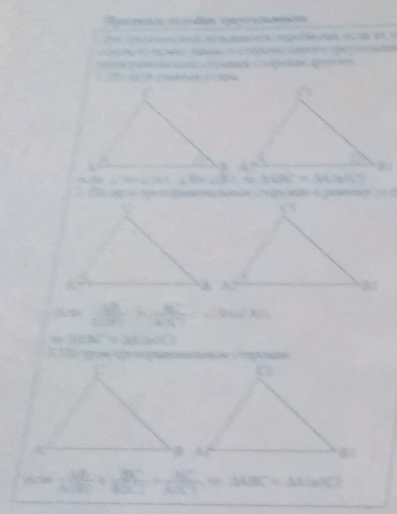
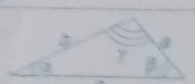
Шпаргалка
Головиной Ольги, МО 1 курс

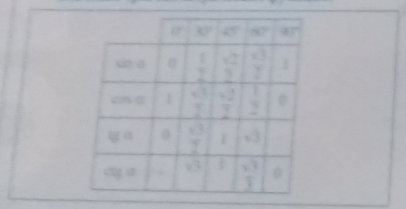


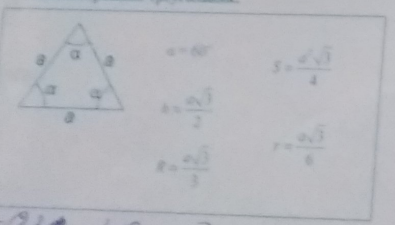
На странице оставлено 2 дыр.

Удостоверяющий

Экзамен







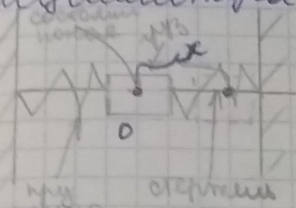
8-900-933-49-20
Любовь Петровна Петрова

131

Лекция 1 14.09.19

§ 1. Введение. Понятие мат. модели

Пример 1.1. гармонического осциллятора. 3-ка Исаака.



Исследовать, как зависит частота колебаний груза от его массы m и упругости стержня k.

1 этап - постановка з-чи исследования.

2 этап - на основании з-чи и характере объекта строим идеализир-ую, абстрактную объект, кот. будем наз. смысловым объектом. В данном случае смысловой объект опишем след. обр.: грузик скользит по стержню без трения, известна масса грузика m и упру-

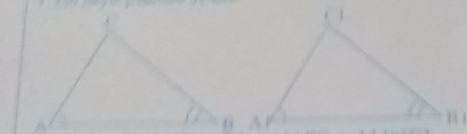
Тетрадь Тановицкой Ольги, 110 группа

Треугольники.

Признаки подобия треугольников.

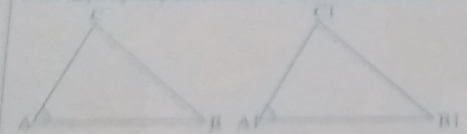
Два треугольника подобны, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходным сторонам другого.

1. По двум равным углам.



если $\angle A = \angle A1$, $\angle B = \angle B1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A1B1C1$.

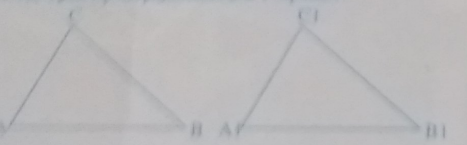
2. По двум пропорциональным сторонам и равному углу.



если $\frac{AB}{A1B1} = \frac{AC}{A1C1}$, $\angle A = \angle A1$,

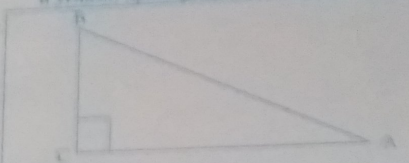
то $\triangle ABC \sim \triangle A1B1C1$

3. По трем пропорциональным сторонам.



если $\frac{AB}{A1B1} = \frac{BC}{B1C1} = \frac{AC}{A1C1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A1B1C1$

Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

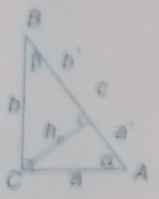


$\sin A = \frac{BC}{AB}$ — отношение противоположного катета к гипотенузе;

$\cos A = \frac{AC}{AB}$ — отношение прилежащего катета к гипотенузе;

$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$ — отношение противолежащего катета к прилежащему;

$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$ — отношение косинуса к синусу этого угла.



$\angle C = 90°$, $\alpha + \beta = 90°$;

$\frac{b}{c} = \sin\alpha$; $\frac{a}{c} = \cos\alpha$;

$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$; $\frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Площадь прямоугольного треугольника.

$$S = \frac{1}{2}h_c c; S = \frac{1}{2}ab$$

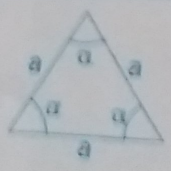
Теорема Пифагора:

$a^2 + b^2 = c^2$; $h_c^2 = a^n b^n$; $a^2 = c \cdot a^n$; $b^2 = cb^n$

Значения тригонометрических функций.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
ctg α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Равносторонний треугольник.



$\alpha = 60°$

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

На странице осталось только задачи, остальное вырвано.

Задачи

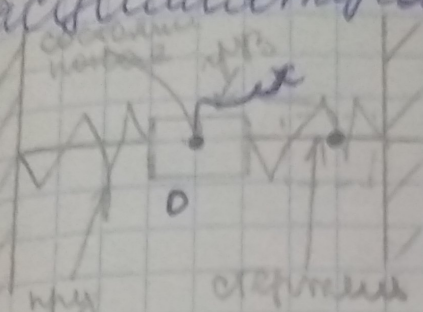
8-900-933-49-20
Любовь Петровна Петрова

Лекция 1

14.09.15

§ 1. Введение. Понятие мат. модели

Пример 1.1. Гармонический осциллятор



3-я задача.

"Исследовать, как зависит частота колебаний груза от его массы m и упругости стержня k.

1 этап - постановка з-чи исследования,

2 этап - на основании з-чи и характере объекта строим идеализир-ый, абстрактный объект, кот. будем наз. смысловым объектом. В данном случае смысловой объект спишем сл. обр.: грузик скользит по стержню без трения, известна масса грузика m и упру-



жесткость пружины k.

3 этап — построение мат. модели, привлекая 3-ны физики $F_{вн} = -k \cdot x$, с другой стороны $F = m x''$ можно записать так:

$$mx'' = -k \cdot x$$

— мат. модель в виде диф. ур-я 2-го порядка.

4 этап. Решить мат. модель.

Решение:

$mx'' + kx = 0 \;/ : m$

$x'' + \frac{k}{m} x = 0$ — лин-ое ДУ с пост. коэф-ми

Общ. реш-ие сост-я диффер-ое ур-е

$\lambda^2 + \frac{k}{m} \lambda^0 = 0,$

$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$

$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$ — корни комплексно сопряженные

Если знаем корни, то можно

2/31

общее реш-е:

$e^{\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \cdot t}$ - один из корней

Имеем две ф-ции.

$e^{\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \cdot t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + i \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$ -

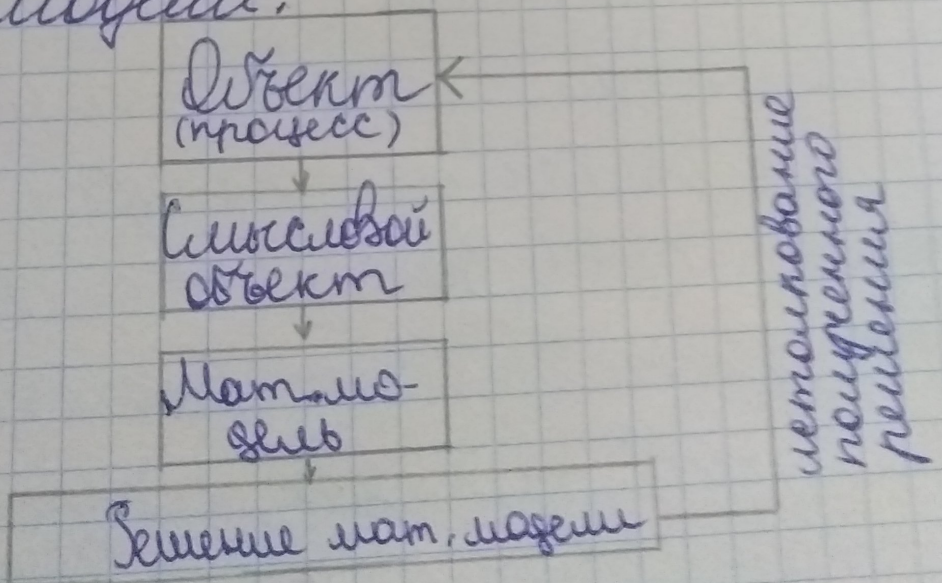
ф-ции cos и sin независимые и они сост. базис, поэтому общ. реш-е представл-ся так:

$X(t) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}} t,$

C_1 и C_2 зависит от нач. усл-й (как мы отклонили груз) 5 этап. вывод из получения решения.

Частота колебаний $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

1.2. Общая схема построения мат. модели.



отклонение рез-ов исследования при неизвестных погрешностях измерений).

1.4. Пример мат. модели колебательного контура.

Линейные эл-ты элект. цепи.

1) Сопротивление — R

ВАХ: $U_R = R \cdot i_R$

R - величина сопротив.

U_R - напряжение на сопротивлении,

i_R - ток в сопротивлении.

2) Индуктивность (катушка) — L

ВАХ: $U_L = L \cdot i_L'$

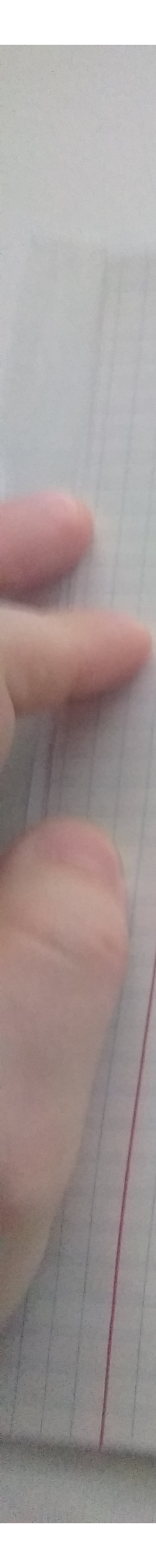
3) Ёмкость — C, параметр её тоже C.

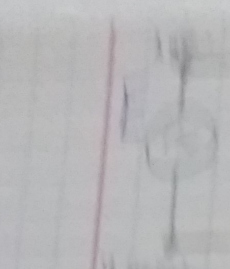
$i_C = C \cdot U_C'$

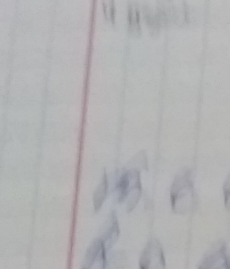
4) Обозн. источник напряжения:

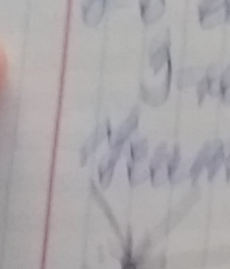
— ~ E(t)

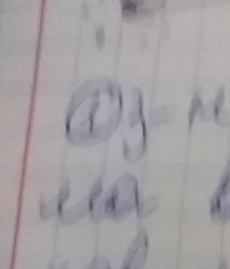
Рассм. эл. цепь:

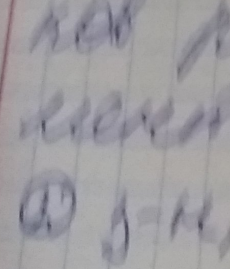


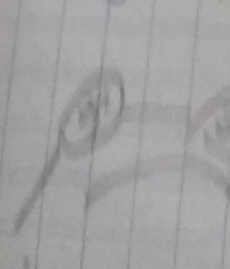


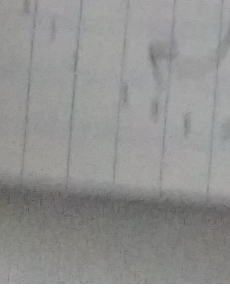


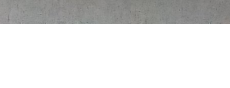


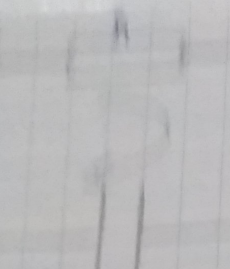


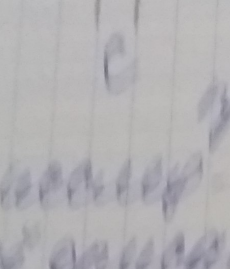


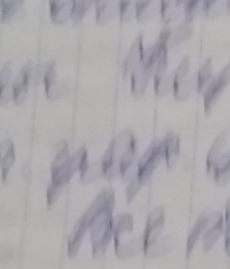


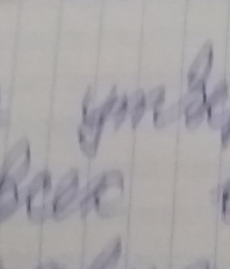


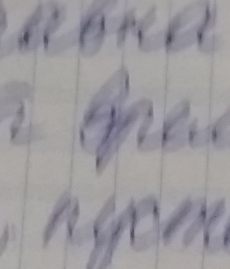


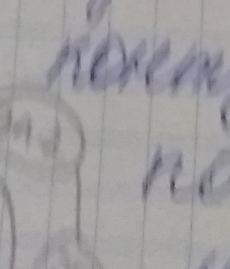


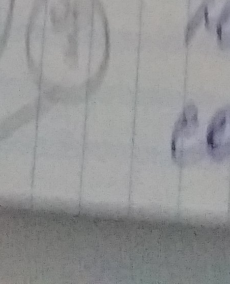


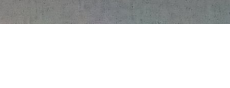


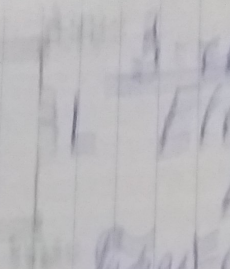


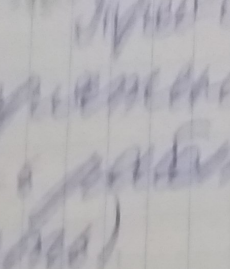


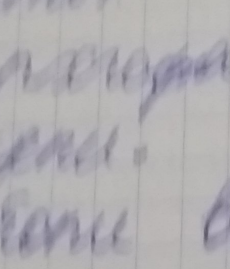


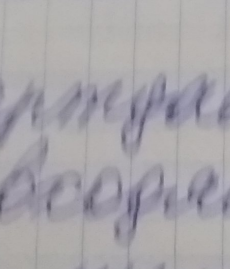


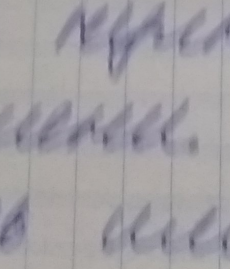


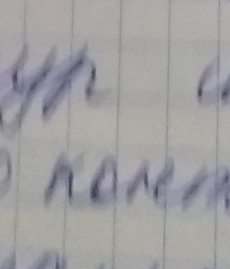


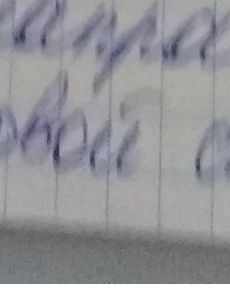


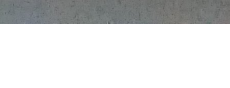


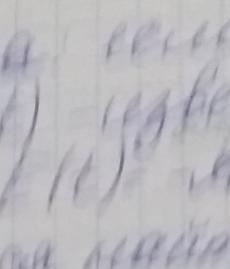


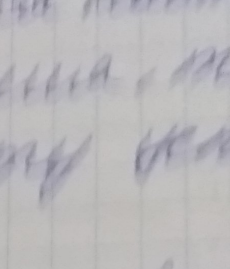


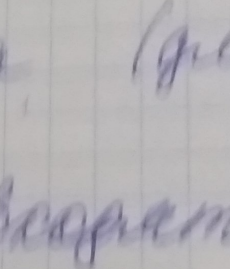


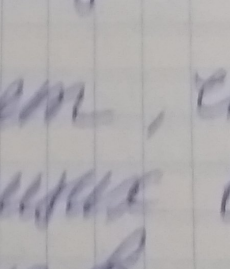


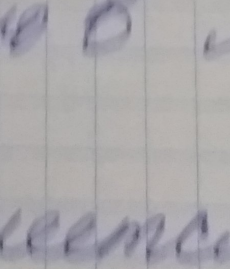


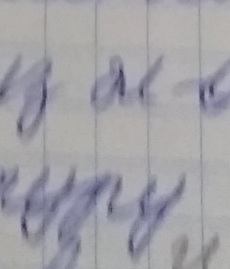


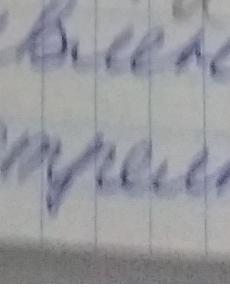




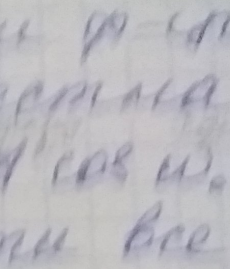


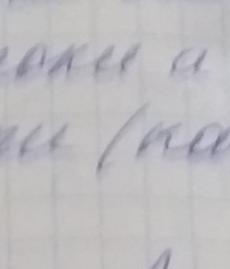


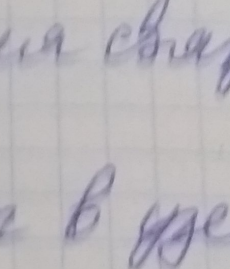


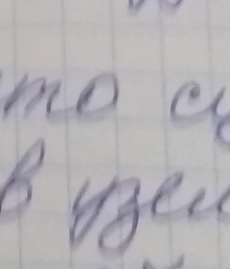


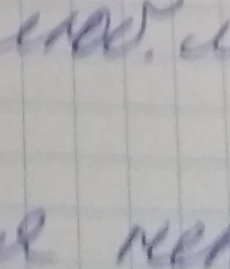


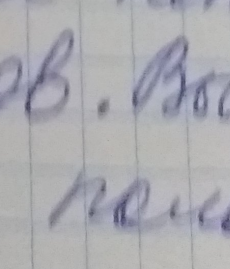


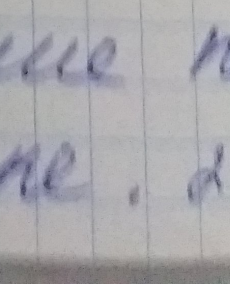


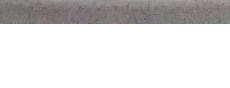


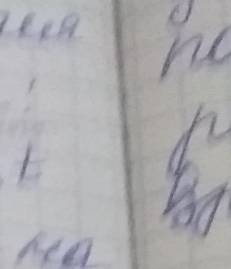


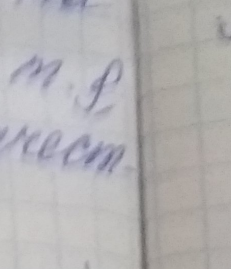


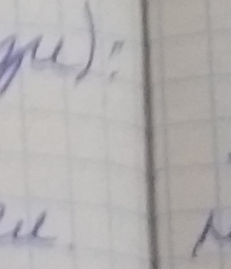


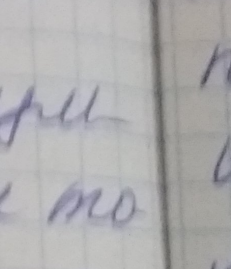


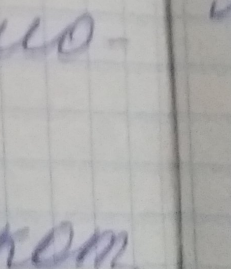


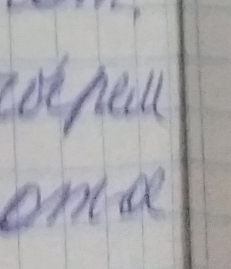


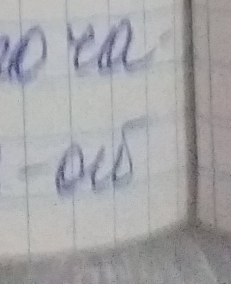


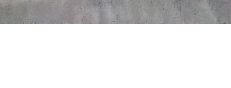


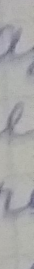


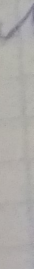






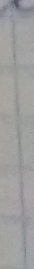


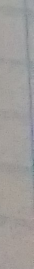


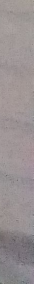










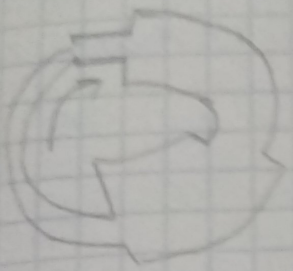




2.11

2-й утверждает, что сумма падений напряжения в конту ре равна нулю в лю. момент времени

Можно прочи его так



- это труба с водой

Суммарное давл-е = 0

3-ий позволяет соед. ур-я в ор- но целое, выб. направление. Для построение мат. модели в на шей цепи выб. полож. направ ление по часовой стрелке.

$$U_E + U_R + U_L + U_C = 0$$

по 2-з-му Кирхгофа

На цепи 4 узла. 1 з-н выглядит:

1 узел: $i_E - i_R = 0$

2 узел: $i_R - i_L = 0$

3 узел: $i_L - i_C = 0$

4 узел: $i_C - i_E = 0$

$\Rightarrow i_E = i_R = i_L = i_C = i$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Аналогично для $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$: (x_1, x_1), $x_1 \neq 0$.

Нормируем: $x_1^2 + x_1^2 = 1$, $2x_1^2 = 1$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Собственный вектор: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Матрица перехода T составляется из собственных векторов, записанных в столбцы:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Матрица T ортогональная, поэтому $T^{-1} = T^T$.

$$T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Матрица A в новом базисе, состоящем из собственных векторов, имеет диагональный вид:

$$A' = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$u'' + \frac{R}{L}u' + \frac{1}{LC}u = \frac{A}{LC}\cos\omega_0 t$

$u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ — начальные условия.

$R = 2\delta$, $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и окончательно:

$$u'' + 2\delta u' + \omega^2 u = \omega^2 A \cos\omega_0 t$$

Хар. ур-е:

$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$,

$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

Общее реш-е однородного ур-я

$u'' + 2\delta u' + \omega^2 u = 0$ будут ф-ции:

$e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t}$ и $e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t}$,

если $\delta > \omega$, то показатели степеней действ-ые и отрицат-ые;

а общее реш-е обозначим буквой u.

Далее к нулю, если $\delta < \omega$; тогда общее реш-е $u = e^{-\delta t}(C_1\cos\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\,t + C_2\sin\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\,t)$, второй член $\to 0$ и $u \to 0$.

Частное вторая-ся $y/3$ sin и

cos, знак-е тот. по которому не
гиперболоид 1. И в этом сущ
чал ф-ции принадлежат к
нуло за пределы линейн
ления.
В нашем случае частно
лиз-о этих ф-ций, не выполнят
их в реш-е.
Найдем (из теории ДУ частно
реш-е имеет вид:
гулявой части. Част. реш-е:
$u = a \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t$,
для поиска a и B берем най-
ти u', u'', затем все подст
Взято в сист. ур-е:
$u' = -a\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$,
$u'' = a\omega_0^2 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 \sin \omega_0 t$,
$-a\omega_0^2 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 \sin \omega_0 t - 2\beta a\omega$
$\cdot \sin \omega_0 t + 2\beta B\omega_0 \cos \omega_0 t + \omega^2 a \cos \omega_0$
$+ \omega^2 B \sin \omega_0 t = \omega^2 A \cos \omega_0 t$.

№ 3.1

Дано: ω, ω_0, δ, A, B

Найти: $x(t)$

Решение:

Пусть $t=0$, тогда

$$\begin{cases} A\omega_0^2 + B\delta\omega_0 + \omega^2 A = \omega^2 A \\ B\frac{A}{2} \\ -B\omega^2 - 2\delta A\omega_0 + \omega^2 B = 0 \end{cases}$$

Система имеет ненулевое решение при $B \neq 0$.

Вынуждающая сила меняется по закону $a\cos\omega t$, а в комплексной форме $\tilde{a} = Be^{i\omega t}$.

$$a = \frac{B(\omega^2 - i\omega_0^2)}{2\delta^2 + \omega_0^2} \quad \text{и тогда}$$

$$\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2 B}{2\delta^2\omega_0^2} + 2\delta^2\omega_0^2 = \omega^2 A$$

$$B\frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}{2\delta^2\omega_0^2} = \omega^2 A$$

Теперь найдем a.

$$B = \frac{2\delta^2\omega_0^2\omega^2 A}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2} \cdot \frac{(\omega^2-\omega_0^2)}{2\delta^2\omega_0^2} =$$

$$a = \frac{2\delta^2\omega_0^2\omega^2 A}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}$$

, тогда

$$= \frac{\omega^2 A(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}$$

$$U = \frac{(\omega^2-\omega_0^2)\omega^2 A}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2} \cdot \cos\omega t + \frac{2\delta\omega^2\omega_0 A}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_0^2} \cdot \sin\omega_0 t$$

Ответ: — частное решение дифференциального уравнения

Сила тока $i = CU' \Rightarrow$ амплитуда силы тока равна $I_m = CU_m\omega$

Средняя мощность, выделяемая в цепи за период колебаний $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi$

$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{Z^2} R = \frac{U_m^2 R}{2\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)}$

Максимальное значение мощности достигается при $\omega = \omega_0$

$\langle P \rangle_{max} = \frac{U_m^2 R}{2R^2} = \frac{U_m^2}{2R}$

При $\omega = \omega_0$, $\varphi = 0$, амплитуда в цепи будет $\frac{\omega_0 LI}{2}$

Если $\omega > \omega_0$, то фазовый будет отрицательным, потому что $\frac{\omega_0 LI}{2}$, получим: $\omega = \omega_0$ ($\frac{\omega_0 LI}{2}$), получим: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$, то достигнем max-го значения амплитуды.

№1 Ск. пули из ружья, если m, d, U. Найти ?

1) 3-н сохр-я имп.

2) λ-L имеет-го отдаления

при попадании в него пули

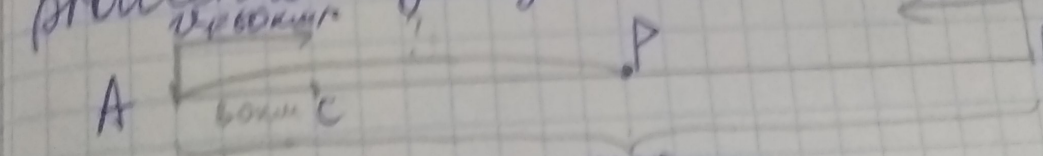
10/31

Задача на движение

Расст. между городами A и B ... км. Из гор. A в B со скор. ... км/ч выехал 1-ый автом., через час после этого навстречу ему из гор. B выехал со ск. v_2=65 км/ч 2-ой автом. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся?

prodlenka.org/авдеева...

Решение:



Рекомендации:

1 Начертить схему

CB=AB-AC

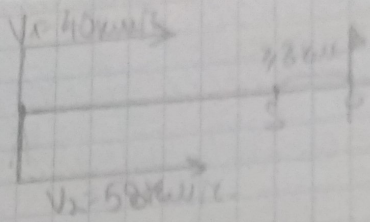
CB=375км.

Скор. сближения:

$t=\frac{S}{(v_1+v_2)}$, $t=\frac{375}{60+65}=\frac{375}{125}=3$ ч.

$S=4 \cdot 60=240$ км.

Из армейской к/р (4класс)



1) Какое S, когда выехал скорый поезд

2) ? / 3 какое время решение

3) 80 - 8 = 72 км

$\frac{72}{18}$ = 4 ч. 11 ч + 4 ч = 13.00 ч.

Ответ: 13.00 между ними 3 км.

• 3-га от Даши.

1 эт) з-ча

2 эт) идеальный объект: машины едут равномерно. Расстояние между городами A и B S_1 км. Из гор A в B со ск. v_1 км/ч выехало 1 авто, навстречу 2 авто со ск v_2 км/ч через t ч. На каком расстоянии S от гор A авто встретятся?

3 эт) построение мат. модели

$S = v \cdot t$

Дано: $m_1 = m_2 = m$, $t_1 = t_2 = t$, S

$v_1 = \frac{S}{t} \Rightarrow t = t_{cr}$

$S = t \cdot v_2$ или

s_{cm} завод. т/з t г. на расстоя-
ние S сам вступается

3-га игр револьвер.

Постановка 3-ги

2) идеал объект сис-ма движущ
тел пуля - маятник и к ней
применяется 3-г сохранения импульса

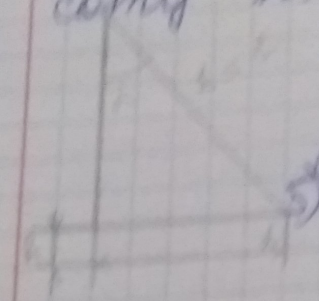
$mv = (M+m)v_1$ (1)

v_1 - ск. пули после удара тела

$M+m$, v_1 м.б. найдены из опыта
то ск v м.б. выведена из (1). Ес-
ли взвесить, то m и M найдём.
Ск v_1 можно найти так: после
удара маятник повернется
вокруг горизонтальной оси и его центр
тяжести поднимется на высоту h.
3-н сохранения механ энергии
после удара: $\frac{M+m}{2} v_1^2 = (M+m)gh \Rightarrow$

$v_1 = \sqrt{2gh}$

При опыте Кавендиша с горизонтальными крутильными весами [illegible] сосуд [illegible] отклонение [illegible]



$h = l - l\cos\alpha = l \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{d}{2l}$.

При небольших углах отклонения нити можно принять $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{d}{2l}$. Тогда $h = l \cdot 2\frac{d^2}{4l^2} = \frac{d^2}{2l}$ или преобразуем

$mv = (M+m)\sqrt{2g\frac{d^2}{2l}} = (M+m)d\sqrt{\frac{g}{2l}}$

Откуда $v = \frac{M+m}{m} d\sqrt{\frac{g}{2l}}$

09.19

Лекция 2.

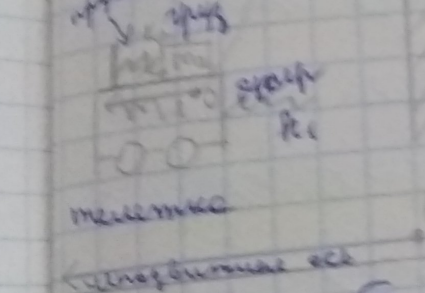
§ 2 Основная классификация мат. моделей

2.1 Структурные и функциональные модели.

· струк-ые модели предназначены для исслед-я взаимосвязей эл-ов одного и того же объекта, а также [illegible] изучения их

работы и св-в. В отлич. от структурных моделей, функц-ые предназначены для изучения воздействия объекта на окружающую среду и его реакции на воздейс-я окр. среды. Функц-ые модели часто над моделями черного ящика.

Пример 2 (Мошкис) структ-ой модели.



Тележка – груз – один объект

① Сосд с содерж-го объекта

Тележка массой m_1, груз массой m_2, m_1 намного больше m_2. Буфер имеет коэф-т упр-и k_1 и пружина – k_2. Тележка со ск. u наезжает на стенку и под действием буфера отталк-ся от неё. В момент накатыв-я тележки на стенку груз неподвижно лежит

Считаем, что колебание груза не оказывает существенного влияния на движение тележки

на тележке. З-ча исслед-я состоит в определении сверх чем груза амплитуды колебания груза относ-о тележки и скорости накатывания г. будем предполагать поверх-ть соприкосн-я груза с тележкой идеально гладкой, т.е. коэф-ом трения груза о тележку можно пренебречь. Колеса подвеса катятся, принебрегаем влиянием колеса

① Постр-е мат. модели

$Ч_3$ $x_1(t)$ абсц. коорд-а тележки на этой оси. Вторая ось - ось „0" - положение равновесия грузика относ-о тележки. За x_2 координата положения груза отн-о тележки. Этот ноль, где центр тяжести грузика.

В момент столкнов-я тележки со стеной модель движения тележки описыв-ся так

№ 1

Исходя из данных с примера вывод
II закон, в виде ур-я

$$m_1 x_1'' + k_1 x_1 = 0. \quad (1)$$

Повер-ть двух осн. пружинных маятников пер-ся и получим $(x_1 + x_2)$ - коорд. груза отн-но равновесной оси. Двиг-ся груз с грузиком $(x_1 + x_2)''$, поэтому сила в ур-е на груз будет:

$$m_2 (x_1 + x_2)'' + k_2 x_2 = 0 \quad (2)$$

В начальный мом. времени:

$x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$ - нач. условия (3)

Мы постр-ли мат. модель из сис-мы 2-ух ур-й и нач. ус. (3).

Процесс реш-я пропускаем =>

$x_1 = \frac{v}{\omega_1} \sin \omega_1 t$, где $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

Проверим нач. ус. и реш-е:

$x_1(0) = \frac{v}{\omega_1} \cdot \sin \omega_1 \cdot 0 = 0$ - нач. ус. выполн

$x_1' = \frac{v}{\omega_1} \cdot \omega_1 \cos \omega_1 t = v \cos \omega_1 t.$

$x_1'' = -v \omega_1 \sin \omega_1 t$ подст. в ур-е (1)

$-m_1\sqrt{\frac{k_2}{m_1}}v\sin\omega_1 t + k_1\sqrt{\frac{k_2}{m_1}}v\sin\omega_1 t =$

$= -\sqrt{k_2 m_1}v\sin\omega_1 t + \sqrt{k_1 m_1}v\sin\omega_1 t = 0$

док-ли, что реш-е нач. зад. Подст.
ф-ле x_2 в ур-е (2), получим:

$m_2(\frac{v^2}{\omega_1^2}\sin\omega_1 t + x_2)'' + k_2 x_2 = 0,$

$m_2 x_2'' + k_2 x_2 = v m_2 \omega_1 \sin\omega_1 t$, (4)

не будем, а только реш-е (4) с нач.
усл-ями (3):

$x_2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v\left(\frac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right)$, где

$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$. Проверим реш-е: сначала
пров-м нач. ое усл-я

$x_2(0) = 0,$

$x_2' = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v(\cos\omega_2 t - \cos\omega_1 t)$

$x_2'(0) = 0$ – верно всё.

$x_2'' = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v(\omega_1\sin\omega_1 t - \omega_2\sin\omega_2$

подставим в ур-е (4), получим

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2} \cdot v\, m_2\left(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\sin\omega_1 t - \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\sin\omega_2 t\right) +$$

$$+ k_2 \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2} v \left(\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}\sin\omega_2 t - \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\sin\omega_1 t\right) =$$

$$= v m_2 \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\sin\omega_1 t,$$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2} v\left(m_2\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} - k_2\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\right)\sin\omega_1 t =$$

$$= v\, m_2 \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\sin\omega_1 t,$$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cdot\left(m_2\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} - k_2\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cdot m_2\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\left(1 - \frac{k_2}{m_2}\frac{1}{\omega_1\cdot\omega_2}\right) =$$

$$= \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2}\cdot m_2\omega_1\cdot\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) = m_2\omega_1 -$$

проверили => явл. решением

Сравните ампл. колебаний

Амплитуда разности к одному аргументу

$$A = \frac{2}{\omega_2}\cdot\frac{\omega_1^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\cdot\left|\cos\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\pi}{2}\right|\cdot v$$

$\omega_1 t = \frac{\pi}{2}$ => ск-ть будет нулевой, то

$T = \frac{\pi}{2\omega_1}$ время остановки тела

Завис-ь амплитуды от скорости удара тележки. Показали это А — модель взаимодействия системы всей со стенкой (функционально). Исследуя структурную модель, мы получили функциональные.

2.2. Непрерывные и дискретные модели.

Примеры.

- Нужно найти корни ф-ии:

$$f(x)=0$$

Пусть м-дом показано, что на отр-ке $[a,b]$ нах-ся 1-ый корень этого ф-ии. Предполагаем что 1-непрер-ая ф. на $[a,b]$, если такое всё вып-ся, то знаки на концах. Если $f(a)\cdot f(b)<0$, то вып-ся если на концах разные знаки, то $f(a)\cdot f(b)<0$.

№ 2

1) Ч.Д. половинного деления

Выясн. знак ф-ции в середине отрезка $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и определ. на каком отр. $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ смот. на каком отрезке меняется знак, сам $= \delta$, то решили. И повторяем, пока длина отрезка будет меньше указ. точности.

① $f(x) = x^3 - 5$. с точн-ю $0,25 = \varepsilon$.

Итерации	1	2	3
a	1	1,5	1,5
b	2	2	1,75
f(a)	-4	-1,625	
f(b)	3	3	

$f\left(\frac{1+2}{2}\right) = f(1,5) = (1,5)^3 - 5 = -1,625$

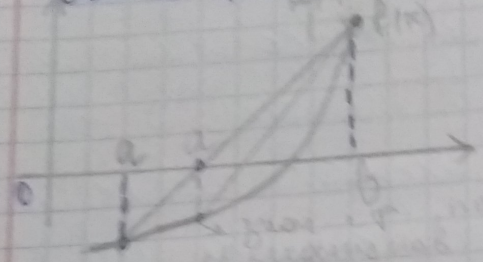
$f\left(\frac{1,5+2}{2}\right) = \frac{3,5}{2} = 1,75$

$f(1,75) = 1,75^3 - 5 = 0,359375$

$\frac{1,5+1,75}{2} = \frac{3,25}{2} = 1,625$ – приближ-ый корень.

Д.и-8 1орд

Есть $f(x)=0$, исх. и такие те



$f(x)=x^3-5$, $\varepsilon=0,25$

Итерации	1	2	3
a	1	$\frac{11}{7}$	
b	2	2	
f(a)	-4	-1,12	
f(b)	3	3	

(1, -4)

(2, 3)

$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+4}{3-(-4)}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{7}$, $7x-7=y+4$,

$y=7x-11$

$7x-11=0$

$7x=11$

$x=\frac{11}{7}$ (.)

№ 1

$f\left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}\right)^3 - 5 = \frac{1331}{343} - 5 = 3,88 - 5 = -1,12$

$\frac{11}{7} - 2 = 1,571 - 2 = 10,429$ - не достигли нашего

Теперь точки (1,57; -1,12)

(2, 3)

$\frac{x - 1,57}{2 - 1,57} = \frac{y + 1,12}{3 + 1,12}$, $4,12x - 6,47 = 0,43y + 0,48$

$y = \frac{4,12}{0,43}x - \frac{6,95}{0,43} =$

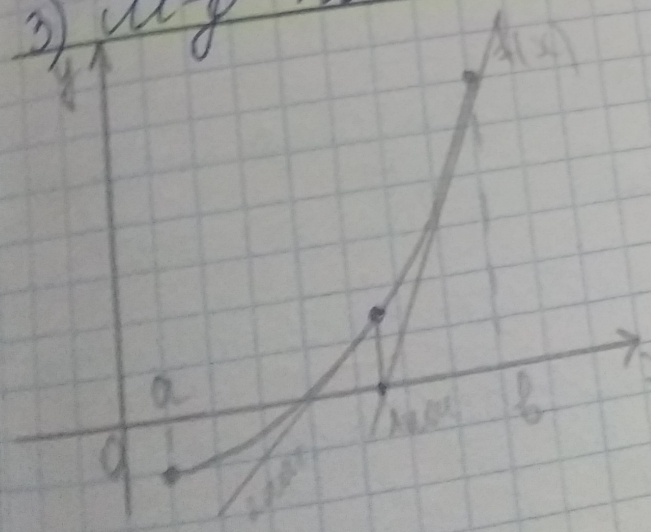
$= 9,58x - 16,16$

$16,16 = 9,58x$

$x = \frac{16,16}{9,58} \approx 1,69$

$f(1,69) \approx -0,191.$

3) И-я касательной.

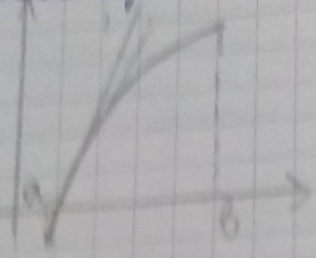


Найти производную и вогн.-тат кашеш. у кот знак совп. со знаком производной в-кор. из произв. и т.д. продолжать

Ответ: Будет найден И т.д.

ДЗ 2

если прямо в пр. сторону.



Все ужас. кас-ой отрицательная

Бывает такая ситуация

если пр. случай, то м.б. непонятно откуда начинать.

М-д кас-ых подходит в случаях, если 2-ая производная на интервале не меняет своего знака, иначе м-д применять вовсе не может.

$f(x)=x^3-5$ можно ли применять м-д?

$f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$ на отр. $[1;2]$.

не меняет знака, $f''(x)>0$ на $[1;2]$ ⇒ м-д можно применять, у нас $f(2)=0$ ⇒ в 2-ке говорим касат-ю

Полож-ая $y=kx+b$, $k=f'(2)=3\cdot 2^2=12$

$y=12x+b$, $(2;4) \Rightarrow 3=12\cdot 2+b$,

№ 7

$b = 3 - 24 = -21 \Rightarrow$ $y = 12x - 21$ — уравнение касательной

(.) пересечения с Ox будет $x = \frac{21}{12} = \frac{7}{4} = 1{,}75$

Итерации	1	2	3
a	1	1	
b	2	1,75	
f(a)	-4	-4	-4
f(b)	3	0,3594	

$f(1{,}75) = (1{,}75)^3 - 5 = 0{,}3594$

$k = f'(1{,}75) = 3 \cdot 1{,}75^2 = 9{,}1875$

$y = 9{,}1875x + b,$

$0{,}3594 = 9{,}1875 \cdot 1{,}75 + b,$

$b = -15{,}719$

$y = 9{,}1875x - 15{,}719,$

$9{,}1875x = 15{,}719$

$x = \frac{15{,}719}{9{,}1875} = 1{,}711$ — корень уравнения

№ 3-го

Сравнить скорость, число итераций. М-д полов-го деления

① $f(x) = 0, \quad x^3 - 2x - 1 = 0$

$x = 0; -1$

$x = 1; 0$

$a = 2$

$b = 0$

$f(2) = (2)^3 - 2(2) - 1 = 8 + 4 - 1 = 5$

$f(0) = -1.$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right); \; f\left(\frac{2+0}{2}\right) = 1$

Итерации	1	2
a	-2	-1
b	0	0
f(a)	-5	0
f(b)	-1	-1

$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) - 1 = 2 - 2 = 0$

корень

② м-д хорд

Мик-ки	1	2
a	-2	$\frac{1}{2}$
b	0	0
f(a)	-5	-1,87
f(b)	-1	3

(-2; -5)

(0; -1)

$\frac{x+2}{0-(-2)} = \frac{y+5}{-1+5}$,

$\frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{4}$

$4x+8 = 2y+10$

$2x+4 = y+5$, $y = 2x-1$

$y=0 \Rightarrow 0 = 2x-1$, $2x=1$, $x=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 - 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} - 1 - 1 = \frac{1}{8} - 2 = \frac{1}{8} - 1\frac{8}{8} = -1\frac{7}{8}$

$= -1,87$ – хуже ① вида решения

③ М-д касат-ых

Д/З 1

3-ей нк-ое по физике

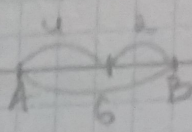
3-ча 1

"По дороге движ-ся пешеход, а навстречу ему мотоциклист и велосипедист (каждый со своей скоростью). В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной (.)-е, пешеход был от них в 6 км. В тот момент, когда мотоц-т встретился с пешеходом, он опередил велосипедиста на 4 км. На сколько велосипедист будет отставать от мотоциклиста в момент своей встречи с пешеходом?"

Будем счит., что пешеход-это А, а (.)В - место нахождения. вел. и мот. одновременно.

x - v мот. + пеш. s

y - v вел. + пеш. s.



не понравилось!

	Ск-ть	Время	Путь
мот.	x	$\frac{6}{x}$	6 км
вело-т	y	$\frac{4}{y}$	4
	$\frac{2}{(\frac{1}{x})}$ "	$\frac{6}{x}$	2

мотоц.	x	$\frac{6}{x}$	6
		$\frac{4}{y}$	? $R = x \cdot \frac{4}{y}$
вело-т	y	$\frac{2}{y}$	2
		$\frac{4}{y}$	4

$$\begin{cases} \frac{6}{x} = \frac{2}{y} \\ R = x \cdot \frac{4}{y} \end{cases}$$

$y = 3x$

$R = 12$.

Д/з ② $\sqrt{2}$.

Решить $x^3 - 2x - 1 = 0$ корень (-1)

$a = -1{,}1$, $b = -0{,}9$. Исп. 3 метода

№ 1

1-й полов-го деления

№	1	2
	-1,1	-1,0
	-0,9	-1
	-0,131	-0,131
	0,071	0

$f(-1,1) = (-1,1)^3 - 2\cdot(-1,1) - 1 =$

$= -1,331 + 2,2 - 1 = -0,131$

$f(-0,9) = (-0,9)^3 - 2\cdot(-0,9) - 1 =$

$= -0,729 + 1,8 - 1 = 0,071$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{-0,9-1,1}{2}\right) = f(-1) =$

$(-1)^3 - 2\cdot(-1) - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ – корень

② 2-й хорд

№ точки	1	2
a	-1,1	-0,9
b	-0,9	-0,9
f(a)	-0,131	0,03
f(b)	0,071	0,071

$(-1,1; -0,131)$, $(-0,9; 0,071)$

$\frac{x+1,1}{-0,9+1,1} = \frac{y+0,131}{0,071+0,131}$

$\frac{x+1,1}{0,2} = \frac{y+0,131}{0,202}$

$1,01(x+1,1) = y+0,131$

$1,01x + 1,111 = y + 0,131$

$y = 1,01x + 0,98$

$y = 0 \Rightarrow 1,01x = -0,98$, $x = -0,97$ – 2-й корень хорд

$f(-0,97) = (-0,97)^3 - 2\cdot(-0,97) - 1 = -0,91 +$

$1,94 - 1 = 0,03$

③ 1-й касательных

$f'(x) = (x^3 - 2x - 1)' = 3x^2 - 2$

$f''(x) = (3x^2 - 2)' = 6x$ на отр. $[-1{,}1; -0{,}9]$

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ м-я можно применить, $f(-0{,}8) = (-0{,}8)^3 - 2 \cdot (-0{,}8) - 1 =$

$= -0{,}728 + 1{,}8 - 1 = 0{,}071$. Вост. $y = kx + b$

$k = f'(-0{,}8) = 3 \cdot (-0{,}8)^2 - 2 = 2{,}43 - 2 = 0{,}43$

$y = 0{,}43x + b$

$0{,}071 = 0{,}43 \cdot (-0{,}8) + b,$

$0{,}071 = -0{,}387 + b,$

$b = 0{,}458 \Rightarrow$ ур-е кас-ой будет $\Rightarrow$

$y = 0{,}43x + 0{,}458$, тогда

1.) пер-я с OX: $0{,}43x = -0{,}458$

$x = -\frac{0{,}458}{0{,}43} =$

$= -1{,}065.$

Точки пересеч.	1	2
a	-1,1	
b	-0,8	
f(a)	0,131	
f(b)	0,071	

$f(-1{,}065) = (-1{,}06)^3 - 2 \cdot (-1{,}06) - 1 =$

$= -1{,}19 + 2{,}12 - 1 = -0{,}07.$

Ответ: корни а) $x = -1$;

б) $x = -0{,}97$;

в) $x = -1{,}065$.

Лекция 3

12.10.19

Понятие и мат-ие модели. Линеаризация.

Пример 1

З-га мин. програм-я представ-ся в виде мин. модели. Поиск оптим-го решения ф-ции $F(x_1, .., x_n)$ - мин., и имеем либо max, либо min $F \to max$ или min

На выпуклом многограннике, кот. задаётся сис-ой из рав-в и нер-в

Пример выпуклого програм-я. З-га сост. в поиске оптим-го знач. выпуклой ф-ции $F(x_1, .., x_n)$ на выпуклом мн-ве Q

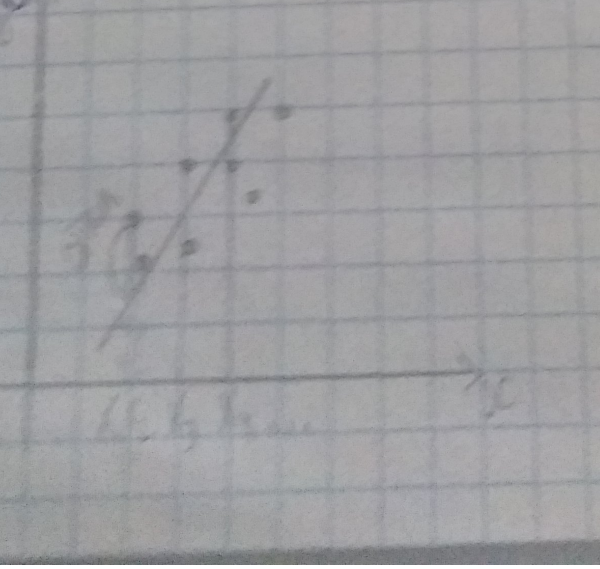
$y = x^2 + 2x + 6$, $Q = \{(x, y): x^2 + (y-6) \le 1\}$

Ф-ция выпуклая, если график ф-ции для любой хорды лежит ниже неё. (для двух точек)

Как з-ча реал-ся? Пусть мы имеем h и удалили 0 занимает ся кусочками стержней длины не больше h, так что 0 занимает многогранником. На д-ном этапе градиент → напр. движ-е по ан. ди-ту и 0 стало многогр-м ⇒ получили з-чу мин. пров-ти. Вместо ан. ди-та можно взять дискретный градиент на сетке

Пример 1

При наблюдении за 2-мя случ. величинами имеем следующие результаты, полученные (x1, y1), ..., (xn, yn), изобр. на плоскости:



И цель стоит: провести прямую через центр тяжести. Сам простая мин-ая. Посмотрим

$y = ax + b$. , вычис. коэф a и b по так. нужно. y - е ман-ой регр. от y по x: $y = ax + b$. Много др. простой и надежный: м.о наим. их квадратов. Сущ. прямая, для которой Есть отклонение и вычисл.: $(y(x_1) - y_1)^2 + (y(x_2) - y_2)^2 + \dots + (y(x_k) - y_k)^2 = \sum_{i=1}^{k} (y(x_i) - y_i)^2$ - один ф-ла сумма кв-ов откл. $S(a,b) = \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b - y_i)^2 \to \min$, наи. ти (.)-и $\min$ этой ф-ции $\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0. \end{cases}$ Учасполуч. $\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) a + k \cdot b = \sum_{i=1}^{k} y_i. \end{cases}$

Теперь идёт про верка, дейст-о ли отрат отт данные. И вообр. что отклон. от вар-т, имеют нулевое мат. ож-ие, за пределами диапазона не изуч-ют $y = ax = b$.

Решение.

Наблюдение 3-го таблицы.

x_i	50	70	90	110	130	450
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3	3,9
$x_i y_i$	10	35	72	121	169	407
x_i^2	2500	4900	8100	12100	16900	44500

Вычислим a и b

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407, \\ 450a + 5b = 3,9 \end{cases}$$

$b = 7,8 - 90a$ подставим в 1:

$44500a + 450(7,8 - 90a) = 407,$

$44500a + 3510 - 40500a = 407,$

$4000a = 407 - 3510,$

$4000a = -3103,$

$a = -\frac{3103}{4000}$

$a \approx -0,78$

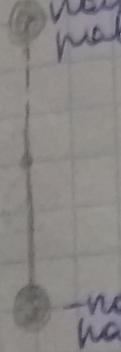
$b = 7,8 - 90 \cdot (-0,78) = 7,8 + 70,2 = 78$

Ур-е регрессии: $y = -0,78x + 78$

Есть обратная пропорциональная зависимость. Дальше нужно проверить решение и т.д. менять ур-е на какую-нибудь и т.д.

Пример 3

Найдем фазовый портрет системы (если
опис.-ся одной сис-ой ДУ,
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ пр-е $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где A -
сис-ой ДУ, $x(t), y(t)$ - зав от t,
полот-е равнов-я хар-ся тем,
что их знач-я x и y не меняются
Пример полож-я равнов-я $x'=y'=0$



(x, y) - полот-е явл-ся
нек-ой, пр-е нельзя ее

Устой-ть полож-я
равнов-я наз. та-
кая (x_0, y_0), к пот. стремят-ся
все реш-я сис-мы при $t \to \infty$
(кроме пр. полож-я равнов-я)
В теории ДУ для лин-ых сис-м
сущ-ся к опред-ю знаков собств
их значений матрицы A:

1) для устойчив-ти лин. сис-мы
рост-о, чтобы все собст-ые значе
ния матрицы А имели от
риц-ые вещест-ые части.

2) если хоть одно собст-ое значе
ние имеет полож-ую вещ-ую часть
то сис-ма неустойчива.

- $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ищем собст-ые значе

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ - ур-е для опр
ления собст-го знач

$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 5 = 16$

$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$ $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 1$ $\Rightarrow$ сис-ма
неустойчива

- Если же сис-ма имеет та
кой вид:

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Будем считать, что f_1, f_2 дифференцируемые
(имеют непрерывные частные производные
первого порядка).

$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ — система уравнений

Пусть (x_0, y_0) — нулевое положение равновесия
системы (решение $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$).
Ряд Тейлора в окрестности нулевого
положения равновесия и отбросив
нелинейные, кроме первого, получим
линеаризованную систему. Из
теоремы Ляпунова (о том, что тогда (x_0, y_0) устойчиво
в том случае, когда устойчиво
нулевое решение системы

№ 18.

$\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$

Найдем точки равновесия.

$\begin{cases} \ln(-x + y^2) = 0, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 1, \\ \ln(y - 1 + y^2) = 0 \end{cases}$

$y^2 + y - 1 = 1 \to y^2 + y - 2 = 0$

$y_1 = 1, \; y_2 = -2$

Нах. х: $x_1 = 1 + 1 = 2$, $x_2 = -2 + 1 = -1$

2) Подготовка к дифференцированию

$(\ln(-x + y^2))'_x = \frac{1}{y^2 - x}$;

$(\ln(-x + y^2))'_y = \frac{2y}{y^2 - x}$.

$(x - y - 1)'_x = 1$,

$(x - y - 1)'_y = -1$

3) а) первая точка рав $x = 0$, $y_1 = -1$

$A(0, -1) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1^2 - 0} & \frac{1 \cdot 2}{1^2 - 0} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A(0, -1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Нах. соб зн: $\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda + 1)^2 + 2 = 0$, $(\lambda + 1)^2 = -2$,

$\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$, $\mathrm{Re}\lambda = -1 < 0$,

$(0, -1)$ - устойчива

$\Rightarrow (3,2)$ - неустойчива

3-ий рисунок (работа)

При решении, работая графически, получили 216 (м) больше, чем третий решил больше 2-го на столько же (м), насколько 2-ой больше 1-го. За 5 дней 3-ий решил столько же ск. (м), сколько 1 за 4 дня. 1 ск. (м) в день. 1 решил

Решение

$A = N \cdot t$, $N = \frac{216}{4} = 54$

Раб.	N		t(д)	A(м)
1	x	] +	7	7x
2	x+a	]		
3	x+2a	] +	5	5x+10a
Бриг.	54	=	4	216

$\begin{cases} x+x+a+x+2a=54 \\ 7x=5x+10a \end{cases}$

$\begin{cases} x+a=18; \\ 2x=10a \end{cases}$ $a=\frac{x}{5} \Rightarrow$

$5x+x=90$, $x=15$(м) – 1 раб. за 1 день изготовит

Ответ: 15(м).

② Бригада раб. за опред. срок должна изг. 400 дет. В теч. 5 дней перевыполняла дневную норму на 20% бригада, а в послед. дни изг. ещё 15 дет. сверхплана и за 2 дня до срока изг. 405 дет. Ск. дет. по плану д.б. изг. бригада?

Раб	N	t	A
Раб. по плану	x	t	400
начало	1,2x	5	6x
конец	x+15	t-7	405-6x

Реш-е

$\begin{cases} x \cdot t=400, \\ (x+15)(t-7)=405-6x \end{cases}$

$\begin{cases} x \cdot t=400 \\ xt+15t-7x-105=405-6x \end{cases}$

$\begin{cases} 400+15t-7x-510=-6x, \\ xt=400 \end{cases}$

$x + 15t$

$t = \frac{120}{x}$

$t = \frac{120}{x}$

$-x + 15t = 120$

$-x + \frac{6000}{x} - 120 = 0.$

$x^2 + 120x + 6000 = 0$

$x = \frac{120 - 120}{2} = \frac{80}{2} = 40$ дет. по плану

за день я. б. делать

Ответ: 40 дет.

(3)

2 стрелка разной квалификации работая вместе могут выполнить работу за 6 часов. Если бы сначала 1 работал 4 ч, а затем 2 в течение 6 ч, то они выполнили бы всей работы. За сколько часов каждый стрелок работая отдельно, может выполнить всю работу?

Реш-е

Раб	N	t	A	N·t=A
I	$\frac{1}{x}$	x	1	
II	$\frac{1}{y}$	y	1	
I, II	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	6	1	$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})6=1$
первая и вторая	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	6	0,8	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,8$

$$\begin{cases}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})6=1\\ \frac{4}{x}+\frac{6}{y}=0,8\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1\\ \frac{4}{x}+\frac{6}{y}=0,8\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{6}{y}=1-\frac{6}{x}\\ \frac{4}{x}+1-\frac{6}{x}=0,8\end{cases}$$

$-\frac{2}{x}=-0,2 \qquad -0,2x=-2 \qquad x=10$ – I скр

$\frac{6}{y}=1-0,6$

$\frac{6}{y}=0,4 \qquad 0,4y=6, y=$

Ответ: 10 – I, 15 – II

в 1 табл. ...5.

Раб	N	t	A	N·t=A
1	x	4	1	
2	x+a			
3	x+2a	5	1	5(x+2a)
Вместе 1,2,5	3x+3a	4	1	(3x+3a)·4=24

④

3 раб. вып. работу за 10 дней, причем третий из них раб. так первого дня только, а остальные дни работали вместе. Второй раб. за первые 3 дня выполнил 37% всей работы, а за 5 дней 1 раб. сделал столько же, сколько 2 раб. за 4 дня

Реш-е.

Раб.	N	t	A	A=N·t
1	$\frac{1}{x}$	x	1	
		5	$\frac{5}{x}$	
2	$\frac{1}{y}$	y	1	
		4	$\frac{4}{y}$	
3	$\frac{1}{z}$	7	1	
		3		
1,23	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$	3	0,37	
1,2	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	7	0,63	

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,37 \\ \frac{7}{x}+\frac{7}{y}=0,63 \\ \frac{5}{x}=\frac{4}{y} \end{cases} \Rightarrow 5y=4x$$

$y=0,8x=\frac{4}{5}x$

$\frac{7}{x}+\frac{5\cdot y}{4x}=0,63$, $\frac{28+35}{4x}=0,63$, $\frac{63}{4x}=0,63$,

$\frac{1}{4x} = 0{,}01$, $1 = 0{,}04x$, $x = \frac{1}{0{,}04} = 25$,

$y = \frac{4}{5} \cdot 25 = 20$

$\frac{3}{25} + \frac{3}{20} + \frac{3}{z} = 0{,}37$

$\frac{12z + 15z + 300}{100z} = 0{,}37$, $27z = 37z - 300$

$-10z = -300$, $z = 30$

Ombem: $x = 25g.$, $y = 20g.$, $z = 30g.$