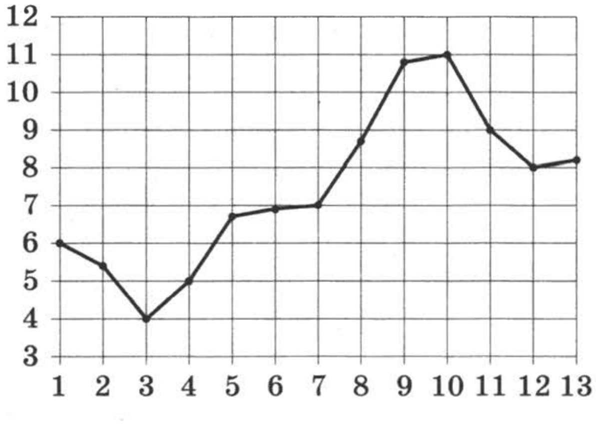
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 41

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

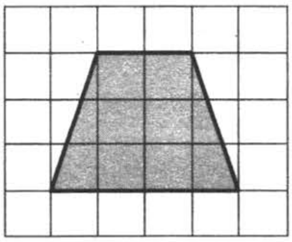
Часть 1

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Махачкале во все дни с 1 по 13 апреля 2014 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какого числа средняя температура в Махачкале была наименьшей за данный период.



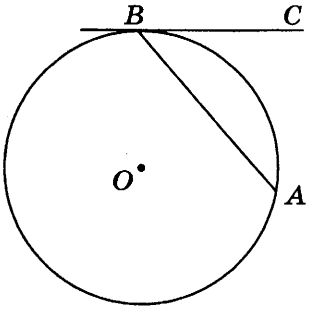
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



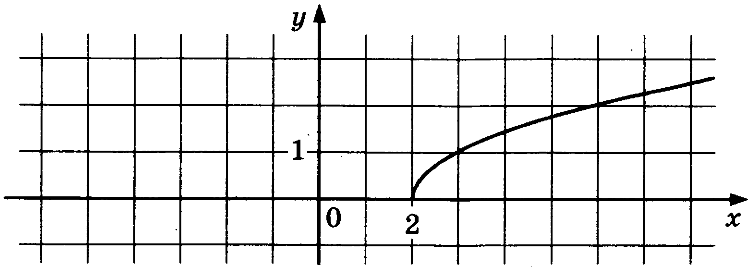
4. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}8$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется больше трёх попыток.

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_{16}(9x+4)} = 5$.

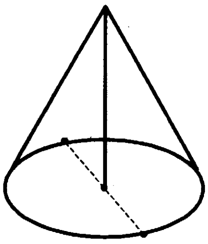
6. Хорда AB стягивает дугу окружности в 40°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



8. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



Часть 2

9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в кельвинах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \dfrac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $4{,}104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ дайте в кельвинах.

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Трубы начали наполнять баки одновременно. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка A_1K, где K — середина ребра BC.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

15. Решите неравенство $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \leq 0$.

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\log_{0,5}\left(x^2\right)-a\right|-\left|\log_{0,5}x+2a\right|=\left(\log_{0,5}x\right)^2$ имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

19. Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

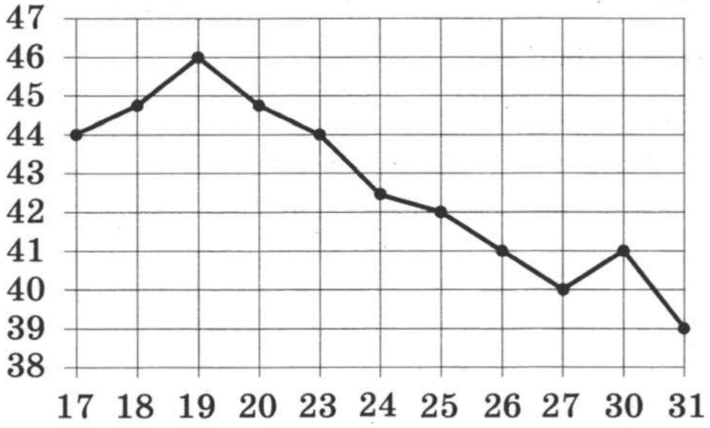
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 42

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена нефти на момент закрытия торгов была меньше 43 долларов США за баррель.

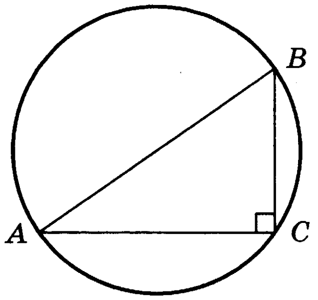


3. Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (2; 5), (–2; 9), (–6; 5), (–2; 1).

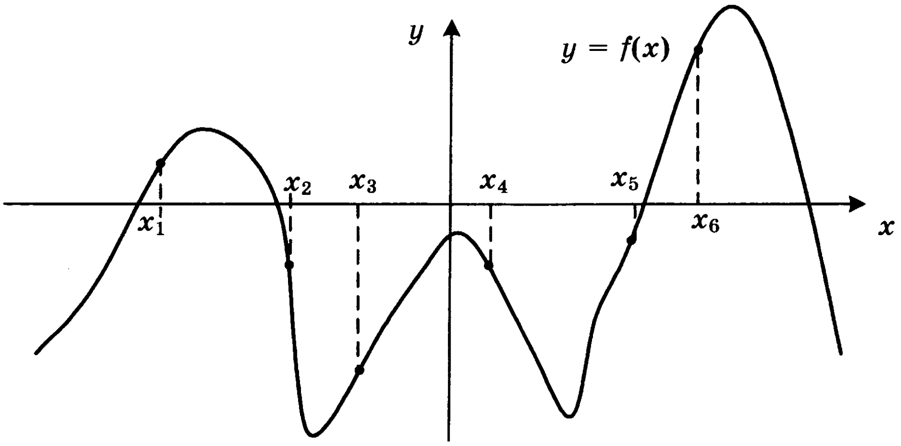
4. Двое играют в кости — они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

5. Найдите корень уравнения $(x + 11)^2 = 44x$.

6. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 2$.

Часть 2

9. Найдите $\frac{5\sin 4\alpha}{3\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,6$.

10. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

11. Города А, В и С соединены прямолинейным шоссе, причём город В расположен между городами А и С. Из города А в сторону города С выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города В в сторону города С выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами А и В равно 112 км?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{x-20}$ на отрезке $[19;\ 21]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 15$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра C_1D_1, а точка L делит ребро BB_1 в отношении 4 : 1, считая от вершины B_1.

а) Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1, считая от вершины C_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4,2} + \frac{1}{\sqrt{x+4,2}} \geq \frac{5}{2}$.

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

17. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Евгений переводит очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, во второй 649,6 тыс. рублей. Найдите a.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\log_5\left(x^2\right)-a\right|-\left|\log_5 x+2a\right|=\left(\log_5 x\right)^2$$

имеет ровно четыре решения.

19. В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 42% респондентов никогда не отмечали Новый год не дома.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

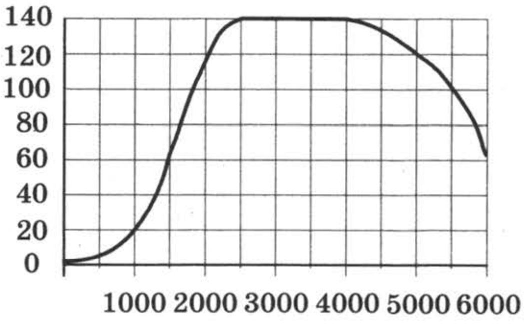
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 43

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

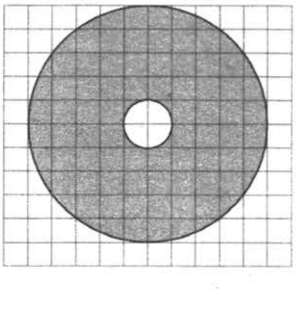
Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 рублей. До установки счётчиков за воду платили 900 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н · м. На сколько Н · м увеличится крутящий момент при увеличении числа оборотов с 1500 об/мин до 2500 об/мин?



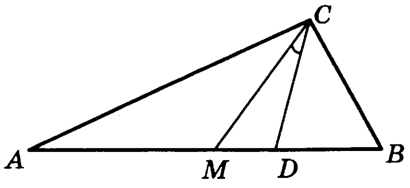
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



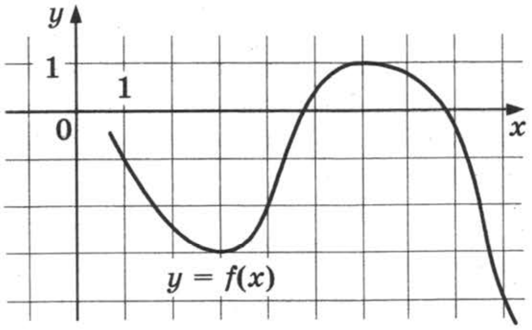
4. В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист А., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

5. Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x)=1$.

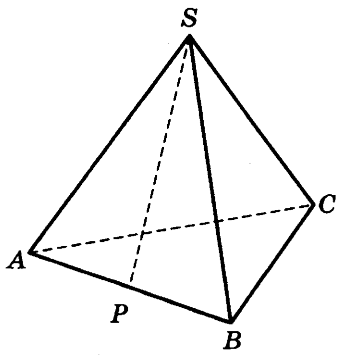
6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке [1; 9].



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-50\,\mathrm{tg}\,27^\circ \cdot \mathrm{tg}\,117^\circ$.

10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 155\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В? Ответ дайте в омах.

11. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 16 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 496 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6x + 15$ на отрезке $[7;\ 33]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

15. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \le 0$.

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что восьмая выплата составила 108 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a+3)^2+(y-a)^2=2,25;\\(x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 44

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

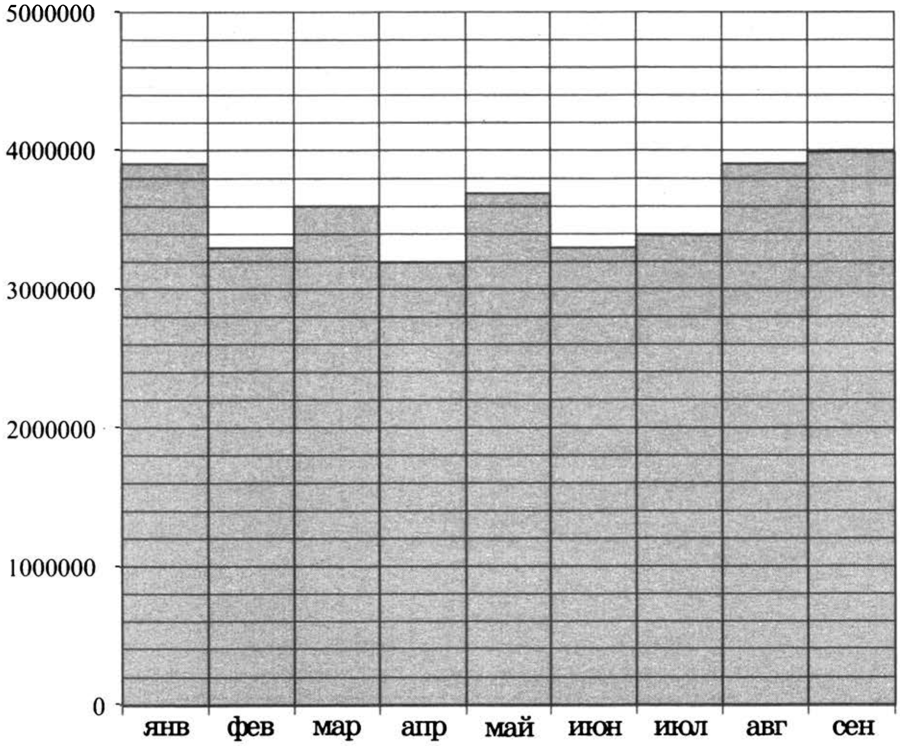
Часть 1

1 ☐

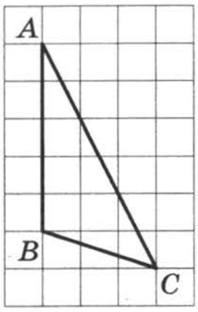
1. В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 граммов гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

2 ☐

2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.

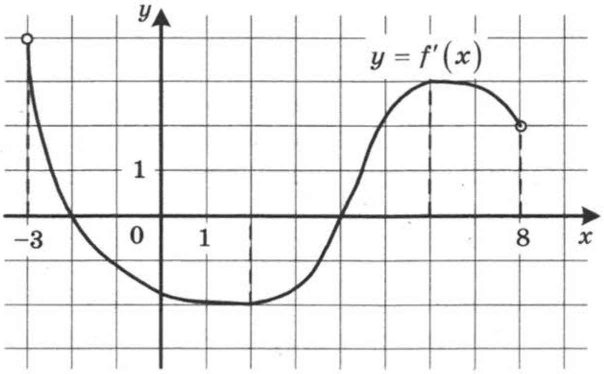


4. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зелёные». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах из трёх право первой владеть мячом получит команда «Белые».

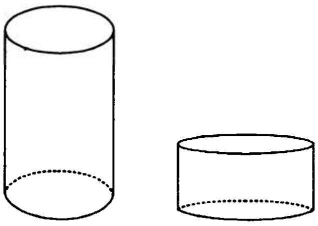
5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9}=\frac{1}{6x+12}$.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21°, угол CAD равен 30°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



8. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая втрое шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 24 километра? Ответ дайте в метрах.

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P — середина ребра BB_1.

а) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости PAC.

15. Решите неравенство

$$\log_7 \frac{3}{x} + \log_7\left(x^2 - 7x + 11\right) \le \log_7\left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} + 10\right).$$

16. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.

17. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|2^{1-x}-a\right|-\left|\frac{1}{2^{x}}+2a\right|=4^{-x}$$

имеет единственное решение.

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчика и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки?

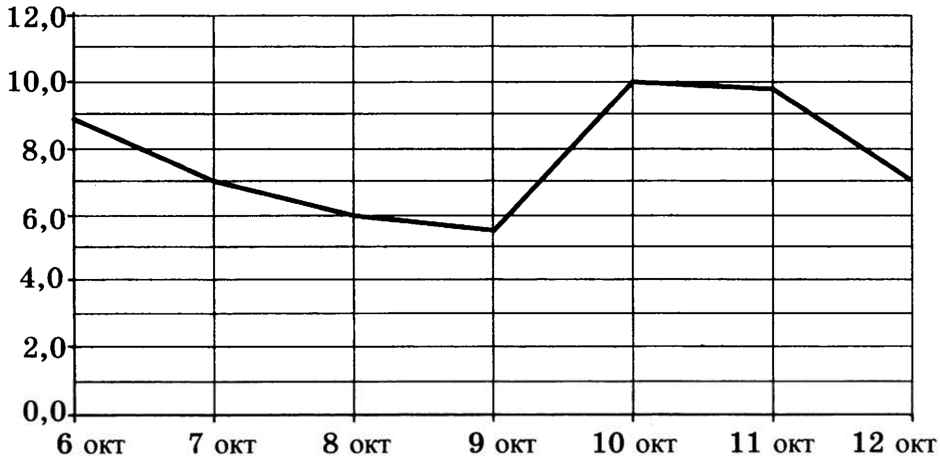
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 45

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

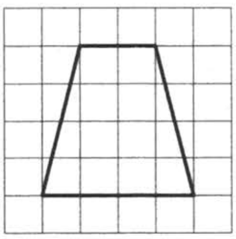
Часть 1

1. Поезд Москва—Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



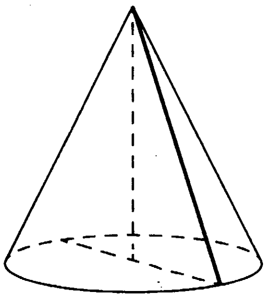
4. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{7x-49}}=\frac{1}{7}$.

6. В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+3t+23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 9 с.

8. Высота конуса равна 30, а диаметр основания равен 32. Найдите образующую конуса.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

10. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите наименьшую цену p (в тыс. руб.), при которой выручка предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит 210 тыс. руб.

11. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^{x} + 7$ на отрезке $[0;\ 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 x + 4\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 4\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

14. В пирамиде $SABC$ известны длины ребер $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$. Точка K — середина ребра BC.

а) Докажите, что плоскость SAK перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC.

15. Решите неравенство $\log^2_{|x|}(x^2) + \log_2(x^2) \le 8$.

16. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \dfrac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 958,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

19. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

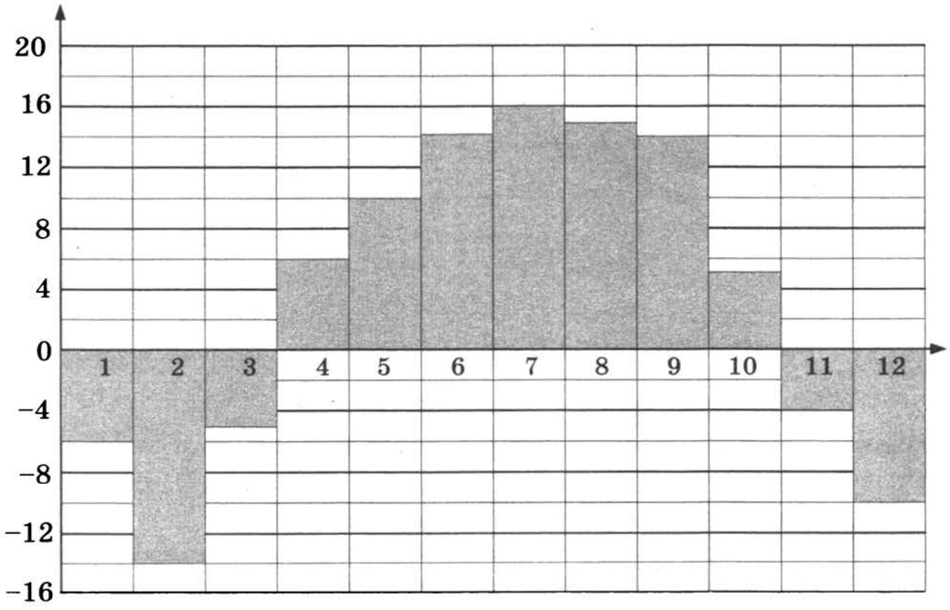
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 46

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

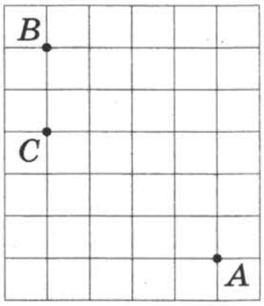
Часть 1

1. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 590 рублей, а стоимость одного номера журнала — 26 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



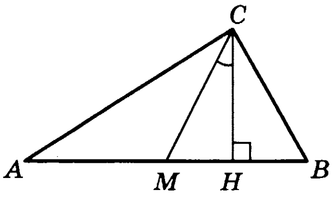
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.



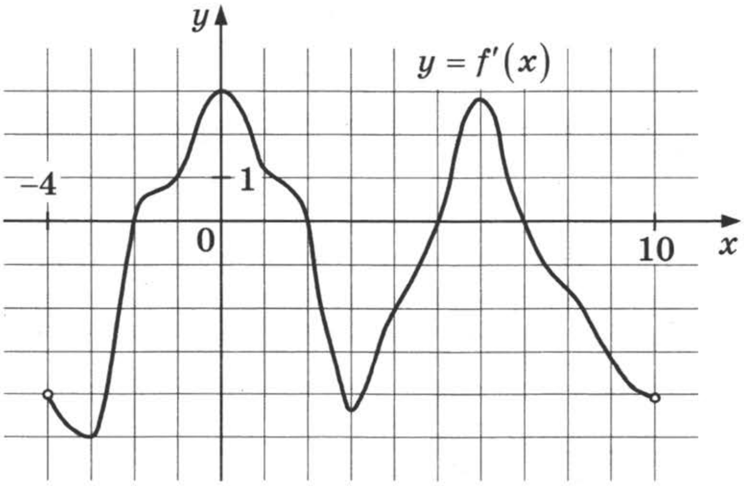
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(2-x)=2$.

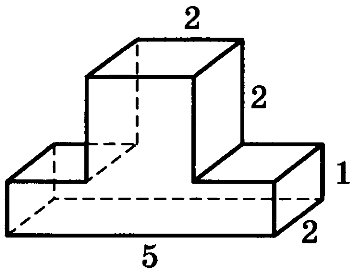
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x+16$ или совпадает с ней.



8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $S = \frac{1}{256}\cdot 10^{21}\ \text{м}^2$, а мощность её излучения равна $5{,}7\cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

11. Игорь и Паша могут покрасить забор за 30 часов. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 36 часов, а Володя и Игорь — за 45 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

12. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 14x + 20\ln x - 6$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен $45°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

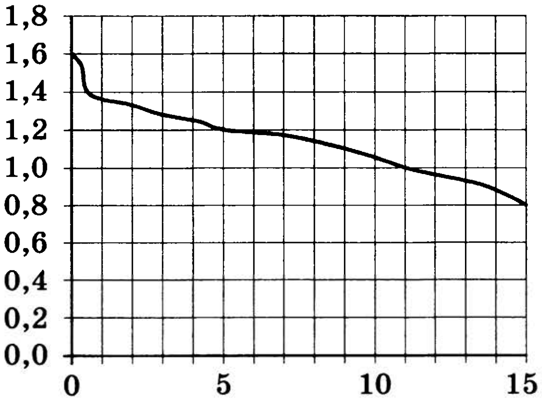
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 47

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

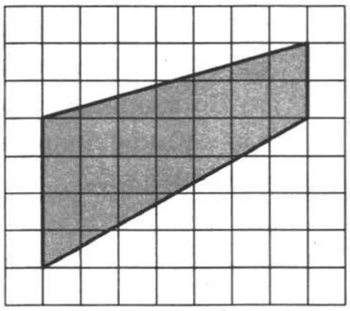
Часть 1

1. Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 5 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



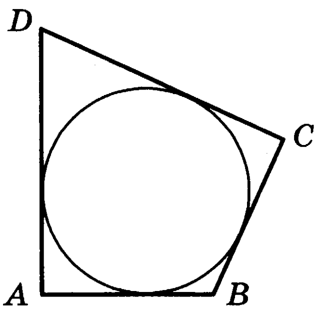
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



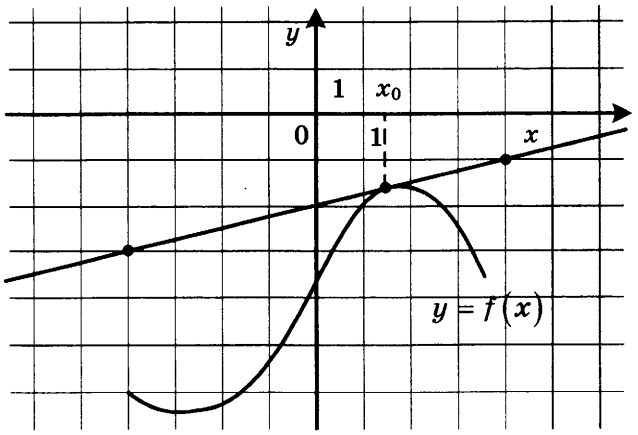
4. В корабельной артиллерии применяется система управления огнём. Орудие делает выстрел по цели. Если цель не поражена, делается ещё один выстрел. Третий выстрел не делается. Известно, что вероятность поражения цели каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что цель будет поражена.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{1-6x}=7$.

6. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 6$, $BC = 4$ и $CD = 16$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 78. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 1.

11. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$ на отрезке $[-6; -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14. Площадь основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, а площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна $32\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания пирамиды и боковым ребром равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

15. Решите неравенство $\dfrac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0.$

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

17. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

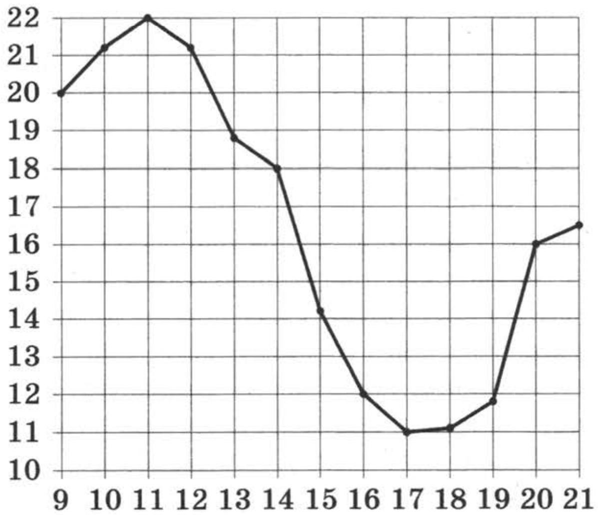
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 48

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

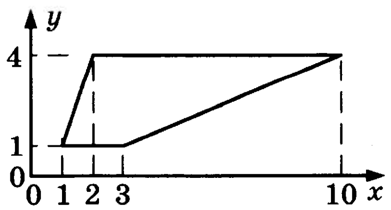
Часть 1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Кемерове во все дни с 9 по 21 августа 2012 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какого числа средняя температура в Кемерове была наименьшей за данный период.



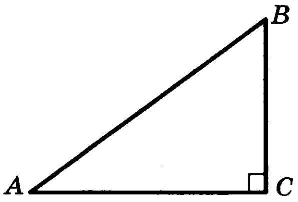
3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (2; 4), (10; 4), (3; 1).



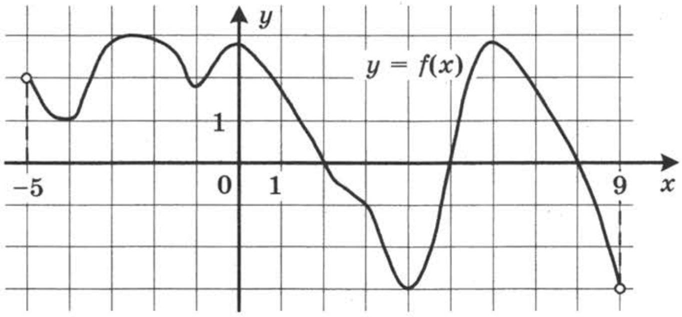
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $32^{x-3} = \frac{1}{2}$.

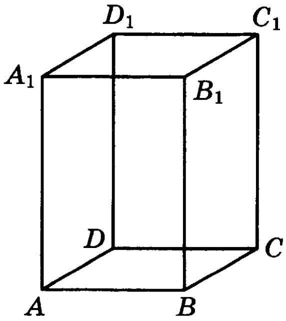
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Боковое ребро равно 6. Найдите диагональ призмы.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}1\ \dfrac{\text{с}}{\text{Ом}\cdot\text{Ф}}$ — постоянная.

Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^{x} - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

19. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

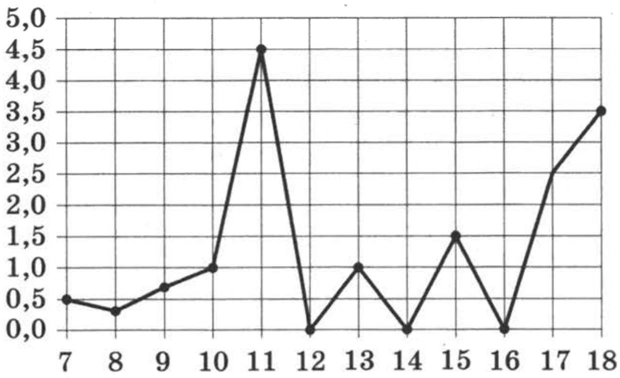
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 49

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

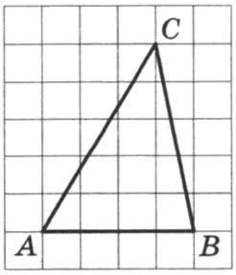
Часть 1

1. **Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?**

2. **На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало больше 2 миллиметров осадков.**



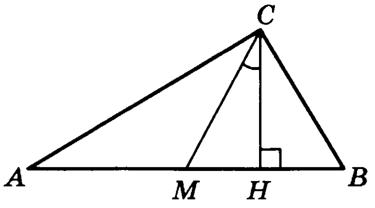
3. **На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник *ABC*. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне *AB*.**



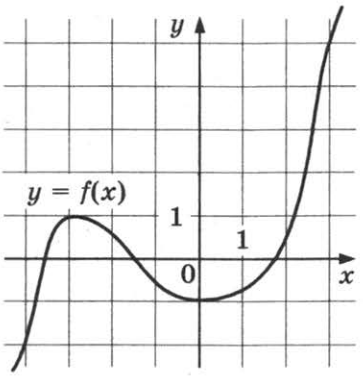
4. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 4, но не дойдя до отметки 7.

5. Найдите корень уравнения $\log_5(-2 - x) = 1$.

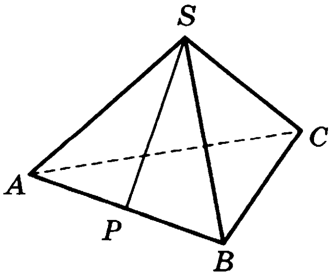
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка P — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $BC = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{2\cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 28$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 40 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 53 до 77 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ дайте в сантиметрах.

11. По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 75 км/ч и 30 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 750 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

12. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$, стороны основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L — середина ребра MB. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

15. Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \le \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right)$.

16. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

19. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 50

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

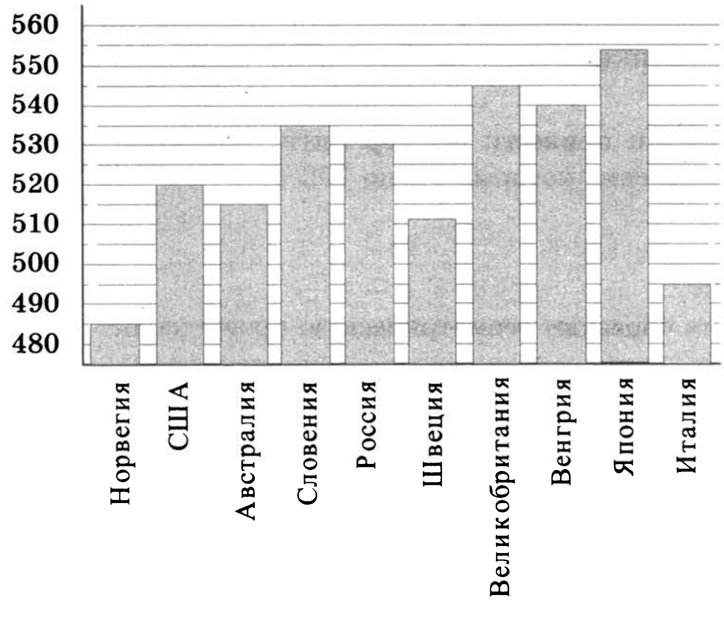
Часть 1

1 ☐

1. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

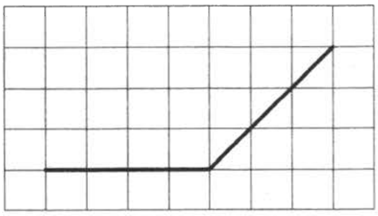
2 ☐

2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран второе место принадлежит Великобритании. Определите, какое место занимает Россия.



3 ☐

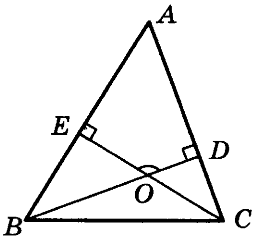
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



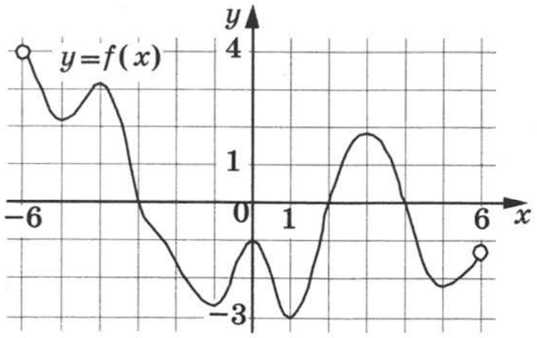
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+31}=9$.

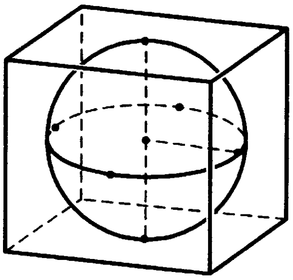
6. В треугольнике ABC угол A равен 56°, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-5,5;4]$.



8. Шар, объём которого равен π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{200}\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sqrt{50}$.

10. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m},$$

где $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями,

$r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами,

K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 26, их средняя оценка равна 0,68, а оценка экспертов равна 0,32.

11. Расстояние между городами А и В равно 440 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 90 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 260 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4,5;0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $19\cdot 4^x - 5\cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5;-4]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

15. Решите неравенство $1+\log_6(4-x) \le \log_6\left(16-x^2\right)$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30°$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2+11|x+2|+3\sqrt{x^2+4x+13}=5a+2|x-2a+2|$$

имеет хотя бы один корень.

19. а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте *а* свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200?

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|=15-2\cdot 3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|+6\left(3^x-6\right)+21=0.$$

Пусть $3^x - 6 = t$.

а) При $t \geqslant 0$ получаем $t^2 - 10t + 21 = 0$, откуда $t = 3$ или $t = 7$, следовательно, $x = 2$ или $x = \log_3 13$.

При $t < 0$ получаем $t^2 + 22t + 21 = 0$, откуда $t = -1$ или $t = -21$, следовательно, $x = \log_3 5$.

б) Поскольку $1 = \log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \log_3 13$, отрезку [1; 2] принадлежат только корни $\log_3 5$, 2.

Ответ: **а)** $\log_3 5$, 2, $\log_3 13$; **б)** $\log_3 5$, 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

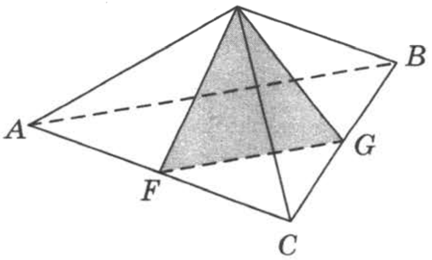
14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

Решение.

а) Обозначим F и G середины сторон AC и BC соответственно (см. рисунок).



Из условия следует, что треугольник AMC прямоугольный с прямым углом при вершине M. Поскольку пирамида правильная, все боковые грани — прямоугольные равнобедренные треугольники. Отрезок

MF — медиана прямоугольного треугольника AMC, проведённая к гипотенузе, поэтому $MF = \frac{6}{2} = 3$. Аналогично, $MG = 3$. Кроме того, $FG = 3$, поскольку FG — средняя линия равностороннего треугольника ABC со стороной 6. Таким образом, все стороны треугольника FMG равны.

б) Искомое расстояние r найдём как высоту треугольной пирамиды $CMFG$, считая основанием сечение MFG. Объём этой пирамиды равен четверти объёма пирамиды $MABC$:

$$V_{CMFG} = \frac{1}{4}V_{MABC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot AM\cdot BM\cdot CM = \frac{1}{24}\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

С другой стороны, $V_{CMFG} = \frac{1}{3}S_{MFG}\cdot r = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\cdot r = \frac{3r\sqrt{3}}{4}$.

Получаем: $\frac{3r\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$, откуда $r = \sqrt{6}$.

Ответ: б) $\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geqslant -1$.

Решение.

Перейдём к десятичным логарифмам:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geqslant -1; \quad \begin{cases} \dfrac{\lg(x-1)+\lg\frac{x}{6}}{\lg\frac{x}{6}} \geqslant 0, \\ x \neq 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(x-1)\frac{x}{6}}{\lg\frac{x}{6}} \geqslant 0, \\ x \neq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)\frac{x}{6}-1}{\frac{x}{6}-1} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)x-6}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x-6}\geqslant 0,\\ x\ne 2,\\ x>1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{(x+2)(x+3)}{x-6}\geqslant 0,\\ x\ne 2,\\ x>1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{x-3}{x-6}\geqslant 0,\\ x\ne 2,\\ x>1\end{cases};\quad \left[\begin{array}{l}1<x<2;\\ 2<x\leqslant 3;\\ x>6.\end{array}\right.$$

Ответ: (1; 2), (2; 3], (6; +∞).

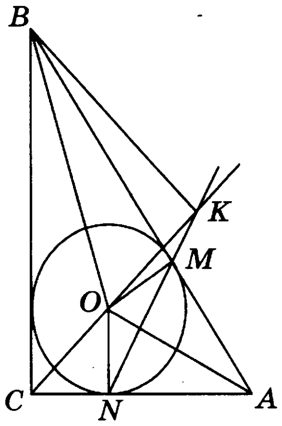
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

Решение.



а) Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения его биссектрис, поэтому лучи BO и CO — биссектрисы углов ABC и ACB.

Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAC = 90° - 2\alpha$. Из равнобедренного треугольника AMN находим, что

$$\angle ANM = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = \frac{1}{2}\left(180° - (90° - 2\alpha)\right) = 45° + \alpha.$$

По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle CKN = \angle ANM - \angle NCK = 45° + \alpha - 45° = \alpha = \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Что и требовалось доказать.

б) Пусть r — радиус вписанной окружности. Треугольник CKN подобен треугольнику CBO. Следовательно,

$$\frac{BC}{CK} = \frac{CO}{CN} = \frac{r\sqrt{2}}{r} = \sqrt{2},\ CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 3.$$

Из треугольника CBK по теореме косинусов находим

$$BK^2 = CB^2 + CK^2 - 2CB\cdot CK\cos\angle KCB = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\cos 45° = 3^2.$$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 14%, то есть увеличивается в 1,14 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}14^2S = 1{,}2996S.$$

Аналогично, сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}2996S;$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right) > \frac{1{,}2996}{10800} = 1{,}203\ldots.$$

При $n = 21$ неравенство

$$1{,}21 > 1{,}203\ \ldots$$

верно, а при $n = 20$ неравенство

$$1{,}20 > 1{,}203\ \ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 21.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax-x^2-\pi^2}+\cos 2\sqrt{ax-x^2-\pi^2}=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Сделаем замену $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$. Получаем:

$$\sin y+\cos 2y=0;\quad 2\sin^2 y-\sin y-1=0,$$

откуда $\sin y=1$ или $\sin y=-\frac{1}{2}$.

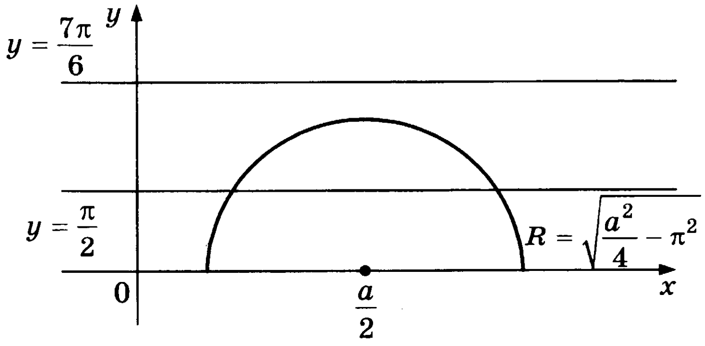
Тогда $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $y=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$ или $y=\frac{11\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

При $y\geqslant 0$ на координатной плоскости эти уравнения определяют множество горизонтальных прямых. Две самые близкие к оси абсцисс прямые имеют уравнения $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=\frac{7\pi}{6}$.

Уравнение $y=\sqrt{ax-x^2-\pi^2}$ запишем в виде

$$y=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Получилось уравнение полуокружности радиусом $\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2}$ с центром, лежащим на оси абсцисс.



Данное уравнение имеет ровно два решения, если полуокружность пересекает прямую $y=\frac{\pi}{2}$, но не имеет общих точек с прямой $y=\frac{7\pi}{6}$. Запишем и решим неравенство:

$$\frac{\pi}{2}<\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2}<\frac{7\pi}{6};\ \frac{\pi^2}{4}<\frac{a^2}{4}-\pi^2<\frac{49\pi^2}{36};\ 5\pi^2<a^2<\frac{85\pi^2}{9},$$

откуда $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?

Решение.

а) Пусть запись $(k,\ l,\ m)$ означает, что в ведрах объёмами 4, 7 и 8 литров находится k, l и m литров воды соответственно. Тогда Боря мог действовать так, чтобы объёмы воды в вёдрах были последовательно (4, 7, 0), (0, 7, 4), (0, 3, 8), (3, 0, 8), (3, 7, 1), (4, 6, 1), (0, 6, 5) и (4, 2, 5). Во втором ведре после нескольких шагов оказалось 2 литра воды.

б) После каждого переливания либо одно из вёдер становится пустым, либо одно из вёдер становится полным. Если во всех вёдрах оказались равные объёмы воды, то в каждом из них по 4 литра. Значит, ни одно из вёдер не пусто и не полно. Пришли к противоречию.

в) Если $n\geqslant 9$, то объём третьего ведра не меньше, чем общий объём воды у Бори. В этом случае все возможные записи состояний объёмов воды в вёдрах это (3, 6, 0), (0, 6, 3), (3, 0, 6), (0, 3, 6), (3, 3, 3) и (0, 0, 9). Получить другое состояние невозможно, так как в вёдрах всегда оказываются объёмы воды в литрах, кратные 3.

Приведём пример последовательных состояний для подходящих под условие переливаний в случае $n = 8$: (3, 6, 0), (3, 0, 6), (1, 0, 8), (1, 6, 2), (3, 4, 2).

Этот пример показывает, что наибольшее натуральное значение может принимать n — это 8.

Ответ: а) Да. **б)** Нет. **в)** 8.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 11

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}=7\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)+10.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку [−2; 2].

Решение.

а) Сделаем замену $t=\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}$. Тогда $t^2=\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{9}{(x-2)^2}-3.$

Получаем уравнение

$$2(t^2+3)=7t+10;\ 2t^2-7t-4=0,$$

откуда $t=-\frac{1}{2}$ или $t = 4$.

Если $t=-\frac{1}{2}$, то получаем

$$\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}=-\frac{1}{2};\ (x-2)^2-6=-(x-2);\ x^2-3x-4=0,$$

откуда $x = -1$ или $x = 4$.

Если $t = 4$, то $\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}=4$.

Аналогично получаем:

$$(x-2)^2-6=8(x-2);\ x^2-12x+14=0,$$

откуда $x=6-\sqrt{22}$ или $x=6+\sqrt{22}$.

б) $0<6-\sqrt{22}<6-4=2$, а $6+\sqrt{22}>6+4=10>2$. Среди корней уравнения отрезку [−2; 2] принадлежат только числа −1 и $6-\sqrt{22}$.

Ответ: **а)** -1; 4; $6\pm\sqrt{22}$; **б)** -1; $6-\sqrt{22}$.

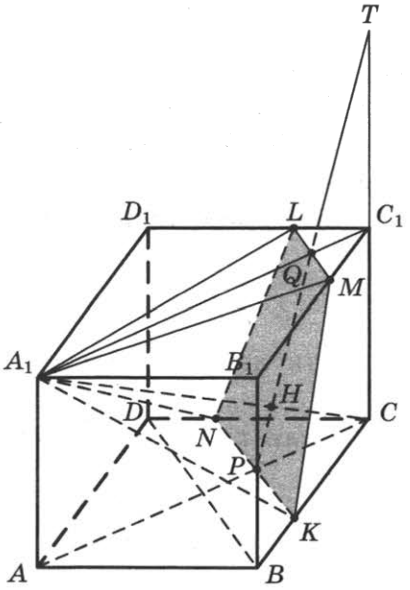
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

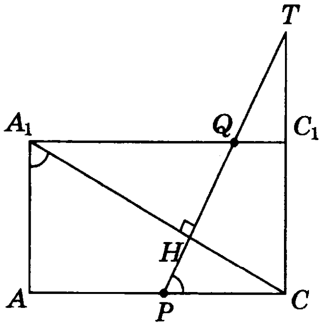
а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

Решение.



а) Проведём прямые через точки L и K параллельно прямой BD. Получим точку M на ребре B_1C_1 и точку N на ребре CD. Равнобедренная трапеция $KNLM$ — сечение призмы плоскостью γ. Пусть AC пересекает NK в точке P, A_1C_1 пересекает LM в точке Q. $PC=\sqrt{2}$, $QC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Продолжение PQ за точку Q пересекает продолжение CC_1 за точку C_1 в точке T. Треугольник AA_1C подобен треугольнику CPT, так как $\frac{A_1A}{PC}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{AC}{TC}$, следовательно $\angle AA_1C=\angle CPT$. Прямые A_1C и PT перпендикулярны, прямая A_1C перпендикулярна прямой BD, следовательно, прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.



б) Пусть точка H — точка пересечения A_1C и PQ. Отрезок A_1H — высота указанной пирамиды.

$$PQ=\frac{1}{2}PT=\frac{1}{2}\sqrt{CT^2+PC^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$A_1C=\sqrt{AA_1{}^2+AC^2}=\sqrt{55}.$$

Треугольник AA_1C подобен треугольнику HPC.

Тогда $\frac{HC}{AC}=\frac{PC}{A_1C}$, откуда $HC=\frac{2\sqrt{55}}{11}$.

Следовательно,

$$A_1H=A_1C-HC=\frac{9\sqrt{55}}{11}.$$

Объём пирамиды A_1KNLM равен

$$\frac{1}{3}A_1H\cdot PQ\cdot\frac{LM+NK}{2}=\frac{9\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{5}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[4]{25}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\right)\ge 2$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{\sqrt{5}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\right)\ge 2;\ \log_{\frac{1}{2}}(x+2)\ge 5;\ 0<x+2\le\frac{1}{32};\ -2<x\le-\frac{63}{32}.$$

Ответ: $-2<x\le-\frac{63}{32}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

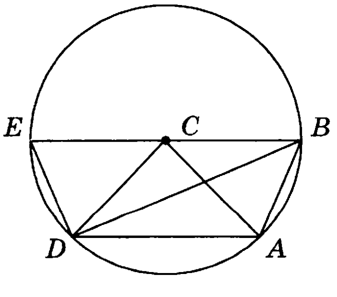
16. В трапеции *ABCD* основания *AD* и *BC*. Диагональ *AC* разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *AB*.

а) Докажите, что луч *DB* — биссектриса угла *ADC*.

б) Найдите *AB*, если известны длины диагоналей трапеции: *BD* = 8 и *AC* = 5.

Решение.

а) $\angle CDB=\angle CBD=\angle ADB$, следовательно, *DB* — биссектриса угла *ADC*.



б) Поскольку *DC* = *CB* = *CA* = 5, точки *A*, *B* и *D* лежат на окружности радиуса 5 с центром в точке *C*. Продолжим основание *BC* за точку *C* до пересечения с этой окружностью в точке *E*. Тогда *EB* — диаметр окружности, а *BADE* — равнобедренная трапеция. Поэтому *DE* = *AB*, а так как точка *B* лежит на окружности с диаметром *EB*, то $\angle BDE=90°$. Из прямоугольного треугольника *BDE* находим, что $DE=\sqrt{BE^2-BD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$. Следовательно, *DE* = *AB* = 6.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. 31 декабря 2016 года Василий взял в банке 5 460 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет $S = 5\,460\,000$ рублей, а ежегодные выплаты x рублей. По условию долг перед банком (в рублях) после перевода ежегодной выплаты должен уменьшаться следующим образом:

$$S,\ 1{,}2S - x,\ 1{,}2^2S - (1{,}2x + x),\ 1{,}2^3S - (1{,}2^2x + 1{,}2x + x) = 0,$$

откуда $x = \dfrac{1{,}2^3 \cdot 0{,}2 \cdot S}{1{,}2^3 - 1} = 2\,592\,000$ рублей.

Ответ: 2 592 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2 \\ 2x+y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Из второго уравнения следует, что $z=\frac{a-2x-y}{3}$. Подставив это в первое уравнение, получим одно уравнение на x и y, которое будет иметь столько же решений, сколько исходная система:

$$x+y-\frac{4x}{3}-\frac{2y}{3}+\frac{2a}{3}=4x^2+y^2;\ 12x^2+x+3y^2-y=2a.$$

Это уравнение задаёт некоторую кривую на плоскости Oxy; требуется, чтобы эта кривая вырождалась в одну точку. Чтобы выяснить, когда это происходит, выделим полные квадраты:

$$12\left(x^2-2\cdot\frac{1}{24}\cdot x+\frac{1}{24^2}\right)-12\cdot\frac{1}{24^2}+3\left(y^2-2\cdot\frac{1}{6}\cdot y+\frac{1}{36}\right)-3\cdot\frac{1}{36}=2a;$$

$$12\left(x+\frac{1}{24}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=2a+\frac{5}{48}.$$

Если правая часть отрицательна, решений нет. Если правая часть положительна, решений бесконечно много (уравнение задаёт сжатую и сдвинутую окружность). Если правая часть равна 0, уравнение задаёт одну точку. Это происходит при $a=-\frac{5}{96}$.

Ответ: $a=-\frac{5}{96}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 54, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

Решение.

а) Пусть стирали пары чисел 9 и 12, 3 и 6, 4 и 5, 8 и 10.

Тогда на доске остались числа 2 и 6, сумма которых равна 8.

б) Среди чисел от 200 до 299 ровно 33 числа делятся на 3, ровно 33 числа дают при делении на 3 остаток 1 и ровно 34 числа дают при делении на 3 остаток 2. По условию каждый раз с доски стирали два числа, сумма которых делится на 3. Значит, в каждой из пар стёртых чисел либо оба числа делятся на 3, либо при делении на 3 одно из них даёт в остатке 1, а другое — в остатке 2. Поэтому на доске обязательно останется число, которое делится на 3, и число, которое при делении на 3 даёт остаток 2. Разность между ними не делится на 3 и, следовательно, не может равняться 54.

в) Как было доказано в предыдущем пункте, если на доске осталось ровно два числа, то одно из них делится на 3, а второе при делении на 3 даёт остаток 2. Первое из этих чисел не меньше 201 и не больше 297, второе — не меньше 200 и не больше 299. Поэтому, если первое из этих чисел поделить на второе, то получится не больше $\frac{297}{200}$, а если второе из этих чисел поделить на первое, то получится не больше $\frac{299}{201}$.

Поскольку $297 \cdot 201 < 299 \cdot 200$, получаем, что $\frac{297}{200} < \frac{299}{201}$, и наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, не превосходит $\frac{299}{201}$.

На доске действительно могли остаться числа 201 и 299, так как остальные числа от 200 до 299 можно разбить на такие пары: 16 пар чисел, делящихся на 3, и 33 пары чисел, в каждой из которых при делении на 3 одно из чисел даёт в остатке 1, а другое — в остатке 2. Значит, наибольшее значение, которое может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них, равно $\frac{299}{201}$.

Ответ: а) может; **б)** не может; **в)** $\frac{299}{201}$.

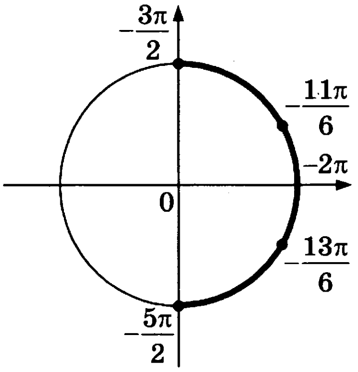
Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 21

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(49^{\sin x}\right)^{\cos x}=7^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.



Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2\sin x\cdot\cos x}=7^{\sqrt{3}\sin x};$$

$$2\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ получаем $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Из уравнения $2\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ получаем и $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получаем $x = -2\pi$, $x=-\frac{11\pi}{6}$ и $x=-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: **а)** $\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **б)** $-2\pi; -\frac{11\pi}{6};\ -\frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

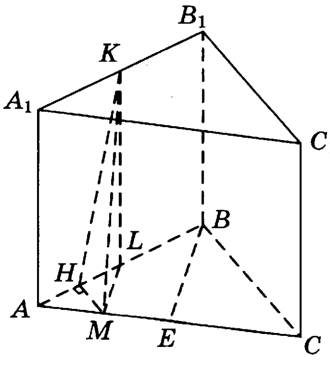
14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8$, $AC = 12$ и $AA_1 = 5$.

Решение.

а) Пусть L — середина ребра AB, E — середина ребра AC. Так как треугольник ABC — равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC. Поскольку $AM : MC = 1 : 3$, имеем $AM = ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB. Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC. Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC, получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM, а значит, KM перпендикулярно AC.



б) Пусть MH — высота треугольника AML. Так как плоскости ABC и ABB_1 перпендикулярны, отрезок MH перпендикулярен плоскости ABB_1, и поэтому искомый угол равен углу HKM. Вычислим двумя способами площадь треугольника AML; получим $2S_{AML} = MH \cdot AL = MA \cdot ML$, откуда

$$MH = \frac{MA \cdot ML}{AL} = \frac{3\sqrt{4^2 - 3^2}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4},$$

поэтому

$$\sin\angle HKM = \frac{HM}{KM} = \frac{HM}{\sqrt{5^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} > \sqrt{x-2}$.

Решение.

Перенесём один из радикалов в правую часть:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}.$$

Легко видеть, что ОДЗ — это луч $x \geq 2$. Если x принадлежит ОДЗ, обе части неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат с сохранением равносильности:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x + 4 > x - 1 + x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2, \\ 7 - x > 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}. \end{cases}$$

Правая часть неравенства заведомо неотрицательна, но, прежде чем возводить в квадрат, надо потребовать, чтобы и левая часть была неотрицательна:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 7 - x \geq 0, \\ x^2 - 14x + 49 > 4\left(x^2 - 3x + 2\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x \leq 7, \\ 3x^2 + 2x - 41 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x \leq 7, \\ -\frac{1 + 2\sqrt{31}}{3} < x < \frac{2\sqrt{31} - 1}{3}. \end{cases}$$

Понятно, что $-\frac{1+2\sqrt{31}}{3} < 0 < 2$. Сравнивая, находим, что $2 < \frac{2\sqrt{31}-1}{3} < 7$. Следовательно, решением неравенства является промежуток $2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$.

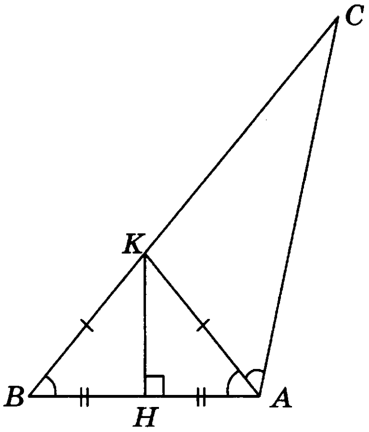
Ответ: $2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}6$ и сторона $AC = 24$.



Решение.

а) Точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, значит, $\Delta AKH = \Delta BKH$ и $\angle ABC = \angle BAK = \angle CAK$. Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, поэтому $\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{AC}$. Следовательно, $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Пусть $\angle KAB = \angle KBA = \beta$. Тогда

$$\cos \beta = \sqrt{1-\sin^2 \beta} = \sqrt{1-0{,}6} = 0{,}8.$$

По теореме синусов $\frac{CK}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin 2\beta}$, значит, $CK = \frac{AC}{2\cos\beta} = \frac{24}{2 \cdot 0{,}8} = 15$.

Используем равенство $AC^2 = BC \cdot CK$.

Поскольку $BC = BK + CK$ и $BK = AK$, получаем

$AC^2 = (AK + CK) \cdot CK$, значит, $AK = \frac{AC^2}{CK} - CK = \frac{24^2}{15} - 15 = 23{,}4$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник AKB. Тогда

$$r = \frac{2S_{ACK}}{AK + CK + AC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AK \cdot \sin\beta}{AK + CK + AC} = \frac{24 \cdot 23{,}4 \cdot 0{,}6}{23{,}4 + 15 + 24} = 5{,}4.$$

Ответ: 5,4.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 450 центнеров картофеля и получить 900 000 рублей, либо 250 центнеров свёклы и получить 625 000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под картофель. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 300 центнеров картофеля и получить 600 000 рублей, либо 400 центнеров свёклы и получить 1 000 000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под свёклу.

В этом случае фермер сможет заработать

$$20 \cdot 900\,000 + 20 \cdot 1\,000\,000 = 38\,000\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 38 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}\left(4x^2+8\right)=\log_{a-3,5}\left(4(a-3)x+9\right)$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Поскольку при всех x $4x^2 + 8 > 0$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a>3,5, \\ a-3,5\neq 1, \\ 4x^2+8=4(a-3)x+9; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>3,5, \\ a\neq 4,5, \\ 4x^2-4(a-3)x+1=0. \end{cases}$$

Система имеет два различных корня, если квадратное уравнение имеет два различных корня и они удовлетворяют первым двум условиям. Для этого дискриминант квадратного уравнения должен быть положителен:

$$16(a-3)^2-16>0;\ a^2-6a+8>0;\ (a-2)(a-4)>0;\ a<2 \text{ или } a>4.$$

Учитывая первые два неравенства системы, получаем ответ: $4 < a < 4,5$ или $4 < a$.

Ответ: $4 < a < 4,5$; $4,5 < a$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 7, 5, 4, 4, 5.

б) При всех натуральных $k \leq n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$ равносильно равенству $b_{k+1} = b_k + 1$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p < q < r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$. Поэтому выполнены равенства $0 = a_q - a_p = b_p + b_{p+1} + \ldots + b_{q-1} = (q-p)b_p + \frac{(q-p)(q-p-1)}{2}$ и, следовательно, равенство $b_p = -\frac{q-p-1}{2}$. Аналогично получаем $b_p = -\frac{r-p-1}{2}$. Приходим к противоречию, так как $q < r$.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Если существует такое k, что $b_k = 0$, то разобьём последовательность $\{a_1; \ldots; a_n\}$ на две подпоследовательности $\{a_1; \ldots; a_k\}$ и $\{a_{k+1}; \ldots; a_n\}$. Первая монотонно убывает, так как для каждого $i < k$ выполняется соотношение $a_{i+1} - a_i = b_i < 0$. Аналогично вторая последовательность монотонно возрастает. Имеем

$$10 \leq a_k = a_1 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}) = a_1 - (1 + 2 + \ldots + k - 1) = a_1 - \frac{k(k-1)}{2} \leq 99 - \frac{k(k-1)}{2};\ \frac{k(k-1)}{2} \leq 89,$$

следовательно, $k \leq 13$.

$$10 \leq a_k = a_n - (b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_{n-1}) = a_n - (1 + 2 + \ldots + n - k - 1) = a_n - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \leq 99 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \leq 89,$$

следовательно, $n-k \leq 13$. Значит, $n = (n-k) + k \leq 26$.

Если же такого k, что $b_k = 0$, нет, то последовательность $\{a_1; \ldots; a_n\}$ либо монотонно возрастает, если все b_j положительны, либо монотонно убывает, если все b_j отрицательны.

В первом случае

$$10 \le a_1 = a_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) \le a_n - (1 + 2 + \ldots + n - 1) = a_n - \frac{n(n-1)}{2} \le 99 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Во втором же

$$99 \ge a_1 = a_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) \ge a_n - (-(n-1) - \ldots - 2 - 1) = a_n + \frac{n(n-1)}{2} \ge 10 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

В обоих случаях $n \le 13$.

Пример последовательности $a_k = 88 + 13(1-k) + \frac{k(k-1)}{2}$ при $1 \le k \le 26$ показывает, что n может равняться 26. Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k = k - 13$ при $1 \le k \le 25$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k + 1$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$. Кроме того, при $1 \le k \le 13$ выполнены неравенства $10 = a_{13} \le a_k \le a_1 = 88$, а при $14 \le k \le 26$ выполнены неравенства $10 = a_{14} \le a_k \le a_{26} = 88$ и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Значит, $n = 26$.

Ответ: **а)** например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4;
б) нет; **в)** при $n = 26$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 26

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 2x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0;$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 1 = 0;$$

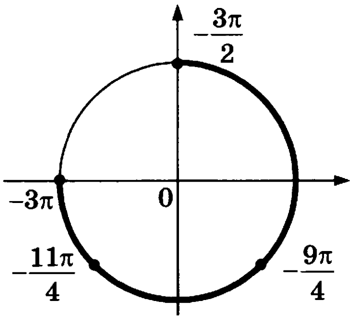
$$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 2 = 0;\ \ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } \sin x = \sqrt{2}.$$

Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ не имеет решений. Из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ находим:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получаем числа $x = -\frac{11\pi}{4}$ и $x = -\frac{9\pi}{4}$.



Ответ: **а)** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{11\pi}{4},\ -\frac{9\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.

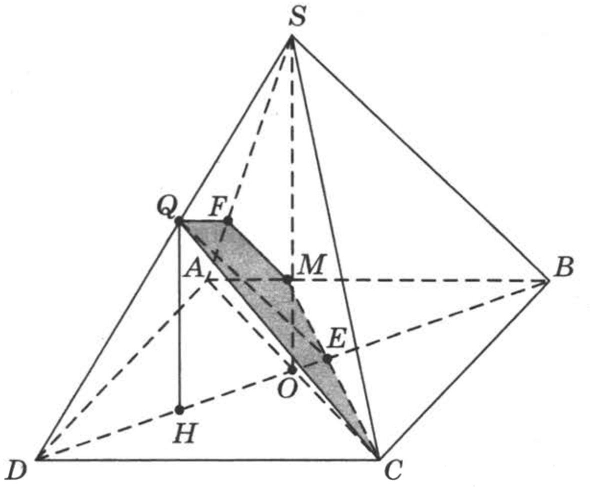
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Решение.

а) $DE = 5 - BE = 3$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M. Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{2}{3}$, откуда $BM = 2$. Тогда $AM = 1$. Треугольники ABS и AMF подобны, значит, $FM \parallel SB$. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF.

б) Прямая QE — прямая пересечения плоскостей CEF и SBD. Из доказанного в предыдущем пункте следует, что $QE \parallel SB$. Тогда $\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{3}{2}$. Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые рёбра пирамиды равны, SO — высота пирамиды.



$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO. Из подобных треугольников DQH и DSO находим $QH = \frac{3}{5} \cdot SO = \frac{3\sqrt{11}}{10}$.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{11}}{10}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $5^{x+3} - 5^{x+2} - 5^x < 6^{\frac{x}{2}+3} - 6^{\frac{x}{2}+2} + 3 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$125 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x - 5^x < 36 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1} - 6 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1} + 3 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1};$$

$$99 \cdot 5^x < 33 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1}; \quad 3 \cdot 5^x < 6^{\frac{x}{2}+1};$$

$$\lg 3 + x\lg 5 < \left(\frac{x}{2}+1\right)\lg 6;$$

$$x\left(\lg 5 - \lg\sqrt{6}\right) < -\lg 3 + \lg 6;\quad x < \frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg\sqrt{6}}.$$

Ответ: $x < \frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg\sqrt{6}}$.

Замечание. Ответ может также быть представлен в другом виде, например, $x < \frac{1}{\log_2 5 - \log_2\sqrt{6}}$ или $x < \frac{\lg 4}{\lg 25 - \lg 6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

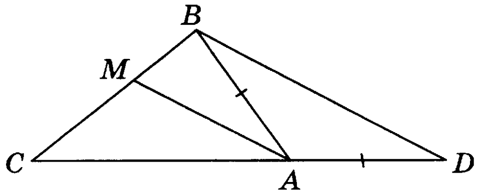
16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 180 и известно отношение $AC : AB = 3 : 2$.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$, а так как AM параллельна BD, то



$$\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, значит, $\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{3}{5}$, $S_{ACM} = \frac{3}{5}S_{ABC} = \frac{3}{5}\cdot 180 = 108$.

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{5}{3}$, поэтому

$$S_{DCB} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 S_{ACM} = \frac{25}{9}\cdot 108 = 300.$$

Следовательно, $S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 300 - 108 = 192.$

Ответ: 192.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{23S}{24},\ \ldots,\ \frac{2S}{24},\ \frac{S}{24},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}02S,\ 1{,}02\cdot\frac{23S}{24},\ \ldots,\ 1{,}02\cdot\frac{2S}{24},\ 1{,}02\cdot\frac{S}{24}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}02S+\frac{S}{24},\ \frac{23\cdot 0{,}02S+S}{24},\ \ldots,\ \frac{2\cdot 0{,}02S+S}{24},\ \frac{0{,}02S+S}{24}.$$

За первые 12 месяцев нужно выплатить банку

$$\frac{1}{2}S+S\cdot 0{,}02\left(1+\frac{23}{24}+\ldots+\frac{14}{24}+\frac{13}{24}\right)=S\left(\frac{1}{2}+\frac{37\cdot 0{,}01}{2}\right)=0{,}685S.$$

Значит, в кредит планируется взять $S=\frac{1370000}{0{,}685}=2\,000\,000$ рублей.

Ответ: 2 000 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+3)x+(a+4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

Решение.

Во-первых, должно быть $a \neq 0$, потому что иначе уравнение не будет квадратным и не будет иметь два корня.

Дискриминант уравнения $D=4\left((a+3)^2-a(a+4)\right)=4(5a+6)$.

Корни уравнения равны $x_{1,2}=\dfrac{-2(a+3)\pm\sqrt{D}}{2a}$, а расстояние между ними $|x_2-x_1|=\dfrac{2\sqrt{D}}{2|a|}=\dfrac{2\sqrt{5a+6}}{|a|}$. Нам нужно, чтобы это расстояние было больше 2: $\dfrac{2\sqrt{5a+6}}{|a|}>2$; при этом условие $D > 0$ можно отдельно не записывать, потому что в полученном неравенстве $5a + 6$ стоит под корнем и, значит, если a ему удовлетворяет, то заведомо $D \geq 0$, и при этом $D \neq 0$, потому что дробь в левой части больше 2.

Решим полученное неравенство. Поскольку знаменатель положителен (мы помним, что $a \neq 0$), на него можно домножить: $\sqrt{5a+6}>|a|$.

Возведём обе части неравенства в квадрат; при этом условие на ОДЗ можно отдельно не писать, потому что согласно полученному неравенству выражение $5a + 6$ будет больше неотрицательного числа: $5a + 6 > a^2$; $a^2 - 5a < 0$; $-1 < a < 6$.

Вспоминая требование $a \neq 0$, получаем ответ: $-1 < a < 0$; $0 < a < 6$.

Ответ: $-1 < a < 0$; $0 < a < 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?

в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9. Ответ обоснуйте.

Решение.

а) Например, число 847 делится на 11, а его вторая цифра 4 в 14 раз меньше произведения первой и третьей его цифр.

б) Пусть трёхзначное число имеет вид $a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$, где a, b и c — цифры. Получаем:

$$a\cdot 10^2+b\cdot 10+c=(a-b+c)+11\cdot(9a+b).$$

Значит, это число делится на 11 тогда и только тогда, когда $a - b + c$ делится на 11, то есть когда $a - b + c = 0$ или $a - b + c = 11$. Если $a + b + c = 7$, то $a-b+c=a+b+c-2b=7-2b$ — нечётное число, и, следовательно, $a - b + c = 7 - 2b = 11$. Пришли к противоречию, так как $b \geq 0$.

в) Пусть восьмизначное число n имеет вид

$$a\cdot 10^7+b\cdot 10^6+c\cdot 10^5+d\cdot 10^4+e\cdot 10^3+f\cdot 10^2+g\cdot 10+h,$$

где a, b, c, d, e, f, g и h — цифры. Получаем:

$$n=11k-(a-b+c-d+e-f+g-h),$$

где k — целое число (так как числа $10^7 + 1$, $10^6 - 1$, $10^5 + 1$, $10^4 - 1$, $10^3 + 1$, $10^2 - 1$ и 11 делятся на 11). Значит, n делится на 11 тогда и только тогда, когда число

$$m=a-b+c-d+e-f+g-h$$

делится на 11, то есть когда $m = 0$, $m = \pm 11$, $m = \pm 22$ или $m = \pm 33$.
По условию

$$a+b+c+d+e+f+g+h=1+2+3+4+5+6+7+9=37.$$

Значит, число

$$m=a+b+c+d+e+f+g+h-2(b+d+f+h)=37-2(b+d+f+h)$$

нечётное.
Поскольку

$$10=1+2+3+4\leq b+d+f+h\leq 5+6+7+9=27,$$

имеем $-17 \leq m \leq 17$. Отсюда получаем, что $m = -11$ или $m = 11$. Во втором случае

$$b+d+f+h=13 \text{ и } a+c+e+g=24.$$

Этим условиям, а следовательно и условиям задачи, удовлетворяет число 97 635 241. (Покажем, как его можно было придумать. Разрешённые нам 8 цифр нужно разбить на две группы с суммами 13 и 24. Если в одну группу взять цифры 9, 7, 6, 5, то сумма будет 27, а нам нужно 24. Кроме того, если число наибольшее возможное, то хочется, чтобы b было равно 7. Можно это сделать, заменив в большей сумме 7 на 4.)
Пусть число n — наибольшее число, удовлетворяющее условию задачи.

Поскольку $n \geq 97\,635\,241$, то

$$a = 9,\ b = 7,\ c = 6,\ 3 \leq d \leq 5,\ b + d + f + h \leq 19,\ m = 37 - 2(b + d + f + h) \geq -1.$$

Поэтому

$$m = 11,\ b + d + f + h = 13,\ a + c + e + g = 24 \text{ и } e + g = 9.$$

Значит, цифры e и g — цифры 4 и 5, возможно, в другом порядке, а цифры d, f и h — цифры 1, 2 и 3, возможно, в другом порядке. Среди чисел указанного вида число 97 635 241 является наибольшим, поэтому оно и является искомым.

Ответ: а) да, например, 847; **б)** нет; **в)** 97 635 241.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 36

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\cos x+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1)}=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдем к системе

$$\begin{cases}\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1)=\cos^2 x;\\ \cos x\le 0,\end{cases}$$

Решим уравнение:

$$(2-\sqrt{2})(\sin x+1)=2\cos^2 x;\quad (2-\sqrt{2})\sin x+2-\sqrt{2}=2-2\sin^2 x;$$

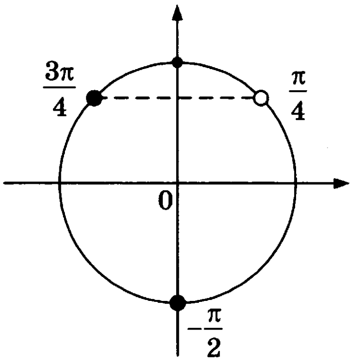
$$2\sin^2 x+(2-2\sqrt{2})\sin x-\sqrt{2}=0;\quad \sin x=-1 \text{ или } \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

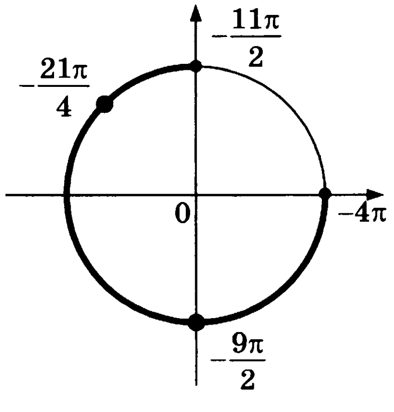
$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \text{ или } x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

С помощью тригонометрической окружности отберём серии, удовлетворяющие условию $\cos x \le 0$. Получим:

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$



б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};\ -4\pi\right]$. Получим $x=-\frac{21\pi}{4},\ x=-\frac{9\pi}{2}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{21\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{2}$.

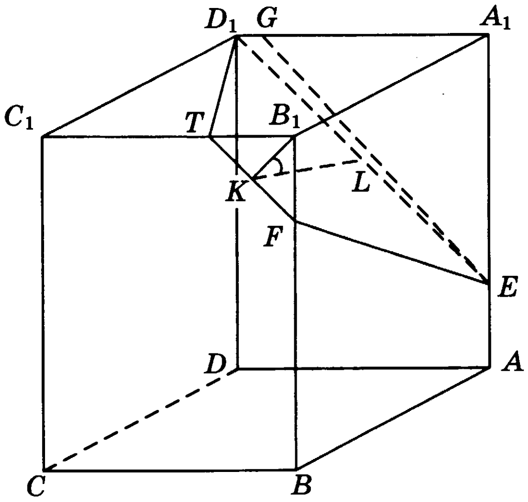
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 3$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

Решение.



а) В плоскости AA_1D_1 проведём через точку E прямую, параллельную TF. Пусть она пересекает ребро A_1D_1 или его продолжение в точке G. Плоскость EFT проходит через точку G. Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1, в котором $FB_1 = B_1T = 1$. Отсюда $EA_1 = A_1G = 3$, значит, точка G совпадает с точкой D_1.

б) В плоскости BB_1C_1 из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1K на отрезок FT. В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT, который пересекает ED_1 в точке L. Тогда $\angle B_1KL$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1 или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника FB_1T находим $B_1K = \frac{FB_1 \cdot B_1T}{FT} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2}\right)^2} = \sqrt{20 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1, поэтому она удалена от сторон AA_1 и A_1D_1 параллелепипеда на $\frac{3}{2}$. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ и 4.

Отсюда $B_1L=\sqrt{\frac{41}{2}}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим

$$\cos\angle B_1KL=\frac{B_1K^2+KL^2-B_1L^2}{2\cdot B_1K\cdot KL}=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}}<\sqrt{16^{\frac{2x+1}{x}}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2^{4x-3}<2^{\frac{4x+2}{x}};\ 4x-3<\frac{4x+2}{x};\ \frac{4x^2-3x}{x}<\frac{4x+2}{x};\ \frac{4x^2-7x-2}{x}<0;\ \frac{(4x+1)(x-2)}{x}>0.$$

Применяя метод интервалов, получаем решение: $x<-\frac{1}{4}$ или $0 < x < 2$.

Ответ: $x<-\frac{1}{4}$, $0 < x < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

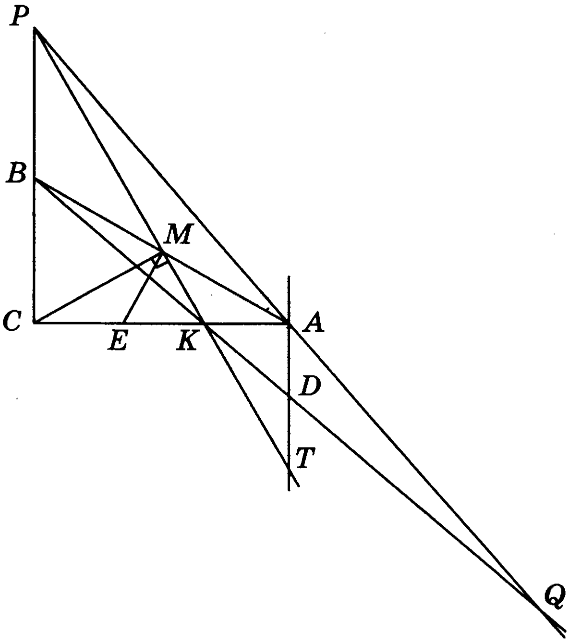
б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC=3\sqrt{2}$.

пение.

а) Пусть E — середина KC. Тогда ME — медиана прямоугольного треугольника CMK, проведённая из вершины прямого угла. Значит,

$$ME = \frac{1}{2}CK = AK = \frac{1}{2}AE.$$

Следовательно, $\angle A = 30°$.



б) Из прямоугольных треугольников ABC и KBC находим, что

$$AC = BC\,\mathrm{ctg}\,30° = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{6},$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2} = \sqrt{18+24} = \sqrt{42}.$$

Через вершину A проведём прямую, параллельную BC. Пусть T — точка пересечения этой прямой с прямой MK, D и Q — точки пересечения прямой BK с прямыми AT и AP соответственно.

Из равенства треугольников AMT и BMP получаем, что $AT = BP$, а из подобия треугольников CKP и AKT следует $CP = 2AT = 2BP$. Значит, B — середина CP.

Треугольник AKD подобен треугольнику CKB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP$, а так как AD параллельна BP, AD — средняя линия треугольника BQP. Значит,

$$BQ = 2DB = 2\cdot\frac{3}{2}BK = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{42} = 3\sqrt{42}.$$

Следовательно,

$$KQ = BQ - BK = 3\sqrt{42} - \sqrt{42} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{4S}{5},\ \frac{3S}{5},\ \frac{2S}{5},\ \frac{S}{5},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 5%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}05S,\ 1{,}05\cdot\frac{4S}{5},\ 1{,}05\cdot\frac{3S}{5},\ 1{,}05\cdot\frac{2S}{5},\ 1{,}05\cdot\frac{S}{5}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}05S+\frac{S}{5},\ \frac{4\cdot 0{,}05S+S}{5},\ \frac{3\cdot 0{,}05S+S}{5},\ \frac{2\cdot 0{,}05S+S}{5},\ \frac{0{,}05S+S}{5}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}05\left(1+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{1}{5}\right)=S\left(1+\frac{6\cdot 0{,}05}{2}\right)=1{,}15S.$$

Значит, банку нужно вернуть 115% от суммы кредита.

Ответ: 115.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2+x+2a^2+1\right)^2=8a^2\left(x^2+x+1\right)$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Сделаем замену $y = x^2 + x + 1$. Получим уравнение на y:

$$\left(y+2a^2\right)^2=8a^2y;$$

$$y^2 + 4a^2y + 4a^4 - 8a^2y = 0;$$

$$\left(y-2a^2\right)^2=0;\ y = 2a^2.$$

Вернёмся к переменной x: $x^2 + x + 1 - 2a^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, когда его дискриминант равен 0:

$$1 - 4(1 - 2a^2) = 0;\ 8a^2 - 3 = 0;\ a=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $a=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2}=6a_{k+1}-a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n=5a_2-a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 286$?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 1, 126, 151, 156, 157.

б) При всех натуральных $k \le n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$ равносильно равенству $5b_{k+1} = b_k$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \le k \le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$.

Имеем $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} < a_1 + \frac{b_1}{1-q} = a_1 + \frac{5}{4}b_1 = \frac{5}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_1$. Значит, равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$ ни при каком $n \ge 3$ выполняться не может.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \le k \le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Имеем $286 = a_n = a_1 + \frac{b_1\left(1-q^{n-1}\right)}{1-q} = a_1 + \frac{b_1\left(5^{n-1}-1\right)}{2 \cdot 5^{n-2}}$. Следовательно, b_1 делится на 5^{n-2}, а a_1 даёт при делении на $\frac{5^{n-1}-1}{2}$ тот же остаток, что и число 286. Так как $5^4 = 625 > 286 > b_1 \ge 5^{n-2}$, получаем, что $n \le 5$. Остатки при делении числа 286 на $\frac{5^2-1}{4} = 6$, $\frac{5^3-1}{4} = 31$, $\frac{5^4-1}{4} = 156$, $\frac{5^5-1}{4} = 781$ соответственно равны 4, 7, 130 и 286. Значит, a_1 не может быть меньше 4.

Пример последовательности 4, 239, 286 показывает, что a_1 может равняться 4.

Ответ: а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; **б)** нет; **в)** 4.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион

Код предмета

Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Номер варианта

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 2

Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта

Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

ОТВЕТЫ

Тренировочная работа 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	11	1	0,95	−23	15	15	28	−6	12,8	8	10

13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{43\pi}{6}$; $\frac{47\pi}{6}$; $\frac{49\pi}{6}$
14	б) $\arcsin\frac{1}{3}$
15	$(-\infty; -2)$; $[-0,5; 0)$; $(0; 2]$
16	$\frac{6\sqrt{13}}{5}$
17	1
18	$\sqrt[3]{2,25}\leqslant a\leqslant 4,\ a=0$
19	а) Да, например, 8, 4, 2, 3, 4, 5. б) Нет. в) 11

Тренировочная работа 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
33	−5,5	2	0,91	−10	3	15	26	4	13,6	21	−5

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$
14	б) 1
15	$(-\infty; -4)$; $\left[-\frac{5}{3}; -1\right]$
16	$\frac{12\sqrt{13}}{5}$
17	2
18	$0<a<\frac{4}{9}$; $a>1$
19	а) Да, например, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2. б) Нет. в) 11

Тренировочная работа 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
44	0,5	3	0,87	−52	14	21	42	−4	7,2	28	1

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$
14	б) 4,5
15	$[-1,5; 0)$; $(0; 2]$; $(5; +\infty)$
16	$3\sqrt{13}$
17	1,5
18	$0<a<\sqrt[3]{2,25}$; $a>4$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 2, 3, 4, 10 и 25

Тренировочная работа 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
58	4	4	0,97	−11	7	14	160	18	14,4	7	8

13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{5\pi}{6}$
14	б) 4
15	$(-2;\ 0);\ \left(0;\ \frac{2}{3}\right];\ [1;\ +\infty)$
16	$6\sqrt{13}$
17	2,5
18	$\frac{4}{9}<a<1$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 1, 3, 9, 16, 5

Тренировочная работа 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	−13,5	5	0,94	−22	7	17,5	82	10	4	20	7

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4};\ \frac{17\pi}{4}$
14	б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
15	$(-\infty;\ -4];\ [-3;\ 0);\ (0;\ 2)$
16	$\frac{3\sqrt{13}}{5}$
17	3
18	$\sqrt[3]{2,25}<a<4$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 1, 5, 25, 2, 27

Тренировочная работа 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28 500	23	1,5	3,5	31	27	6	20	−2	4	90	4

13	а) $\log_3 5$, 2, $\log_3 13$; б) $\log_3 5$, 2
14	б) $\sqrt{6}$
15	$(1;\ 2),\ (2;\ 3],\ (6;\ +\infty)$
16	3
17	21
18	$-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 8

Тренировочная работа 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37 500	144	3,5	2,1	3	30	5	4	1,25	2,5	72	8

13	а) 1; $\log_4 7$; $\log_4 10$; б) 1
14	б) $\sqrt{2}$
15	$(3;\ 4);\ (4;\ 5];\ (10;\ +\infty)$
16	5
17	26
18	$\left(-2;\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ 2\right)$
19	а) Да. б) Нет. в) 5

Тренировочная работа 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45 500	4	3	4	2	33	5	30	−0,75	9	75	81

13	а) 1; $\log_3 8$; 2; б) 1
14	б) $\sqrt{3}$
15	$(4;\ 5);\ (5;\ 6];\ (12;\ +\infty)$
16	6
17	2
18	$-\frac{7}{3} < a < -1;\ 1 < a < \frac{7}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 14

Тренировочная работа 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29 000	28,1	2,5	4,5	64	57	5	52	2,5	2	84	625

13	а) 1; $\log_5 8$; $\log_5 9$; б) 1; $\log_5 8$; $\log_5 9$
14	б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$
15	$(1;\ 2);\ (2;\ 5];\ (20;\ +\infty)$
16	10
17	уменьшить на 30%
18	$-\frac{\sqrt{13}\pi}{3} < a < \frac{\sqrt{13}\pi}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 11

Тренировочная работа 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34 500	29,6	2	3,5	15	60	6	2	−0,5	8	60	9

13	а) 1; $\log_4 5$; $\log_4 9$; $\log_4 20$; б) $\log_4 20$
14	б) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$
15	$(2;\ 3);\ (3;\ 4];\ (8;\ +\infty)$
16	2
17	уменьшить на 10%
18	$-\frac{2}{3} < a < 0;\ 0 < a < \frac{2}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 17

Тренировочная работа 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
270	9	4	0,25	−12	31	2	16	6	8	40	11

13	а) $-1;\ 4;\ 6\pm\sqrt{22}$; б) $-1;\ 6-\sqrt{22}$
14	б) $\frac{9\sqrt{5}}{2}$
15	$-2 < x \le -\frac{63}{32}$
16	6
17	2 592 000 рублей
18	$a = -\frac{5}{96}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{299}{201}$

Тренировочная работа 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
425	6	4,5	0,2	−7	57	1,5	49	96	12	24	26

13	а) $-5;\ 2;\ \frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$; б) $-5;\ -\frac{1+\sqrt{65}}{2}$
14	б) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
15	$-3 < x \le -\frac{74}{25}$
16	9
17	1 597 200 рублей
18	$a = -\frac{33}{4}$
19	а) может; б) не может; в) 1,5

Тренировочная работа 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
209	5	3	0,75	3	80	1	121	17	9	44	17

13	а) -1; 5; $7\pm2\sqrt{11}$; б) -1; $7-2\sqrt{11}$
14	б) $\frac{55\sqrt{2}}{2}$
15	$-1<x\le-\frac{48}{49}$
16	8
17	1 555 200 рублей
18	$a=3{,}5$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{191}{141}$

Тренировочная работа 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
525	3	3,5	0,8	−13	17	−1	225	87	11	47	15

13	а) -3; 4; $4\pm\sqrt{14}$; б) 4; $4+\sqrt{14}$
14	б) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$
15	$-1<x\le-\frac{63}{64}$
16	7
17	1 064 800 рублей
18	$a=-\frac{107}{16}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{205}{103}$

Тренировочная работа 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
900	8	5	0,125	−1	77	−2	289	−13	15	26	19

13	а) -7; 1; $-5\pm2\sqrt{7}$; б) $-5+2\sqrt{7}$; 1
14	б) $\frac{208}{3}$
15	$-2<x\le-\frac{31}{16}$
16	12
17	1 036 800 рублей
18	$a=-\frac{25}{36}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{155}{53}$

Тренировочная работа 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2420	4500	20	0,032	8	3	0,25	84	20	400	120	9

13	а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m$, n , $m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6}$, $-2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
14	б) $\frac{10}{7}$
15	$(-\infty;-2];\ 0;\ [1;5]$
16	289
17	119
18	$-\frac{9}{4}<a\le-2$
19	а) Например, последовательность 1,28,46,58; б) нет; в) 2

Тренировочная работа 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
318,6	14	2,5	0,4	6	60	2	343	6	9,8	40	0,5

13	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{35\pi}{6}$
14	б) 1 : 2
15	$[\log_2 7;\ 6]$
16	$\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$
17	300 000 рублей
18	$x=0$ при $a=4$
19	а) Да, например, числа 7, 10 и 13; б) нет; в) $\frac{35}{24}$

Тренировочная работа 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0,8	10,5	0,25	−20	71	6	4	12	1000	40	−18

13	а) −4; 0; б) 0
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-6;-4],\ [4;+\infty)$
16	13
17	90 кг
18	$0\le k<\frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21}<k\le\frac{1}{3}$
19	а) Да, например, числа 10, 11 и 15. б) Нет. в) $\frac{25}{17}$

Тренировочная работа 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6000	2	2,25	0,012	−3	99	2	20	9	8,39	30	9

13	а) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-\infty; -1], 0, [2; 6)$
16	$2\sqrt{7}$
17	86 000 рублей
18	$\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
19	а) 36; б) 72; в) 1

Тренировочная работа 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	5	39	0,26	−6	155	1	6	−22	8	15	7

13	а) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi m,\ n,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \operatorname{arctg} 2,\ -\pi - \operatorname{arctg} 3$
14	б) 1
15	$[-9; -2), (-2, -1), (-1, 0), (0; 7]$
16	$1:15$
17	6
18	$\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$
19	а) например, подходит последовательность $2, 4, 5, 5, 4$; б) нет; в) при $n = 82$

Тренировочная работа 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	9	6	0,0485	−1	28	6	1	5	55	50	−5

13	а) πk; $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$
14	$\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}$
15	$2 \le x < \frac{2\sqrt{31} - 1}{3}$
16	5,4
17	38 млн рублей
18	$4 < a < 4{,}5$; $4{,}5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4; б) нет; в) при $n = 26$

Тренировочная работа 22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	20	15	0,039	−5	34	1	2	81	33	80	3

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\left(-1\right)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$
14	$\arcsin\frac{12}{5\sqrt{73}}$
15	$2\le x<\frac{\sqrt{17}}{2}$
16	$3\sqrt{11}$
17	14,4 млн рублей
18	$-2 < a < -1{,}5$; $-1{,}5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 5, 6, 6, 5, 3; б) нет; в) при $n = 20$

Тренировочная работа 23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	7	12	0,0476	4	51	5	7	49	37	50	9

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\left(-1\right)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{8\pi}{3}$
14	$\arcsin\frac{12}{5\sqrt{65}}$
15	$1\le x<\frac{2\sqrt{13}-4}{3}$
16	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$
17	15,6 млн рублей
18	$a < 1{,}5$; $1{,}5 < a < 2$
19	а) например, подходит последовательность 8, 5, 3, 2, 2; б) нет; в) при $n = 28$

Тренировочная работа 24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	13	84	0,0294	1	62	8	4	9	45	60	11

13	а) πk; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -2π; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
14	$\arcsin\frac{12}{5\sqrt{34}}$
15	$2\le x<\frac{2\sqrt{31}-5}{3}$
16	$3\sqrt{7}$
17	9 млн рублей
18	$8 < a < 8{,}5$; $8{,}5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 7, 7, 6, 4, 1; б) нет; в) при $n = 24$

Тренировочная работа 25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	10	63	0,078	5	85	4	9	121	32	40	−15

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{5\pi}{2}$
14	$\arcsin\frac{4\sqrt{11}}{7\sqrt{13}}$
15	$3\le x<\frac{\sqrt{89}-2}{2}$
16	4
17	17,88 млн рублей
18	$a < 5{,}5$; $5{,}5 < a < 6$
19	а) например, подходит последовательность 11, 7, 4, 2, 1; б) нет; в) при $n = 34$

Тренировочная работа 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	200	1	0,1	35	6	2	45	3	30	8	0,5

13	а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k, -\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4},\ -\frac{9\pi}{4}$
14	б) $\frac{3\sqrt{11}}{20}$
15	$x<\frac{\lg 2}{\lg 5-\lg\sqrt{6}}$ **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде, например, $x<\frac{1}{\log_2 5-\log_2\sqrt{6}}$ или $x<\frac{\lg 4}{\lg 25-\lg 6}$.
16	192
17	2 000 000 рублей
18	$-1 < a < 0$; $0 < a < 6$
19	а) да, например, 847; б) нет; в) 97 635 241

Тренировочная работа 27

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	1	2,5	0,2	75	3	1	15	4	20	9	1,5

13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{3}$
14	б) $\frac{3\sqrt{23}}{11}$
15	$x<-\frac{\lg 3}{\lg 5-\lg\sqrt{3}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	84
17	1 800 000 рублей
18	$-2-2\sqrt{5}<a<0;\ 0<a<2\sqrt{5}-2$
19	а) да, например, 242; б) нет; в) 12 738 495

Тренировочная работа 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	4	3	0,5	16	15	2	48	2	45	14	0,8

13	а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{16\pi}{3};\ -\frac{14\pi}{3};\ -4\pi-\arccos\frac{2}{3}$
14	б) $\frac{7\sqrt{6}}{5}$
15	$x>-\frac{\lg 16}{\lg 7-\lg\sqrt[3]{2}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	420
17	1 600 000 рублей
18	$\frac{4-2\sqrt{13}}{9}<a<0; 0<a<\frac{2\sqrt{13}+4}{9}$
19	а) да, например, 869; б) нет; в) 12 375 869

Тренировочная работа 29

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	3	2	0,4	84	2	3	78	5	16	10	0,6

13	а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$
14	б) $\frac{15}{8}$
15	$x<-\frac{\lg 20}{\lg 3-\lg\sqrt{2}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	528
17	1 200 000 рублей
18	$3-\sqrt{10}<a<0; 0<a<\sqrt{10}+3$
19	а) да, например, 429; б) нет; в) 98 372 615

Тренировочная работа 30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	500	1,5	0,15	58	6	3	57	6	21	18	0,4

13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3};\ \frac{13\pi}{3}$
14	б) $\frac{35\sqrt{3}}{22}$
15	$x<-\frac{\lg 2}{\lg 5-\lg\sqrt[4]{2}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	264
17	1 500 000 рублей
18	$-\frac{14+2\sqrt{13}}{9}<a<0; 0<a<\frac{2\sqrt{13}-14}{9}$
19	а) да, например, 627; б) нет; в) 13 475 869

Тренировочная работа 31

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	0,58	−0,4	122	0,25	4	2	2	140	−17

13	а) $2\pm\sqrt{5}$; б) $2-\sqrt{5}$
14	0,5
15	$(-\infty; 1], (2; 3)$
16	98
17	44 000 рублей
18	$\frac{1}{2}<k<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ или $k>\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
19	а) 7; б) 5002; в) 5054

Тренировочная работа 32

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
63	28	17	0,505	7	1	5	49	−0,75	17,67	21	−2

13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m$, $n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi-\arcsin\frac{2}{3}$, $\pi+\arcsin\frac{2}{3}$
14	б) 3 : 4
15	$(-\infty; 2]; [3; +\infty)$
16	19
17	2 034 000 рублей
18	$x=0$ при $a=0$ или $a=1$
19	а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119

Тренировочная работа 33

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	3	5	0,17	11	21	7	6	5	12	53	44

13	а) $2\pm\sqrt{6}$; б) $2-\sqrt{6}$
14	а) 1 : 6; б) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{3}$
15	$(2; 3]$
16	$4\sqrt{2}$
17	6 330 000
18	$(-9; -2]; [3; +\infty)$
19	а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650

Тренировочная работа 34

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	25	12	0,5	2	36	10	160	2	25	6	16

13	а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$
14	192
15	$[-2; 2]$
16	4 : 21
17	3
18	$a = 2$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

Тренировочная работа 35

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	144	30	0,25	−2	42	0,75	6	−2	6	84	17

13	а) 0; 4; б) 0
14	2
15	$(-4; -3), (-1; 3)$
16	1:10
17	240 кг
18	$\left(-1-\frac{\sqrt{30}}{4}; -\frac{3}{8}\right]; \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
19	а) Да, например, числа 4, 5 и 8. б) Нет. в) $\frac{28}{19}$

Тренировочная работа 36

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
53	−6	17	0,5	−3	6	6	378	229	14	15	−12

13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{21\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{2}$
14	б) $\arccos\frac{1}{3}$
15	$x<-\frac{1}{4}$, $0 < x < 2$
16	$2\sqrt{42}$
17	115
18	$a=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$
19	а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; б) нет; в) 4

Тренировочная работа 37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
89	140 000	12	0,116	−6	4	8	315	157	16	20	−14

13	а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{25\pi}{6}$
14	б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$
15	$x<-1,\ -\frac{2}{5}<x<0$
16	$8\sqrt{14}$
17	116
18	$a=\pm\frac{\sqrt{26}}{4}$
19	а) например, последовательность 1, 49, 73, 85, 91, 94; б) нет; в) 2

Тренировочная работа 38

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
94	650 000	14	0,25	−3	12	4	104	229	7	5	−11

13	а) $2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{3}$; -6π
14	б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{59}}$
15	$-5<x<-1, x>\frac{3}{2}$
16	$16\sqrt{7}$
17	118
18	$a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 257, 321, 337, 341; б) нет; в) 3

Тренировочная работа 39

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
79	10	21	0,25	−13	8	2	361	634	33	10	−25

13	а) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{8\pi}{3}$
14	б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{11}}$
15	$\frac{1}{3}<x<1,\ x>3$
16	$28\sqrt{3}$
17	113,5
18	$a=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 433, 505, 517, 519; б) нет; в) 5

Тренировочная работа 40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
145	2	33	0,167	−15	6	5	456	562	27	30	−17

13	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{25\pi}{6}; -5\pi$
14	б) $\arccos\sqrt{\frac{3}{19}}$
15	$x < -3,\ 1<x<\frac{3}{2}$
16	$14\sqrt{6}$
17	115
18	$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 344, 393, 400, 401; б) нет; в) 6

Тренировочная работа 41

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	9	0,008	69	20	0,25	32	0,75	6000	9	9

13	а) $2\pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
14	а) 13; б) $\frac{12}{5}$
15	$[\log_3 30; 4]$
16	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$
17	104 500 рублей
18	$-\frac{9}{4}\le a<2$
19	а) Да, например, если $a=10,\ b=20,\ c=11$ и $d=37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$

Тренировочная работа 42

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
356	6	32	0,5	11	8	2	10	2	90	4	1

13	а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5},\ -2\pi+\arccos\frac{2}{5}$
14	а) 2 : 3; б) $\frac{4}{\sqrt{41}}$
15	$(-4,2; -3,95], [-0,2; +\infty)$
16	1,92
17	12
18	$-\frac{1}{12}<a<0$ или $0<a<\frac{1}{12}$
19	а) нет; б) да; в) 12

Тренировочная работа 43

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	80	288	0,2	−8	18	−4	4	50	15	31	−3

13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-2;-1]\cup(1;2)$
16	$\frac{17-4\sqrt{13}}{3}$
17	1 620 000 рублей
18	$\frac{1}{6}$; 2,5
19	а) да; б) нет; в) 31

Тренировочная работа 44

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	4 000 000	3	0,375	−1,5	99	−2	4,5	0,4	45	63	23

13	а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) 0, $\pm\arccos\frac{1}{7}$
14	а) 2; б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
15	$\left[2;\ \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)$; $[5;+\infty)$
16	68
17	5400
18	$a=-\frac{9}{4}$, $a=0$, $a=\frac{1}{12}$
19	а) 14; б) 90; в) 1

Тренировочная работа 45

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	6	3	0,8	42	34	21	34	2	7	10	−2

13	а) $x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$
14	$2\sqrt{7}$
15	$[-4;-1),(-1,0),(0,1),(1;4]$
16	9 : 7
17	1 066 500 рублей
18	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
19	а) да; б) нет; в) 5

Тренировочная работа 46

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	5	4	0,25	−7	59	4	18	−4	4000	24	5

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}$
14	б) 36
15	$[-1;0)$
16	$\frac{63}{2}$
17	5
18	$1{,}5\le a\le 3;\ a\ge 6$
19	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8

Тренировочная работа 47

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	1,2	21	0,96	−8	18	0,25	117	−6	14	56	51

13	а) $\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ \frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{19\pi}{6}$
14	б) $64\sqrt{7}$
15	$\left(-\infty;-\sqrt{2}\right);\ \left(-\sqrt{2};-1\right];\ 0;\ \left[1;\sqrt{2}\right);\ \left(\sqrt{2};+\infty\right)$
16	$\frac{43}{2}$
17	2 622 050
18	$4\le a\le 7$
19	а) 2, 3; б) нет; в) 8

Тренировочная работа 48

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	17	15	0,17	2,8	0,8	6	12	−2	2,25	9	−8,25

13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$
14	б) $\operatorname{arctg}\frac{21}{17}$
15	$[0;\log_2 3]$
16	49
17	1 866 000 рублей
18	$\left[7-\sqrt{39};\ 7+\sqrt{39}\right];\ \left[-5-\sqrt{15};\ -5+\sqrt{15}\right]$
19	а) нет; б) нет; в) 16

Тренировочная работа 49

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	3	2	0,25	−7	61	3	4	−2	44	300	4

13	а) πn; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π; $\frac{17\pi}{6}$; 3π
14	б) 5
15	$[2; +\infty)$
16	2
17	103
18	$a \le -0,75$; $a \ge 0,75$
19	а) нет, б) нет, в) да

Тренировочная работа 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
32	5	135	0,5	25	124	6	6	−5	0,64	65	20

13	а) $0; -\log_2 19$; б) $-\log_2 19$
14	б) $\frac{1}{4}$
15	$[2; 4)$
16	7
17	69 000 000 рублей
18	$\left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right]$
19	а) 17; б) 36; в) 18

Справочное издание

**Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К.,
Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И.,
Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э.**

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АД44.Н02841 от 30.06.2017 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Шитикова, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова, Е. Ю. Лысова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», 170546, Тверская область,
Промышленная зона Боровлево-1, комплекс №3А, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).