А.Ф. ФИЛИППОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

22.161.6
Ф 53
УДК 517.9

Филиппов А.Ф. **Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.

Излагаются основные направления теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и указываются ее применения для описания механических систем. Исследуются основные свойства таких уравнений. Исследуются особенности, возникающие на линиях или поверхностях разрыва правой части уравнения и на их пересечениях. Излагаются критерии устойчивости положений равновесия, лежащих на поверхностях разрыва и их пересечениях.

Для научных работников в области дифференциальных уравнений, теории колебаний и автоматического управления, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

Ил. 122. Библиогр. 205 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук *В.И. Благодатских*;
доктор физико-математических наук *В.А. Якубович*

Алексей Федорович Филиппов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Редактор *И.Е. Морозова*
Технический редактор *В.В. Лебедева*
Корректоры *Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 11960

Сдано в набор 10.08.84. Подписано к печати 29.10.84. Формат 70 X 100 1/16
Бумага тип № 1. Гарнитура Универс. Печать офсетная
Усл.печ.л. 18,20. Усл. кр.-отт. 18,20. Уч.-изд.л. 21,50. Тираж 5350 экз.
Тип. зак. 484 Цена 2 р. 90 к.

Издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

$$Ф\ \frac{1702050000-180}{053(02)-85}\ 33\text{-}84$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в значительной степени вызвано многочисленными приложениями. Большое число задач из механики, электротехники и теории автоматического управления, описываемых этими уравнениями, рассматривается в книге [1]. Широкое использование различных переключателей (реле) в системах автоматического управления приводит к необходимости построения достаточно развитой теории таких уравнений. Различным вопросам этой теории посвящены отдельные параграфы и главы в книгах [2]–[5], а также большое число журнальных статей. Теория систем автоматического управления, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями (системы с переменной структурой и со скользящими режимами), рассматривается в книгах [6], [7].

В предлагаемой книге излагаются основные направления теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Их рассмотрение требует с самого начала обобщения понятия решения. Перечисляются различные определения решений таких уравнений и указываются условия их применимости.

Показывается, что многие утверждения классической теории дифференциальных уравнений остаются справедливыми и для уравнений с разрывными правыми частями. Обосновывается применение к таким уравнениям известных методов исследования, конечно, с определенными ограничениями. Рассматриваются также те свойства решений, которые обусловлены разрывностью правой части уравнения. В частности, детально изучаются особенности, возникающие на линиях и поверхностях разрыва, дается классификация этих особенностей и рассматриваются их бифуркации. Приводятся достаточные условия устойчивости положений равновесия, лежащих на линиях и поверхностях разрыва, а также на их пересечениях.

Там, где это возможно, результаты различных авторов и новые результаты излагаются с единой точки зрения. В ряде случаев это позволило достичь большей общности или упростить доказательства.

В книге не рассматриваются следующие вопросы для уравнений с разрывной правой частью: частотный метод исследования устойчивости, хорошо изложенный в [5], краевые задачи, исследование уравнений специального вида и узких классов уравнений.

В гл. 1 и последующих главах рассматриваются разные типы уравнений, поэтому главы 2 – 5 можно читать без ознакомления с содержанием § 2 и 3. Мелким шрифтом излагаются обобщения и специальные вопросы, которые можно пропустить без ущерба для понимания остального текста, а также некоторые громоздкие доказательства.

В каждом параграфе теоремы, леммы и формулы нумеруются независимо. При ссылках на материал другого параграфа указывается его номер, например: "в силу леммы 4 § 1".

Литературные ссылки указывают одну из статей (или книг), не обязательно первую, в которой рассматривается изучаемый вопрос, и не всегда означают принадлежность цитируемых результатов автору указанной статьи. В § 4 и 15 даются ссылки на статьи, содержащие обзор истории исследования рассматриваемых вопросов. По тем направлениям, которые более полно, чем другие, освещены в литературе (периодические решения, устойчивость), излагаются лишь основные понятия и некоторые методы исследования, а также даются краткие литературные указания.

В списке цитированной литературы после библиографических данных указаны также номера рефератов в реферативном журнале "Математика".

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

с непрерывной правой частью называется функция $x(t)$, которая всюду на данном интервале имеет производную и удовлетворяет этому уравнению. Для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями такое определение непригодно, как показывают следующие примеры ($\dot{x}$ обозначает производную $\dfrac{dx}{dt}$).

Пример 1. $\dot{x} = \operatorname{sgn} t$. При $t < 0$ имеем $\dot{x} = -1$, решение выражается формулой $x = -t + c_1$; при $t > 0$ имеем $\dot{x} = 1$, решение: $x = t + c_2$ (рис. 1). Исходя из требования непрерывности решения при $t = 0$, получаем

$$x(0) = \lim_{t \to -0} (-t + c_1) = \lim_{t \to +0} (t + c_2), \quad x(0) = c_1 = c_2.$$

Поэтому решение выражается формулой $x(t) = |t| + c$. При $t = 0$ производной $\dot{x}(t)$ не существует.

Пример 2. $\dot{x} = 1 - 2 \operatorname{sgn} x$. При $x < 0$ имеем $\dot{x} = 3$, решение: $x(t) = 3t + c_1$; при $x > 0$ имеем $\dot{x} = -1$, решение: $x(t) = -t + c_2$ (рис. 2). При возрастании t каждое решение доходит до прямой $x = 0$. Поле направлений не позволяет решению сойти с нее ни вверх, ни вниз. Если же продолжить решение по этой прямой, то получаемая функция $x(t) = 0$ не удовлетворяет уравнению в обычном смысле, так как для нее $\dot{x}(t) = 0$, а правая часть уравнения при $x = 0$ равна $1 - 2 \operatorname{sgn} 0 = 1 \neq 0$.

Таким образом, рассмотрение дифференциальных уравнений с разрывной правой частью требует обобщения понятия решения. При этом в случаях, когда правая часть уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ непрерывна по x и разрывна только по t, обычно оказывается возможным обобщить понятие решения, пользуясь лишь математическими соображениями (в примере 1 — требованием непрерывности решения). В случаях, когда правая часть уравнения разрывна по x, часто простейшие математические соображения оказы-

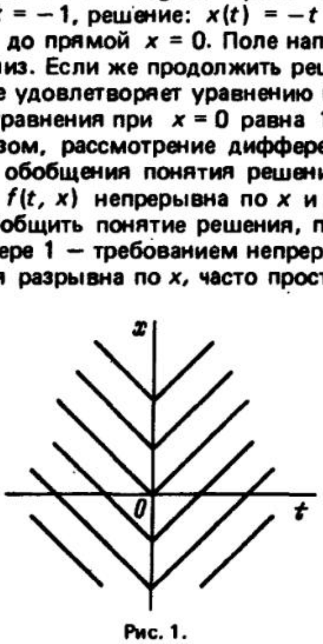


Рис. 1.

Рис. 2.

ваются недостаточными. Тогда решение определяется при помощи предельного перехода с учетом физического смысла рассматриваемой задачи.

Необходимо, чтобы обобщение понятия решения удовлетворяло следующим требованиям:

1) Для дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью определение решения должно быть равносильно обычному.

2) Для уравнения $\dot{x} = f(t)$ решениями должны быть функции $x(t) = \int f(t)dt + c$ и только они.

3) При любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$ из рассматриваемой области решение должно существовать (хотя бы при $t > t_0$) и продолжаться до границы области или неограниченно.

4) Определение решения должно быть пригодным для описания достаточно широкого класса процессов в физических системах.

Чтобы уравнения с разрывными правыми частями можно было исследовать хорошо разработанными методами, желательно выполнение также следующих требований:

5) Предел равномерно сходящейся последовательности решений должен быть решением.

6) При наиболее употребительных заменах переменных решение должно переходить в решение.

Наиболее известные определения решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью излагаются в § 4. Применимость того или иного определения к различным задачам обосновывается в п. 3 § 8.

К настоящему времени уже многие результаты теории дифференциальных уравнений распространены (иногда с необходимыми изменениями) на дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. Исследование таких уравнений проводится обычно теми же методами, что и исследование дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями.

ГЛАВА 1

УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ, НЕПРЕРЫВНОЙ ПО x И РАЗРЫВНОЙ ПО t

В гл. 1 рассматриваются дифференциальные уравнения Каратеодори и дифференциальные уравнения с обобщенными функциями. Устанавливаются теоремы существования решений, изучаются свойства решений, особенно зависимость решения от правой части уравнения. Рассматривается аппроксимация уравнений различных типов уравнениями с непрерывными правыми частями.

§ 1. Дифференциальные уравнения Каратеодори

Для дифференциальных уравнений Каратеодори излагаются теоремы о существовании, единственности, непрерывной зависимости решений при ослабленных предположениях и теоремы о свойствах множества решений.

1. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с непрерывной правой частью, как известно, равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds. \tag{1}$$

В случае, когда функция $f(t, x)$ разрывна по t и непрерывна по x, решениями уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ можно назвать функции, удовлетворяющие интегральному уравнению (1). Если при этом пользоваться понятием интеграла Лебега, то получается определение решения, которое положено в основу теории дифференциальных уравнений Каратеодори.

Всюду в § 1 $x(t)$ и $f(t, x)$ — n-мерные вектор-функции. Интеграл понимается в смысле Лебега. Предполагается, что $f(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям.

Условия Каратеодори. Пусть в области D пространства t, x

1) $f(t, x)$ при почти всех t определена и непрерывна по x;

2) функция $f(t, x)$ измерима по t при каждом x;

3) $|f(t, x)| \leqslant m(t)$, функция $m(t)$ суммируема (на каждом конечном отрезке, если t не ограничено в области D).

Уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, где x — скаляр или вектор, а функция f удовлетворяет условиям 1)–3), называется *уравнением Каратеодори.* Функция $x(t)$, определенная на отрезке или интервале I, называется *решением уравнения Каратеодори,* если она абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset I$ и почти всюду удовлетворяет этому уравнению, или, что равносильно при условиях 1)–3), если она удовлетворяет интегральному уравнению (1) при каком-нибудь $t_0 \in I$.

2. Приведем известные (см., например, [8], стр. 120; [9], стр. 54, 111, [10]) теоремы о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений Каратеодори.

Лемма 1 ([8], стр. 121). *Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а функция $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ измерима.*

Тогда сложная функция $f(t, x(t))$ суммируема.

Теорема 1. *Пусть при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$, $|x - x_0| \leqslant b$ функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.*

Тогда на отрезке $[t_0, t_0 + d]$, где $d > 0$, существует решение задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

При этом число d можно взять любым, удовлетворяющим неравенствам

$$0<d\leqslant a, \quad \varphi(t_0+d)\leqslant b, \quad \varphi(t)\equiv\int_{t_0}^{t} m(s)ds. \tag{3}$$

Доказательство. Для любого целого $k\geqslant 1$ возьмем $h=d/k$. Последовательно на отрезках

$$t_0+ih\leqslant t\leqslant t_0+(i+1)h, \qquad i=0,1,\ldots,k-1,$$

построим приближенное решение, положив $x_k(t)=x_0$ при $t\leqslant t_0$,

$$x_k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_k(s-h))ds \qquad (t_0<t\leqslant t_0+d). \tag{4}$$

Интеграл имеет смысл, и $|x_k(t)-x_0|\leqslant b$ в силу леммы 1 и оценки (3). Кроме того, для любых $\alpha,\beta\in[t_0,t_0+d]$

$$|x_k(\beta)-x_k(\alpha)|\leqslant\left|\int_{\alpha}^{\beta} m(t)dt\right| = |\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|. \tag{5}$$

Функция $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0,t_0+d]$, значит, она равномерно непрерывна. Поэтому для любого $\epsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $|\beta-\alpha|<\delta$ правая часть (5) меньше ϵ.

Следовательно, функции $x_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. По теореме Арцела выберем из них равномерно сходящуюся подпоследовательность. Ее предел обозначим $x(t)$. Так как

$$|x_k(s-h)-x(s)|\leqslant|x_k(s-h)-x_k(s)|+|x_k(s)-x(s)|,$$

а первое слагаемое правой части меньше ϵ при $h=d/k<\delta$, то по выбранной подпоследовательности $x_k(s-h)$ стремится к $x(s)$. В силу непрерывности функции $f(t,x)$ по x и оценки $|f(t,x)|\leqslant m(t)$ можно перейти к пределу под знаком интеграла в (4). Получим, что предельная функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $x(t_0)=x_0$, т.е. является решением задачи (2).

Замечание. Если условия Каратеодори выполнены при $t_0-a\leqslant t\leqslant t_0$, $|x-x_0|\leqslant b$ и $d\leqslant a$, $|\varphi(t_0-d)|<b$, то решение существует на отрезке $[t_0-d,\ t_0]$.

Теорема 2. *Пусть $(t_0,x_0)\in D$, и пусть существует такая суммируемая функция $l(t)$, что для любых точек (t,x) и (t,y) области D*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant l(t)\,|x-y|. \tag{6}$$

Тогда в области D может существовать не более одного решения задачи (2).

Здесь и далее единственность решения означает, что если существуют два решения, графики которых проходят в области D, то эти решения совпадают на общей части их интервалов существования.

Замечание [11]. Для единственности решения при $t\geqslant t_0$ достаточно, чтобы вместо (6) выполнялось неравенство

$$(f(t,x)-f(t,y))\cdot(x-y)\leqslant l(t)\,|x-y|^2 \tag{7}$$

(если f,x,y — векторы, то произведение — скалярное).

Доказательство. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — решения задачи (2), $z(t)=x(t)-y(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Так как $|z|^2=z\cdot z$, то почти всюду

$$\frac{d\,|z(t)|^2}{dt}=2z\cdot\frac{dz}{dt}=2(f(t,x)-f(t,y))\cdot(x-y).$$

Учитывая (7), получаем $d|z|^2/dt\leqslant l(t)\,|z|^2$. Тогда почти всюду

$$\frac{d}{dt}(|z|^2e^{-L(t)})\leqslant 0 \qquad \left(L(t)=\int_{t_0}^{t} l(s)ds\right).$$

Абсолютно непрерывная функция $|z|^2e^{-L(t)}$ не возрастает, и из $z(t_0)=0$ следует, что $z(t)=0$ при $t\geqslant t_0$. Итак, единственность доказана при $t\geqslant t_0$ в случае (7), а значит, и при условии (6).

При условии (6) случай $t \leqslant t_0$ сводится к случаю $t \geqslant t_0$ заменой t на $-t$.

Известно много других достаточных условий единственности.

Рассмотрим линейную систему в векторной записи

$$\dot{x} = A(t)x + b(t). \tag{8}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть все элементы матрицы $A(t)$ и вектор-функция $b(t)$ суммируемы на каждом отрезке, содержащемся в интервале (α, β).*

Тогда при $t_0 \in (\alpha, \beta)$ решение системы (8) с любым начальным условием $x(t_0) = x_0$ существует на всем интервале (α, β) и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перейдем от (8) к интегральному уравнению, аналогичному (1), и построим последовательные приближения: $x_0(t) \equiv x_0$,

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)x_k(s) + b(s)]\,ds, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Из условий теоремы следует, что функции $\gamma(t) = \|A(t)\|$ и $\varphi(t) = |b(t)|$ суммируемы на каждом отрезке $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$. Так как для любого вектора z

$$|A(s)z| \leqslant \|A(s)\| \cdot |z| = \gamma(s)|z|,$$

то на $[\alpha_1, \beta_1]$ все приближения существуют, непрерывны и

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \gamma(s)|x_k(s) - x_{k-1}(s)|\,ds\right|, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Положим $\xi = \max|x_1(t) - x_0(t)|$ на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$,

$$\psi(t) = \left|\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\right|.$$

По индукции доказывается, что на этом отрезке

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leqslant \xi\,\frac{(\psi(t))^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Правая часть есть k-й член ряда, равномерно сходящегося на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$. Следовательно, при $k \to \infty$ существует $\lim x_k(t) = x(t)$ и в (9) возможен предельный переход под знаком интеграла. Поэтому функция $x(t)$ является решением интегрального уравнения, а значит и уравнения (8), на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$.

Единственность решения следует из теоремы 2. Так как $[\alpha_1, \beta_1]$ — произвольный отрезок, содержащийся в интервале (α, β), то решение существует и единственно на этом интервале.

На линейные системы Каратеодори (т.е. удовлетворяющие условиям теоремы 3) переносятся также и другие утверждения: о существовании фундаментальной системы решений, о представлении любого решения через фундаментальную систему, о свойствах детерминанта Вронского. Они доказываются таким же путем, как для систем с непрерывными коэффициентами.

3. Решения уравнений Каратеодори обладают многими свойствами, аналогичными свойствам решений уравнений с непрерывными правыми частями (продолжаемость решений, компактность множества решений, свойства интегральных воронок, рассмотренные в [12]), и исследуются в основном теми же методами.

Л е м м а 2. *На конечном отрезке $c \leqslant t \leqslant d$ все решения уравнения Каратеодори равностепенно непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $\varphi(t)$ выражается интегралом (3), где $t_0 = c$. Для каждого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [c, d]$ и любого решения $x(t)$

$$|x(\beta) - x(\alpha)| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(t, x(t))dt\right| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} m(t)dt = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Отсюда и из равномерной непрерывности функции $\varphi(t)$ на отрезке $[c, d]$ следует равностепенная непрерывность всех решений.

З а м е ч а н и е. Утверждение леммы 2 справедливо и для решений, удовлетворяющих разным уравнениям Каратеодори, имеющим одну и ту же суммируемую мажоранту $m(t)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\dot{x} = f(t, x)$ *— уравнение Каратеодори в замкнутой ограниченной области* D.

Тогда каждое его решение, проходящее внутри D, *можно продолжить в обе стороны до выхода на границу* Γ *области* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим решение $x(t)$, проходящее через точку $p_0(t_0, x_0)$ внутри D. Пусть $\epsilon_1 > 0$ не больше половины расстояния $\rho(p_0, \Gamma)$ от этой точки до границы Γ.

Пусть $c \leqslant t \leqslant d$ в области D. Так как функция $\varphi(t)$ в (3) равномерно непрерывна на $[c, d]$, то найдется такое $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leqslant \epsilon_1$, что для любых α, β из $[c, d]$, удовлетворяющих неравенству $|\beta - \alpha| < \delta_1$, имеем $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| < \epsilon_1$. Тогда цилиндр

$$|t - t_0| \leqslant \delta_1, \qquad |x - x_0| \leqslant \epsilon_1$$

содержится в D. В силу теоремы 1 и замечания к ней решение $x(t)$ существует по меньшей мере на отрезке $|t - t_0| \leqslant \delta_1$ (или его можно продолжить на этот отрезок). Если расстояние от точки $(t_0 + \delta_1, x(t_0 + \delta_1))$ до Γ не меньше $2\epsilon_1$, то решение можно продолжить еще на δ_1 и т.д., пока оно не дойдет до такой точки $p_1(t_1, x_1)$, что $\rho(p_1, \Gamma) < 2\epsilon_1$.

Взяв $\epsilon_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots$, продолжим решение последовательно до таких точек $p_i(t_i, x_i)$, что

$$t_1 < t_2 < \ldots, \quad \rho(p_i, \Gamma) \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Ограниченная последовательность $t_1, t_2, \ldots$ сходится к некоторому t^*. Тогда с помощью леммы 2 и критерия Коши получаем, что существует $\lim x(t) = x^*$ при $t \to t^* - 0$. Очевидно, $(t^*, x^*) \in \Gamma$. Полагая $x(t^*) = x^*$, получаем решение, достигающее границы Γ в точке (t^*, x^*). Влево решение продолжается таким же образом.

Другие известные теоремы о продолжении решений (например, из [13], стр. 24 и 43, и из [11]) также справедливы не только для дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями, но и для уравнений Каратеодори.

Перейдем к вопросу о компактности множества решений.

Л е м м а 3. *Предел каждой сходящейся на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *последовательности решений уравнения Каратеодори есть решение того же уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для последовательности решений $x = x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, возможность предельного перехода в (1) обеспечивается условиями Каратеодори. Поэтому предельная функция тоже удовлетворяет равенству (1); значит, является решением уравнения $\dot{x} = f(t, x)$.

Л е м м а 4. *Для уравнения Каратеодори в ограниченной замкнутой области* D *множество* M *всех решений, графики которых на отрезке* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *содержатся в* D, *является компактом в метрике* $C[\alpha, \beta]$ *(т.е. в метрике равномерной сходимости на отрезке* $[\alpha, \beta]$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все эти решения на отрезке $[\alpha, \beta]$ равномерно ограничены, а по лемме 2 равностепенно непрерывны. По теореме Арцела из любого бесконечного множества таких решений можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся на $[\alpha, \beta]$. Ее предел по лемме 3 есть решение того же уравнения. Следовательно, множество M — компакт.

Л е м м а 5. *Пусть* $x_k(t)$ $(\alpha_k \leqslant t \leqslant \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots)$ *— решения уравнения Каратеодори, графики которых содержатся в ограниченной замкнутой области* D, *и*

$$(\alpha_k, x_k(\alpha_k)) = p_k \to p, \qquad (\beta_k, x_k(\beta_k)) = q_k \to q. \tag{10}$$

Тогда найдется подпоследовательность этих решений, сходящаяся к решению, график которого соединяет точки $p(\alpha, x_0)$ *и* $q(\beta, x^*)$ *и при* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *содержится в* D; *при любом* $\delta > 0$ *сходимость равномерна на отрезке* $[\alpha + \delta, \beta - \delta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_i \to 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Пользуясь леммой 2 и теоремой Арцела, из последовательности $x_k(t)$ выделим подпоследовательность $x_{1j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, равномерно сходящуюся при $\alpha + \delta_1 \leqslant t \leqslant \beta - \delta_1$, из нее — подпоследовательность $x_{2j}(t)$, равномерно сходящуюся при $\alpha + \delta_2 \leqslant t \leqslant \beta - \delta_2$, и т.д. Диагональная последовательность $x_{jj}(t)$ сходится на интервале (α, β), притом равномерно на каждом отрезке $[\alpha + \delta_i, \beta - \delta_i]$.

Предельная функция $x(t)$ по лемме 3 является решением при $\alpha < t < \beta$. Ее можно доопределить по непрерывности на отрезок $[\alpha, \beta]$ в силу леммы 2. Для сколь угодно малого $\epsilon > 0$ при достаточно малых δ и достаточно больших j имеем

$$|x(\alpha) - x(\alpha+\delta)| < \epsilon/4, \qquad |x(\alpha+\delta) - x_{jj}(\alpha+\delta)| < \epsilon/4.$$

По лемме 2 для такого k, что $x_{jj}(t) \equiv x_k(t)$, имеем

$$|x_{jj}(\alpha+\delta) - x_{jj}(\alpha_k)| < \epsilon/4, \qquad |x_{jj}(\alpha_k) - x_0| < \epsilon/4$$

в силу (10). Следовательно, $|x(\alpha) - x_0| < \epsilon$. Так как $\epsilon > 0$ – любое, то $x(\alpha) = x_0$, т.е. решение $x(t)$ проходит через точку p. Аналогично, оно проходит через точку q.

Следующая теорема в предположении, что функция f удовлетворяет условиям Каратеодори во всей области G, доказана в [10]. Ослабление этого требования полученс подобно [12].

Т е о р е м а 5. *Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори в каждой замкнутой ограниченной подобласти области G. Пусть A – точка (t_0, x_0) (или ограниченное замкнутое множество), $A \subset G$. Если все решения уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ (или со всевозможными начальными условиями $(t_0, x(t_0)) \in A$) существуют при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и их графики при этих t содержатся в G, то*

1) *множество точек, лежащих на этих графиках (т.е. отрезок $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ интегральной воронки множества A), ограничено и замкнуто;*

2) *множество M этих решений является компактом в метрике $C[\alpha, \beta]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем такую последовательность замкнутых ограниченных областей $D_1, D_2, \ldots,$ что A лежит внутри D_1, а D_k – внутри D_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots,$ и что каждое ограниченное замкнутое множество $K \subset G$ содержится в какой-то из областей D_k. Покажем, что все рассматриваемые графики содержатся в одной из областей D_k.

Предположим противное. Тогда для каждой из областей D_k найдутся такое решение $x_k(t)$ и такие $\beta_k \in [\alpha, \beta]$ и α_k, что

$$p_k = (\alpha_k, x_k(\alpha_k)) \in A, \qquad (\beta_k, x_k(\beta_k)) \in G \setminus D_k. \tag{11}$$

Выберем из этих решений такую подпоследовательность S_0 $(k = k_1, k_2, \ldots)$, для которой $p_k \to p \in A$. Так как $A \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, то из (11) следует, что при каждом $m \geqslant 1$ на графике каждого решения $x_k(t)$, $k \geqslant m$, найдется такая точка $q_k^m \in \partial D_m$ (∂D_m – граница области D_m), что дуга $p_k q_k^m$ этого графика содержится в D_m. Из подпоследовательности S_0 выделим подпоследовательность решений, для которых $q_k^1 \to$ $\to q^1 \in \partial D_1$, а из нее по лемме 5 – подпоследовательность S_1 решений, сходящуюся к решению, график которого соединяет точки $p \in A$ и $q^1 \in \partial D_1$.

Из S_1 тем же способом выделим новую подпоследовательность S_2, сходящуюся к решению, график которого соединяет точки $p \in A$ и $q^2 \in \partial D_2$. Продолжая этот процесс, получим решение $x(t)$, график которого проходит через точки $p \in A$, $q^1 \in D_1$, $q^2 \in$ $\in D_2, \ldots$ По условию, это решение существует на отрезке, содержащем α, β и абсциссу t_p точки p. График решения на этом отрезке – ограниченное замкнутое множество, значит, он содержится в некоторой области D_m, т.е. внутри D_{m+1}. Это противоречит тому, что он проходит через точку $q^{m+1} \in \partial D_{m+1}$.

Значит, предположение неверно, и все рассматриваемые графики содержатся в одной из областей D_k. Тогда утверждение 2) доказывается подобно лемме 4, а из него следует утверждение 1).

4. Непрерывная зависимость решений уравнений Каратеодори от начальных условий и правой части уравнения или от параметра рассматривалась в ряде работ, в частности в [10] и [14]–[27], дифференцируемая зависимость – в [28]–[31]. Ниже приводятся две теоремы о непрерывной зависимости: простейшая (для случая, когда сходится последовательность функций $f_k(t, x)$, стоящих в правых частях дифференциальных уравнений) и более общая (когда сходится последовательность интегралов по t от этих функций).

В п. 4 везде рассматриваются решения $x(t, \mu)$ уравнений, правые части которых зависят от параметра μ, меняющегося на каком-либо множестве M (метрического пространства) с предельной точкой $\mu_0 \in M$, и выясняются условия сходимости $x(t, \mu) \to$

$\to x(t, \mu_0)$ при $\mu \to \mu_0$, т.е. при $\rho(\mu, \mu_0) \to 0$. К этому случаю сводится и случай последовательности $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, если положить $x_k(t) = x(t, \mu)$, $\mu = 1/k \to 0$.

Как известно, для дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями и уравнений Каратеодори из единственности решения следует его непрерывная зависимость от начальных условий [32]. Следующая лемма обобщает это утверждение. Она применима не только к решениям дифференциальных уравнений, но и к решениям дифференциальных включений. Она уточняет, в каком смысле можно говорить о сходимости к множеству решений, когда нет единственности. Эта лемма позволяет свести условия непрерывной зависимости решения к ряду более простых условий.

Л е м м а 6. *Пусть заданы точка* (t_0, a_0), *числа* $t_1 > t_0$, $\epsilon_0 > 0$, *конечная область* D *в пространстве* t, x, *множество* M *значений параметра* μ *и семейство* S *непрерывных функций* $\xi(t)$, *каждой из которых поставлено в соответствие ее начальное значение* $a = \xi(t_0)$ *и некоторое значение параметра* $\mu \in M$. *Пусть*

1) *каждая функция* $\xi(t)$ *определена на некотором отрезке, ее график проходит в области* D, *а его концы — две точки границы области* D;

2) *для любых* a, μ $(|a - a_0| < \delta,\ \mu \in M)$ *существует хотя бы одна функция семейства, которой поставлены в соответствие эти* a *и* μ;

3) *для любой последовательности функций* $\xi_i(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, *которым соответствуют значения* $a_i \to a_0$, $\mu_i \to \mu_0$, *все функции этой последовательности равностепенно непрерывны;*

4) *предел каждой равномерно сходящейся последовательности функций семейства, для которых* $a = a_i \to a_0$, $\mu = \mu_i \to \mu_0$, *есть функция семейства, для которой* $\mu = \mu_0$;

5) *все функции семейства, для которых* $\mu = \mu_0$, $a = a_0$, *определены по меньшей мере на отрезке* $[t_0, t_1]$; *множество этих функций обозначим* X_0;

6) *для каждой из функций* $\xi_0(t)$ *множества* X_0 ϵ_0-*трубка*

$$|x - \xi_0(t)| < \epsilon_0, \quad t_0 < t < t_1, \tag{12}$$

содержится в D.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *найдутся такие* $\delta > 0$, $\eta > 0$, *что для всех* a *и* μ, *удовлетворяющих условиям*

$$|a - a_0| < \delta, \quad \rho(\mu, \mu_0) < \eta, \tag{13}$$

каждая из функций $\xi(t)$ *семейства, соответствующая этим* a, μ, *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *существует и отличается от некоторой функции* $\xi_0(t) \in X_0$ *меньше, чем на* ϵ:

$$|\xi(t) - \xi_0(t)| < \epsilon \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{14}$$

(Для разных $\xi(t)$ *функции* $\xi_0(t)$ *могут быть разными.)*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторых $a_i \to a_0$, $\mu_i \to \mu_0$ существуют функции $\xi_i(t) \in S$, определенные не на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Каждая из них согласно 1) достигает границы области D в некоторой точке $q_i(t_i, x_i)$, $t_i \in (t_0, t_1)$. Из условий 3) и 6) следует, что $t_i \geqslant \tau_0 > t_0$ при всех $i > i_1$. Из последовательности $\{q_i\}$ выбираем подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке q, а из соответствующей подпоследовательности функций $\xi_i(t)$ — новую подпоследовательность, сходящуюся к функции $\xi_0(t)$, график которой соединяет точки (t_0, a_0) и q, как в лемме 5. В силу 4) функция $\xi_0(t) \in X_0$. Тогда в силу 6) ϵ_0-трубка (12) содержится в D, а q — точка $(t_1, \xi_0(t_1))$. Это противоречит сходимости к точке q подпоследовательности точек $q_i(t_i, x_i)$ границы области D, так как $t_i < t_1$.

Значит, при некоторых $\delta > 0$, $\eta > 0$ для всех a и μ, удовлетворяющих (13), график функции $\xi(t)$ содержится в D при $t_0 < t < t_1$. Если лемма неверна, то для некоторого $\epsilon > 0$ найдется такая последовательность функций $x_k(t) \in S$, $k = 2, 3, \ldots$, что $x_k(t_0) = a_k \to a_0$, $\mu_k \to \mu_0$, графики этих функций содержатся в D при $t_0 < t < t_1$ и для каждого k и каждой функции $\xi(t) \in X_0$

$$|x_k(t_k) - \xi(t_k)| \geqslant \epsilon, \quad t_k \in [t_0, t_1], \quad k = 2, 3, \ldots; \tag{15}$$

точки t_k могут зависеть от выбора функции $\xi(t) \in X_0$.

В силу 3) и 4) из последовательности $\{x_k(t)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $x_0(t) \in X_0$. Это противоречит (15) при $\xi(t) \equiv x_0(t)$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условия 1) – 4) леммы 6, в семействе S имеется для* $a = a_0$, $\mu = \mu_0$ *только одна функция* $\xi_0(t)$ *и для этой функции* ϵ_0*-трубка* (12) *содержится в D. Тогда справедливо утверждение леммы 6 и каждая последовательность* $\xi_i(t)$ *функций из S, для которой* $a_i \to a_0$, $\mu_i \to \mu_0$, *равномерно сходится к* $\xi_0(t)$ *на отрезке* $[t_0, t_1]$.

З а м е ч а н и е. Для семейства решений уравнения Каратеодори $\dot{x} = f(t, x)$ условия 1) и 2) леммы 6 выполнены в силу теорем 1 и 4, а условия 3) и 4) – в силу лемм 2 и 3. Поэтому, если решение с начальным условием $x(t_0) = a_0$ единственно, то оно непрерывно зависит от начального условия. Для уравнения Каратеодори $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ с параметром μ условия 1) и 2) выполняются, и нужно проверять только выполнение условий 3) и 4) и единственность решения при $x(t_0) = a_0$, $\mu = \mu_0$.

Т е о р е м а 6 ([10]; [9], стр. 71). *Пусть при* $(t, x) \in D$, $\mu \in M$

1° $f(t, x, \mu)$ *измерима по* t *при постоянных* x *и* μ;

2° $|f(t, x, \mu)| \leqslant m(t)$, *функция* $m(t)$ *суммируема*;

3° *при почти всех* t *функция* $f(t, x, \mu)$ *непрерывна по* x, *а при* $\mu = \mu_0$ – *по* x, μ;

4° *решение* $x = \xi_0(t)$ *задачи*

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \qquad x(t_0) = a \tag{16}$$

для $a = a_0$, $\mu = \mu_0$ *единственно при* $t \geqslant t_0$; *это решение существует при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *и его график имеет окрестность вида* (12), *содержащуюся в D.*

Тогда для любых a *и* μ, *достаточно близких к* a_0 *и* μ_0, *решение задачи* (16) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *существует (не обязательно единственное) и равномерно сходится к* $\xi_0(t)$ *при* $a \to a_0$, $\mu \to \mu_0$.

З а м е ч а н и е. Условие 3° приводит к тому, что для почти всех t функция $f(t, x, \mu) \to f(t, x, \mu_0)$ равномерно по x (на любом компакте) при $\mu \to \mu_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу 1° – 3° уравнение (16) с мажорантой $m(t)$, не зависящей от μ, – уравнение Каратеодори, поэтому для его решений условия 1)–3) леммы 6 выполнены; условия 5) и 6) выполнены в силу 4°. Решение $x = \xi(t, a, \mu)$ задачи (16) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\xi(t; a, \mu) = a + \int_{t_0}^{t} f(s, \xi(s; a, \mu); \mu)\,ds. \tag{17}$$

Если при $a_i \to a$, $\mu_i \to \mu_0$ последовательность решений $\xi(t, a_i, \mu_i)$ сходится равномерно, то в силу 3°

$$f(s, \xi(s; a_i, \mu_i); \mu_i) \to f(s, \xi(s; a, \mu_0); \mu_0).$$

Тогда в силу 2° в интегральном уравнении для $\xi(t; a_i, \mu_i)$ возможен предельный переход под знаком интеграла. Значит, предельная функция $\xi(t; a, \mu_0)$ удовлетворяет уравнению (17) при $\mu = \mu_0$ и является решением задачи (16) при $\mu = \mu_0$, т.е. выполнено условие 4) леммы 6. Из этой леммы следует доказываемое утверждение.

Дальнейшее обобщение теоремы о непрерывной зависимости состоит в замене требования сходимости $f(t, x; \mu) \to f(t, x; \mu_0)$ (т.е. непрерывности функции f по μ при $\mu = \mu_0$) требованием сходимости интеграла (по t) от $f(t, x; \mu)$ к интегралу от $f(t, x; \mu_0)$ ([14], [17] и др.).

Т е о р е м а 7 [17]. *Пусть при* $\mu \in M$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x \in B$ *(B – конечная область в* R^n*)*

1° *функция* $f(t, x; \mu)$ *измерима по* t *при постоянных* x, μ;

2° $|f(t, x; \mu)| \leqslant m(t, \mu)$, *функция* $m(t; \mu)$ *суммируема по* t;

3° *существуют такая суммируемая функция* $l(t)$ *и монотонная функция* $\psi(r) \to 0$ *при* $r \to 0$, *что для каждого* $r > 0$ *при* $|x - y| \leqslant r$ *и при почти всех* t

$$|f(t, x; \mu) - f(t, y; \mu)| \leqslant l(t)\psi(r); \tag{18}$$

4° *для каждого* $x \in B$ *при* $\mu \to \mu_0$

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu)\,ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu_0)\,ds \tag{19}$$

равномерно по t *на отрезке* $[t_0, t_1]$;

5° *решение* $x = \xi_0(t)$ *задачи* (16) *для* $a = a_0 \in B$, $\mu = \mu_0$ *единственно при* $t \geqslant t_0$ *и содержится в области B при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Тогда для любых a и μ, достаточно близких к a_0 и μ_0, решение задачи (16) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *существует* (*не обязательно единственное*) *и равномерно сходится к* $\xi_0(t)$ *при* $a \to a_0$, $\mu \to \mu_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что для каждой последовательности $\mu_i \to \mu_0$ и каждой последовательности непрерывных функций $x_i(t) \in B$, $i = 1, 2, \ldots$, равномерно сходящейся к $x_0(t)$, имеем для всех $t \in [t_0, t_1]$

$$\int_{t_0}^{t} [f(s, x_i(s); \mu_i) - f(s, x_0(s); \mu_0)]\, ds \to 0 \qquad (i \to \infty). \tag{20}$$

Так как функция $x_p(t)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ непрерывна, то последовательность кусочно постоянных функций

$$y_{p,q}(t) = x_p(t_0 + jh_q), \qquad t_0 + (j-1)h_q \leqslant t < t_0 + jh_q, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2^q,$$

где $h_q = 2^{-q}(t_1 - t_0)$, $q = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится к $x_p(t)$. Найдется такое $q(p)$, что для функции $z_p(t) \equiv y_{p,\,q(p)}(t)$

$$|z_p(t) - x_p(t)| < 2^{-p} \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Так как $x_p(t) \to x_0(t)$ при $p \to \infty$, то $z_p(t) \to x_0(t)$. В силу 1° и 2°

$$\int_{t_0}^{t} [f(s, z_p(s); \mu_0) - f(s, x_0(s), \mu_0)]\, ds \to 0 \qquad (p \to \infty). \tag{21}$$

Из 4° следует, что подобное (19) соотношение справедливо для интегралов по любому интервалу, содержащемуся в $[t_0, t_1]$. В таком соотношении на интервале, где функция $z_p(t)$ постоянна, можно заменить x на $z_p(t)$. Суммируя по таким интервалам, получаем для $p = \mathrm{const}$

$$J_{i,p}(t) \equiv \int_{t_0}^{t} [f(s, z_p(s); \mu_i) - f(s, z_p(s); \mu_0)]\, ds \to 0 \qquad (i \to \infty).$$

Значит, для каждого $t \in [t_0, t_1]$ и каждого $p \geqslant 1$ найдется такое $i_p(t)$, что $|J_{i,p}(t)| < 2^{-p}$ при всех $i > i_p(t)$. Число $i_p(t)$ можно увеличить, поэтому будем считать, что $i_{p+1}(t) > i_p(t)$. Положим

$$\nu(i, t) = p \quad \text{при} \quad i_p(t) < i \leqslant i_{p+1}(t), \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Тогда для каждого $t = \mathrm{const}$ при $i \to \infty$ имеем

$$\nu(i, t) \to \infty, \qquad |J_{i,\,\nu(i,t)}(t)| < 2^{-\nu(i,t)} \to 0. \tag{22}$$

В силу условия 3° при почти всех $s \in (0, t)$

$$|f(s, x_i(s); \mu_i) - f(s, z_{\nu(i,t)}(s); \mu_i)| \leqslant l(s)\psi(|x_i(s) - z_{\nu(i,t)}(s)|).$$

Правая часть не превосходит суммируемой функции $l(s)\psi(d)$, где d – диаметр области B, и при почти всех s стремится к нулю при $i \to \infty$, так как $x_i(s) \to x_0(s)$, $z_{\nu(i,t)}(s) \to x_0(s)$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t} [f(s, x_i(s); \mu_i) - f(s, z_{\nu(i,t)}(s); \mu_i)]\, ds \to 0 \tag{23}$$

при $i \to \infty$. Из (21) – (23) следует (20).

Пусть теперь $x_i(t)$ – решение задачи (16) с $a = a_i \to a_0$, $\mu = \mu_i \to \mu_0$ $(i \to \infty)$ и функцией f, удовлетворяющей условиям теоремы 7. Тогда

$$x_i(t) = a_i + \int_{t_0}^{t} f(s, x_i(s); \mu_i)\, ds. \tag{24}$$

Если $x_i(t) \to x_0(t)$ равномерно на некотором отрезке $[t_0, t^*]$, то в силу (20) в равенстве (24) можно перейти к пределу, и функция $x_0(t)$ – решение задачи (16) с $a = a_0$, $\mu = \mu_0$. Следовательно, для семейства решений задачи (16) (с разными a и μ) выполнено условие 4) леммы 6.

Проверим выполнение условия 3) леммы 6. Так как функции $f(s, a_0, \mu_0)$ и $l(s)$ суммируемы, то для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых $\alpha, \beta \in [t_0, t_1]$

из $|\beta-\alpha|<\delta$ следует

$$\left|\int_\alpha^\beta f(s,a_0;\mu_0)ds\right|<\epsilon, \qquad \left|\int_\alpha^\beta l(s)ds\right|<\frac{\epsilon}{\psi(d)}, \tag{25}$$

где d – диаметр области B. Для некоторого $\rho_1(\epsilon)$ разность левой и правой частей соотношения (19) меньше ϵ при $\rho(\mu,\mu_0)<\rho_1(\epsilon)$ и всех $t\in[t_0,t_1]$. Отсюда и из (25) следует

$$\left|\int_\alpha^\beta f(s,a_0;\mu)ds\right|<3\epsilon \qquad (\rho(\mu,\mu_0)<\rho_1(\epsilon)). \tag{26}$$

Пусть $x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots)$ – последовательность решений задачи (16) с $a=a_i\to a_0$, $\mu=\mu_i\to\mu_0$. Из (24) имеем

$$x_i(\beta)-x_i(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(s,x_i(s);\mu_i)ds. \tag{27}$$

В силу (18) подынтегральные функции в (26) при $\mu=\mu_i$ и в (27) отличаются не больше, чем на $l(s)\psi(d)$, поэтому с учетом (25) интегралы отличаются не больше, чем на ϵ. Теперь из (26) и (27) при $\rho(\mu_i,\mu_0)<\rho_1(\epsilon)$ имеем

$$|x_i(\beta)-x_i(\alpha)|<4\epsilon. \tag{28}$$

Так как $\mu_i\to\mu_0$, то неравенство $\rho(\mu_i,\mu_0)<\rho_1(\epsilon)$ может не выполняться только для конечного числа значений i. Для этих i в силу непрерывности функций $x_i(t)$ существует такое δ_1, что (28) выполняется при всех $\alpha,\beta\in[t_0,t_1]$, $|\beta-\alpha|<\delta_1$. Следовательно, при $|\beta-\alpha|<\min\{\delta;\delta_1\}$ неравенство (28) выполняется для всех i. Так как ϵ произвольно, то рассматриваемые решения равностепенно непрерывны и условие 3) леммы 6 выполнено. Условия 1) и 2) этой леммы выполнены в силу 1°–3° и теорем 1 и 4. В силу следствия леммы 6 справедливо утверждение доказываемой теоремы.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 7 остается справедливым, если условие 3° заменить следующим:

3^* существуют такие функции $l(t,r,\mu)$ и $\delta_0(\epsilon)>0$, $0<\epsilon<\epsilon_0$, что для каждого $r>0$ при почти всех t и $|x-y|\leqslant r$

$$|f(t,x,\mu)-f(t,y,\mu)|\leqslant l(t,r,\mu), \quad l(t,r,\mu)\to 0 \quad (r\to 0), \tag{29}$$

и для любых $\alpha,\beta\in[t_0,t_1]$, $|\beta-\alpha|<\delta_0(\epsilon)$, при всех r, μ

$$l[\alpha,\beta]\equiv\int_\alpha^\beta l(s,r,\mu)ds<\epsilon, \tag{30}$$

$$l[t_0,t_1]\to 0 \qquad (r\to 0,\ \mu\to\mu_0). \tag{31}$$

При этом в доказательстве теоремы 7 нужны лишь два изменения. В (23) подынтегральная функция в силу (29) не больше, чем

$$l(s,\ |x_i(s)-z_{\nu(i,t)}(s)|,\ \mu_i),$$

поэтому интеграл (23) стремится к нулю при $i\to\infty$ в силу (31).

При $|\beta-\alpha|<\min\{\delta;\delta_0(\epsilon)\}$ подынтегральные функции в (26) для $\mu=\mu_i$ и в (27) отличаются не больше, чем на $l(s,d,\mu_i)$, поэтому интегралы отличаются не больше, чем на ϵ, в силу (30). Остальные рассуждения в доказательстве теоремы 7 не меняются.

Следующий пример показывает, что условия 3° в теоремах 6 и 7, а также условие (31) замечания не могут быть отброшены даже в том случае, когда при каждом μ функция $f(t,x,\mu)$ непрерывна по t,x и ограничена постоянной, не зависящей от μ.

Пусть $\mu=1/k\to 0$, $k=1,2,\ldots;\ x\in R^1$,

$$f(t,x,\mu)=f_k(t,x)=\frac{1}{[k^2(x-t)-k]^2+1}\to 0.$$

Функция $x_k(t)=t+1/k$ является решением уравнения $\dot x=f_k(t,x)$, но предел $\lim\limits_{k\to\infty}x_k(t)=t$ не удовлетворяет уравнению $\dot x=0$.

Теорема 8. *Пусть элементы $b_{ij}(t, \mu)$ матрицы $B(t, \mu)$ и вектор-функция $g(t, \mu)$ для $\mu \in M$ абсолютно непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$ и равномерно по t*

$$b_{ij}(t, \mu) \to b_{ij}(t, \mu_0), \qquad g(t, \mu) \to g(t, \mu_0) \qquad (\mu \to \mu_0). \tag{32}$$

Пусть существует такое $\delta(\epsilon) > 0$ $(0 < \epsilon < \epsilon_0)$, что для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, всех $\mu \in M$ и всех $\alpha, \beta \in [t_0, t_1]$, $|\beta - \alpha| < \delta(\epsilon)$, имеем

$$\int_\alpha^\beta |\dot{b}_{ij}(t, \mu)|\, dt < \epsilon. \tag{33}$$

Тогда на отрезке $[t_0, t_1]$ решение задачи

$$\dot{x} = \dot{B}(t, \mu)x + \dot{g}(t, \mu) \qquad x(t_0, \mu) = a \tag{34}$$

при $a \to a_0$, $\mu \to \mu_0$ равномерно сходится к решению такой же задачи с

$$a = a_0, \qquad \mu = \mu_0.$$

Доказательство. Так как уравнение (34) типа Каратеодори, то по теореме 3 его решение $x(t;\ a_0, \mu_0)$ для $a = a_0$, $\mu = \mu_0$ существует на отрезке $[t_0, t_1]$ и единственно. Тогда для задачи (34) в области

$$|x| < 1 + \max_{[t_0, t_1]} |x(t; a_0, \mu_0)|$$

выполнены условия теоремы 7 и замечания. Следовательно, доказываемое утверждение справедливо.

Следствие. *Если для последовательности линейных систем Каратеодори коэффициенты и свободные члены сходятся в метрике L_1, а последовательность начальных условий сходится, то последовательность решений сходится равномерно на данном отрезке.*

Скорость этой сходимости можно оценить с помощью полученной в [18] оценки разности решений двух линейных систем через нормы (в L_1) разностей их коэффициентов и разности свободных членов.

5. Свойства интегральных воронок, исследованные в [12] для дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями, сохраняются и для дифференциальных уравнений Каратеодори [10].

Для данного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ $(x \in R^n)$ *интегральной воронкой* точки (t_0, x_0) (или множества A) называется множество точек пространства t, x, лежащих на всех решениях, проходящих через точку (t_0, x_0) (соответственно через точки множества A). *Отрезок воронки* — ее часть, лежащая в полосе $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

В следующих теоремах предполагается, что в каждой конечной части рассматриваемой области уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и что все решения с данным начальным условием $x(t_0) = x_0$ (или все решения, проходящие через точки данного ограниченного замкнутого множества A) существуют при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а точка (t_0, x_0) (соответственно множество A) содержится в полосе $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Компактность отрезка воронки была доказана в теореме 5.

Теорема 9. *Если A — точка или связный компакт, то сечение воронки любой плоскостью $t = t_1 \in [\alpha, \beta]$ есть связный компакт; множество решений, проходящих через точки множества A, есть связный компакт в метрике $C[\alpha, \beta]$.*

Первое утверждение для воронки точки (t_0, x_0) в случае достаточно малого отрезка $[\alpha, \beta]$ доказано в [10]. Второе утверждение доказывается аналогично с использованием метрики $C[\alpha, \beta]$. На случай отрезка любой длины и любого связного компакта A утверждения обобщаются с помощью приемов, изложенных в [12] и [33].

Теорема 10. *Любую точку (t_1, x_1) границы воронки можно соединить с точкой (t_0, x_0) дугой графика решения, проходящей по границе воронки.*

Доказано в [10].

Теорема 11. *Пусть $f(t, x; \mu_0)$ и A удовлетворяют условиям, сформулированным перед теоремой 9, а функции*

$$f(t, x; \mu), \qquad \mu = \mu_k \to \mu_0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

— условиям теоремы 6 или теоремы 7, кроме условия единственности решения. Пусть

A_k, $k = 1, 2, \ldots$, — такая последовательность множеств, что для каждого $\epsilon > 0$ все A_k, начиная с некоторого, содержатся в ϵ-окрестности множества A.

Тогда подобным же свойством обладают отрезки $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ воронок множеств A_k для уравнений $\dot{x} = f(t, x; \mu_k)$ по отношению к отрезку воронки множества A для уравнения $\dot{x} = f(t, x; \mu_0)$.

Утверждение вытекает из леммы 6, так как при выполнении условий теоремы 6 или теоремы 7 (без единственности решения) для семейства решений выполнены условия леммы 6.

§ 2. Уравнения с обобщенными функциями, входящими в виде слагаемых

Здесь рассматриваются различные классы дифференциальных уравнений с аддитивно входящими обобщенными функциями, в том числе дифференциальные уравнения с толчками, линейные (и простейшие нелинейные) уравнения с обобщенными функциями в правой части, линейные системы, не разрешенные относительно производных и обладающие разрывными решениями. Излагаются методы приведения таких уравнений и систем к системам Каратеодори, что позволяет доказать существование и исследовать свойства решений.

1. В [34] (стр. 169—179) рассматриваются уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) + p(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а $p(t)$ — обобщенная или обычная, не интегрируемая по Лебегу функция. В п. 1 предполагается, что функция $p(t)$ является производной в смысле теории обобщенных функций от некоторой измеримой и ограниченной на каждом конечном интервале функции $q(t)$, т.е.

$$p(t) = \dot{q}(t), \quad |q(t)| \leqslant \gamma \quad (\alpha < t < \beta). \tag{2}$$

В частности, $p(t)$ может быть обычной функцией, интегрируемой в том или ином смысле, а $q(t)$ — интегралом от $p(t)$ (интегралы Перрона, Данжуа, Данжуа — Хинчина; более общая постановка вопроса имеется в [35]); $p(t)$ может быть дельта-функцией (в этом случае уравнение (1) относится к встречающемуся в приложениях классу уравнений с толчками), производной в смысле теории обобщенных функций от непрерывной или разрывной функции ограниченной вариации.

Во всех этих случаях уравнение (1) заменой $x = y + q(t)$ сводится к уравнению Каратеодори

$$\dot{y} = f(t, y + q(t)). \tag{3}$$

Измеримость правой части (3) по t при любом постоянном y следует из леммы 1 § 1.

Решением уравнения (1) называется любая функция вида $x(t) = y(t) + q(t)$, где $y(t)$ — решение уравнения (3). Такая функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1), если производная $\dot{x}$ понимается в смысле теории обобщенных функций (заметим, что производная от интегралов Перрона и Данжуа и аппроксимативная производная от интеграла Данжуа — Хинчина существует почти всюду и является производной в смысле теории обобщенных функций; это следует из [36], стр. 355).

Так как уравнение (3) имеет решение при любом начальном условии вида $y(t_0) = a$, то уравнение (1) имеет решение при начальном условии вида

$$x(t) - q(t)\big|_{t=t_0} = a. \tag{4}$$

Если функция q непрерывна в точке t_0, то условие (4) равносильно начальному условию

$$x(t_0) = b \quad (b = a + q(t_0)). \tag{5}$$

Если же функция q разрывна в точке t_0, то все решения уравнения (1) тоже разрывны в этой точке и условие (5) не имеет однозначно определенного смысла. Если существует $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} q(t) = q(t_0 - 0)$ или $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} q(t) = q(t_0 + 0)$, то условие (5) можно заменить на условие $x(t_0 - 0) = a + q(t_0 - 0)$ или $x(t_0 + 0) = a + q(t_0 + 0)$. В других случаях приходится ограничиваться заданием начального условия в форме (4).

Зная свойства решений уравнения (3) типа Каратеодори (§ 1), с помощью замены $x = y + q(t)$ получаем соответствующие свойства решений уравнения (1): существование решения, компактность множества решений на отрезке $[t_0, t_1]$, содержащихся в замкнутой ограниченной области, единственность решения при условиях (6) или (7) § 1. В [34] (стр. 176–179) исследовано поведение решения вблизи концов его интервала существования.

Остановимся подробнее на уравнениях с толчками. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) + p_\epsilon(t), \tag{6}$$

где $f(t, x)$ — известная функция, а о функции $p_\epsilon(t)$ известно лишь, что она равна нулю вне малого интервала $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$ и что ее интеграл по этому интервалу равен v. К таким уравнениям приводят задачи о движении тел при наличии ударов или толчков, если известно, что удар или толчок происходит в момент $t = t_1$, имеет малую продолжительность, и известен общий импульс, т.е. интеграл от толкающей силы по промежутку времени, в течение которого происходит толчок.

Чтобы исключить из рассмотрения неизвестные значения функции $p_\epsilon(t)$ в промежутке $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$, совершают предельный переход $\epsilon \to 0$, сохраняя постоянным значение v интеграла от $p_\epsilon(t)$. В пределе получается уравнение

$$\dot{x} = f(t, x) + v\,\delta(t - t_1), \tag{7}$$

где δ — дельта-функция. В теории обобщенных функций $\delta(t) = \eta'(t)$, где

$$\eta(t) = 0 \quad (t < 0), \quad \eta(t) = 1 \quad (t > 0).$$

Поэтому уравнение (7) заменой $x = y + v\,\eta(t - t_1)$ сводится к уравнению (3) с $q(t) = v\,\eta(t - t_1)$. Решения уравнения (3) абсолютно непрерывны. Поэтому решения уравнения (7) — это функции, которые при $t < t_1$ и при $t > t_1$ абсолютно непрерывны и почти всюду удовлетворяют уравнению $\dot{x} = f(t, x)$, а при $t = t_1$ имеют скачок $x(t+0) - x(t-0) = v$.

Аналогично, все решения уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i\,\delta(t - t_i) \tag{8}$$

в точках t_i имеют скачки, равные v_i $(i = 1, 2, \ldots)$, а в промежутках между этими точками абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнению $\dot{x} = f(t, x)$.

Следующая теорема дает обоснование перехода как от уравнения (6) к (7), так и в некоторых более общих случаях. Случаи, когда в (8) векторы v_i зависят от x, т.е. величины скачков зависят от x, будут рассмотрены в п. 3 § 3.

Теорема 1. *В ограниченной замкнутой области D рассмотрим уравнения*

$$\dot{x}_k = f(t, x_k) + p_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, $p_k(t) = \dot{q}_k(t)$,

$$|q_k(t)| \leqslant m_0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad q_k(t) \to q(t). \tag{10}$$

Тогда каждая функция $x(t)$, предельная для какой-либо последовательности решений $x_k(t)$ уравнений (9), является решением уравнения (1) с $p(t) = \dot{q}(t)$.

Доказательство. Перейдем от уравнения (1) к (3), а от уравнений (9) подобной же заменой $x_k = y_k + q_k(t)$ — к уравнениям

$$\dot{y}_k = f(t, y_k + q_k(t)), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Для этих уравнений условие 2) Каратеодори (п. 1 § 1) выполнено в силу леммы 1 § 1, условие 3) выполнено с одной и той же функцией $m(t)$ для всех k. При почти всех t функция $f(t, x)$ непрерывна по x. Учитывая (10) и совершая предельный переход $k \to \infty$ в интегральном уравнении, равносильном уравнению (11), получаем, что функция $y(t) = \lim y_k(t)$ удовлетворяет аналогичному интегральному уравнению, но с функцией $q(t)$ вместо $q_k(t)$. Следовательно, $y(t)$ — решение уравнения (3). Тогда $x(t) = y(t) + q(t)$ — решение уравнения (1).

Дифференциальные уравнения с толчками рассматривались во многих работах, которые не могут быть все перечислены здесь (ниже указаны лишь некоторые из этих работ). Рассматривались уравнения с толчками в заданные моменты времени, как в (8), или при выходе решения на заданные поверхности в пространстве t, x. Величины скачков решений или заданы заранее, или зависят от точки, в которой происходит скачок.

Рассматривались вопросы о существовании и единственности решений, продолжении решений, непрерывной зависимости решений [37]–[40], свойства интегральных воронок и поглощающих множеств, из которых решения не выходят [37], устойчивость [41]–[47], существование и устойчивость периодических решений [37], [48]–[52], применение метода усреднения к уравнениям с малым параметром [39], [53]–[56], использование скачков при выходе решения на границу области для удержания решения в области [57].

2. С более сложными обобщенными функциями, чем в п. 1, изучались главным образом линейные уравнения и системы и лишь некоторые нелинейные.

В приложениях часто встречается уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_m z^{(m)} + b_{m-1}z^{(m-1)} + \ldots + b_0 z, \tag{12}$$

где $m \leqslant n$, a_i, b_i — постоянные числа или достаточно гладкие функции от t, $z = z(t)$ — известная функция, $y = y(t)$ — искомая. Если $z \in C^m$, то (12) — обычное линейное уравнение, хорошо изученное. При меньшей гладкости функции z в правую часть (12) могут входить обобщенные функции. Ниже будет показано, что если z — обычная функция, то решение уравнения (12) — обычные функции и могут быть найдены без помощи теории обобщенных функций.

Для выделения единственного решения можно задавать обычные начальные условия

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

только при таком t_0, при котором функции $z, z', \ldots, z^{(m)}$ непрерывны.

Часто рассматривается следующая задача. Найти решение $y(t)$ при $t \geqslant 0$, если известно, что $y(t) \equiv z(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (т.е. надо найти реакцию системы на внешнее воздействие, которое начинает действовать только в момент $t = 0$).

Для решения этой задачи можно применять различные методы. Если все a_i и b_i постоянны, то, например, можно проинтегрировать функцию z столько раз, чтобы производная $u^{(m)}$ от полученной функции u была непрерывной или хотя бы интегрируемой по Лебегу на рассматриваемом отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$, т.е.

$$\int_\alpha^t z(s)\,ds = z_1(t), \quad \int_\alpha^t z_{i-1}(s)\,ds = z_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Нижний предел интегрирования $\alpha < 0$ произволен, так как $z \equiv 0$ при $t < 0$; число k таково, что функция $u = z_k(t) \in C^m$. Найдем решение $x(t)$ уравнения

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_0 u, \tag{13}$$

равное нулю при $t < 0$. Продифференцировав k раз обе части равенства (13), видим, что функция $y = x^{(k)}$ есть решение уравнения (12), равное нулю при $t < 0$.

Другой способ [58] решения уравнения (12) состоит в сведении этого уравнения к системе уравнений, не содержащей обобщенных функций. Пусть все a_i и b_i постоянны; если $m < n$, то $b_i = 0$ при $i > m$, функция $z(t)$ непрерывна или интегрируема по Лебегу на каждом конечном интервале. Введем новые неизвестные функции $x_1, \ldots, x_n$ по формулам

$$x_n = y - b_n z, \quad x_i = x_{i+1}' + a_i y - b_i z, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{14}$$

Последовательно подставляя x_n в формулу для x_{n-1}, затем x_{n-1} — в формулу для x_{n-2} и т.д. и пользуясь уравнением (12), получаем первое уравнение следующей системы (остальные уравнения содержатся в (14)):

$$\begin{aligned} x_1' &= b_0 z - a_0 y, \\ x_2' &= b_1 z - a_1 y + x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= b_{n-1} z - a_{n-1} y + x_{n-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя $y = x_n + b_n z$ в систему (15), получаем систему нормального вида. Если функция z непрерывна, то эта система — обычная линейная с постоянными коэффициентами, а если z интегрируема по Лебегу, то — линейная система Каратеодори. Найдя решение этой системы, получим решение уравнения (12) по формуле $y = x_n + b_n z$.

Докажем это. Дифференцируя n раз равенство $y = x_n + b_n z$ и заменяя после каждого дифференцирования $x_n', x_{n-1}', \ldots, x_1'$ правыми частями уравнений (15), получаем

$$\begin{aligned} y' &= b_n z' + b_{n-1} z - a_{n-1} y + x_{n-1}, \\ y'' &= b_n z'' + b_{n-1} z' + b_{n-2} z - a_{n-1} y' - a_{n-2} y + x_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_0 z - a_{n-1} y^{(n-1)} - \ldots - a_0 y. \end{aligned} \tag{16}$$

Следовательно, y удовлетворяет уравнению (12).

Если функция z ограничена на интервале $\alpha < t < \beta$ и функции $z, z', \ldots$ при $t = \tau \in (\alpha, \beta)$ имеют скачки

$$z(\tau+0) - z(\tau-0) = [z], \quad z'(\tau+0) - z'(\tau-0) = [z'], \ldots,$$

то скачки $[y]$, $[y']$, ... функций $y, y', \ldots$ при $t = \tau$ можно выразить [59] через $[z]$, $[z']$, ... и коэффициенты a_i, b_i. Для этого заметим, что в системе (15) функции $x_1, \ldots, x_n$ непрерывны. Поэтому из соотношений $y = x_n + b_n z$ и (16) имеем

$$\begin{aligned} [y] &= b_n [z], \\ [y'] &= b_n [z'] + b_{n-1} [z] - a_{n-1} [y], \\ [y''] &= b_n [z''] + b_{n-1} [z'] + b_{n-2} [z] - a_{n-1} [y'] - a_{n-2} [y], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, скачки $[y^{(k)}]$ выражаются через скачки $[z]$, $[z']$, ..., $[z^{(k)}]$ формулой

$$[y^{(k)}] = c_0 [z^{(k)}] + c_1 [z^{(k-1)}] + \ldots + c_k [z], \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ определяются последовательно:

$$c_0 = b_n, \quad c_1 = b_{n-1} - c_0 a_{n-1}, \quad c_2 = b_{n-2} - c_0 a_{n-2} - c_1 a_{n-1}, \ldots,$$
$$c_i = b_{n-i} - c_0 a_{n-i} - c_1 a_{n-i+1} - \ldots - c_{i-1} a_{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Если функция $z = 0$ при $t < 0$, $z \in C^m$ при $t > 0$, m то же, что в (12), то $y(t)$ при $t > 0$ можно найти как решение уравнения (12) с начальными условиями

$$y(+0) = [y], \quad y'(+0) = [y'], \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(+0) = [y^{(n-1)}],$$

где $[y]$, $[y']$, ... определяются по формулам (17) или (18), в которых $[z] = z(+0)$, $[z'] = z'(+0)$, ...

Пусть теперь в (12) коэффициенты a_i, b_i зависят от t, $z(t) \in L_1(\mathrm{loc})$, т.е. функция $z(t)$ интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке, содержащемся в области ее определения. Тогда $z', z'', \ldots$ — обобщенные функции. Чтобы произведения $b_i(t) z^{(i)}$ и $a_i(t) y^{(i)}$ имели смысл, потребуем выполнения условий

$$b_i \in C^i, \quad a_i \in C^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Тогда произведение $b(t) z^{(k)}(t)$ определяется формулой [60]

$$b z^{(k)} \equiv z^{(k)} b \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i (b^{(k-i)} z)^{(i)}, \tag{20}$$

где C_k^i — биномиальные коэффициенты, а производные понимаются в смысле теории обобщенных функций.

Докажем формулу (20) сначала для случая $b \in C^\infty$. Пользуясь определениями произведения обобщенной функции на функцию из C^∞ и производной обобщенной функции ([61], гл. 1), имеем для любой основной функции $\varphi \in K$

$$(b z^{(k)}, \varphi) = (z^{(k)}, b\varphi) = (z, (-1)^k (b\varphi)^{(k)}).$$

Выражая $(b\varphi)^{(k)}$ с помощью формулы Лейбница, получаем

$$(bz^{(k)},\varphi) = (z, (-1)^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i b^{(k-i)}\varphi^{(i)}) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (z, b^{(k-i)}\varphi^{(i)}).$$

Снова пользуясь определениями произведения и производной для обобщенных функций, получаем

$$(bz^{(k)},\varphi) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (b^{(k-i)}z, \varphi^{(i)}) = \sum_{i=0}^{k} ((-1)^{k-i} C_k^i (b^{(k-i)}z)^{(i)}, \varphi). \tag{21}$$

Отсюда следует (20) для функций $b \in C^\infty$.

Пусть теперь $b \in C^k$. Аппроксимируя функцию b последовательностью функций $b_j \to b$ (сходимость в C^k), получаем, что выражения, получаемые из правой части (21) заменой b на b_j, сходятся к правой части (21) при любой функции $\varphi \in K$. Для $b \in C^k$ правая часть (21) есть линейный непрерывный функционал на функциях $\varphi \in K$, т.е. обобщенная функция. Следовательно, произведение $bz^{(k)}$ можно определить как обобщенную функцию, удовлетворяющую равенству (21) для любой функции $\varphi \in K$. Это равносильно (20).

Чтобы определить решение уравнения (12) при условиях (19), можно или свести его к линейной системе типа Каратеодори, или воспользоваться представлением решения в интегральной форме [62] (для случая $y(t) = z(t) = 0$ при $t < 0$)

$$y(t) = b_n(t)z(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{n} c_l(s)v_l(t,s)z(s)\,ds, \quad t \geqslant 0,$$

где $v_l(t,s)$ — решения линейного однородного уравнения с определенными начальными условиями, а $c_l(s)$ выражаются через коэффициенты a_i, b_i и их производные (см. [62]).

Для приведения уравнения (12) при условиях (19) к линейной системе Каратеодори преобразуем каждое произведение $b_k z^{(k)}$ и $a_k y^{(k)}$ по формуле (20). Объединяя члены с одним и тем же значением i, приводим уравнение (12) к виду

$$u_n^{(n)} + u_{n-1}^{(n-1)} + \ldots + u_1' + u_0 = 0, \tag{22}$$

$$u_n = y - b_n z, \quad u_{n-1} = a_{n-1}y - (b_{n-1} - nb_n')z, \quad \ldots,$$

$$u_k = (a_k - C_{k+1}^k a_{k+1}' + C_{k+2}^k a_{k+2}'' - \ldots + (-1)^{n-1-k} C_{n-1}^k a_{n-1}^{(n-1-k)})y -$$

$$- (b_k - C_{k+1}^k b_{k+1}' + C_{k+2}^k b_{k+2}'' - \ldots + (-1)^{n-k} C_n^k b_n^{(n-k)})z, \quad \ldots$$

После введения новых неизвестных

$$x_n = u_n, \quad x_{n-1} = x_n' + u_{n-1}, \ldots, \quad x_1 = x_2' + u_1$$

уравнение (22) принимает вид $x_1' + u_0 = 0$. Таким образом, уравнение (12) сведено к системе

$$x_1' = -u_0, \quad x_{i+1}' = x_i - u_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{23}$$

где $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ выражаются написанными выше формулами через y и z, а $y \equiv u_n + b_n z$ следует заменить на $x_n + b_n z$. При указанных выше предположениях о функциях z, a_i, b_i полученная система — линейная система Каратеодори.

Замечание. Если к правой части уравнения (12) прибавить обычную (не обобщенную) функцию $f(t, y, z)$, то первое уравнение системы (23) будет иметь вид $x_1' = -u_0 + f$, а остальные уравнения не изменятся.

Линейное уравнение с коэффициентами $a_i \in C^{m-n+i}$ и с правой частью, которая является производной любого порядка $m > n$ от интегрируемой функции,

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y = g^{(m)}(t) \tag{24}$$

можно свести к подобным же уравнениям с меньшими значениями m. Замена $y = z + g^{(m-n)}$ дает

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)z = -a_{n-1}g^{(m-1)}(t) - \ldots - a_0(t)g^{(m-n)}(t).$$

Каждый член правой части можно преобразовать по формуле (20). После этого правая часть будет иметь вид $h_1^{(m-1)}(t) + \ldots + h_m(t)$, где $h_i(t)$ — интегрируемые функции. В силу линейности уравнения его решение есть сумма решений уравнений вида, подобного (24), но с меньшими значениями m. С помощью конечного числа таких преобразований уравнение (24) сводится к аналогичным уравнениям, но с $m \leqslant n$, т.е. к уже рассмотренным уравнениям вида (12) с переменными коэффициентами.

3. В [34], [66] и [63] рассматриваются линейные уравнения

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{25}$$

с обобщенными функциями $f(t)$; $x \in R^n$, $A(t)$ — матрица. Если $A(t) \in C^\infty$, то $f(t)$ может быть любой обобщенной функцией, равной 0 при $t < 0$ (см. [63]).

Пусть теперь $f(t) = g^{(m+1)}(t)$ — $(m+1)$-я производная от функции $g(t)$. Рассмотрим два случая:

а) функция $g(t)$ измерима и локально ограничена, $A(t) \in W_1^m$ (loc), т.е. $A^{(m-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна, а $A^{(m)}(t) \in L_1$ (loc), $m \geqslant 0$;

б) функция $g(t)$ локально ограниченной вариации, а $A(t) \in C^{m-1}$.

После замены $x = y + g^{(m)}(t)$ из (25) получаем

$$y' = A(t)y + A(t)g^{(m)}(t). \tag{26}$$

Рассмотрим случай а). Если $m = 0$, $A(t) \in L_1$ (loc), то (26) — линейное уравнение Каратеодори. Если $m \geqslant 1$, то в силу (20) имеем

$$Ag^{(m)} \equiv (Ag)^{(m)} - C_m^1 (A'g)^{(m-1)} + \ldots + (-1)^m C_m^m A^{(m)} g. \tag{27}$$

Поэтому решение уравнения (26) представимо в виде $y = y_0 + y_1 + \ldots + y_m$, где y_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ — решение уравнения

$$y_k' = A(t)y_k + (h_k(t))^{(m-k)}, \quad h_k(t) = (-1)^k C_m^k A^{(k)}(t) g(t). \tag{28}$$

Для $k = m$ уравнение (28) — уравнение Каратеодори. Для $k = 0, 1, \ldots, m-1$ функция $h_k(t)$ измерима и локально ограничена. Поэтому уравнение (28) того же типа, что (25), но число $m+1$ заменено меньшим числом $m-k$. В нем опять можно сделать замену $y = z + (h_k(t))^{(m-k-1)}$ и т.д. После конечного числа замен уравнение (25) сводится к уравнениям Каратеодори.

Рассмотрим случай б). Так как $A \in C^{m-1}$, $m \geqslant 1$, то произведение $A^{(m)}g$ в (27) есть обобщенная функция, равная

$$A^{(m)}(t)g(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t (dA^{(m-1)}(s))g(s). \tag{29}$$

Интеграл понимается в смысле Стилтьеса.

Формула (27) остается справедливой. Для ее доказательства в этом случае рассмотрим такую последовательность $A_i(t) \to A(t)$, что производные $A_i^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, на каждом конечном отрезке абсолютно непрерывны и сходятся к $A^{(k)}(t)$ равномерно при $i \to \infty$. Возможность предельного перехода под знаком интеграла Стилтьеса в (29) следует из [64] (стр. 250 и 254). В формуле (27) с A_i вместо A и последним членом, преобразованным согласно (29), можно перейти к пределу в смысле теории обобщенных функций. Получим, что формула (27) справедлива и тогда, когда $A \in C^{m-1}$, а функция g локально ограниченной вариации.

В силу (29) уравнение (28) для $k = m$ имеет вид

$$y_m' = A(t)y_m + (-1)^m p'(t),$$

где $p(t)$ — непрерывная функция, равная интегралу в (29). Заменой $y_m = z + (-1)^m p(t)$ это уравнение сводится к уравнению Каратеодори. Для $k < m$ уравнение (28) сводится к уравнению Каратеодори тем же методом, что в случае а).

Итак, в обоих случаях уравнение (25) сводится к уравнениям Каратеодори. В силу теоремы 3 § 1 его общее решение имеет вид

$$x = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t) + x_1(t),$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $u' = A(t)u$, а $x_1(t)$ — частное решение уравнения (25); функция $x_1(t)$ может быть обобщенной.

Рассмотрим систему

$$x' = A(t)x + B(t)y + C(t)y', \tag{30}$$

где $y(t)$ — известная вектор-функция, может быть, обобщенная, $x(t)$ — искомая, а коэффициенты класса C^∞. Такую систему можно привести к системе Каратеодори тем же способом, что и систему (25). В частности, замена $x = z + C(t)y$ приводит систему (30) к виду

$$z' = Az + (AC + B - C')y.$$

В [65] известная формула Коши, выражающая решение линейного неоднородного уравнения через его правую часть и реакцию однородного уравнения на импульсное воздействие, обобщается на линейные уравнения общего вида с обобщенными функциями. Дается общее интегродифференциальное представление решений таких уравнений.

В [66], [63] и [34] (стр. 180–187), для решений уравнения (25) исследуется устойчивость в специальной топологии оператора вход-выход, т.е. оператора, преобразующего данную функцию $f(t)$ в решение $x(t)$.

В [63] и [66]–[68] рассматриваются также некоторые нелинейные уравнения, например, получаемое из (25) добавлением в правую часть функции $\varphi(t, x)$ и получаемое из (12) при $z = \varphi(t, y) + f(t)$. В частности, там получены достаточные условия существования и устойчивости периодических решений.

4. Решения линейной системы с постоянными коэффициентами, не разрешимой относительно старших производных каждой из неизвестных функций, могут оказаться разрывными или обобщенными функциями даже тогда, когда правые части — обычные непрерывные функции.

В [69] (гл. 12, § 7) излагается общий метод решения таких систем с помощью приведения пучка матриц к каноническому виду. Другие методы решения излагаются в [70], [71] (элементарные методы и применение преобразования Лапласа) и в [72]–[75] (использование обобщений понятия обратной матрицы).

Ниже излагается элементарный метод решения, применимый в общем случае и являющийся развитием метода [70].

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными функциями и с постоянными коэффициентами, записанную в векторном виде

$$A\dot{x} + Bx = f(t). \tag{31}$$

Здесь x и f — n-мерные векторы, A и B — матрицы $m \times n$.

Систему с производными любого порядка

$$A_k y^{(k)} + A_{k-1} y^{(k-1)} + \ldots + A_0 y = f(t) \qquad (y \in R^n)$$

можно или свести к системе вида (31) введением новых неизвестных функций $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ или исследовать непосредственно, подобно системе (31) (см. [70]).

I. Если $m = n$ и $\det A \neq 0$, то система (31) разрешима относительно производных всех искомых функций:

$$\dot{x} = -A^{-1}Bx + A^{-1}f(t).$$

Общее решение зависит от n произвольных постоянных. При любых начальных условиях вида $x(t_0) = x_0$ система имеет единственное решение $x(t)$. Если $f(t) \in C^m$, то $x(t) \in C^{m+1}$.

II. Пусть $m \neq n$ или $m = n$, $\det A = 0$. Обозначим ранг матрицы A через ρ.

Если $\rho = 0$, то матрица A состоит только из нулей и система (31) имеет вид $Bx = f(t)$. Условия разрешимости такой системы известны из линейной алгебры (теорема Кронекера – Капелли).

Пусть $\rho \geqslant 1$. Тогда матрица A содержит только ρ линейно независимых строк. Если $\rho < m$, то переставим соответствующие ρ уравнений системы (31) на первые ρ мест. Вычтем из остальных $m - \rho$ уравнений такие линейные комбинации первых ρ уравнений, чтобы сделать нулями коэффициенты при производных в последних $m - \rho$ уравнениях. Получим систему вида

$$A_1\dot{x} + B_1 x = f_1(t), \quad C_1 x = g_1(t). \tag{32}$$

Матрицы A_1 и B_1 содержат по ρ строк каждая, $\operatorname{rang} A_1 = \rho$, матрица C_1 — $m - \rho$ строк. Строки матрицы A_1 линейно независимы, но некоторые из них, например последние, могут быть линейными комбинациями остальных строк матрицы A_1 и некоторых строк матрицы C_1. Вычтем из уравнений системы, соответствующих последним строкам матрицы A_1, эти линейные комбинации уравнений, соответствующих остальным строкам матрицы A_1, и уравнений, соответствующих названным строкам матрицы C_1, предварительно продифференцированным по t. Получим систему

$$A_2\dot{x} + B_2 x = f_2(t), \quad C_2 x = g_2(t). \tag{33}$$

Матрица A_2 содержит ρ_2 строк, $\operatorname{rang} A_2 = \rho_2 < \rho$. Если некоторые строки матрицы A_2 являются линейными комбинациями остальных строк этой матрицы и некоторых строк матрицы C_2, то совершаем с системой (33) такие же преобразования, как с системой (32). Продолжаем эти действия до тех пор, пока не получим систему

$$A_0\dot{x} + B_0 x = f_0(t) \quad (s \text{ уравнений}, \operatorname{rang} A_0 = s),$$
$$C^* x = g^*(t) \quad (m - s \text{ уравнений}),$$

в которой строки матрицы A_0 не связаны линейными зависимостями со строками матрицы C^*.

Если $\operatorname{rang} C^* = q < m - s$, то некоторые строки матрицы C^* являются линейными комбинациями остальных q строк. Вычитая из уравнений системы, соответствующих этим зависимым строкам, линейные комбинации других q уравнений, получаем уравнения с нулевыми коэффициентами в левой части. Переставляя уравнения, приводим систему к виду

$$\begin{aligned} &A_0\dot{x} + B_0 x = f_0(t) \quad (s \text{ уравнений}, \operatorname{rang} A_0 = s),\\ &C_0 x = g_0(t) \quad (q \text{ уравнений}, \operatorname{rang} C_0 = q),\\ &O = h(t) \quad (m - r \text{ уравнений}, r = s + q). \end{aligned} \tag{34}$$

Строки матриц A_0 и C_0 все вместе линейно независимы. Первые s уравнений в (34) совпадают с некоторыми s уравнениями в (31). Вектор-функции $g_0(t)$ и $h(t)$ линейно выражаются через компоненты вектор-функции $f(t)$ и их производные до порядка, не большего $\rho - s$.

Так как каждое из проделанных преобразований обратимо, то системы (31) и (34) равносильны. Следовательно, для существования решения системы (31) необходимо, чтобы в (34) $h(t) \equiv 0$. Таким образом, последние $m - r$ уравнений в (34) являются необходимыми условиями совместности системы (31).

Если же с самого начала $\rho = m$, то система (31) уже имеет вид (34), где $s = m$, $q = 0$, т.е. вторая и третья группы уравнений в (34) отсутствуют.

Если $q > 0$, т.е. вторая группа уравнений в (34) присутствует, то для дальнейшего упрощения системы выделим из матрицы C_0 линейно независимые q столбцов. Пусть, например, эти столбцы с $(s + 1)$-го до r-го (в противном случае изменим нумерацию неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, чтобы эти столбцы заняли указанные места). Пусть D — квадратная матрица, составленная из этих столбцов матрицы C_0. Тогда $\det D \neq 0$. Умножая вторую строку в (34) слева на матрицу D^{-1}, получаем

$$L_0 x = l(t). \tag{35}$$

Столбцы матрицы L_0 с $(s + 1)$-го до r-го образуют единичную матрицу, т.е. система (35) разрешена относительно неизвестных $x_{s+1}, \ldots, x_r$. Подставляя выражения этих неизвестных через остальные и через $l(t)$ в первую строку (34) (т.е. умножая на некоторые числа уравнения, входящие в систему в (35), и уравнения, получаемые из них дифференцированием по t, и вычитая их из уравнений, содержащихся в первой строке (34)), мы исключаем из первой строки (34) неизвестные $x_{s+1}, \ldots x_r$. Получаем

$$A_0^*\dot{x} + B_0^* x = f_0^*(t), \tag{36}$$

где столбцы с $(s + 1)$-го до r-го матриц A_0^* и B_0^* состоят только из нулей. Строки матрицы A_0^* остаются линейно независимыми. Поэтому матрица A_0^* содержит s линейно независимых столбцов, например, с 1-го до s-го (в противном случае так изменим нумерацию неизвестных, чтобы эти столбцы попали на первые места). Пусть D_0 — матрица из этих столбцов. Тогда $\det D_0 \neq 0$. Умножая слева (36) на D_0^{-1}, получаем

$$H\dot{x} + Kx = k(t),$$

где первые s столбцов матрицы H образуют единичную матрицу. Вводя обозначения

$$(x_1, \ldots, x_s)^{\mathsf{T}} = u, \quad (x_{s+1}, \ldots, x_r)^{\mathsf{T}} = v, \quad (x_{r+1}, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}} = w$$

($^{\mathsf{T}}$ — знак транспонирования), записываем всю систему в виде

$$\begin{aligned} &\dot{u} + H_3\dot{w} + K_1 u + K_3 w = k(t) \quad (s \text{ уравнений}),\\ &L_1 u + v + L_3 w = l(t) \quad (q = r - s \text{ уравнений}),\\ &0 = h(t) \quad (m - r \text{ уравнений}). \end{aligned} \tag{37}$$

Некоторые из групп уравнений отсутствуют, если хотя бы одно из чисел s, q, $m - r$ равно нулю. Система (37) равносильна исходной системе (31), так как все преобразования обратимы.

Система разрешима только в двух случаях:

а) $r = m$; б) $r < m$, $h(t) \equiv 0$. (38)

Если выполнено одно из этих условий, то вектор-функцию w можно выбирать произвольно. Затем из первой группы уравнений определяется u через w и s произвольных постоянных, а из второй группы уравнений вектор-функция v однозначно выражается через уже известные u и w.

Итак, для того, чтобы система имела решение, необходимо и достаточно выполнение одного из условий (38). Это дает $m - r$ (скалярных) условий совместности системы. Если эти условия выполнены, то все множество решений системы зависит от $n-r$ произвольных функций (компонент вектора $w(t)$) и s произвольных постоянных.

Числа r и s можно определить непосредственно по коэффициентам системы (31), не производя изложенных выше преобразований. Число r равно рангу матрицы $pA + B$, у которой элементы и миноры являются многочленами от p. При этом $r = \operatorname{rang}(pA + B)$ есть наибольший порядок миноров, не тождественно равных нулю, а s — наибольшая из степеней многочленов, которым равны миноры порядка r.

Для системы (37) это очевидно, а при переходе от системы (31) к (37) числа r и s не меняются. Всегда $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant \rho \leqslant \min(m;\ n)$; если $\rho = m$, то $s = r = m$. Случай $s = 0$ возможен даже при $r = m = n$, $\rho = n-1$. Например, для системы

$$\dot{x} + \dot{y} - x = f(t), \quad \dot{x} + \dot{y} + y = 0 \tag{39}$$

имеем $m = n = r = 2$, $\rho = 1$, $s = 0$. Решение выражается формулами

$$x = -\dot{f}(t) - f(t), \quad y = \dot{f}(t).$$

Таким образом, система (39) имеет только одно решение, не зависящее от произвольных постоянных. В отличие от случая I, решение менее гладко. Если в системе (39) $f \in C^m$, то $x, y \in C^{m-1}$. Если же функция f имеет скачок, например,

$$f(t) = 0 \quad (t < 0), \qquad f(t) = 1 \quad (t > 0),$$

то x и y — обобщенные функции:

$$x = -\delta(t) - f(t), \quad y = \delta(t).$$

Даже если функция $f(t)$ непрерывна, но не абсолютно непрерывна (пример такой функции см. в [64], стр. 232), то x и y являются обобщенными функциями.

III. Рассмотрим более подробно случай $s < r = m = n$. Тогда система совместна и общее решение зависит только от s произвольных постоянных, $s < n$. Значит, решения системы заполняют не все пространство, а только некоторое многообразие меньшей размерности. Поэтому решение существует не при любых начальных условиях вида $x(t_0) = x_0$. Из (34) следует, что при непрерывных $f_0(t)$ и $g_0(t)$ для существования непрерывного решения необходимо и достаточно, чтобы начальные условия были таковы, что

$$C_0 x(t_0) = g_0(t_0). \tag{40}$$

Векторное равенство (40) содержит $q = r - s$ условий согласования.

Для некоторых систем, описывающих реальные физические задачи, имеет смысл рассматривать разрывные решения. Это имеет место, например, тогда, когда при составлении системы дифференциальных уравнений не учитываются малые "паразитные" параметры, учет которых привел бы к появлению в системе новых членов с малыми параметрами при производных (см. [1], гл. 10). При задании начальных условий, не удовлетворяющих соотношению (40), решение совершает быстрый скачок в такую точку, где соотношение выполняется.

Найдем координаты этой точки в предположении, что при таком скачке решение остается в ограниченной области пространства x (предположение оправдывается в тех физических задачах, где ограниченность решения заранее ясна, например, из энергетических соображений) и что функция $f_0(t)$ ограничена, а функция $g_0(t)$ в (34) непрерывна при $t = t_0$. Теперь третья строка в (34) отсутствует, так как $r = m = n$. Решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$ за очень малый промежуток времени τ переходит в точку x_1, удовлетворяющую условию согласования (40), т.е. условию $C_0 x_1 = g_0(t_0 + \tau)$. Из (34) имеем

$$A_0(x_1 - x_0) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} (f_0(t) - B_0 x(t))\,dt.$$

Так как функции $f_0(t)$ и $x(t)$ ограничены, то при $\tau \to 0$ получаем

$$A_0 x_1 = A_0 x_0, \quad C_0 x_1 = g(t_0). \tag{41}$$

Строки матриц A_0 и C_0 все вместе линейно независимы, поэтому из системы (41) однозначно определяются координаты точки x_1.

Если система приведена к виду (37), то в рассматриваемом случае $r = m = n$ функция w отсутствует и равенства (41) имеют вид

$$u_1 = u_0, \quad v_1 = l(t_0) - L_1 u_0; \qquad x_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

В [70], [71] указывается, что к этому же результату можно прийти, решая систему (31) при $r = m = n$ с помощью преобразования Лапласа.

§ 3. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах

Здесь рассматриваются линейные уравнения, содержащие обобщенные функции в коэффициентах, и некоторые нелинейные уравнения. Указываются классы таких уравнений, сводящихся заменами переменных к системам уравнений Каратеодори. Рассматриваются различные предельные переходы от дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями к уравнениям с обобщенными функциями.

1. В [60] рассматривается классификация обобщенных функций, являющаяся продолжением классификации суммируемых функций (классы L_p и W_p^k). Для $0 < \gamma \leqslant 1$ класс $M(\gamma)$ совпадает с $L_p(\mathrm{loc})$ при $p = 1/\gamma$, т.е. состоит из таких функций $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, что $f(t)$ и $|f(t)|^p$ суммируемы на каждом конечном интервале. Для любого целого $k \geqslant 1$ и $0 < \gamma \leqslant 1$ пусть $M(-k+\gamma)$ — класс функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном интервале вместе с производными до $(k-1)$-го порядка и имеющих k-ю производную, принадлежащую $M(\gamma)$, т.е. $M(-k+\gamma) = W_p^k(\mathrm{loc})$, $p = 1/\gamma$. Для целого $k \geqslant 1$ класс $M(k+\gamma)$ — класс обобщенных функций, являющихся производными порядка k от функций класса $M(\gamma)$. Считается, что $f \in M(-\infty)$ тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$.

Для функций, определенных не при всех $t \in (-\infty, +\infty)$, а только на заданном конечном интервале (c, d), можно также рассматривать классы $M(a)$. Такая функция принадлежит классу $M(a)$ на интервале (c, d), если она является сужением на этот интервал некоторой функции класса $M(a)$, определенной при $-\infty < t < \infty$.

Очевидны следующие свойства классов $M(a)$ (на всей числовой оси или на конечном интервале):

1° Если $a < b$, то $M(a) \subset M(b)$.

2° Если $f \in M(a)$, то $f^{(k)} \in M(a+k)$, и наоборот.

3° Если $f \in M(a)$, $c = \mathrm{const}$, то $cf \in M(a)$.

4° Если $f \in M(a)$, $g \in M(b)$, то $f + g \in M(c)$, $c = \max\{a;\ b\}$.

5° Если $f \in M(a)$, $g \in M(b)$, $a \leqslant 1$, $b \leqslant 0$, то $fg \in M(c)$, $c = \max\{a;\ b\}$.

6° Если $f \in M(a)$, $g \in M(b)$, $a > 0$, $b > 0$, $a + b \leqslant 1$, то $fg \in M(a+b)$.

(В самом деле, на любом конечном интервале функция $h = |f|^{1/a} + |g|^{1/b} \in L_1$; так как $|f| \leqslant h^a$, $|g| \leqslant h^b$, то $|fg| \leqslant h^{a+b}$, т.е. $fg \in L_p$, $p = 1/(a+b)$.)

Произведение обобщенной функции $f \in M(a)$, $a > 1$, на обычную функцию $g \in M(b)$ в случае $a + b \leqslant 1$ можно определить с помощью формулы (20) § 2. Пусть

$$a = k + \alpha, \quad k \geqslant 1 - \text{целое}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1; \quad b = -k + \beta, \ \alpha + \beta \leqslant 1. \tag{1}$$

Тогда $f = h^{(k)}$, $h \in M(\alpha)$, $g^{(k)} \in M(\beta)$. По формуле (20) §2

$$gh^{(k)} = h^{(k)}g = (hg)^{(k)} - C_k^1 (hg')^{(k-1)} + C_k^2 (hg'')^{(k-2)} + \ldots + (-1)^k hg^{(k)}. \tag{2}$$

Согласно 5° и 6° $hg, hg', \ldots, hg^{(k-1)} \in M(\alpha)$, $hg^{(k)} \in M(c)$, $c = \alpha + \beta$ или $c = \alpha$. Следовательно, правая часть (2) есть обобщенная функция класса $M(k+\alpha) = M(a)$. Таким образом, при условии (1) произведение fg можно определить формулой (2); при этом $fg \in M(a)$. Принятие такого определения можно мотивировать предельным переходом, как для формулы (21) § 2, но в другой метрике, зависящей от k и β.

В случае $\alpha + \beta > 1$ произведение $hg^{(k)}$ может не являться локально интегрируемой функцией. Тогда нельзя пользоваться формулой (2).

Из сказанного вытекает следующий результат.

Лемма 1 [60]. *Если $f \in M(a)$, $g \in M(b)$, $a + b \leqslant 1$, то произведение fg определено,*

$$fg \in M(a \circ b), \quad a \circ b = \max\{a;\ b;\ a+b\}. \tag{3}$$

Если $a = -\infty$ или $b = -\infty$, то полагаем $a \circ b = -\infty$.

Лемма 1 дает лишь достаточные условия существования произведения fg и его принадлежности тому или иному классу $M(c)$. Например, пусть

$$\frac{3}{4} < \gamma < 1, \quad f(t) = |t|^{-\gamma} \in M(\gamma + \epsilon), \quad g(t) = |t-1|^{-\gamma} \in M(\gamma + \epsilon),$$

$\epsilon > 0$ — любое. Здесь $a + b > 3/2 > 1$, но $fg \in M(\gamma + \epsilon)$.

Непрерывные функции, функции ограниченной вариации и измеримые ограниченные функции, если они не являются абсолютно непрерывными (локально), не принадлежат классу $M(0)$, но принадлежат классу $M(\alpha)$ при любом $\alpha > 0$. Если функция f непрерывна, а функция g ограниченной вариации, то произведение fg' имеет смысл (хотя здесь $a + b > 1$) и определяется с помощью интеграла Стилтьеса

$$f(t)g'(t) = \frac{d}{dt} \int_c^t f(s)\,dg(s), \tag{4}$$

где c — любая точка непрерывности функции $g(t)$.

Для функций, определенных на интервале (c, d) и принадлежащих классу $M(a)$, $a \leqslant 1$, введем норму $\| \ \|_a$. Если $a = -m + \alpha$, $m \geqslant 0$ – целое, $0 < \alpha \leqslant 1$, $p = 1/\alpha$, то

$$\| f \|_\alpha = \| f \|_{L_p}; \quad \| f \|_a = \| f \|_{C^{m-1}} + \| f^{(m)} \|_{L_p} \quad (m \geqslant 1).$$

С помощью введенной нормы определим сходимость. Для $a \leqslant 1$ сходимость $f_i \to f$ в $M(a)$ означает, что $\| f_i - f \|_a \to 0$. Для $a = k + \alpha$ (k – целое), $0 < \alpha \leqslant 1$, сходимость $f_i \to f$ в $M(a)$ означает, что для некоторых $g_i \in M(\alpha)$, $g \in M(\alpha)$ имеем

$$f_i = g_i^{(k)}, \quad f = g^{(k)}, \quad g_i \to g \text{ в } M(\alpha).$$

Тогда для любого a и целых $m > 0$ из сходимости $f_i \to f$ в $M(a)$ следует сходимость $f_i^{(m)} \to f^{(m)}$ в $M(a+m)$.

Лемма 2. *Если $0 < \max\{a; b\} \leqslant 1$ и $a + b \leqslant 1$, то для $f \in M(a)$, $g \in M(b)$, $a \circ b = \gamma$, имеем*

$$\| fg \|_\gamma \leqslant \| f \|_a \cdot \| g \|_b. \tag{5}$$

Доказательство. Если $b \leqslant 0 < a \leqslant 1$, то $\gamma = a$, $\| g \|_b \geqslant \| g \|_C = \max |g|$ и неравенство (5) справедливо. Случай $a \leqslant 0 < b \leqslant 1$ аналогичен.

Если $a > 0$, $b > 0$, $a + b \leqslant 1$, то $\gamma = a + b$. Неравенство (5) принимает вид

$$\left(\int_c^d | fg |^{\frac{1}{a+b}} dt \right)^{a+b} \leqslant \left(\int_c^d | f |^{\frac{1}{a}} dt \right)^a \left(\int_c^d | g |^{\frac{1}{b}} dt \right)^b.$$

Возводя обе части неравенства в степень $\nu = 1/(a+b)$ и обозначая

$$| f |^\nu = f_1, \quad | g |^\nu = g_1, \quad \frac{a+b}{a} = p, \quad \frac{a+b}{b} = q,$$

получаем известное неравенство Гёльдера.

Замечание. Если $\max\{a; b\} \leqslant 0$, то справедливо неравенство, подобное (5), но с числовым множителем в правой части, зависящим от a, b и от $| d - c |$.

Лемма 3. *Если $a + b \leqslant 1$ и $f_i \to f$ в $M(a)$, $g_i \to g$ в $M(b)$ при $i \to \infty$, то $f_i g_i \to fg$ в $M(a \circ b)$.*

Доказательство. Если $\max\{a; b\} \leqslant 1$, то в правой части равенства

$$f_i g_i - fg = (f_i - f) g_i + f (g_i - g)$$

норма в $M(a \circ b)$ каждого слагаемого стремится к нулю при $i \to \infty$ в силу леммы 2 и замечания. Если же $a = k + \alpha$, $k \geqslant 1$ – целое, $0 < \alpha \leqslant 1$, то из соотношений

$$f = h^{(k)}, \quad f_i = h_i^{(k)}, \quad h_i \to h \text{ в } M(\alpha), \quad g_i \to g \text{ в } M(b)$$

в силу предыдущего следует, что для $j \leqslant k$

$$g_i^{(j)} \to g^{(j)} \text{ в } M(b + j), \quad (h_i g_i^{(j)})^{(k-j)} \to (h g^{(j)})^{(k-j)} \text{ в } M(\alpha + k),$$

и из формулы (2) следует утверждение леммы.

Любая обычная или обобщенная функция является пределом некоторой последовательности гладких функций из C^∞ ([76], стр. 120). Если

$$\begin{gathered} \omega(t) \in C^\infty, \quad \omega(t) = 0 \quad (| t | \geqslant 1), \quad \omega(t) \geqslant 0, \quad \int_{-1}^{1} \omega(t)\, dt = 1, \\ \omega_\epsilon(t) = \epsilon^{-1} \omega(\epsilon^{-1} t) \quad (\epsilon > 0), \end{gathered} \tag{6}$$

а $*$ – знак свертки, то функция

$$f(t) * \omega_\epsilon(t) = f_\epsilon(t) \in C^\infty, \quad f_\epsilon(t) \to f(t) \quad (\epsilon \to 0). \tag{7}$$

Сходимость понимается в том же смысле, что и в теории обобщенных функций. Если же $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, или $f \in W_p^m$, то $f_\epsilon \to f$ в L_p, соответственно в W_p^m.

Следовательно, если $f \in M(a)$, то $f_\epsilon \to f$ в $M(a)$.

2. Некоторые уравнения и системы с обобщенными функциями в коэффициентах с помощью замены искомых функций сводятся к системам Каратеодори.

Рассмотрим уравнение [77]

$$y'' + a(t) y' + b'(t) y = g'(t). \tag{8}$$

Пусть функции a, b, g и $(b-a)b$, $(b-a)g$ суммируемы, а производные $b'(t)$ и $g'(t)$ понимаются в смысле теории обобщенных функций. Это уравнение можно записать в виде

$$(y' + by - g)' = (b-a)y'$$

и заменой $y' + by - g = z$ свести к системе Каратеодори

$$y' = z - by + g, \quad z' = (b-a)(z - by + g). \tag{9}$$

Для системы (9) можно задавать обычные начальные условия $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Поэтому для уравнения (8) можно задавать начальные условия

$$y(t_0) = y_0, \tag{10}$$
$$(y' + by - g)|_{t=t_0} = z_0.$$

Здесь t_0, y_0, z_0 — любые. Начальные условия вида $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ можно задавать не при любых t_0, а при таких, при которых функции $b(t)$ и $g(t)$ непрерывны.

Как видно из изложенного, сведение дифференциальных уравнений с обобщенными функциями к уравнениям Каратеодори дает возможность доказать существование решения и выяснить вид допустимых начальных условий. Этот же метод позволяет показать, что решение уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах непрерывно зависит от коэффициентов и является пределом последовательности решений уравнений с гладкими коэффициентами $a_i(t)$, $b_i(t)$, ..., стремящимися при $i \to \infty$ к данным обобщенным функциям. Ниже это доказывается для уравнения (8), но тот же метод применим и к более сложным уравнениям, рассматриваемым в дальнейших теоремах.

Л е м м а 4. *Пусть $a(t)$, $b(t)$, $g(t) \in L_2$ на отрезке $[c,d]$,*

$$a_i(t) \to a(t), \; b_i(t) \to b(t), \; g_i(t) \to g(t) \text{ в } L_2 \tag{11}$$

и $y_{0i} \to y_0$, $z_{0i} \to z_0$.

Тогда последовательность решений задач

$$\begin{gathered} y_i'' + a_i(t)y_i' + b_i'(t)y_i = g_i'(t), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ y_i(t_0) = y_{0i}, \quad (y_i' + b_i y_i - g_i)|_{t=t_0} = z_{0i} \end{gathered} \tag{12}$$

сходится в W_2^1 к решению задачи (8), (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое из рассматриваемых уравнений заменой

$$y_i' + b_i y_i - g_i = z_i \tag{13}$$

сведем к системе Каратеодори, подобной системе (9). Коэффициенты этой системы при $i \to \infty$ сходятся в L_1 к коэффициентам системы (9), начальные условия y_{0i} и z_{0i} тоже сходятся. В силу следствия теоремы 8 § 1 последовательность решений y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots)$ этих систем равномерно сходится к решению системы (9). Тогда из (11) и (13) следует, что $y_i' \to y'$ в L_2. Значит, $y_i \to y$ в W_2^1. Лемма доказана.

Для любых функций a, b, $g \in L_2$ определим последовательности гладких функций $a_i(t)$, $b_i(t)$, $g_i(t)$ подобно (7), взяв $\epsilon = 1/i$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда по лемме 4 последовательность обычных решений y_i задач (12) сходится в W_2^1 к решению задачи (8), (10), содержащей обобщенные функции $b'(t)$, $g'(t)$ (случай $a(t) \equiv g(t) \equiv 0$ рассмотрен в [77]). Это позволяет распространить на уравнения с обобщенными функциями некоторые известные результаты качественной теории линейных уравнений [78]. Рассматривались также задачи на собственные значения для уравнения $x'' + \lambda p(t)x = 0$, где $p(t) = q'(t)$, функция $q(t)$ — неубывающая [79], [80].

В следующей теореме различные координаты решения $x_1, \ldots, x_n$ — обобщенные функции разных классов. Хотя это свойство не сохраняется при линейном преобразовании координат, но рассматривать такие системы нужно, например, потому, что к системе такого рода сводится уравнение порядка n.

Т е о р е м а 1 [60]. *Рассмотрим линейную систему*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где

$$a_{ij} \in M(\alpha_{ij}), \quad f_i \in M(\varphi_i). \tag{15}$$

Если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *что*

$$\max\{\varphi_i;\ \max_j \alpha_{ij} \circ \lambda_j\} \leqslant \lambda_i + 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

$$\alpha_{ij} + \lambda_j \leqslant 1, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{17}$$

(обозначение $\alpha \circ \lambda$ *см. в (3)), то система (14) линейной заменой искомых функций сводится к линейной системе Каратеодори. Система (14) имеет n-мерное линейное многообразие решений, для которых*

$$x_i \in M(\lambda_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть функции x_i перенумерованы в таком порядке, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Если все $\lambda_i \leqslant 0$, то из (16) следует, что все $\varphi_i \leqslant 1$, $\alpha_{ij} \leqslant 1$, и система (14) — система Каратеодори. Поэтому пусть

$$\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m \leqslant 0 < \lambda_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n, \quad 0 \leqslant m < n \tag{18}$$

(если $\lambda_1 > 0$, то $m = 0$ и в дальнейших формулах будут отсутствовать суммы по индексам, не превосходящим m).

Из (16) и (17) следует, что для всех i и j

$$\alpha_{ij} \leqslant 1 - \lambda_j, \quad \alpha_{ij} \leqslant 1 + \lambda_i, \quad \alpha_{ij} \leqslant 1 + \lambda_i - \lambda_j, \tag{19}$$

$$\alpha_{ij} \circ \lambda_j \leqslant 1 + \lambda_i, \quad \varphi_i \leqslant 1 + \lambda_i; \tag{20}$$

$$\text{если } \alpha_{ij} \not\equiv 0, \text{ то } \lambda_j \leqslant \lambda_i + 1. \tag{21}$$

Покажем, что систему (14) заменой переменных можно свести к системе, у которой число λ_n заменено меньшим числом

$$\mu_n = \max\{\lambda_n - 1;\ 0\}, \tag{22}$$

а остальные λ_i не изменились.

Пусть b_{nj} и g_n — такие функции, что $b'_{nj} = a_{nj}$, $g'_n = f_n$. Перепишем последнее уравнение системы (14) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(x_n - \sum_{j=1}^{m} b_{nj} x_j - g_n\right) = -\sum_{k=1}^{m} b_{nk} x'_k + \sum_{j=m+1}^{n} a_{nj} x_j.$$

В правой части заменим x'_k $(k = 1, \ldots, m)$ соответствующими правыми частями из (14). Получаемые произведения $b_{nk} a_{kj}$ и $b_{nk} f_k$ имеют смысл, так как $b_{nk} \in M(\alpha_{nk} - 1)$, а в силу (19) и (20)

$$\alpha_{nk} - 1 \leqslant -\lambda_k, \quad \alpha_{kj} \leqslant 1 + \lambda_k, \quad \varphi_k \leqslant 1 + \lambda_k.$$

Так как $k \leqslant m$, $\lambda_k \leqslant 0$ и в случае $a_{kj} \not\equiv 0$ в силу (21) и (19) $-\lambda_k \leqslant 1 - \lambda_j$, $\alpha_{kj} \leqslant 1 + \lambda_k - \lambda_j$, то по лемме 1

$$b_{nk} a_{kj} \in M(\nu_j), \quad \nu_j = (\alpha_{nk} - 1) \circ \alpha_{kj} \leqslant 1 - \lambda_j. \tag{23}$$

Если учесть, что $\alpha_{nk} - 1 \leqslant \lambda_n$, $\alpha_{kj} \leqslant 1 + \lambda_k \leqslant 1$, то получаем

$$\nu_j \leqslant \max\{\lambda_n;\ 1\} = \mu_n + 1. \tag{24}$$

Аналогично, $b_{nk} f_k \in M(\mu_n + 1)$.

В системе (14) с уже преобразованным последним уравнением сделаем замену

$$x_1 = y_1, \ldots, \quad x_{n-1} = y_{n-1}, \quad x_n = y_n + \sum_{j=1}^{m} b_{nj} y_j + g_n. \tag{25}$$

Получим систему

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + a_{in} b_{nj}) y_j + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} y_j + a_{in} g_n + f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \sum_{j=1}^{m} [(a_{nn} - d_{nn}) b_{nj} - d_{nj}] y_j + \sum_{j=m+1}^{n} (a_{nj} - d_{nj}) y_j - \sum_{k=1}^{m} b_{nk} f_k + (a_{nn} - d_{nn}) g_n, \tag{26}$$

$$d_{nj} = \sum_{k=1}^{m} b_{nk} a_{kj} \in M(\nu_j), \quad \nu_j \leqslant 1 - \lambda_j, \quad \nu_j \leqslant \mu_n + 1, \tag{27}$$

$d_{nj} \equiv 0$, если $\lambda_j > 1$, так как тогда $a_{kj} \equiv 0$, $k \leqslant m$ (см. (21)).

Подобно предыдущему доказывается с помощью неравенств (18) – (21) и (27), что произведения, входящие в коэффициенты системы (26), имеют смысл и что

$$a_{in}b_{nj},\quad a_{in}g_n \in M(\alpha_{in} \circ \lambda_n) \subset M(1+\lambda_i), \tag{28}$$

$$(a_{nn}-d_{nn})g_n \in M((1-\lambda_n)\circ\lambda_n) \subset M(\mu_n+1). \tag{29}$$

Оценим $a_{in}b_{nj}$ иначе. Так как $\lambda_n > 0$, $j \leqslant m$, $\lambda_j \leqslant 0$, то в силу (19)

$$a_{in}b_{nj} \in M(\nu_{ij}),\quad \nu_{ij} = \alpha_{in}\circ(\alpha_{nj}-1) \leqslant (1-\lambda_n)\circ(-\lambda_j) < 1-\lambda_j. \tag{30}$$

Аналогично получаем

$$(a_{nn}-d_{nn})\,b_{nj} \in M(1-\lambda_j). \tag{31}$$

Если же учесть, что $\alpha_{nj}-1 \leqslant \lambda_n$, то вместо (30) и (31) получим

$$a_{in}b_{nj},\quad d_{nn}b_{nj} \in M(\max\{\lambda_n;\ 1\}) = M(\mu_n+1). \tag{32}$$

Запишем систему (26) в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)\,y_j + h_i(t),\qquad i=1,\ldots,n. \tag{33}$$

При этом $c_{ij} \in M(\gamma_{ij})$, $h_i \in M(\psi_i)$. Пусть

$$\mu_i = \lambda_i,\ i<n;\qquad \mu_n = \max\{\lambda_n-1;\ 0\} < \lambda_n. \tag{34}$$

Покажем, что числа γ_{ij}, ψ_i, μ_i удовлетворяют неравенствам, подобным (16) и (17).

Неравенство $\gamma_{ij}+\mu_j \leqslant 1$ при $i<n$ следует из (17) и (30), а при $i=n$ – из (17), (27) и (31) с учетом того, что $0 \leqslant \mu_n < \lambda_n$. Неравенство $\psi_i \leqslant \mu_i + 1$ при $i<n$ следует из (20) и (28), а при $i=n$ – из (29) и полученной оценки $b_{nk}f_k$. Неравенство $\gamma_{ij}\circ\mu_j \leqslant \mu_i+1$ при $i<n$ следует из (20) и (28), а при $i=n$ – из (17), (27), (31). Из полученных неравенств следует, что

$$\max\{\psi_i;\ \max_j \gamma_{ij}\circ\mu_j\} \leqslant \mu_i+1,\qquad i=1,\ldots,n. \tag{35}$$

Таким образом, в системе (33) коэффициенты обладают теми же свойствами, что и в системе (14). Поэтому с системой (33) можно поступить так же, как с системой (14). В силу (34) при каждом таком преобразовании системы наибольшее из чисел λ_i уменьшается или на 1, если оно было не меньше 1, или до нуля, если оно было заключено между 0 и 1.

Значит, после конечного числа преобразований мы получим систему

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0(t)\,z_j + f_i^0(t),\qquad i=1,\ldots,n, \tag{36}$$

для которой все числа λ_i^0, полученные из λ_i последовательными уменьшениями, неположительны. Они как и числа λ_i и μ_i, удовлетворяют неравенствам, подобным (16) и (35),

$$\max\{\varphi_i^0;\ \max_j \alpha_{ij}^0\circ\lambda_j^0\} \leqslant \lambda_i^0+1,\qquad i=1,\ldots,n, \tag{37}$$

где φ_i^0 и α_{ij}^0 таковы, что $a_{ij}^0 \in M(\alpha_{ij}^0)$, $f_i^0 \in M(\varphi_i^0)$. Так как все $\lambda_i^0 \leqslant 0$, то из (37) следует, что $\alpha_{ij}^0 \leqslant 1$, $\varphi_i^0 \leqslant 1$. Другими словами, $a_{ij} \in M(1)$, $f_i^0 \in M(1)$, и (36) – система Каратеодори. Из теоремы 3 § 1 следует, что эта система имеет n-мерное линейное многообразие решений.

Покажем, что для любого ее решения $z_i \in M(\lambda_i^0)$, $i=1,\ldots,n$. Так как функции z_i абсолютно непрерывны, то $z_i \in M(0)$. Значит, $a_{ij}^0 z_j \in M(\alpha_{ij}^0\circ 0)$, $\alpha_{ij}^0\circ 0 = \max\{\alpha_{ij}^0;0\}$. Поэтому правая часть (36) принадлежит $M(\gamma_i^1)$,

$$\gamma_i^1 = \max\{\varphi_i^0;\ 0;\ \max_j \alpha_{ij}^0\} \leqslant 1. \tag{38}$$

Тогда $z_i \in M(\gamma_i^1-1)$, $i=1,\ldots n$. Пользуясь этой уточненной оценкой z_i, получаем, что правая часть (36) принадлежит $M(\gamma_i^2)$,

$$\gamma_i^2 = \max\{\varphi_i^0;\ \max_j \alpha_{ij}^0\circ(\gamma_j^1-1)\}. \tag{39}$$

Следовательно, $z_i \in M(\gamma_i^2-1)$. Продолжая этот процесс уточнения оценок, получаем $z_i \in M(\gamma_i^k)$, $k=1,2,\ldots$,

$$1 \geqslant \gamma_i^1 \geqslant \gamma_i^2 \geqslant \ldots \geqslant \max\{\varphi_i^0;\ \max_j \alpha_{ij}^0\}. \tag{40}$$

Покажем, что $\gamma_i^k - 1 \leqslant \lambda_i^0$ для некоторого k. При $\lambda \leqslant 0$ имеем $\alpha\circ\lambda = \max\{\alpha;\ \lambda\}$. Для тех i, для которых правая часть (40) неотрицательна, она равна γ_i^1 в (38) и левой части (37). Значит, $\gamma_i^1 - 1 \leqslant \lambda_i^0$ для этих i. Для остальных i правая часть в (40) отрицательна, значит, в (38) $\gamma_i^1 = 0$.

Поэтому

$$\gamma_i^1 - 1 \leqslant \max\{\lambda_i^0;\ -1\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда, сравнивая (39) и (37), имеем

$$\gamma_i^2 - 1 \leqslant \max\{\lambda_i^0;\ -2\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Продолжая аналогично, имеем

$$\gamma_i^k - 1 \leqslant \max\{\lambda_i^0;\ -k\}, \qquad i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots$$

Значит, при достаточно большом k имеем

$$\gamma_i^k - 1 \leqslant \lambda_i^0, \quad z_i \in M(\gamma_i^k - 1) \subset M(\lambda_i^0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Возвращаясь обратно от системы (36) последовательными заменами переменных к исходной системе (14), получаем, что система (14) имеет n-мерное линейное многообразие решений. Покажем, что из (41) следует, что $x_i \in M(\lambda_i)$.

Достаточно рассмотреть один из однотипных переходов, которые совершаются при возвращении от системы (36) к (14). Пусть для системы (33) доказано, что

$$y_i \in M(\mu_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{42}$$

Переход от системы (33) к (14) совершается по формулам (25). Из (42) и (34) для $j \leqslant m$ имеем $y_j \subset M(\lambda_j)$, а из (18) и (19)

$$\lambda_j \leqslant 0, \quad b_{nj} \in M(\alpha_n - 1) \subset M(-\lambda_j).$$

Поэтому произведение $b_{nj} y_j$ имеет смысл. Далее,

$$\alpha_{nj} - 1 \leqslant \lambda_n, \quad b_{nj} y_j \in M(\lambda_n \circ \lambda_j) = M(\lambda_n),$$

$$g_n \in M(\varphi_n - 1) \subset M(\lambda_n).$$

Учитывая (25) и (34), имеем

$$x_i = y_i \in M(\lambda_i) \quad (i < n), \quad x_n \in M(\lambda_n).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Лучшая из оценок вида $x_i \in M(\lambda_i)$ получается тогда, когда во всех соотношениях (16) достигается равенство.

З а м е ч а н и е 2. Переход от данной системы (14) к системе Каратеодори позволяет указать начальные условия, при которых данная система имеет единственное решение. Некоторые другие условия, обеспечивающие единственность решения, указаны в [60].

З а м е ч а н и е 3. Таким же способом, как систему (14), можно привести к системе Каратеодори некоторые нелинейные системы. Например, в системе (14) те $a_{ij}(t)$, для которых $\alpha_{ij} = -m_{ij} + \gamma_{ij}$, $m_{ij} \geqslant 0$ — целое, $0 < \gamma_{ij} \leqslant 1$, можно заменить функциями $p_{ij}(t, \ldots, x_k, \ldots)$ класса $C^{m_{ij}}$ (по своим аргументам), зависящими от t и тех x_k, для которых $\lambda_k \leqslant \alpha_{ij}$. В других членах уравнений системы те x_j, для которых $\lambda_j = -l_j + \delta_j$, $l_j \geqslant 0$ — целое, $0 < \delta_j \leqslant 1$, можно заменить функциями $w_{ij}(t, \ldots, x_k, \ldots)$ класса C^{l_j} (по своим аргументам), зависящими от t и от тех x_k, для которых $\lambda_k \leqslant \lambda_j$.

В следующей теореме условие (44) равносильно условию аналогичной теоремы из [60], но выражено в значительно более простой форме.

Т е о р е м а 2 [60]. *Рассмотрим линейное уравнение*

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = f(t), \tag{43}$$

где $a_i \in M(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, n$; $f \in M(\gamma)$. *Обозначим* $\max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma\} = \mu$. *Если*

$$\alpha_i - i \leqslant 1 - \mu, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{44}$$

то уравнение (43) *приводится к системе Каратеодори и имеет n-мерное линейное многообразие решений*:

$$y = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t) + y_1(t), \tag{45}$$

где $y_1(t)$ — *частное решение уравнения* (43), $c_1, \ldots, c_n$ — *произвольные постоянные, а* $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ — *линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения. Решения* (45) *принадлежат* $M(\mu - n)$, *а*

$$u_i(t) \in M(\mu_0 - n), \quad \mu_0 = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{46}$$

Доказательство. Обычной заменой переменных

$$y = x_1, \quad y' = x_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = x_n$$

сведем уравнение (43) к системе

$$x_i' = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1; \qquad x_n' = a_n x_1 - \ldots - a_1 x_n + f. \tag{47}$$

Покажем, что при выполнении условия (44) существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющие условиям (16) (со знаками равенства) и (17) теоремы 1 в применении к системе (47), т.е. условиям

$$\begin{gathered} \lambda_{i+1} = \lambda_i + 1, \quad i = 1, \ldots, n; \\ \max\{\gamma;\ \alpha_n \circ \lambda_1;\ \alpha_{n-1} \circ \lambda_2;\ \ldots;\ \alpha_1 \circ \lambda_n\} = \lambda_n + 1. \end{gathered} \tag{48}$$

Выражая все λ_i через число $\lambda = \lambda_n + 1$, получаем

$$\max\{\gamma;\ \alpha_n \circ (\lambda - n);\ \alpha_{n-1} \circ (\lambda - n + 1);\ \ldots;\ \alpha_1 \circ (\lambda - 1)\} = \lambda. \tag{49}$$

Покажем, что число $\lambda = \mu$ удовлетворяет этому уравнению. При $\lambda = \mu$ каждое из выражений $\alpha_i \circ (\mu - i)$ в силу (44) имеет смысл и равно $\max\{\alpha_i;\ \mu - i;\ \alpha_i + \mu - i\}$. Ясно, что сумму $\alpha_i + \mu - i$ стоит писать только в случае $\mu - i > 0$, т.е. $\mu > i \geqslant 1$. Но в этом случае в силу (44) $\alpha_i + \mu - i \leqslant 1 < \mu$. Поэтому левая часть (49) при $\lambda = \mu = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma\}$ равна μ, т.е. $\lambda = \mu$ удовлетворяет уравнению (49).

Таким образом, при $\lambda_i = \mu - n + i - 1$ выполнены условия (48), т.е. условия (16) для системы (47). Условия (17) для $i = n$ принимают вид

$$\alpha_{n-j+1} + \mu - n + j - 1 \leqslant 1, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

и выполняются в силу (44). Для $i < n$ коэффициенты в уравнениях (47) постоянны, значит, α_{ij} в (17) можно взять меньше любого отрицательного числа, и условия (17) выполнены.

Итак, система (47) удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, она имеет n-мерное линейное многообразие решений, и при этом

$$y = x_1 \in M(\lambda_1) = M(\mu - n). \tag{50}$$

Отсюда вытекают утверждения теоремы 2, кроме (46). Чтобы доказать (46), надо применить уже полученный результат (50) к уравнению вида (43), но с $f \equiv 0$.

Замечание 1. На практике обычно удобнее приводить уравнение (43) к системе Каратеодори, не переходя предварительно к системе (47). Для этого те произведения $a_i(t)\, y^{(n-i)}$, в которых один из сомножителей — обобщенная функция (для $y^{(n-i)}$ этот вопрос решается с учетом (50)), преобразуются с помощью формулы (2). Затем, как в п. 2 § 2, объединяются члены, представленные в виде производных одного порядка от некоторых (уже не обобщенных) функций. От полученного уравнения вида (22) § 2 (но теперь u_i уже другие) можно перейти к системе (23) § 2. Этим способом удается не только формально свести уравнение (43) к системе Каратеодори, но и получить доказательство теоремы 2, не зависящее от теоремы 1.

Замечание 2. Способом, изложенным в замечании 1, можно свести к системе Каратеодори и некоторые нелинейные уравнения n-го порядка, например, уравнение

$$\begin{aligned} y^{(n)} = \sum_{j=k+1}^{n-1} y^{(j)} p_j(t, y, y', \ldots, y^{(2k-j)}) + p_k(t, y, y', \ldots, y^{(k)}) + \\ + \sum_{j=0}^{k-1} b_j(t)\, w_j(t, y, y', \ldots, y^{(j)}) + f(t). \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь $0 < k < n - 1$, $p_j \in C^{j-k}$, $w_j \in C^{k-j}$ (по своим аргументам), функции b_j и f могут быть обобщенными, $f \in M(n - k + \alpha)$, $0 < \alpha < 1$,

$$b_j \in M(\beta_j), \quad \beta_j < \min\{k - j + 1 - \alpha;\ n - k + \alpha\},$$

при $j > 2k$ функции p_j зависят только от t,

$$|p_k| < (|y^{(k)}|^{1/\alpha} + 1)\, p^*(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)}), \qquad p^* \in C,$$

в случае $\alpha > 1/2$ функции p_j $(j > k)$ не зависят от $y^{(2k-j)}$.

Тогда уравнение (51) сводится к системе Каратеодори и имеет n-мерное множество решений, принадлежащих $M(\alpha - k)$.

Чтобы свести это уравнение к системе, предполагаем, что $y \in M(\alpha - k)$. Тогда $y^{(k)} \in M(\alpha)$ и сложные функции

$$w_j(t, y(t), \ldots, y^{(j)}(t)) \in M(\alpha - k + j),$$

$$p_k(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)) \in M(1), \quad p_j \in M(\alpha^* + k - j), \quad j > k,$$

где $\alpha^* = \alpha$ $(\alpha < 1/2)$, $\alpha^* = \alpha - 1$ $(\alpha > 1/2)$. Следовательно, в (51) произведения $y^{(j)}p_j$ и $b_j w_j$ имеют смысл, и их можно преобразовать по формуле (2). Далее, как в замечании 1, получаем уравнение

$$y^{(n)} + v_{n-k}^{(n-k)} + \ldots + v_1' + v_0 = 0,$$

а затем систему Каратеодори. Оценивая гладкость ее решения и возвращаясь к уравнению (51), получаем $y \in M(\alpha - k)$.

Заметим, что в уравнении (51) каждое произведение $b_j w_j$ можно заменить суммой конечного числа слагаемых $b_{jm} w_{jm}$, где функции b_{jm} и w_{jm} удовлетворяют тем же условиям, что b_j и w_j.

Нелинейные уравнения с обобщенными функциями, но более простые, чем в (51), рассматривались в [81].

П р и м е р. Приведем к системе Каратеодори уравнение

$$y^{(4)} = y'''p_3(t, y, y') + p_2(t, y, y', y'') + b_1(t)\ w_1(t, y, y') + b_0(t) w_0(t, y) + f(t). \tag{52}$$

Пусть $p_2 \in C$; $p_3 \in C^1$, $w_1 \in C^1$, $w_0 \in C^2$, $b_1 \in M(3/2)$, $b_0 \in M(5/2)$, $f \in M(5/2)$, $|p_2| \le y''^2 p^*(t, y, y')$, $p^* \in C$. Тогда условия замечания 2 выполнены, причем $n = 4$, $k = 2$, $\alpha = 1/2$. Следовательно, $y'' \in M(1/2) = L_2(\mathrm{loc})$. С помощью тождества (2) запишем уравнение (52) в виде

$$y^{(4)} = (y''p_3)' - y''p_3' + p_2 + (a_1 w_1)' - a_1 w_1' + (a_0 w_0)'' - 2(a_0 w_0')' + a_0 w_0'' + g'',$$

где $a_1' = b_1$, $a_0'' = b_0$, $g'' = f$, а производные p_3', w_1', w_0', w_0'' — полные производные по t от сложных функций. Полагая

$$v_2 = -a_0 w_0 - g, \qquad v_1 = -y''p_3 - a_1 w_1 + 2a_0 w_0',$$

$$v_0 = y''p_3' - p_2 + a_1 w_1' - a_0 w_0'',$$

получаем уравнение

$$y^{(4)} + v_2'' + v_1' + v_0 = 0.$$

Вводя новые неизвестные

$$x_4 = y, \quad x_3 = x_4', \quad x_2 = x_3 + v_2, \quad x_1 = x_2' + v_1,$$

получаем систему

$$x_1' = -v_0, \quad x_2' = x_1 - v_1, \quad x_3' = x_2 - v_2, \quad x_4' = x_3.$$

Функции v_i зависят от переменных t, y, y', y''; при этом y, y', y'' следует заменить по формулам

$$y = x_4, \quad y' = x_3, \quad y'' = x_2 - v_2 = x_2 + a_0(t) w_0(t, x_4) + g(t).$$

Полученная система удовлетворяет условиям Каратеодори.

3. В [82] рассматривается линейная система в векторной записи

$$y' = B'(t)\, y + g'(t), \tag{53}$$

где матрица $B(t)$ и вектор-функция $g(t)$ ограниченной вариации, $B(t)$ непрерывна, производные понимаются в смысле теории обобщенных функций. Ранее [83], [84] рассматривались интегральные уравнения

$$y(t) = y(a) + \int_a^t (dB(s))\, y(s) + g(t) - g(a) \tag{54}$$

(интеграл понимается в смысле Стилтьеса), равносильные (53), а также несколько более общие. В [82] доказываются существование и единственность решения с начальным условием $y(a) = y_0$, показывается, что фундаментальная матрица непрерывна и ограниченной вариации. Решение выражается через фундаментальную матрицу и функцию $g(t)$. Существование решения можно доказать, например, применяя обычный метод последовательных приближений к уравнению (54) и пользуясь известными оценками интегралов Стилтьеса ([64], стр. 254).

Другой способ исследования системы (53) — приведение к системе Каратеодори. Заменой $y(t) = z(t) + g(t)$ из (53) и (54) получаем

$$z' = B'(t)\, z + h'(t), \qquad h(t) = \int_a^t (dB(s))\, g(s), \qquad z(t) = z(a) + \int_a^t (dB(s))\, z(s) + h(t). \tag{55}$$

Из оценок в [64] (стр. 254) получаем, что функция $h(t)$ непрерывна. Обозначим через $b_{ij}(t)$ элементы матрицы $B(t)$, а через $\tau(t)$ — непрерывную функцию

$$\tau(t) = t + \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname*{var}_{a<s<t} b_{ij}(s).$$

Для любых t_1, $t_2 > t_1$ имеем

$$t_2 - t_1 + |b_{ij}(t_2) - b_{ij}(t_1)| \leqslant \tau(t_2) - \tau(t_1). \tag{56}$$

Пусть $t(\tau)$ — функция, обратная к $\tau(t)$. Из (56) следует, что функции $t(\tau)$ и $b_{ij}(t(\tau))$ абсолютно непрерывны. Поэтому интеграл в (55) равен ([64], стр. 290)

$$\int_a^{\tau(t)} \frac{dB(t(\tau))}{d\tau} z(t(\tau))d\tau$$

и уравнение (55) равносильно системе Каратеодори

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dB(t(\tau))}{d\tau} z + \frac{dB(t(\tau))}{d\tau} g(t(\tau)). \tag{57}$$

Из доказанного следуют сформулированные выше утверждения о решениях системы (53).

Все это не обобщается непосредственно на случай, когда $B(t)$ — разрывная функция ограниченной вариации, даже при $g(t) \equiv 0$. В этом случае решения, вообще говоря, имеют разрывы в тех же точках, что $B(t)$, и интеграл Стилтьеса в (54) и (55) может не существовать (пример в [64], стр. 249). Теория обобщенных функций здесь тоже ничего не дает, так как, например, произведение дельта-функции на ее неопределенный интеграл не определено.

Если же для функций ограниченной вариации различать значения $y(t-0)$, $y(t)$, $y(t+0)$ и отдельно рассматривать левый и правый скачки $y(t) - y(t-0)$ и $y(t+0) - y(t)$, то можно определить интеграл в (54), когда $B(t)$ и $y(t)$ — разрывные функции ограниченной вариации. При разных предположениях (например, когда $y(t) = y(t-0)$ или когда $y(t) = [y(t-0) + y(t+0)]/2$ и др.) получаются различные условия существования решения уравнения (54) или (53), различаются и сами решения. Уравнения такого рода, записанные в дифференциальной или интегральной форме, рассматриваются в [85] — [90]. В [90] — [92] рассматриваются некоторые нелинейные уравнения и системы подобного типа. К этому же типу уравнений относятся уравнения с толчками в случаях, когда величина скачка решения зависит не только от t, но и от значения решения перед скачком.

Покажем на простейшем примере, что в таких случаях различные подходы к определению решения приводят к различным результатам. Рассмотрим линейное уравнение

$$y' = k\delta(t)y \qquad (k = \text{const}). \tag{58}$$

Так как $y' = 0$ при $t < 0$ и при $t > 0$, то

$$y(t) = c \quad (t < 0),$$

$$y(t) = c(1+a) \quad (t > 0), \quad a \neq 0,$$

т.е. $y(t) = c(1 + a\eta(t))$, где

$$\eta(t) = 0 \quad (t < 0), \qquad \eta(t) = 1 \quad (t > 0). \tag{59}$$

Чтобы найти a, подставляем $y(t)$ в (58); $\eta'(t) = \delta(t)$,

$$a\delta(t) = k\delta(t) + ka\delta(t)\eta(t). \tag{60}$$

Произведение $\delta(t)\eta(t)$ в теории обобщенных функций не определено. Если взять последовательности гладких функций $\delta_i(t) \to \delta(t)$, $\eta_i(t) \to \eta(t)$, то предел произведения $\delta_i(t)\eta_i(t)$, вообще говоря, не существует. В тех случаях, когда он существует, он зависит от выбора последовательностей $\delta_i(t)$, $\eta_i(t)$. При естественных предположениях этот предел, если он существует, имеет вид $\gamma\delta(t)$, где γ может быть любым числом из отрезка [0, 1]. Если считать, что $\delta(t)\ \eta(t) = \gamma\delta(t)$, то из (60) получаем

$$a = k + ka\gamma, \qquad a = \frac{k}{1 - k\gamma}. \tag{61}$$

Рассмотрим различные подходы к выбору значения γ.

1° Если считать, что $\gamma = 0$, т.е. что $\delta(t)\ \eta(t) = 0$ (это равносильно тому, что решения уравнения (58), по определению, должны быть непрерывны слева), то $a = k$,

$$y(t) = c(1 + k\eta(t)), \tag{62}$$

c — произвольная постоянная. К такому же результату приводит предельный переход $y_i(t) \to y(t)$, где $y_i(t)$ — решение уравнения с запаздыванием

$$y_i'(t) = k\delta_i(t)\, y_i(t - \tau_i), \qquad \tau_i \to +0 \qquad (i \to \infty); \tag{63}$$

функция $\delta_i(t)$ отлична от 0 только на интервале (α_i, β_i) длины не больше τ_i, стягивающемся к точке $t = 0$ при $i \to \infty$, и для некоторого $q = \mathrm{const}$

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \delta_i(t)\, dt \to 1, \qquad \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |\delta_i(t)|\, dt \leqslant q. \tag{64}$$

В случае $\gamma = 0$, $k = -1$ из (62) имеем [92]

$$y(t) = c \quad (t < 0), \qquad y(t) = 0 \quad (t > 0).$$

Это значит, что все те решения, которые существуют при $t < 0$, в момент $t = 0$ скачком переходят в точку $y = 0$ и остаются там. При начальных условиях $y(t_0) = y_0$, $t_0 > 0$, $y_0 \neq 0$, имеем решение $y(t) = y_0$ $(t > 0)$, не продолжимое в область $t < 0$.

2° Если считать, что $\gamma = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\delta(t)\ \eta(t) = \dfrac{1}{2}\delta(t)$ (например, из соображений симметрии, или принимая по определению, что решения уравнения (58) должны быть таковы, что $y(t) = [y(t-0) + y(t+0)]/2$), то из (61) получаем $a = 2k/(2-k)$. При $k = 2$ этот результат теряет смысл. Точнее, при $k = 2$ решение с любым начальным условием вида $y(t_0) = y_0 \neq 0$, $t_0 < 0$, не продолжимо в область $t > 0$.

При $k > 2$ получается решение $y(t)$, меняющее знак, что неестественно для уравнений вида $y' = \varphi(t)\, y$ (в случае любых непрерывных или суммируемых функций $\varphi(t)$ его решения не меняют знака).

3° Будем рассматривать уравнение (58) как предельное для уравнений

$$y_i' = k\delta_i(t)\, y_i,$$

где для каждого i функция δ_i суммируема, равна 0 вне интервала (α_i, β_i) и удовлетворяет условиям (64), $\alpha_i, \beta_i \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда

$$y_i(t) = c\exp\left(k\int_{\alpha_i}^{t} \delta_i(s)\, ds\right).$$

При $i \to \infty$ получаем $y_i(t) \to y(t)$ $(t \neq 0)$,

$$y(t) = c \quad (t < 0), \qquad y(t) = ce^k \quad (t > 0). \tag{65}$$

Если считать решениями уравнения (58) функции (65), то при всех значениях k все решения существуют и при $t < 0$, и при $t > 0$. Выбор такого определения решения соответствует случаю, когда в (61)

$$a = e^{k-1}, \qquad \gamma = \frac{e^k - 1 - k}{k(e^k - 1)}.$$

Заметим, что $\gamma \to 1/2$ при $k \to 0$.

Из этих рассуждений можно сделать следующий вывод. Пусть уравнение (58) рассматривается как идеализация уравнения (63), где $\tau_i \geqslant 0$,

$$\delta_i(t) = 0 \quad (t \leqslant \alpha_i,\ t \geqslant \beta_i), \qquad \delta_i(t) \geqslant 0 \quad (\alpha_i < t < \beta_i), \tag{66}$$

интеграл от $\delta_i(t)$ по интервалу (α_i, β_i) равен 1, а числа $\tau_i, \alpha_i, \beta_i$ малы. Тогда в случае $\tau_i \geqslant \beta_i - \alpha_i$ решение близко к функции (62), а в случае $\tau_i = 0$ — к функции (65).

Поэтому в случае $\tau_i \geqslant \beta_i - \alpha_i$ предельное уравнение лучше записать не в виде (58), а в виде

$$y'(t) = k\delta(t)\,y(t-0);$$

решениями такого уравнения являются функции (62).

В [92] подобные предельные переходы рассматриваются для более сложных уравнений

$$x_i' = f(t, x_i) + \delta_i(t)\,g(x_i), \qquad x_i(t_0) = x_{i0}, \tag{67}$$

$i = 1, 2, \ldots$ Пусть функции $f(t, x)$, $g(x)$ и $\delta_i(t)$ непрерывны $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x \in R^n)$, $f, g \in R^n$, $\delta_i(t)$ удовлетворяет условиям (64) и (66):

$$\alpha_i \to 0, \quad \beta_i \to 0, \quad x_{i0} \to x_0 \quad (i \to \infty), \quad t_0 < 0 < t_1.$$

Решение задачи (67) не обязательно единственно.

Теорема 3 [92]. *Пусть задачи*

$$u' = f(t, u) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant 0), \quad u(t_0) = x_0, \tag{68}$$

$$v' = g(v) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad v(0) = u(0), \tag{69}$$

$$w' = f(t, w) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1), \quad w(0) = v(1) \tag{70}$$

имеют единственные решения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$.

Тогда для любой последовательности решений задач (67) $(i = 1, 2, \ldots)$ *имеем*

$$x_i(t) \to u(t) \quad (t_0 \leqslant t < 0),$$

$$x_i(t) \to w(t) \quad (0 < t \leqslant t_1).$$

Теорема 4. *Пусть* $\tau_i \to 0$, $0 < \beta_i - \alpha_i \leqslant \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$, *и пусть задачи* (68) *и*

$$z' = f(t, z) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1), \quad z(0) = u(0) + g(u(0)) \tag{71}$$

имеют единственные решения $u(t)$, $z(t)$.

Тогда для любой последовательности решений задач

$$x_i'(t) = f(t, x_i(t)) + \delta_i(t)\,g(x_i(t - \tau_i)), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \tag{72}$$

имеем при $i \to \infty$

$$x_i(t) \to u(t) \quad (t_0 \leqslant t < 0), \qquad x_i(t) \to z(t) \quad (0 < t \leqslant t_1).$$

Доказательство. При $i > i_1$ имеем $t_0 < \alpha_i < \beta_i < t_1$ и решение задачи (72) удовлетворяет уравнению

$$x_i'(t) = f(t, x_i(t)) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \alpha_i; \quad \beta_i \leqslant t \leqslant t_1). \tag{73}$$

Так как для некоторых $a > 0, b > 0$ имеем $|f(t, x)| \leqslant m$ при $|t| \leqslant a$, $|x - u(0)| \leqslant 2b$, то для $d = \min\{a; bm^{-1}\}$ все те решения уравнения $x' = f(t, x)$, для которых $|x(0) - u(0)| \leqslant b$, при $|t| \leqslant d$ существуют и удовлетворяют неравенству

$$|x(t) - x(0)| \leqslant m|t|. \tag{74}$$

В силу замечания к лемме 6 § 1 решения этого уравнения с начальными условиями $x(t_0) = x_{i0}$ при $x_{i0} \to x_0$ равномерно сходятся к $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant 0$, т.е. для любого $\eta > 0$ эти решения при $i > i_2(\eta)$ удовлетворяют неравенству

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \eta \quad (t_0 \leqslant t \leqslant 0).$$

Отсюда и из (74) следует, что при $i > i_2(\eta)$, $|t| < \eta m^{-1}$

$$|x(t) - u(0)| < 2\eta. \tag{75}$$

В силу (73) при $t_0 \leqslant t \leqslant \alpha_i$ эти решения являются решениями задачи (72). Так как $\beta_i - \alpha_i \leqslant \tau_i \to 0$, то $\beta_i - \tau_i \leqslant \alpha_i$, и при $i > i_3(\eta)$ и $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$ имеем

$$\alpha_i - \tau_i \leqslant t - \tau_i \leqslant \alpha_i, \qquad |x(t - \tau_i) - u(0)| \leqslant 2\eta.$$

Так как функция $g(x)$ непрерывна, то для любого $\epsilon > 0$ при достаточно малом η и $i > i_3(\eta)$

$$|g(x_i(t-\tau_i)) - g(u(0))| < \epsilon \quad (\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i). \tag{76}$$

Введем обозначения $|g(u(0))| = g_0$,

$$\int_{\alpha_i}^{t} \delta_i(s)\, g(x_i(s-\tau_i))\, ds = J_i(t).$$

Тогда в силу (64) и (76) при $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$

$$|J_i(t)| \leqslant q(g_0 + \epsilon), \qquad J_i(\beta_i) \to g(u(0)) \qquad (i \to \infty). \tag{77}$$

Покажем, что для достаточно большого i_4 и всех $i > i_4$ решение $x_i(t)$ задачи (72) при $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$ остается в шаре K $\{|x - u(0)| \leqslant q(g_0 + \epsilon) + 2\}$. При $|t| \leqslant a$, $x \in K$ имеем $|f(t,x)| \leqslant m_1$. В силу (75) $|x_i(\alpha_i) - u(0)| < 1$ при больших i. Далее,

$$x_i(t) - x_i(\alpha_i) = \int_{\alpha_i}^{t} f(s, x_i(s))\, ds + J_i(t). \tag{78}$$

Если бы решение при $0 < t - \alpha_i \leqslant \beta_i - \alpha_i < m_1^{-1}$ вышло на границу шара K, то в точке выхода левая часть (78) была бы больше $q(g_0 + \epsilon) + 1$, а правая (с учетом (77)) — меньше этого числа. Это невозможно.

Согласно (75) $x_i(\alpha_i) \to u(0)$ при $i \to \infty$. Поэтому из (78) при $t = \beta_i$ и (77) получаем при $i \to \infty$

$$x_i(\beta_i) \to u(0) + g(u(0)). \tag{79}$$

При $t \geqslant \beta_i$ решение задачи (72) совпадает с решением уравнения (73) с начальным условием $x_i = x_i(\beta_i)$ при $t = \beta_i$. Если $\beta_i > 0$, то это решение можно продолжить как решение уравнения (73) вплоть до $t = 0$. Как при $\beta_i > 0$, так и при $\beta_i \leqslant 0$ из (75) и (79) получаем для такого решения уравнения (73)

$$x_i(0) \to u(0) + g(u(0)).$$

В силу замечания к лемме 6 § 1 решение $x_i(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ равномерно сходится к решению задачи (71). Это решение $x_i(t)$ при $\beta_i \leqslant t \leqslant t_1$ совпадает с решением задачи (72). Теорема доказана.

Очевидно, условие непрерывности $f(t,x)$ можно заменить условиями Каратеодори; функция $f(t,x)$ в (72) может зависеть также от параметра μ_i, $\mu_i \to \mu_0$, как в теореме 6 § 1; функцию $g(x)$ можно заменить на непрерывную функцию $g(t,x)$.

Очень общие (но со сложными формулировками) теоремы о непрерывной зависимости от параметра для дифференциальных уравнений с разрывными решениями имеются в [92].

Подводя итог, можно сказать, что понятие решения для уравнений вида

$$x' = f(t,x) + \varphi(t)\, g(t,x),$$

где $\varphi(t)$ — дельта-функция или производная от разрывной функции ограниченной вариации, как и для уравнений (53) с разрывной матрицей $B(t)$, не является однозначно определенным. При выборе того или иного определения решения надо более полно учитывать характер предельного перехода, приведшего к рассматриваемому уравнению.

4. В работах Я. Курцвейля ([15], [16], [92] и др.) рассматриваются обобщенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = DF(x,t). \tag{80}$$

Указывается, что при определенных предположениях такое уравнение можно записать также в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} F(x,t),$$

причем производные понимаются в смысле теории обобщенных функций. При определенных условиях (различных в [15] и в [92]) доказываются теоремы о существовании и единственности решения, о непрерывной зависимости решения от начальных условий и от параметра. Решение уравнения (80) определяется с помощью построенного в [15] обобщения интеграла Перрона.

В [16], [92] предполагается, что

$$|F(x,t_2)-F(x,t_1)| \leqslant |h(t_2)-h(t_1)|,$$
$$|F(x,t_2)-F(x,t_1)-F(y,t_2)+F(y,t_1)| \leqslant \omega(|x-y|)\,|h(t_2)-h(t_1)|, \tag{81}$$

где функция $h(t)$ — неубывающая, непрерывная слева, а $\omega(\eta)$ — неубывающая, непрерывная, и $\omega(0)=0$. При этих условиях доказывается, что решение уравнения (80) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ существует на некотором отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$, $\sigma>0$. Решение удовлетворяет условию

$$|x(t_2)-x(t_1)| \leqslant |h(t_2)-h(t_1)|,$$

следовательно, непрерывно слева. В случае $\omega(\eta)=k\eta$ решение единственно при $t \geqslant t_0$.

Пример [92]. В области $|x|<1$, $|t|<1$ функция

$$F(x,t)=x \quad (t\leqslant 0), \qquad F(x,t)=0 \quad (t>0) \tag{82}$$

удовлетворяет обоим условиям (81) с $\omega(\eta)=\eta$,

$$h(t)=0, \quad (t\leqslant 0) \qquad h(t)=1 \quad (t>0).$$

При начальном условии $x(t_0)=x_0$, $t_0<0$, имеем решение

$$x(t)=x_0 \quad (t\leqslant 0), \qquad x(t)=0 \quad (t>0).$$

При начальном условии $x(t_0)=x_0$, $t_0>0$, решение $x(t)=x_0$ $(t>0)$ не продолжается в область $t\leqslant 0$, если $x_0\neq 0$.

В этом примере рассматриваемое уравнение (80) с функцией (82) можно также записать в виде

$$x'(t) = -\delta(t)\,x(t-0).$$

Покажем, что при условиях (81) уравнение (80) можно свести к уравнению с толчками, сходному с (72).

Как известно ([64], стр. 290), функция $h(t)$ ограниченной вариации на отрезке $[t_0, t_1]$ представима в виде

$$h(t)=\varphi(t)+r(t)+s(t), \tag{83}$$

где $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна, $r(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации, имеющая почти всюду $r'(t)=0$, $s(t)$ — алгебраическая сумма скачков функции $h(t)$ на отрезке $[t_0, t]$. Если функция $h(t)$ — неубывающая, то функции φ, r, s — тоже.

Пусть функция $h(t)$ из (81) представлена в виде (83). Тогда замена независимого переменного $t+r(t)=\tau$, $x(t)=z(\tau)$ приводит уравнение (80) к уравнению

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = f(\tau, z(\tau)) + \sum_j \delta(t-t_j)\,g_j(z(\tau-0)), \tag{84}$$

$$f(\tau,z)=\frac{\partial}{\partial\tau}F(z,t(\tau)), \qquad g_j(z)=F(z,\tau_j+0)-F(z,\tau_j),$$

сумма берется по всем точкам τ_j разрыва функции $h(t(\tau))$. Можно показать, что при почти всех τ

$$|f(\tau,z)| \leqslant \varphi'(t(\tau))+1,$$
$$|f(\tau,x)-f(\tau,y)| \leqslant \omega(|x-y|)\,(\varphi'(t(\tau))+1).$$

Следовательно, функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, а если $\omega(\eta)=k\eta$, то и условию Липшица (6) § 1.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ

В гл. 2 рассматриваются различные определения решений дифференциальных уравнений и систем с разрывными правыми частями для случаев, когда, в отличие от гл. 1, правые части не являются непрерывными по x. Указываются области применимости различных определений. Для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, а также для дифференциальных включений доказывается существование решений и изучаются их свойства, в частности зависимость решений от начальных условий и правых частей уравнений, свойства интегральных воронок.

§ 4. Различные определения решения

Здесь излагаются различные определения решений дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Устанавливается связь таких уравнений с дифференциальными включениями. В различных случаях определяется скорость движения по поверхности разрыва (производная dx/dt для решения, лежащего на поверхности разрыва). В двух основных случаях определяется скорость движения по пересечению поверхностей разрыва.

1. Использованное в § 1 определение решения как абсолютно непрерывной функции, почти всюду удовлетворяющей уравнению, не всегда применимо для уравнений, правые части которых разрывны на произвольной гладкой линии или поверхности S. Оно применимо в том случае, когда с одной стороны от S решения подходят к S, а с другой стороны сходят с S. Здесь решение пересекает S и удовлетворяет уравнению всюду, кроме точки пересечения, в которой решение не имеет производной (пример 1 введения).

В другом случае, когда с обеих сторон линии или поверхности разрыва S решения приближаются к S, это определение непригодно, так как ничего не говорит о том, как продолжается решение, попавшее на S (пример 2 введения). Чтобы обеспечить существование и возможность продолжения решений, в таком случае необходимо или определенным образом изменить значение правой части уравнения в точках ее разрыва, или доопределить ее там, если она была там не определена.

Необходимо иметь такое определение решения, которое охватывало бы эти два основных случая и формулировалось бы независимо от расположения линий и поверхностей разрыва. Получаемые при этом решения должны удовлетворять требованиям, изложенным во введении.

Излагаемые ниже различные определения решения обычно применяются к уравнениям и системам с кусочно непрерывными правыми частями, но некоторые из них пригодны и в более общих случаях.

В дальнейшем x означает точку n-мерного пространства R^n с координатами $x_1, \ldots, x_n$; $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Функция или вектор-функция $f(t, x)$ называется *кусочно непрерывной* в конечной области G $(n+1)$-мерного пространства t, x, если область G состоит из конечного числа областей G_i $(i = 1, \ldots, l)$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M меры нуль, состоящего из точек границ этих областей. Функция *непрерывна* в области *вплоть до границы*, если при приближении к каждой точке границы она стремится к конечному пределу, возможно, к разным пределам для разных граничных точек. Если область G бесконечна, то в определении кусочно непрерывной функции каждая конечная часть области G может иметь общие точки лишь с конечным числом областей G_i.

Наиболее часто встречается случай, когда множество M точек разрыва функции f состоит из конечного числа гиперповерхностей. В m-мерном пространстве k-мерной *гиперповерхностью* будем называть такое множество S, что в окрестности каждой его точки a (или точки a, предельной для точек из S) все координаты точек множества S являются непрерывными функциями каких-либо k из этих координат, изменяющихся в некоторой k-мерной области $G^k(a)$. Например,

$$x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_k) \in C, \quad i = 1, \dots, m; \qquad (x_1, \dots, x_k) \in G^k(a).$$

Если при этом точка a является образом граничной точки области $G^k(a)$, то точка a принадлежит *краю* гиперповерхности S. Если все φ_i принадлежат C^p, т.е. имеют непрерывные производные до порядка p включительно, то гиперповерхность S принадлежит классу C^p. Гиперповерхности класса C^1 называются *гладкими*. Если все функции φ_i линейны, а область $G^k(a)$ есть k-мерное пространство, то гиперповерхность называется *гиперплоскостью*. Одномерная гиперповерхность есть линия.

В дальнейшем для краткости $(m-1)$-мерную гиперповерхность (гиперплоскость) в m-мерном пространстве будем называть поверхностью (соответственно плоскостью), а для других гиперповерхностей будем каждый раз указывать их размерность.

2. Рассмотрим уравнение или систему в векторной записи

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

с кусочно непрерывной функцией f в области G; $x \in R^n$, $\dot{x} = dx/dt$; M — множество (меры нуль) точек разрыва функции f.

Большинство известных определений решения может быть изложено следующим образом. Для каждой точки (t, x) области G указывается множество $F(t, x)$ в n-мерном пространстве. Если в точке (t, x) функция f непрерывна, то множество $F(t, x)$ состоит из одной точки, совпадающей со значением функции f в этой точке. Если же (t, x) — точка разрыва функции f, то множество $F(t, x)$ задается тем или иным способом. *Решением* уравнения (1) называется решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

т.е. абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, определенная на интервале или отрезке I, для которой почти всюду на I $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Существенный интерес представляют те способы доопределения $F(t, x)$ в точках разрыва функции f, при которых полученное дифференциальное включение (2) пригодно для приближенного описания процессов в реальных физических системах. Пусть вне некоторой достаточно малой δ-окрестности множества M физическая система описывается дифференциальным уравнением (1). Тогда для построения множества $F(t, x)$ надо иметь некоторые сведения о поведении физической системы в этой δ-окрестности. Чтобы оправдать переход к математическому описанию (2) физической системы, надо показать, что при достаточно малых δ движение физической системы сколь угодно близко к некоторому решению дифференциального включения (2) (например, стремится к нему при $\delta \to 0$). Строгое обоснование возможности такого перехода при различных предположениях о поведении системы в δ-окрестности множества M будет дано в п. 3 § 8, а здесь приводятся наиболее часто применяемые способы доопределения функции $F(t, x)$ на множестве M.

Следующее доопределение а) применимо, в частности, к системам с малым запаздыванием того или иного рода (точнее см. 1° — 3° п. 3 § 8), а также к некоторым системам с сухим трением.

а) Простейшее выпуклое доопределение [93]. Для каждой точки $(t, x) \in G$ пусть $F(t, x)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(t, x^*)$, когда $(t, x^*) \notin M$, $x^* \to x$, $t = \mathrm{const}$. *Решением* уравнения (1) называется решение включения (2) с только что построенным $F(t, x)$. Так как M — множество меры нуль, то при почти всех $t \in I$ мера сечения множества M плоскостью $t = \mathrm{const}$ равна нулю ([64], стр. 371). При таких t множество $F(t, x)$ определено для всех $(t, x) \in G$.

В точках непрерывности функции f множество $F(t, x)$ состоит из одной точки $f(t, x)$ и решение удовлетворяет уравнению (1) в обычном смысле. Если же точка $(t, x) \in M$ лежит на границах сечений двух или нескольких областей $G_1, \ldots, G_k$ плоскостью $t = \text{const}$, то множество $F(t, x)$ есть отрезок, выпуклый многоугольник или многогранник с вершинами $f_i(t, x)$, $i \leqslant k$, где

$$f_i(t, x) = \lim_{(t, x^*) \in G_i,\ x^* \to x} f(t, x^*). \tag{3}$$

Все точки $f_i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, k)$ содержатся в $F(t, x)$, но не обязательно, чтобы все они являлись вершинами.

Рассмотрим случай, когда функция $f(t, x)$ разрывна на гладкой поверхности S, задаваемой уравнением $\varphi(x) = 0$. Поверхность S делит свою окрестность в пространстве x на области G^- и G^+. Пусть при $t = \text{const}$ и приближении точки x^* к точке $x \in S$ из областей G^- и G^+ функция $f(t, x^*)$ имеет предельные значения

$$\lim_{\substack{x^* \in G^-,\\ x^* \to x}} f(t, x^*) = f^-(t, x), \qquad \lim_{\substack{x^* \in G^+,\\ x^* \to x}} f(t, x^*) = f^+(t, x).$$

Тогда множество $F(t, x)$ есть отрезок, соединяющий концы векторов $f^-(t, x)$ и $f^+(t, x)$. Здесь и далее считаем, что эти векторы проведены из точки x.

Если этот отрезок при $t_1 < t < t_2$ лежит с одной стороны от плоскости P, касательной к поверхности S в точке x, то решения при этих t переходят с одной стороны поверхности S на другую (рис. 3).

Если этот отрезок пересекается с плоскостью P, то точка пересечения является концом вектора $f^0(t, x)$, определяющего скорость движения $\dot{x} = f^0(t, x)$ по поверхности S в пространстве x (рис. 4). Это значит, что функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{x} = f^0(t, x), \tag{4}$$

в силу определения (2) считается решением уравнения (1). Если $f^0 \neq f^-$, $f^0 \neq f^+$, то такое решение часто называют *скользящим режимом*. Разумеется, непрерывная функция $x(t)$, которая на одной части рассматриваемого интервала времени проходит в области G^- (или в G^+) и там удовлетворяет уравнению (1), а на оставшейся части проходит по поверхности S и удовлетворяет уравнению (4), также считается решением уравнения (1) в смысле определения (2).

Все ли такие движения осуществляются в реальных физических системах? Здесь надо различать два основных случая. Пусть $f_N^-(t, x)$ и $f_N^+(t, x)$ — проекции векторов $f^-(t, x)$ и $f^+(t, x)$ на нормаль к поверхности S в точке x; нормаль направлена в сторону области G^+.

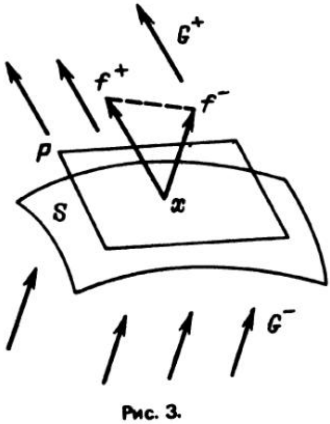


Рис. 3.

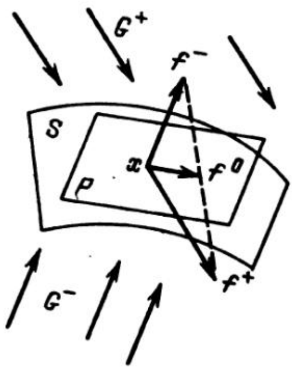


Рис. 4.

Если с обеих сторон от поверхности S векторы $f(t, x)$ направлены к этой поверхности, т.е. $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, то вблизи поверхности S с обеих сторон все решения приближаются к ней при возрастании t и ни одно решение не может сойти с S. Поэтому решение, которое в какой-либо момент t_1 проходит через точку, лежащую на S, будет при $t > t_1$ оставаться на S.

Если же с обеих сторон от поверхности S векторы $f(t, x)$ направлены от этой поверхности, т.е. $f_N^- < 0$, $f_N^+ > 0$, то решение, проходящее при $t = t_1$ через точку поверхности S, при $t > t_1$ может или сойти с поверхности S в область G^-, или сойти в область G^+, или оставаться на S. В последнем случае оно может сойти с S в любой момент, поэтому движение по поверхности S в случае $f_N^- < 0$, $f_N^+ > 0$ неустойчиво и не осуществляется в реальных системах.

Легко подсчитать, что в уравнении (4)

$$f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha) f^-, \quad \alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{5}$$

где f_N^- и f_N^+ определены выше. В самом деле, отрезок, соединяющий концы векторов f^- и f^+, выражается первой из формул (5), где α меняется от 0 до 1; из условия $f_N^0 = \alpha f_N^+ + (1-\alpha) f_N^- = 0$ находим указанное в (5) значение α. Если поверхность S задается уравнением $\varphi(x) = 0$ и $\nabla\varphi \equiv \mathrm{grad}\,\varphi \neq 0$, то

$$f_N^- = \frac{(\nabla\varphi)\cdot f^-}{|\nabla\varphi|}, \quad f_N^+ = \frac{(\nabla\varphi)\cdot f^+}{|\nabla\varphi|}, \quad \alpha = \frac{(\nabla\varphi)\cdot f^-}{(\nabla\varphi)\cdot(f^- - f^+)} \tag{6}$$

(произведения векторов — скалярные).

Если поверхность разрыва функции $f(t, x)$ задается уравнением $\varphi(t, x) = 0$, то для отыскания вектора $f^0(t, x)$ надо провести такое же построение в пространстве t, x с $(n+1)$-мерными векторами $(1, f^+)$ и $(1, f^-)$. Тогда вектор f^0 будет выражаться опять первой из формул (5), но при

$$\alpha = \frac{\varphi_t + (\nabla\varphi)\cdot f^-}{(\nabla\varphi)\cdot(f^- - f^+)}, \quad \varphi_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right). \tag{7}$$

Если весь отрезок с концами f^- и f^+ лежит на плоскости P, то скорость движения f^0 по поверхности S определяется неоднозначно.

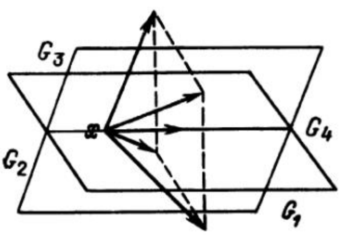


Рис. 5.

Аналогичным образом на основе определения (2) можно найти скорость движения по пересечению поверхностей разрыва (рис. 5). Эта скорость определяется однозначно или неоднозначно в зависимости от того, имеет ли множество $F(t, x)$ одну или больше общих точек с касательной к этому пересечению. Если общих точек нет, то вблизи рассматриваемой точки нет решений, проходящих по пересечению этих поверхностей разрыва. В п. 3 указывается, как определить, какой из этих случаев имеет место, и как найти скорость движения по пересечению поверхностей разрыва.

Данное выше определение решения можно видоизменить ([94], стр. 40). Во-первых, можно множество предельных значений функции $f(t, x^*)$ при $(t, x^*) \notin M$, $x^* \to x$, $t = \text{const}$ заменить множеством предельных значений функции $f(t^*, x^*)$ при $(t^*, x^*) \notin M$, $t^* \to t$, $x^* \to x$.

Оказывается, что в этом случае определение решения будет равносильно первоначальному для широкого класса уравнений с кусочно непрерывными правыми частями (см. ниже п. 1 § 6). Теория таких уравнений допускает более простое изложение, но зато такие уравнения не охватывают уравнений типа Каратеодори.

Во-вторых, можно считать, что данная функция $f(t, x)$ принимает заранее заданные значения в точках ее разрыва, и не исключать эти точки при определении множества предельных значений функции f.

В некоторых случаях множество $F(t, x)$ в (2) в точках разрыва функции f нельзя определить, зная только значения функции f в точках ее непрерывности. Например, в механической системе с сухим трением

$$\dot{u} = v, \qquad m\dot{v} = -g(u) - f(v) + e(t)$$

(m — масса тела, u — его отклонение, $g(u)$ — упругая сила, $f(v)$ — сила трения, являющаяся нечетной и разрывной при $v = 0$ функцией скорости v, $e(t)$ — внешняя сила) трение покоя $f(0)$ может принимать любое значение между своими наибольшим и наименьшим значениями f_0 и $-f_0$. Если $f_0 = \lim\limits_{v \to +0} f(v)$, то применимо доопределение а). Если же $f_0 > \lim\limits_{v \to +0} f(v)$, то движение с нулевой начальной скоростью зависит не только от значений функции $f(v)$ в областях ее непрерывности, но и от величины f_0. Доопределение а) тогда неприменимо. В обоих случаях систему можно записать в виде включения (2). Множество $F(t, x)$ при $v \neq 0$ — точка, а при $v = 0$ — отрезок, длина которого зависит от f_0.

Следовательно, множество $F(t, x)$ не всегда определяется предельными значениями функции $f(t, x)$ из (1), и в общем случае это множество надо задавать, используя какие-то сведения о рассматриваемой системе.

Рассмотрим еще пример такого рода ([5], стр. 148; [95]):

$$\dot{x} = Ax + by_1 + cy_2, \qquad y_1 = \operatorname{sgn} x_1, \qquad y_2 = \operatorname{sgn} x_1,$$

где A — матрица, b, c, x — векторы, x_1 — первая координата вектора x. Пусть функции y_1 и y_2 в физической системе реализуются с помощью различных реле и при $x_1 = 0$ величины y_1 и y_2 могут принимать любые значения от -1 до $+1$. Тогда вследствие неидеальности реле равенство $y_1 = y_2$ может выполняться не в каждый момент времени. Чтобы это подчеркнуть, пишут $y_1 = \operatorname{sgn}_1 x_1$, $y_2 = \operatorname{sgn}_2 x_1$. Если записать систему в виде (2), то при $x_1 = 0$ $F(x)$ есть множество точек

$$Ax + bu_1 + cu_2 \quad (-1 \leqslant u_1 \leqslant 1;\ -1 \leqslant u_2 \leqslant 1).$$

Если векторы b и c не являются одинаково направленными, то это множество существенно шире множества точек $Ax + (b + c)u$ $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$, получаемого при доопределении а).

Необходимость охватить такие системы приводит к следующему общему способу ([95], [96]; [5], стр. 151) построения множества $F(t, x)$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t, x), \ldots, u_r(t, x)), \tag{8}$$

где $x \in R^n$, вектор-функция $f(t, x, u_1, \ldots, u_r)$ непрерывна по совокупности аргументов, а скалярные или векторные функции $u_i(t, x)$ разрывны соответственно на множествах M_i, $i = 1, \ldots, r$, которые могут иметь общие точки и даже совпадать. В каждой точке (t, x) разрыва функции u_i должно быть задано замкнутое множество $U_i(t, x)$ — множество возможных значений аргумента u_i функции $f(t, x, u_1, \ldots, u_r)$. Предполагается, что при $i \neq j$ аргументы u_i и u_j могут независимо друг от друга пробегать соответственно множества $U_i(t, x)$ и $U_j(t, x)$. Обычно это условие выполнено, если функции $u_i(t, x)$ и $u_j(t, x)$ описывают различные независимые составные части (блоки) физической системы. В точках, где функция $u_i(t, x)$ непрерывна, множество $U_i(t, x)$ состоит из одной точки $u_l(t, x)$. В точках разрыва функции $u_l(t, x)$ необходимо, чтобы множество $U_l(t, x)$ содержало все точки, предельные для точек любых последовательностей вида $v_k \in U_l(t, x_k)$, где $x_k \to x$, $k = 1, 2, \ldots$ (или $v_k \in U_l(t_k, x_k)$, где $t_k \to t$, $x_k \to x$, $k = 1, 2, \ldots$). Обычно требуют, чтобы множество $U_l(t, x)$ было выпуклым (если $u_l(t, x)$ — скалярная функция, то $U_l(t, x)$ — отрезок или точка). Пусть

$$F_1(t, x) = f(t, x, U_1(t, x), \ldots, U_r(t, x)) \tag{9}$$

— множество значений функции $f(t, x, u_1, \ldots, u_r)$, когда t, x постоянны, а $u_1, \ldots, u_r$ независимо друг от друга пробегают соответственно множества $U_1(t, x), \ldots, U_r(t, x)$. Решениями дифференциального уравнения (8) называются решения дифференциального

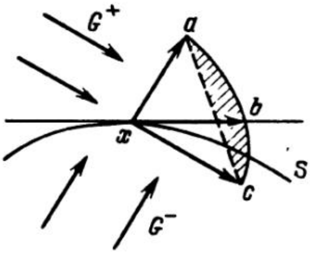


Рис. 6.

включения (2), где $F(t, x) \equiv F_1(t, x)$, как в [7], [97], или $F(t, x) \equiv \mathrm{co}\,F_1(t, x)$, как в [95]. Частными случаями такого способа построения функции $F(t, x)$ являются как доопределение а), так и изложенные ниже доопределения б) и в).

б) Доопределение методом эквивалентного уравнения ([7], стр. 37). Оно применяется к уравнениям вида (8), где f — непрерывная вектор-функция, $u_i(t, x)$ — скалярная функция, разрывная только на гладкой поверхности S_i $(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \ldots, r$. Допускаются пересечения и даже совпадения этих поверхностей.

В точках, принадлежащих одной или одновременно нескольким поверхностям, например поверхностям $S_1, \ldots, S_m$ (здесь $1 \leqslant m \leqslant r$), полагают (если решение не может сойти тут же с такой поверхности или с пересечения этих поверхностей)

$$\dot{x} = f(t, x, u_1^{eq}(t, x), \ldots, u_m^{eq}(t, x), u_{m+1}(t, x), \ldots, u_r(t, x)), \tag{10}$$

где *эквивалентные управления* $u_1^{eq}, \ldots, u_m^{eq}$ определяются так, чтобы вектор f в (10) касался поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ и чтобы значение $u_i^{eq}(t, x)$ содержалось в отрезке с концами $u_i^-(t, x)$, $u_i^+(t, x)$, где u_i^-, u_i^+ — предельные значения функции u_i с обеих сторон поверхности S_i, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, функции $u_i^{eq}(t, x)$, $i = 1, \ldots, m$, определяются из системы уравнений

$$\nabla\varphi_i(x) \cdot f(t, x, u_1^{eq}, \ldots, u_m^{eq}, u_{m+1}(t, x), \ldots, u_r(t, x)) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Решением называется абсолютно непрерывная вектор-функция, которая вне поверхностей S_i удовлетворяет уравнению (8), а на этих поверхностях и их пересечениях — уравнениям вида (10) (при почти всех t).

Например, в случае $r = 1$ конец b вектора $f(t, x, u^{eq}(t, x))$ лежит на пересечении касательной к S в точке x с дугой abc, которую пробегает конец вектора $f(t, x, u)$, когда u меняется от $u^-(t, x)$ до $u^+(t, x)$ (рис. 6).

Уравнение (8), доопределенное указанным образом, сводится к дифференциальному включению $\dot{x} \in F_1(t, x)$. Множество $F_1(t, x)$ определено в (9), где $U_i(t, x)$ — отрезок с концами $u_i^-(t, x)$ и $u_i^+(t, x)$; для тех u_i, которые непрерывны в точке (t, x), $U_i(t, x)$ является точкой $u_i(t, x)$. Правая часть (10) есть вектор с концом в точке пересечения множества $F_1(t, x)$ с касательной к пересечению поверхностей $S_1, \ldots, S_m$. На рис. 6 множество $F_1(t, x)$ есть дуга abc, а правая часть (10) есть вектор xb.

Для тех случаев, когда $u_1, \ldots, u_m$ входят в уравнение (8) линейно, в п. 3 будет получено явное выражение для скорости движения (10) по пересечению поверхностей разрыва $S_1, \ldots, S_m$.

в) Общее доопределение из [95]. Оно применяется к уравнениям вида (8), где функция f непрерывна по $t, x, u_1, \ldots, u_r$, а каждая из функций $u_i(t, x)$ разрывна только на поверхности S_i $(\varphi_i(t, x) = 0)$, $i = 1, \ldots, r$.

Пусть $U_i(t, x)$ и $F_1(t, x)$ те же, что в б), а $F_2(t, x)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество $F_1(t, x)$. *Решением* уравнения (8) называется решение включения

$$\dot{x} \in F_2(t, x). \tag{11}$$

Движение по поверхности разрыва S $(\varphi(x) = 0)$ может происходить только со скоростью $\dot{x} \in K(t, x)$, где $K(t, x)$ — пересечение множества $F_2(t, x)$ с плоскостью, касательной к S в точке x. В случае, изображенном на рис. 6, множество $F_2(t, x)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее дугу abc. Если эта дуга лежит в одной плоскости, то множество $F_2(t, x)$ — сегмент между этой дугой и ее хордой, заштрихованный на рис. 6, а $K(t, x)$ — отрезок, являющийся пересечением этого сегмента с касательной к S в точке x.

Если функция f нелинейна по $u_1, \ldots, u_r$, то, вообще говоря, множество $K(t, x)$ содержит более одной точки и скорость движения по S определяется неоднозначно.

Сравним определения а), б), в). Уравнение (8) можно записать в виде (1) и применить к нему определение а). Так как при этом множество $F_2(t, x)$ содержит множества $F(t, x)$ и $F_1(t, x)$ из (2) и (9), то каждое решение в смысле определения а) и каждое решение в смысле определения б) является также решением в смысле определения в). Обратное, вообще говоря, неверно (на рис. 6 множество F — хорда ac, F_1 — дуга abc, F_2 — заштрихованный сегмент).

Если же функция f линейна по $u_1, \ldots, u_r$, то $F_2 = F_1$ и определения б) и в) совпадают. Если, кроме того, все поверхности S_i различны и в точках их пересечения векторы нормалей линейно независимы, то множества F, F_1, F_2 совпадают, тогда и все три определения а), б), в) совпадают.

Имеются также другие определения решения как для общего случая, так и для случая правой части, разрывной на одной или нескольких поверхностях. Определения в работах [97] — [99] близки к изложенным выше. В работах [7], [95], [100] — [103] рассматриваются предельные переходы, приводящие к тому или иному определению решения. Определения из работ [104] — [109] неудобны по тем или иным причинам (в [104], [105] движения по поверхностям разрыва считаются невозможными, а в [106] — [109] понятие решения зависит от выбора направлений осей координат $x_1, \ldots, x_n$), не отражают характера движения в реальных системах и не нашли применений. В работах [110], [111] для уравнения Каратеодори ослабляется требование непрерывности правой части по x. В работах [112] — [117] проводится обзор различных определений решения и их сравнение. Обзор истории вопроса о понятии решения разрывной системы имеется в [95].

3. Укажем основные случаи, когда скорость движения по пересечению поверхностей разрыва $S_1, \ldots, S_m$ определяется однозначно, и приведем выражение для этой скорости в некоторых случаях.

Рассмотрим случай ([7], стр. 39), когда в уравнение (8) управления $u_1, \ldots, u_m$, разрывные соответственно на поверхностях S_i $(\varphi_i(x) = 0)$, $i = 1, \ldots, m$, входят линейно и векторы $p_i = \nabla\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы при $x \in S$. В этом случае определения а), б), в) совпадают. Тогда уравнение (8) вблизи поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ и их пересечения S можно записать в виде

$$\dot{x} = f_0(t, x) + B(t, x)u(t, x), \tag{12}$$

где $u(t, x)$ — вектор $(u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $B(t, x)$ — матрица $n \times m$, $^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования, $1 \leqslant m \leqslant r$. Остальные управления $u_{m+1}, \ldots, u_r$ непрерывны на S, и несущественно, каким образом от них зависят непрерывные функции f_0 и B.

Чтобы получить движение по пересечению поверхностей $S_1, \ldots, S_m$, надо так подобрать вектор $u = u^{eq}$ в (12), чтобы вектор $\dot{x}$ касался $S_1, \ldots, S_m$, т.е. был ортогонален всем векторам p_i, $i = 1, \ldots, m$. Пусть G — матрица $m \times n$, строки которой — векторы p_i. Тогда

$$G\dot{x} = Gf_0 + GBu^{eq} = 0, \quad u^{eq} = -(GB)^{-1} Gf_0, \tag{13}$$

если $\det GB \neq 0$. Если каждая координата найденного вектора u^{eq} удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered} u_i^-(t,x) \leqslant u_i^{eq}(t,x) \leqslant u_i^+(t,x) \\ (\text{или } u_i^+(t,x) \leqslant u_i^{eq}(t,x) \leqslant u_i^-(t,x)), \end{gathered} \tag{14}$$

то, подставляя вектор u^{eq} в (12), получаем вектор скорости движения по пересечению S,

$$\dot{x} = f_0 - B(GB)^{-1} Gf_0. \tag{15}$$

Если хотя бы для одной из координат u_i^{eq} условие (14) не выполнено, то движений по S не существует. Их нет и в случае, когда $\det GB = 0$ и $\operatorname{rang} GB < \operatorname{rang}(GB, Gf_0)$, где в правой части стоит ранг матрицы GB, дополненной столбцом Gf_0. Дальнейшее исследование случая $\det GB = 0$ см. в [7] (стр. 70).

Уравнение [118]

$$\dot{x} = g_1(t,x) + \ldots + g_m(t,x), \tag{16}$$

где каждая из функций $g_i(t,x)$ разрывна на своей поверхности S_i $(\varphi_i(x) = 0)$, а решения понимаются в смысле определения а), сводится к (12). При этом предполагается, что пересечение S поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ есть гладкая $(n-m)$-мерная гиперповерхность и что окрестность каждой точки $x \in S$ делится поверхностями $S_1, \ldots, S_m$ на 2^m областей так, что каждые две области лежат с разных сторон хотя бы одной поверхности (это условие выполнено, если векторы $\nabla\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы при $x \in S$).

Чтобы свести уравнение (16) к (12), обозначим $g_j^-(t,x)$ $(g_j^+(t,x))$ непрерывное продолжение функции $g_j(t,x)$ из односторонней окрестности S_j^- (соответственно из S_j^+) поверхности S_j в ее двустороннюю окрестность,

$$g_j^0 = \frac{g_j^+ + g_j^-}{2}, \quad h_j = \frac{g_j^+ - g_j^-}{2}, \quad f_0 = g_1^0 + \ldots + g_m^0.$$

Тогда уравнение (16) записывается в виде

$$\dot{x} = f_0(t,x) + \sum_{j=1}^{m} u_j h_j(t,x), \tag{17}$$

где $u_j = -1$ в S_j^-, $u_j = 1$ в S_j^+. Уравнение (17) совпадает с (12), если $B(t,x)$ — матрица со столбцами h_j, $j = 1, \ldots, m$. Условия (14) принимают вид $-1 \leqslant u_j^{eq} \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, m$. Строки матрицы G теперь — любые линейно независимые векторы $p_1(x), \ldots, p_m(x)$, ортогональные S в точке x, не обязательно совпадающие с $\nabla\varphi_i(x)$.

Рассмотрим еще один довольно общий случай, когда скорость движения по пересечению поверхностей разрыва для решений в смысле определения а) определяется однозначно.

Пусть S — гладкая l-мерная поверхность в n-мерном пространстве x. Пусть к S примыкает k n-мерных областей $G_1, \ldots, G_k$, в каждой из которых при $a < t < b$ вектор-функция $f(t,x)$ непрерывна вплоть до границы, т.е.

$$f(t,x) = f^j(t,x), \quad x \in G_j, \quad j = 1, \ldots, k,$$

f^j непрерывна в замыкании области G_j. Таким образом, S является пересечением границ всех областей $G_1, \ldots, G_k$.

При фиксированных $t \in (a, b)$, $x \in S$ наименьшее выпуклое замкнутое множество $F(t, x)$, содержащее точки $f^j(t, x)$, $j = 1, \ldots, k$, есть множество всех точек вида

$$v = \alpha_1 f^1(t, x) + \ldots + \alpha_k f^k(t, x), \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \Sigma \alpha_j = 1. \tag{18}$$

Для решения $x(t)$ уравнения (1) почти всюду $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$. Если это решение идет по гиперповерхности S, то почти всюду $\dot{x}(t) \in P(x(t))$, где $P(x)$ — l-мерная гиперплоскость, касательная к S в точке x. Следовательно, почти всюду

$$\dot{x}(t) \in K(t, x(t)), \quad K(t, x) = F(t, x) \cap P(t, x),$$

и для существования такого решения множество $K(t, x)$ должно быть не пусто.

Пусть $p_1, \ldots, p_{n-l}$ — какие-либо линейно независимые векторы, ортогональные S в точке x. Тогда $K(t, x)$ есть множество тех векторов вида (18), которые ортогональны векторам $p_1, \ldots, p_{n-l}$. Для таких векторов $v \in K(t, x)$ коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ удовлетворяют системе $1+n-l$ уравнений

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1, \quad \alpha_1 p_i f^1 + \ldots + \alpha_k p_i f^k = 0, \quad i = 1, \ldots, n-l. \tag{19}$$

Следовательно, для непустоты множества $K(t, x)$ необходимо и достаточно существование неотрицательного решения $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ системы (19). Для того чтобы скорость $f^0(t, x)$ движения по S определялась однозначно, необходимо и достаточно, чтобы множество $K(t, x)$ состояло только из одной точки, т.е. достаточно, чтобы система (19) имела одно неотрицательное решение и не имела других неотрицательных решений.

Пусть M^* — матрица коэффициентов системы (19), матрица M получается из M^* отбрасыванием первой строки, состоящей из единиц, а матрица M_j получается из M вычеркиванием j-го столбца. Если $k = n-l+1$, то пусть

$$\det M^* = D, \quad (-1)^{j+1} \det M_j = A_{1j},$$

т.е. A_{1j} — алгебраические дополнения элементов первой строки детерминанта D, и $A_{11} + A_{12} + \ldots + A_{1k} = D$.

Т е о р е м а 1 [118]. а) *Если* $\operatorname{rang} M^* = \operatorname{rang} M$, *то множество* $K(t, x)$ *пусто.* б) *Если*

$$k = n - l + 1, \quad \operatorname{rang} M^* = k > \operatorname{rang} M,$$

то в случае, когда среди чисел A_{1j}, $j = 1, \ldots, k$, *нет чисел разных знаков, множество* $K(t, x)$ *состоит из одного вектора*

$$f^0(t, x) = \alpha_1 f^1(t, x) + \ldots + \alpha_k f^k(t, x), \quad \alpha_j = A_{1j}/D, \tag{20}$$

а в противном случае множество $K(t, x)$ *пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае а) первая строка матрицы M^* является линейной комбинацией остальных строк. Вычитая из первого уравнения системы (19) эту линейную комбинацию остальных уравнений, получаем противоречие $0 = 1$. Следовательно, система (19) не имеет решений, и множество $K(t, x)$ пусто.

В случае б) детерминант системы (19) равен $D \neq 0$ и система имеет единственное решение. Применяя правило Крамера $\alpha_j = D_j/D$ и замечая, что $D_j = A_{1j}$, получаем (20).

Если среди чисел A_{1j} нет чисел разных знаков, то среди α_j — тоже и из 1-го уравнения (19) следует, что все $\alpha_j \geqslant 0$. Если же среди чисел A_{1j} есть числа разных знаков, то среди α_j — тоже. Тогда $f^0(t, x)$ в (20) не принадлежит выпуклому множеству $F(t, x)$ и $K(t, x)$ пусто.

З а м е ч а н и е 1. При $k < n - l + 1$ утверждение а) сохраняется, а утверждение б) останется справедливым, если из системы (19) вычеркнуть уравнения, линейно зависимые от остальных, и для полученной системы построить матрицы M^*, M, M_j.

З а м е ч а н и е 2. Пусть после вычеркивания имеем $\operatorname{rang} M^* = r > \operatorname{rang} M$. Если из матрицы M^* можно вычеркнуть такие $k-r$ столбцов, что у полученной матрицы среди алгебраических дополнений A'_{1j} элементов первой строки нет чисел разных знаков, то множество $K(t, x)$ не пусто, а если таких $k-r$ столбцов не найдется, то пусто.

Замечание 1 и первая часть замечания 2 доказываются подобно теореме 1. При этом полагаем равными нулю те α_j, которые соответствуют вычеркнутым столбцам. Вторая часть доказывается с использованием свойств выпуклых множеств (см. [118]).

§ 5. Выпуклые множества и многозначные функции

Здесь излагаются известные свойства замкнутых и выпуклых множеств в n-мерном пространстве, используемые в дальнейшем, и необходимые сведения о многозначных функциях.

1. Числа и точки n-мерного пространства R^n везде далее обозначаются малыми буквами, а множества и матрицы — большими. Если a и b — точки с координатами $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ соответственно, а γ — число, то $a + b$, $a - b$, γa — точки с координатами (соответственно) $a_i + b_i$, $a_i - b_i$, γa_i $(i = 1, \dots, n)$. Через $\bar{A}$ обозначается замыкание множества A, через ϕ — пустое множество. Расстояние между точками или множествами обозначается буквой ρ:

$$\rho(a, b) = |a-b| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2},$$

$$\rho(a, B) = \inf_{b \in B} \rho(a, b), \quad \rho(A, B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} \rho(a, b).$$

Множество A называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Множество A называется *выпуклым*, если для любых двух его точек a и b все точки отрезка, соединяющего a и b, принадлежат этому множеству, т.е. если для любых $a \in A$, $b \in B$ имеем $\alpha a + (1-\alpha) b \in A$ для всех α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Легко доказываются следующие известные утверждения:

1) Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

2) Пересечение любого множества замкнутых (или выпуклых) множеств есть замкнутое (соответственно выпуклое) множество.

3) В непустом замкнутом множестве A всегда есть точка a, ближайшая к данной точке b, т.е. такая, что $\rho(b, a) = \rho(b, A)$.

4) $\rho(b, A) = \rho(b, \bar{A})$, $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

5) Функция $\varphi(x) = \rho(x, A)$ непрерывна,

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Лемма 1. *Если непустые замкнутые множества A и B не имеют общих точек, B ограничено, то существуют такие точки $a \in A$, $b \in B$, что*

$$\rho(A, B) = \rho(a, b) > 0.$$

Доказательство. Функция $\varphi(x) = \rho(x, A)$ непрерывна. Поэтому $\inf\limits_{x \in B} \rho(x, A)$ достигается в некоторой точке $b \in B$. В силу 3) найдется такая точка $a \in A$, что $\rho(b, A) = \rho(b, a) > 0$ (так как $A \cap B = \phi$). Для любых точек $x \in B$, $y \in A$ имеем

$$\rho(x, y) \geqslant \rho(x, A) \geqslant \rho(b, A) = \rho(b, a) > 0.$$

Следовательно, $\rho(B, A) \geqslant \rho(b, a) > 0$. Но $a \in A$, $b \in B$, поэтому $\rho(B, A) \leqslant \rho(a, b)$. Итак, $\rho(B, A) = \rho(b, a) > 0$.

Если оба множества A и B — неограниченные, то утверждение леммы 1 неверно. Пример: A — одна ветвь гиперболы, B — асимптота гиперболы.

Лемма 2. *В непустом замкнутом выпуклом множестве A есть только одна точка a, ближайшая к данной точке b, т.е. такая, что $\rho(b, a) = \rho(b, A)$.*

Доказательство. Ближайшая точка существует (см. 3)). Предположим, что имеются две такие точки a_1 и a_2, и d — середина соединяющего их отрезка. Тогда

$$d \in A, \quad \rho(b, d) < \rho(b, a_1) = \rho(b, a_2),$$

так как множество A выпукло, а bd — высота равнобедренного треугольника a_1a_2b. Значит, точки a_1 и a_2 — не ближайшие к b.

Следующие леммы имеются, например, в [119].

Л е м м а 3. *Пусть $b \notin A$, A — непустое замкнутое выпуклое множество. Тогда существует $(n-1)$-мерная плоскость, разделяющая точку b и множество A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — ближайшая к b точка множества A. Проведем плоскость $P \perp ab$ через любую неконцевую точку m отрезка ab. Если бы нашлась точка $c \in A$, лежащая или на P, или с той же стороны от P, что и точка b, то угол bac был бы острым и нашлась бы точка $d \in ac$, которая ближе к b, чем точка a (рис. 7). Так как $a \in A$, $c \in A$, A выпукло, то $d \in A$. Это противоречит тому, что a — ближайшая к b точка множества A.

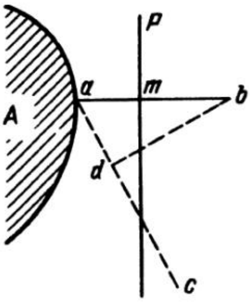


Рис. 7.

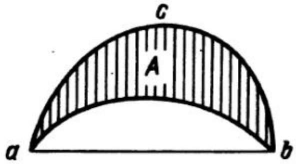


Рис. 8.

Л е м м а 4. *Замкнутое выпуклое множество A есть пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — такое пересечение. Тогда $A \subset M$. Пусть $b \notin A$. По лемме 3 найдется плоскость P, делящая пространство на две части Q и S, причем $A \subset Q$, $b \in S$. Тогда A содержится в замкнутом полупространстве $\overline{Q}$, а $b \notin \overline{Q}$. Значит, $b \notin M$. Итак, $A = M$.

Л е м м а 5. *Если A и B — замкнутые выпуклые множества в R^n без общих точек, множество B ограничено, то существует $(n-1)$-мерная плоскость, разделяющая A и B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки $a \in A$ и $b \in B$ те же, что в лемме 1. Плоскость $P \perp ab$, пересекающая отрезок ab в неконцевой точке, разделяет A и B. Это доказывается подобно лемме 3.

Лемма 5 неверна, если оба множества A и B — неограниченные. Пример: A — выпуклое множество на плоскости, ограниченное одной ветвью гиперболы, B — асимптота гиперболы.

Для выпуклого множества $A \in R^n$ $(n-1)$-мерная плоскость P называется *опорной*, если с одной стороны от P нет точек множества A, но такие точки есть или на P, или с другой стороны от P сколь угодно близко к P.

Л е м м а 6. *Через любую точку границы Γ замкнутого выпуклого множества A можно провести опорную плоскость.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in \Gamma$, точки $b_i \notin A$, $b_i \to a$ $(i \to \infty)$. По лемме 3 точка b_i отделена от A плоскостью P_i. Пусть v_i — вектор длины 1, $v_i \perp P_i$, v_i направлен от a к P_i. Тогда для всех $x \in A$, $y \in P_i$ имеем $v_i \cdot x < v_i \cdot y < v_i \cdot b_i$. Из последовательности v_i выберем сходящуюся подпоследовательность $v_{i_k} \to v$. Переходя по ней к пределу, получаем $v \cdot x \leqslant v \cdot a$ для всех $x \in A$, т.е. множество A лежит с одной стороны от плоскости $v \cdot x = v \cdot a$, а точка a — на этой плоскости. Следовательно, эта плоскость — опорная.

Наименьшее выпуклое (выпуклое замкнутое) множество, содержащее множество A, обозначается $\operatorname{co} A$ (соответственно $\overline{\operatorname{co}}\, A$). Множество $\operatorname{co} A$ ($\overline{\operatorname{co}}\, A$) всегда существует и является пересечением всех выпуклых (соответственно выпуклых замкнутых) множеств, содержащих A. В силу леммы 4 $\overline{\operatorname{co}}\, A$ является также пересечением всех замкнутых полупространств, содержащих A.

П р и м е р ы. 1) Множество A состоит из двух точек a и b, тогда $\mathrm{co}\,A$ — отрезок ab. 2) Множество A состоит из трех точек a, b, c, тогда $\mathrm{co}\,A$ — треугольник abc. 3) Множество A заштриховано на рис. 8, тогда $\mathrm{co}\,A$ — полукруг abc.

Выпуклой комбинацией точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$ называется каждая точка, записываемая в виде

$$x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k, \tag{1}$$

где

$$\alpha_i \geqslant 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k), \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1. \tag{2}$$

Выпуклая комбинация является линейной комбинацией. Не всякая линейная комбинация является выпуклой, а только такая, у которой коэффициенты удовлетворяют условиям (2).

Л е м м а 7. *Если множество A состоит из конечного числа точек, то $\mathrm{co}\,A$ есть множество всех выпуклых комбинаций этих точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяется, что множество B точек вида (1) при условиях (2) замкнуто и выпукло; $B \supset A$, следовательно, $B \supset \mathrm{co}\,A$.

Любое замкнутое полупространство Q можно записать в виде $c \cdot x \leqslant \gamma$ (c — вектор). Если точки $x_i \in Q$, т.е. $c \cdot x_i \leqslant \gamma$, $i = 0, 1, \ldots, k$, то для каждой точки $x \in B$ из (1) и (2) следует $c \cdot x \leqslant \gamma$, т.е. $x \in Q$. Значит, $B \subset Q$. Множество $\mathrm{co}\,A$ есть пересечение всех таких полупространств Q, поэтому $B \subset \mathrm{co}\,A$. Итак, $B = \mathrm{co}\,A$.

Л е м м а 8. *Пусть c — вектор, A — множество и для всех $x \in A$ справедливо неравенство $c \cdot x \leqslant \gamma$. Тогда оно справедливо и для всех $x \in \overline{\mathrm{co}}\,A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию, множество A лежит в полупространстве Q, определяемом неравенством $c \cdot x \leqslant \gamma$. Так как $\overline{\mathrm{co}}\,A$ есть пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих A, то $\overline{\mathrm{co}}\,A \subset Q$, т.е. $c \cdot x \leqslant \gamma$ для всех $x \in \overline{\mathrm{co}}\,A$.

Т е о р е м а К а р а т е о д о р и. *Для любого ограниченного замкнутого множества $A \subset R^n$ любая точка $x \in \mathrm{co}\,A$ представима в виде* (1), *где $x_i \in A$, $i = 0, 1, \ldots, k$, числа α_i удовлетворяют условиям* (2) *и $k \leqslant n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [119] (стр. 9).

С л е д с т в и е. *Если множество A замкнуто и ограничено, то* $\mathrm{co}\,A = \overline{\mathrm{co}}\,A$.

Замкнутой ϵ-окрестностью M^ϵ множества M называется множество таких точек x, что $\rho(x, M) \leqslant \epsilon$. Очевидно, M^ϵ — замкнутое множество; $(\overline{M})^\epsilon = M^\epsilon$. Для любой точки $a \notin M^\epsilon$ имеем

$$\rho(a, M^\epsilon) = \rho(a, M) - \epsilon.$$

Л е м м а 9. *Если множество A ограничено, то*

$$(\mathrm{co}\,A)^\epsilon = \mathrm{co}(A^\epsilon). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b \notin (\mathrm{co}\,A)^\epsilon$, т.е. $\rho(b, \mathrm{co}\,A) = \alpha > \epsilon$. Найдется такая точка $a \in \overline{\mathrm{co}}\,A$, что $\rho(b, a) = \alpha$. Поместим начало координат в точку b и направим ось Ox_1 от b к a. Возьмем любое β, $\epsilon < \beta < \alpha$. Как в лемме 3, множество $\overline{\mathrm{co}}\,A$ лежит в области $x_1 > \beta$, множество A — тоже. Тогда A^ϵ лежит в полупространстве $x_1 \geqslant \beta - \epsilon$, $\mathrm{co}\,(A^\epsilon)$ — тоже (лемма 8) и $b \notin \mathrm{co}\,(A^\epsilon)$.

Пусть $b \notin \mathrm{co}\,(A^\epsilon)$. Направим ось Ox_1 от точки b к ближайшей точке c множества $\mathrm{co}\,(A^\epsilon)$. Тогда $\rho(b, c) = \gamma > 0$; $\mathrm{co}\,A^\epsilon$ лежит в области $x_1 > \delta$ $(0 < \delta < \gamma)$, A^ϵ — тоже. Значит, A лежит в полупространстве $x_1 \geqslant \delta + \epsilon$, $\mathrm{co}\,A$ — тоже, а $(\mathrm{co}\,A)^\epsilon$ — в полупространстве $x_1 \geqslant \delta$. Значит, $b \notin (\mathrm{co}\,A)^\epsilon$.

Итак, соотношения $b \notin (\mathrm{co}\,A)^\epsilon$ и $b \notin \mathrm{co}\,(A^\epsilon)$ равносильны. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Если множество A выпукло, то A^ϵ — тоже.*

В силу леммы 9 вместо $(\mathrm{co}\,A)^\epsilon$ и $\mathrm{co}\,(A^\epsilon)$ можно писать короче: $\mathrm{co}\,A^\epsilon$.

2. Если для всех $x \in M$ определена функция $f(x)$, то $f(M)$ — множество значений $f(x)$ для всех $x \in M$. В частности, $f(x)$ может быть линейной: $f(x) = Ax + b$, A — матрица, тогда $f(M) = AM + b$.

Аналогично, если c — число или вектор, то cM — множество всех значений произведения cx, где c пробегает множество M; $M + N$ (или $f(M, N)$) — множество значений суммы $x + y$ (или функции $f(x, y)$), когда x пробегает множество M, а y — множество N.

Л е м м а 10. *Если множество M ограничено, замкнуто, а функция $f(x)$ непрерывна, то множество $f(M)$ замкнуто. Если же M выпукло, $f(x) = Ax + b$, то множество $f(M) = AM + b$ выпукло.*

Доказывается непосредственно с помощью определений.

Л е м м а 11. *Если множество M ограничено и замкнуто, то*

$$\operatorname{co}(AM + b) = A\operatorname{co}M + b.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 10 и из того, что $\operatorname{co}M$ есть пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих M, а линейное преобразование переводит полупространство в полупространство.

Необходимость использования выпуклых множеств при исследовании дифференциальных включений видна, например, из следующих лемм.

Л е м м а 12 (о среднем значении вектор-функции). *Если M — ограниченное замкнутое множество, $v(t) \in M$ при $a \leqslant t \leqslant b$, то*

$$v_{\text{сред}} \equiv \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b v(t)\,dt \in \operatorname{co} M. \tag{4}$$

То же справедливо для среднего значения вектор-функции $v(x)$ на любом измеримом множестве конечной меры.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Беря разбиение области интегрирования (по Риману или Лебегу), получаем $v_{\text{сред}} = \lim S$,

$$S = \Sigma \frac{\Delta_i}{b-a} v(t_i), \quad \frac{\Delta_i}{b-a} = \alpha_i \geqslant 0, \quad \Sigma \alpha_i = 1.$$

Таким образом, интегральная сумма S есть выпуклая комбинация значений $v(t_i) \in M$, поэтому $S \in \operatorname{co} M$, $\lim S \in \overline{\operatorname{co}}\, M = \operatorname{co} M$.

Л е м м а 13. *Пусть при $a < t < b$ вектор-функции $x_k(t)$ абсолютно непрерывны, $x_k(t) \to x(t)$ и для каждого $k = 1, 2, \ldots$ почти всюду $\dot{x}_k(t) \in M$, M — ограниченное замкнутое множество.*

Тогда вектор-функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и $\dot{x}(t) \in \operatorname{co}M$ там, где $\dot{x}(t)$ существует, т.е. почти всюду на (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $|\dot{x}_k(t)| \leqslant l$, то для $t, t'' \in (a, b)$

$$|x_k(t'') - x_k(t')| = \Big|\int\limits_{t'}^{t''} \dot{x}_k(t)\,dt\Big| \leqslant l\,|t'' - t'|. \tag{5}$$

При $k \to \infty$ получаем, что функция $x(t)$ удовлетворяет такому же неравенству, значит, абсолютно непрерывна. По лемме 12

$$q_k = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} \dot{x}_k(s)\,ds \in \operatorname{co} M.$$

Поэтому

$$\lim_{k \to \infty} q_k = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \in \operatorname{co} M. \tag{6}$$

Функция $x(t)$ абсолютно непрерывна, поэтому почти всюду существует $\dot{x}(t)$. В силу (6) $\dot{x}(t) \in \operatorname{co}M$.

З а м е ч а н и е. Если множество M невыпукло, то при условиях леммы 13 нельзя гарантировать, что $\dot{x}(t) \in M$. Например, для последовательности "пилообразных" функций (рис. 9)

$$x_k(t) = t - \frac{2i}{k} \quad \left(\frac{2i}{k} \leqslant t \leqslant \frac{2i+1}{k}\right),$$

$$x_k(t) = \frac{2i+2}{k} - t \quad \left(\frac{2i+1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{2i+2}{k}\right),$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$, имеем почти всюду $\dot{x}_k(t) \in M$, множество M состоит из двух точек:

1 и -1. При $k \to \infty$

$$x_k(t) \to x(t) \equiv 0, \quad \dot{x}(t) \equiv 0 \notin M.$$

Таким образом, для дифференциального включения $\dot{x}(t) \in M$ в случае невыпуклого множества M предел равномерно сходящейся последовательности решений может не быть решением.

3. Близость двух непустых замкнутых множеств A и B в метрическом пространстве, в частности в R^n, можно характеризовать числами [120]

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \quad \beta(B, A) = \sup_{b \in B} \rho(b, A),$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B);\ \beta(B, A)\}.$$

На рис. 10 $\beta(A, B) = \rho(a, b)$, $\beta(B, A) = \rho(c, d)$, $\alpha(A, B) = \max\{\rho(a, b);\ \rho(c, d)\}$.

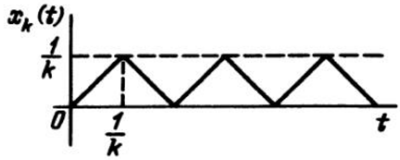


Рис. 9.

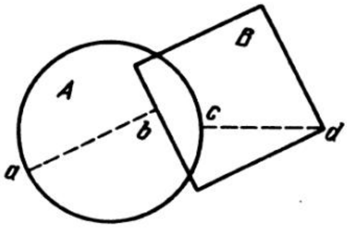


Рис. 10.

Если A и B — ограниченные множества, то эти числа конечны. Неравенство $\beta(A, B) \leqslant \epsilon$ равносильно тому, что множество A содержится в замкнутой ϵ-окрестности множества B, т.е. $A \subset B^\epsilon$, а $\alpha(A, B) \leqslant \epsilon$ — тому, что каждое из множеств A и B содержится в замкнутой ϵ-окрестности другого.

Для любых непустых замкнутых множеств A, B, C

$$0 \leqslant \rho(A, B) \leqslant \beta(A, B) \leqslant \alpha(A, B), \quad \alpha(A, B) = \alpha(B, A),$$

$$\beta(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset B, \quad \alpha(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B,$$

$$\alpha(A, C) \leqslant \alpha(A, B) + \alpha(B, C). \tag{7}$$

Докажем (7). Пусть $\alpha(A, B) = \delta$, $\alpha(B, C) = \epsilon$. Тогда $A \subset B^\delta$, $B \subset C^\epsilon$, поэтому $A \subset C^{\delta+\epsilon}$, $\beta(A, C) \leqslant \delta + \epsilon$; $B \subset A^\delta$, $C \subset B^\epsilon$, поэтому $C \subset A^{\delta+\epsilon}$, $\beta(C, A) \leqslant \delta + \epsilon$. Следовательно, $\alpha(A, C) \leqslant \delta + \epsilon$. Неравенство (7) доказано.

Таким образом, непустые замкнутые множества образуют метрическое пространство, в котором роль расстояния играет $\alpha(A, B)$, называемое *отклонением* множеств A и B *по Хаусдорфу*.

Если $A \subset R^n$, то $\sup\limits_{a \in A} |a|$ обозначаем $|A|$.

Пусть каждой точке p из множества $D \subset R^m$ поставлено в соответствие непустое замкнутое множество $F(p) \subset R^n$. Тогда $F(p)$ — многозначная функция. Ее график — множество таких точек $(p, q) \in R^m \times R^n$, что $p \in D$, $q \in F(p)$. Многозначные функции в дальнейшем обозначаются большими буквами, однозначные числовые и векторные функции — малыми. Используются обозначения

$$F(M) = \bigcup_{p \in M} F(p), \quad |F(M)| = \sup_{y \in F(M)} |y|.$$

Многозначная функция F называется *ограниченной* на множестве M, если $|F(M)| < \infty$, т.е. если все значения функции F в точках множества M содержатся в некотором шаре.

Многозначная функция $F(p)$ называется [120] *α-непрерывной* (или *непрерывной*) *в точке p, если* $\alpha(F(p'), F(p)) \to 0$ при $p' \to p$; функция $F(p)$ называется *β-непрерывной* (или *полунепрерывной сверху относительно включения*) *в точке p, если* $\beta(F(p'), F(p)) \to 0$ при $p' \to p$. Функция $F(p)$ называется α- или *β-непрерывной на множестве D*, если она

α- или β-непрерывна в каждой точке этого множества. Так как всегда $\beta(A, B) \leqslant \alpha(A, B)$, то из α-непрерывности функции следует ее β-непрерывность.

Л е м м а 14. *Пусть множество D замкнуто, а многозначная функция $F(p)$ ограничена в окрестности каждой точки $p \in D$.*

Тогда для β-непрерывности функции $F(p)$ на множестве D необходимо и достаточно, чтобы ее график Γ был замкнутым множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $F(p)$ β-непрерывна, а (p, q) — предельная точка ее графика. Это значит, что существуют последовательности

$$p_i \to p \in D, \quad q_i \to q, \quad q_i \in F(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\rho(q_i, F(p)) \leqslant \beta(F(p_i), F(p)) \to 0, \qquad \rho(q, F(p)) = 0.$$

Так как множество $F(p)$ замкнуто, то $q \in F(p)$, т.е. $(p, q) \in \Gamma$. Следовательно, Γ — замкнутое множество.

Пусть функция $F(p)$ не β-непрерывна на D. Тогда найдутся такие точки $p \in D$ и $p_i \to p$, что

$$\beta(F(p_i), F(p)) \geqslant \epsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Значит, имеются такие $q_i \in F(p_i)$, что $\rho(q_i, F(p)) \geqslant \epsilon$. В силу условия леммы последовательность $\{q_i\}$ ограничена. Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $q_{i_k} \to q$. Тогда $\rho(q, F(p)) \geqslant \epsilon$. Итак,

$$(p_{i_k}, q_{i_k}) \in \Gamma, \qquad (p_{i_k}, q_{i_k}) \to (p, q) \notin \Gamma,$$

т.е. множество Γ не замкнуто.

Л е м м а 15. *Пусть функция F β-непрерывна на компакте K и для каждого $p \in K$ множество $F(p)$ ограничено.*

Тогда функция F ограничена на K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противоположном случае найдутся

$$p_i \in K, \quad q_i \in F(p_i), \quad |q_i| \to \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Выберем сходящуюся подпоследовательность $p_{i_j} \to p \in K$. Из условий леммы следует, что

$$|F(p)| = a < \infty, \quad q_{i_j} \in F(p_{i_j}) \subset (F(p))^{\epsilon} \qquad (j > j_1(\epsilon)).$$

Тогда $|q_{i_j}| \leqslant a + \epsilon$. Это противоречит предположению $|q_i| \to \infty$.

Л е м м а 16. *Если для каждого $p \in D$ множество $H(p)$ не пусто, замкнуто, ограничено и многозначная фукция H β-непрерывна (или α-непрерывна), то и функция $F(p) = \operatorname{co} H(p)$ β-непрерывна (соответственно α-непрерывна).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $p_0 \in D$ и $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $p \in (p_0)^{\delta}$ имеем $H(p) \subset (H(p_0))^{\epsilon}$. По лемме 9

$$\operatorname{co} H(p) \subset \operatorname{co} [(H(p_0))^{\epsilon}] = [\operatorname{co} H(p_0)]^{\epsilon},$$

т.е. $F(p) \subset (F(p_0))^{\epsilon}$. Функция F β-непрерывна.

Если же функция H α-непрерывна, то справедливо сказанное выше и, кроме того, $H(p_0) \subset (H(p))^{\epsilon}$. Отсюда, подобно предыдущему, следует, что $F(p_0) \subset (F(p))^{\epsilon}$. Значит, функция F α-непрерывна.

§ 6. Дифференциальные включения

Здесь исследуются свойства правых частей дифференциальных включений, к которым были сведены в § 4 дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями. Устанавливается связь дифференциальных включений с уравнениями в контингенциях. Рассматриваются некоторые свойства измеримых многозначных функций.

1. Исследуем свойства многозначных функций, получаемых с помощью приемов, использованных в § 4.

Л е м м а 1. *Пусть $f(p)$ — ограниченная однозначная функция, $p \in D \subset R^m$, $f(p) \in R^n$. Для каждого $p_0 \in \overline{D}$ пусть $H(p_0)$ — множество всех предельных значений функции $f(p)$ при $p \to p_0$, дополненное значением $f(p_0)$ в случае $p_0 \in D$.*

Тогда функции $H(p)$ и $F(p) = \operatorname{co} H(p)$ β-непрерывны.

Доказательство. При каждом $p \in \overline{D}$ множество $H(p)$ замкнуто, $H(\overline{D})$ ограничено. График функции H есть замыкание графика функции f, поэтому он замкнут. В силу лемм 14 и 16 из § 5 функции H и F β-непрерывны.

Лемма 2. *Пусть $f(p, u_1, \ldots, u_r)$ однозначна и непрерывна. Если многозначные функции $U_1(p), \ldots, U_r(p)$ в точке p_0 ограничены и β-непрерывны, то функция $H(p) = f(p, U_1(p), \ldots, U_r(p))$ ограничена и β-непрерывна.*

Доказательство подобно доказательству элементарной теоремы о непрерывности сложной функции в точке p_0; дополнительно используется равномерная непрерывность функции f на ограниченном замкнутом множестве — замкнутой окрестности множества точек с координатами $p = p_0$, $u_1 \in U_1(p_0), \ldots, u_r \in U_r(p_0)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ с кусочно непрерывной вектор-функцией $f(t, x)$, как в п. 1 § 4, или уравнение (8) § 4. Каждое из доопределений а), б), в) § 4 заменяет данное уравнение дифференциальным включением вида

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1}$$

Множество $F(t, x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое, а при доопределениях а) и в) — еще выпуклое. *Решением* дифференциального включения называется абсолютно непрерывная функция, определенная на интервале или отрезке и почти всюду удовлетворяющая этому включению.

Лемма 3. *Полученная при доопределении* а) *многозначная функция $F(t, x)$ β-непрерывна по x, а при доопределениях* б) *и* в) *— по t, x.*

Доказательство. В случае а) это следует из леммы 1 при $p = x$. В случае б) уравнение (8) § 4 равносильно дифференциальному включению $\dot{x} \in F_1(t, x)$ с функцией (9) § 4, где функции $U_i(t, x)$ β-непрерывны по t, x в силу леммы 1 при $p = (t, x)$, а функция $F_1(t, x)$ — по лемме 2. В случае в) в формуле (11) § 4 функция $F_2(t, x) = \operatorname{co} F_1(t, x)$ β-непрерывна по t, x в силу леммы 16 § 5.

Покажем, что и в случае а) § 4 функцию $F(t, x)$ в (1) можно заменить функцией, β-непрерывной по t, x, если для каждой из областей G_i непрерывности функции $f(t, x)$ выполнено следующее условие.

Условие γ. *Для области G_i при почти всех t сечение границы области плоскостью $t = \text{const}$ совпадает с границей сечения области той же плоскостью.*

Границей ∂M множества M называется множество точек, для каждой из которых в сколь угодно малой окрестности имеются и точки множества M, и точки, не принадлежащие M. *Сечением M_t множества M* плоскостью P ($t = \text{const}$) называется множество

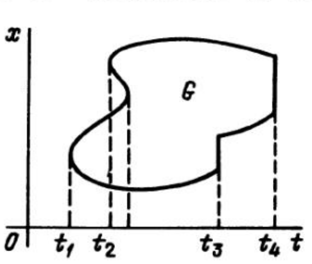


Рис. 11.

$M \cap P$. При определении границы $\partial(M_t)$ сечения множество M_t рассматривается как множество в плоскости P, т.е. для точек из M_t рассматриваются окрестности, лежащие в этой плоскости. С помощью введенных обозначений условие γ записывается так:

$$(\partial G_i)_t = \partial(G_{it}) \quad \text{при почти всех } t. \tag{2}$$

Выполнение условия (2) обычно легко проверяется. Например, для области, изображенной на рис. 11, $(\partial G)_t \neq \partial(G_t)$ лишь при $t = t_1, t_2, t_3, t_4$, следовательно, условие γ выполнено. Условие γ выполнено для очень широкого класса областей, например, для всех локально связных областей.

Пусть $H(t, x)$ — множество предельных значений функции $f(t, x')$ при $x' \to x$, $t = \text{const}$, а $H_0(t, x)$ то же для $f(t', x')$ при $t' \to t$, $x' \to x$.

Л е м м а 4. *Если области G_i непрерывности функции $f(t,x)$ удовлетворяют условию γ (короче: функция f удовлетворяет условию γ), то при почти всех t ($t \notin T_0$, $\mu T_0 = 0$, μ — мера Лебега) имеем $H_0(t,x) = H(t,x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждой области G_i равенство (2) выполнено для всех $t \in T_i$, $\mu T_i = 0$. Возьмем такую точку (t,x), что $t \notin T_0 = \bigcup_i T_i$.

Если $(t,x) \in G_i$, то в этой точке функция f непрерывна и

$H_0(t,x) = H(t,x) = f(t,x)$.

Если (t,x) лежит на границе одной или нескольких областей G_i, то каждая точка $v \in H_0(t,x)$ есть $\lim f(t_k, x_k)$ по некоторой последовательности $(t_k, x_k) \to (t,x)$, содержащейся в одной из областей G_i. Так как $(t,x) \in (\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$, то в G_{it} тоже найдется последовательность $(t, x_m^0) \to (t,x)$. Функция f кусочно непрерывна, поэтому

$$v = \lim_{k \to \infty} f(t_k, x_k) = \lim_{m \to \infty} f(t, x_m^0) \subset H(t,x).$$

Значит, $H_0(t,x) \subset H(t,x)$. Обратное включение очевидно.

С л е д с т в и е. *При условии γ дифференциальные включения*

$$\dot{x} \in F(t,x) = \mathrm{co}H(t,x), \quad \dot{x} \in F_0(t,x) = \mathrm{co}H_0(t,x) \tag{3}$$

равносильны, т.е. имеют одни и те же решения. Функция F_0 β-непрерывна по t, x.

В самом деле, решение должно удовлетворять включению почти всюду, но в силу леммы 4 $F_0(t,x) = F(t,x)$ при почти всех t. По лемме 1 (где $p = (t, x)$) функции H_0 и F_0 β-непрерывны по t, x.

Итак, доопределение а) § 4 сводит уравнение $\dot{x} = f(t,x)$ при условии γ к включению $\dot{x} \in F_0(t,x)$ с функцией $F_0(t,x)$, β-непрерывной по t, x. Переход от первого из включений (3) ко второму производится по той причине, что для второго доказательство теоремы существования и исследование свойств решений проводится значительно проще.

2. Дифференциальное включение (1) при достаточно широких предположениях равносильно [120], [121] уравнению в контингенциях [122] и уравнению в паратингенциях [33]. Понятия контингенции и паратингенции первоначально имели чисто геометрический смысл (обобщение понятия касательной). В теории дифференциальных включений они рассматриваются как "многозначные производные" от вектор-функций.

В следующих определениях бесконечность считается предельной точкой последовательности $\{y_i\}$, если последовательность $\{|y_i|\}$ не ограничена.

Контингенцией или контингентной производной [120] — [123] вектор-функции $x(t)$ в точке t_0 называется множество $\mathrm{Cont}\, x(t_0)$ всех предельных точек последовательностей

$$\frac{x(t_i) - x(t_0)}{t_i - t_0} \quad (t_i \to t_0,\ i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Паратингенцией [33] вектор-функции $x(t)$ в точке t_0 называется множество $\mathrm{Parat}\, x(t_0)$ всех предельных точек последовательностей

$$\frac{x(t_i) - x(t_j)}{t_i - t_j} \quad (t_i \to t_0,\ t_j \to t_0,\ i, j = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Для любой функции $x(t)$ всегда $\mathrm{Cont}\, x(t) \subset \mathrm{Parat}\, x(t)$, так как в (5) не исключается случай $t_j = t_0$. Если в рассматриваемой точке t_0 существует производная $x'(t_0)$, то $\mathrm{Cont}\, x(t_0) = x'(t_0)$, а если производная существует и в окрестности точки t_0 и непрерывна в этой точке, то $\mathrm{Cont}\, x(t_0) = \mathrm{Parat}\, x(t_0) = x'(t_0)$.

Л е м м а 5. *Если $|\mathrm{Cont}\, x(t)| \leqslant m$ на интервале (a,b), вектор-функция $x(t)$ непрерывна справа в точке a и слева в точке b, то она на отрезке $[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае на (a,b) найдутся такие точки a_1, b_1, что $a_1 < b_1$,

$$|x(b_1) - x(a_1)| \geqslant m_1 |b_1 - a_1|, \quad m_1 > m. \tag{6}$$

Тогда хотя бы для одной из половин отрезка $[a_1, b_1]$ справедливо неравенство, подобное (6), с тем же m_1. Обозначим эту половину $[a_2, b_2]$ и снова разделим пополам.

Продолжая процесс, получаем последовательность вложенных отрезков $[a_i, b_i]$,

$$b_i - a_i = 2^{-i+1}(b_1 - a_1), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Для каждого из них справедливо неравенство, подобное (6), с тем же m_1. Пусть t_0 — общая точка этих отрезков. Тогда для каждого i или

$$|x(t_0) - x(a_i)| \geqslant m_1(t_0 - a_i),$$

или

$$|x(b_i) - x(t_0)| \geqslant m_1(b_i - t_0).$$

Следовательно, длина вектора (4), где $t_i = a_i$ или $t_i = b_i$, не меньше m_1. Значит, из последовательности векторов (4) можно выбрать подпоследовательность или неограниченно возрастающую, или стремящуюся к конечному пределу v, $|v| \geqslant m_1 > m$. Обе возможности противоречат условию леммы.

Теорема 1 [121]. *Пусть при любых (t, x) из замкнутой области Q множество $F(t, x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и многозначная функция F β-непрерывна. Пусть $(t, x(t)) \in Q$ при $a \leqslant t \leqslant b$.*

Тогда следующие утверждения равносильны:

А. *На отрезке $[a, b]$ функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду $x'(t) \in F(t, x(t))$.*

Б. *При всех $t \in (a, b)$ множество $\operatorname{Cont} x(t)$ (или $\operatorname{Parat} x(t)$) содержится в $F(t, x(t))$; при $t = a$ функция $x(t)$ непрерывна справа, а при $t = b$ — слева.*

Доказательство. В случае А для каждого $t_0 \in (a, b)$ и любого $\epsilon > 0$ при $|t - t_0| \leqslant \delta = \delta(t_0, \epsilon)$ имеем $F(t, x(t)) \subset F^\epsilon$, где F^ϵ — замкнутая ϵ-окрестность множества $F(t_0, x(t_0))$. Для любых $t_i, t_j \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ в силу леммы 12 § 5 векторы (4) и (5) принадлежат F^ϵ. Поэтому множества $\operatorname{Cont} x(t_0)$ и $\operatorname{Parat} x(t_0)$ — непустые и содержатся в F^ϵ, а в силу произвольности ϵ — и в $F(t_0, x(t_0))$. Значит, из А следует Б.

Пусть выполнено Б. Функция $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$, так как если бы при $t = t_0$ она была разрывна, то последовательность (4) имела бы предельную точку ∞, не содержащуюся в $F(t_0, x(t_0))$. При $a \leqslant t \leqslant b$ в силу леммы 15 § 5 $|F(t, x(t))| \leqslant m$. Тогда $|\operatorname{Cont} x(t)| \leqslant m$ при $a < t < b$. По лемме 5 вектор-функция $x(t)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица, значит, абсолютно непрерывна. Почти всюду существует

$$x'(t) = \operatorname{Cont} x(t) \subset F(t, x(t)),$$

т.е. из Б следует А.

3. Далее, излагаются некоторые свойства многозначных функций, используемые для исследования дифференциальных включений с правыми частями, которые не являются β-непрерывными по t, x.

Опорной функцией выпуклого множества $A \subset R^n$ называется функция вектора $v \in R^n$, определяемая равенством

$$\psi(A, v) = \sup_{x \in A} v \cdot x. \tag{7}$$

Так как $\psi(A, \lambda v) \equiv \lambda \psi(A, v)$ для любого $\lambda \geqslant 0$, то достаточно рассматривать функцию $\psi(A, v)$ только для векторов v, длина которых равна 1. В силу (7) для любого $v \neq 0$ плоскость $v \cdot x = \gamma$, где $\gamma = \psi(A, v)$, является опорной для множества A, а полупространство $v \cdot x \leqslant \gamma$ содержит множество A тогда и только тогда, когда $\gamma \geqslant \psi(A, v)$. Отсюда и из леммы 4 § 5 вытекает следующая лемма.

Лемма 6. *Замкнутое выпуклое множество A полностью определяется заданием его опорной функции $\psi(A, v)$. Точка $a \in A$ тогда и только тогда, когда $v \cdot a \leqslant \psi(A, v)$ при всех v.*

Для ограниченного выпуклого множества A опорная функция непрерывна, так как из $|x| \leqslant m$, $|v_1 - v_2| \leqslant \delta$ следует

$$|v_1 \cdot x - v_2 \cdot x| \leqslant m\delta, \quad |\psi(A, v_1) - \psi(A, v_2)| \leqslant m\delta.$$

Поэтому ее достаточно задавать для произвольного счетного множества векторов v_i, $i = 1, 2, \ldots$, всюду плотного на единичной сфере $|v| = 1$. Следовательно, ограниченное выпуклое замкнутое множество A однозначно определяется заданием счетного множества чисел

$$\pi_i(A) = \psi(A, v_i), \quad |v_i| = 1, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Любое непустое замкнутое множество $A \subset R^n$ можно однозначно определить заданием счетного множества чисел

$$\rho_i(A) = \rho(a_i, A), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

— расстояний этого множества от заданного всюду плотного в R^n множества точек a_i. Числа $\rho_i(A)$ можно рассматривать как координаты замкнутого множества A. Для замкнутого выпуклого множества в качестве координат можно также использовать числа (8). Разумеется, при заданных точках a_i (или v_i) не всякое счетное множество чисел является множеством чисел (9) (или (8)) для некоторого множества A.

Соотношения между замкнутыми множествами A и B накладывают вполне определенные связи между числами $\rho_i(A)$ и $\rho_i(B)$, а для выпуклых множеств — также между числами $\pi_i(A)$ и $\pi_i(B)$ или опорными функциями этих множеств. В частности,

$$\begin{gathered}
A \subset B \Longleftrightarrow \rho_i(A) \geqslant \rho_i(B), \quad i = 1, 2, \ldots, \\
\rho_i(A \cup B) = \min \{\rho_i(A); \rho_i(B)\}, \\
\rho_i(A^\epsilon) = \max\{0; \rho_i(A) - \epsilon\}, \quad \beta(A, B) = \sup_i (\rho_i(B) - \rho_i(A)), \\
\alpha(A, B) = \sup_i |\rho_i(A) - \rho_i(B)|, \quad \rho(A, B) = \inf_i (\rho_i(A) + \rho_i(B)).
\end{gathered} \tag{10}$$

Для выпуклых замкнутых множеств

$$A \subset B \Longleftrightarrow \pi_i(A) \leqslant \pi_i(B), i = 1, 2, \ldots \Longleftrightarrow \psi(A, v) \leqslant \psi(B, v),$$

$$\beta(A, B) = \max\{0; \sup_i (\pi_i(A) - \pi_i(B))\} = \max\{0; \sup_{|v|=1} (\psi(A, v) - \psi(B, v))\},$$

$$\pi_i(A^\epsilon) = \pi_i(A) + \epsilon, \quad \psi(A^\epsilon, v) = \psi(A, v) + \epsilon |v|.$$

Если множество A является функцией точки $p \in G$, т.е. $A = A(p)$, то числа π_i и ρ_i также зависят от p и их можно назвать *координатными функциями*. Из соотношений (10) вытекает следующая лемма [124] — [126].

Л е м м а 7. *Для α-непрерывности (или β-непрерывности) функции $A(p)$ необходимо и достаточно, чтобы все ее координатные функции $\rho_i(A(p))$, $i = 1, 2, \ldots$, были непрерывны (соответственно полунепрерывны снизу).*

Числовая функция $\varphi(p)$ *называется полунепрерывной снизу* в точке p_0, если для любого $\epsilon > 0$ при $|p - p_0| < \delta(\epsilon)$ имеем $\varphi(p) > \varphi(p_0) - \epsilon$.

Пусть для каждого $p \in E \subset R^m$ множество $A(p) \subset R^n$ замкнуто и не пусто. Многозначная функция $A(p)$ на множестве E называется *измеримой*, если множество E измеримо и для каждого замкнутого множества $B \subset R^n$ измеримо множество тех $p \in E$, для которых $A(p) \cap B$ не пусто. (Это равносильно определению из [127].)

Если вместо замкнутых множеств B взять открытые множества или же только замкнутые (или только открытые) шары, все или только с центрами из данного всюду плотного множества $\{a_i\}$ и рациональными радиусами, то получится определение, равносильное данному выше. Если B — открытый шар с центром a_i и радиусом r, то соотношение $A(p) \cap B \neq \phi$ равносильно соотношению $\rho(a_i, A(p)) < r$. Поэтому измеримость многозначной функции $A(p)$ равносильна измеримости всех координатных функций $\rho_i(A(p)) \equiv \rho(a_i, A(p))$, $i = 1, 2, \ldots$

Если многозначная функция α- или β-непрерывна, то она измерима (следует из леммы 7).

Если функции $A_i(p)$ ($i = 1, 2, \ldots$) измеримы, то измеримы и функции

$$S(p) = \bigcup_i A_i(p), \quad R(p) = \bigcap_i A_i(p),$$

а также верхний и нижний топологические пределы последовательности $A_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots$ Если функция $A(p)$ измерима, то $\overline{\text{co}}\, A(p)$ — тоже.

Если однозначная функция $f(p, u_1, \ldots, u_r)$ непрерывна, а многозначные функции $A_1(p), \ldots, A_r(p)$ измеримы, то сложная функция $f(p, A_1(p), \ldots, A_r(p))$ измерима. Эти и другие утверждения об измеримости функций см., например, в [128].

Следующая теорема обобщает на многозначные функции теорему Лузина ([64], стр. 118) об измеримых функциях. Пусть множество M содержится в области определения функции $A(p)$. Будем говорить, что на множестве M функция $A(p)$ *α-непрерывна по этому множеству*, если функция $A_1(p)$, определенная только на M и равная там функции $A(p)$, α-непрерывна на M.

Теорема 2 [127]. *Если многозначная функция $A(p)$ измерима на множестве E, то для каждого $\epsilon > 0$ существует такое множество $E_\epsilon \subset E$, $\mu E_\epsilon < \epsilon$, что функция $A(p)$ на множестве $E \setminus E_\epsilon$ α-непрерывна по этому множеству.*

Доказательство [124]. Для каждой координатной функции $\rho_i(A(p))$ по теореме Лузина существует множество E_i, $\mu E_i < 2^{-i}\epsilon$, такое, что на множестве $E\setminus E_i$ функция $\rho_i(A(p))$ непрерывна по этому множеству. Пусть $E_\epsilon = \bigcup\limits_i E_i$, тогда $\mu E_\epsilon < \epsilon$ и на множестве $E \setminus E_\epsilon$ все функции $\rho_i(A(p))$, $i = 1, 2, \ldots$, непрерывны по этому множеству. В силу леммы 7 функция $A(p)$ α-непрерывна на $E\setminus E_\epsilon$ по этому множеству.

Следующая теорема используется для исследования свойств решений уравнений Каратеодори.

Теорема 3 [129]. *Пусть множество $D \subset R^n$ ограничено и замкнуто, при каждом $x \in D$ однозначная вектор-функция $f(t,x)$ измерима по t и при почти всех $t \in T = [a, b]$ непрерывна по x.*

Тогда для каждого $\epsilon > 0$ существует таков открытое множество $T_\epsilon \subset T$, $\mu T_\epsilon < \epsilon$, что функция $f_\epsilon(t,x)$, определенная только при $t \in T \setminus T_\epsilon$, $x \in D$ и там равная функции $f(t,x)$, является непрерывной по t, x.

Доказательство. При почти всех $t \in T$ график $\Gamma(t)$ функции $f(t,x)$, рассматриваемой как функция от x при t = const, является ограниченным замкнутым множеством. Покажем, что многозначная функция $\Gamma(t)$ измерима на T, т.е. что для каждого открытого множества $G \subset D \times R^n$ измеримо множество $T(G)$ тех t, при которых $\Gamma(t) \cap G$ не пусто.

Возьмем в D счетное всюду плотное множество $\{x_i\}$ и зафиксируем $t \in T$, при котором функция $f(t,x)$ непрерывна по x. Сечениями множеств G и $\Gamma(t)$ гиперплоскостью $x = x_i$ являются открытое множество $G_i \subset R^n$ и точка $v_i = f(t, x_i)$. Так как $f(t,x)$ непрерывна по x, то множество точек (x_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots$, всюду плотно на $\Gamma(t)$. Поэтому, если множество $\Gamma(t) \cap G$ не пусто, то оно содержит хотя бы одну из таких точек (x_i, v_i), т.е. $f(t, x_i) \subset G_i$ для некоторого i. Обратное очевидно. Следовательно, $T(G) = \bigcup\limits_i T_i$, где T_i — множество тех t, при которых $f(t, x_i) \in G_i$. Функция f измерима по t, поэтому множества T_i и $T(G)$ измеримы и функция $\Gamma(t)$ — тоже.

По теореме 2 для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое множество $T_\epsilon^* \subset T$, $\mu T_\epsilon^* < \epsilon$, что на множестве $T \setminus T_\epsilon^*$ функция $\Gamma(t)$ α-непрерывна по этому множеству. Множество T_ϵ^* можно покрыть открытым множеством T_ϵ, $\mu T_\epsilon < \epsilon$. По лемме 15 § 5 функция $\Gamma(t)$ ограничена на $T \setminus T_\epsilon$, а по лемме 14 § 5 ее график замкнут, т.е. множество таких точек (t, x, v), что $t \in T \setminus T_\epsilon$, $x \in D$, $v = f(t,x)$, замкнуто. Следовательно, однозначная функция $f(t,x)$ на множестве $t \in T \setminus T_\epsilon$, $x \in D$ непрерывна по этому множеству.

Следствие. *При условиях теоремы 3 функция $f(t,x)$ измерима на множестве $T \times D$.*

Теорема 3 позволяет уточнить, на каком множестве решения уравнения Каратеодори имеют производную и удовлетворяют уравнению.

Теорема 4 [130]. *Пусть вектор-функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори* (п. 1 § 1) в замкнутой *ограниченной области $a < t < b$, $x \in D \subset R^n$.*

Тогда существует такое множество $T_0 \subset [a,b]$ меры нуль, что при всех $t \in [a,b] \setminus T_0$ каждое решение уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ имеет производную $\dot{x}(t)$, равную $f(t, x(t))$.

Доказательство [131]. Пусть множество T_ϵ то же, что в теореме 3,

$$\chi(t) = 1 \quad (t \in T_\epsilon), \qquad \chi(t) = 0 \quad (t \in Q = [a, b] \setminus T_\epsilon).$$

По условию $|f(t,x)| \le m(t)$, функция $m(t)$ суммируема. Для почти всех $t \in Q$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \chi(s) m(s) ds = \frac{d}{dt} \int_a^t \chi(s)\, m(s) ds = 0. \tag{11}$$

Пусть Q^* — множество тех точек плотности множества Q, в которых выполнено (11). Тогда для каждого решения уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ при каждом $t \in Q^*$ имеем

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (1 - \chi(s)) ds \cdot f(t, x(t)) +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (1 - \chi(s))\, (f(s, x(s)) - f(t, x(t))) dt + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \chi(s) f(s, x(s)) ds.$$

Так как $\chi(s) = 0$ на Q, а t — точка плотности множества Q, то первый член правой части стремится к $f(t, x(t))$ при $h \to 0$. Во втором члене при $s \in T_\epsilon$ имеем $1 - \chi(s) = 0$, а при $s \notin T_\epsilon$ вследствие непрерывности функции f на Q подынтегральная функция по модулю меньше $\delta(h) \to 0$ (при $h \to 0$), и весь второй член меньше $\delta(h)$. Третий член стремится к 0 при $h \to 0$ в силу (11).

Следовательно, вся правая часть стремится к $f(t, x(t))$ при $h \to 0$. Итак, для каждого $t \in Q^*$, $\mu Q^* = \mu Q > b - a - \epsilon$, существует $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Так как $\epsilon > 0$ — любое, то теорема доказана.

Теорема 3 и ее следствие обобщаются на многозначные функции $F(t,x)$, измеримые по t и α-непрерывные по x. Для этого надо к каждой координатной функции $\rho_i(F(t,x))$ применить теорему 3, а затем рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 2.

Дальнейшее обобщение на многозначные функции, измеримые по t и β-непрерывные по x, уже невозможно. Такая функция может не быть измеримой по t, x.

В теории дифференциальных включений используются теоремы о выделении однозначных ветвей (селекторов) многозначных функций.

Л е м м а 8. *Если множество A замкнуто и выпукло, то ближайшая к данной точке b точка $a \in A$, $a = a(A)$, непрерывно зависит от множества A, т.е. $a(A_i) \to a(A)$ при $\alpha(A_i, A) \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha(A_i, A) \to 0$ $(i \to \infty)$, точки $a_i \in A_i$ и $a \in A$ — ближайшие к точке b (см. лемму 2 § 5). Тогда

$$\rho(b, a_i) = \rho(b, A_i) \to \rho(b, A) = \rho(b, a). \tag{12}$$

Если некоторая подпоследовательность $a_{i_k} \to a_0 \neq a$, то $a_0 \in A$ и из (12) следует $\rho(b, a_0) = \rho(b, a)$. Это противоречит лемме 2 § 5.

Т е о р е м а 5. *Пусть для каждого $p \in E$ множество $A(p) \subset R^n$ не пусто, замкнуто, выпукло.*

Тогда существует однозначная функция $f(p) \in A(p)$, непрерывная, если функция $A(p)$ — α-непрерывная, и измеримая, если функция $A(p)$ — измеримая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем какую-либо точку $a \in R^n$. Для каждого $p \in E$ в выпуклом замкнутом множестве $A(p)$ имеется только одна точка, ближайшая к точке a (лемма 2 § 5). Обозначим ее $f(p)$. Она непрерывно зависит от множества $A(p)$. Поэтому из непрерывности $A(p)$ на E следует непрерывность $f(p)$, а из измеримости $A(p)$ и теоремы 2 — непрерывность $f(p)$ на множестве $E \setminus E_\epsilon$, где $\mu E_\epsilon < \epsilon$. Так как ϵ произвольно, то $f(p)$ измерима на E.

З а м е ч а н и е. Если отбросить условие выпуклости множества $A(p)$, то непрерывную ветвь можно выделить не всегда, а измеримую — можно всегда, но это доказывается сложнее [132].

§ 7. Существование и свойства решений

Здесь доказываются теоремы существования решений для дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Показывается, что пределы сходящихся последовательностей приближенных решений являются решениями. Доказываются теоремы о продолжении решений, о компактности и связности множеств решений.

1. Приближенные решения часто используются в теоремах существования (например, ломаные Эйлера) и при исследовании зависимости решения от начальных условий и от правой части уравнения. Для дифференциального уравнения с кусочно непрерывной правой частью естественно рассматривать не только малые изменения правой части в областях ее непрерывности, но и малые изменения границ этих областей. Поэтому приближенным решением уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ надо считать, в частности, такую абсолютно непрерывную функцию $y(t)$, для которой почти всюду

$$|\dot{y}(t) - f(t, z(t))| \leqslant \delta, \qquad |z(t) - y(t)| \leqslant \delta, \tag{1}$$

где $z(t)$ — какая-нибудь функция, а число δ достаточно мало.

Обозначая M^δ замкнутую δ-окрестность множества M, условие (1) можно записать так:

$$\dot{y}(t) \in [f(t, (y(t))^\delta)]^\delta. \tag{2}$$

Если обозначить $z(t) - y(t) = p(t)$, то условие (1) можно записать так:

$$\dot{y}(t) = f(t, (y(t) + p(t)) + q(t), \qquad |p(t)| \leqslant \delta, \qquad |q(t)| \leqslant \delta.$$

В [117] возмущения $p(t)$ называются *внутренними*, $q(t)$ — *внешними*. Учитывая леммы 9 и 13 из § 5, условие (2) можно заменить несколько более общим условием

$$\dot{y}(t) \in [\operatorname{co} f(t, (y(t))^\delta)]^\delta. \tag{3}$$

Такое же определение приближенного решения пригодно и для дифференциального включения с правой частью, β-непрерывной по x. Если же правая часть включения

β-непрерывна по t, x, то можно еще расширить понятие приближенного решения, заменив в (3) $f(t, (y(t))^{\delta})$ на $f(t^{\delta}, (y(t))^{\delta})$.

В §§ 7 и 8 используются следующие определения.

Вектор-функция $y(t)$ называется *δ-решением* (*приближенным решением с точностью до δ*) включения

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{4}$$

с β-непрерывной по t, x функцией F, если на рассматриваемом интервале функция $y(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду

$$\dot{y}(t) \in F_{\delta}(t, y(t)), \quad F_{\delta}(t, y) \equiv [\operatorname{co} F(t^{\delta}, y^{\delta})]^{\delta}. \tag{5}$$

Здесь и далее $F(t^{\delta}, y^{\delta})$ означает объединение множеств $F(t_1, y_1)$ для всех $t_1 \in t^{\delta}$, $y_1 \in y^{\delta}$, т.е. $|t_1 - t| \leqslant \delta$, $|y_1 - y| \leqslant \delta$.

Замечание. Если множество $F(t, x)$ ограничено, выпукло, функция F β-непрерывна по t, x в области G и компакт $K \subset G$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta_0(\epsilon) > 0$, что при всех $\delta \leqslant \delta_0(\epsilon)$ график функции $F_{\delta}(t, x)$ на K содержится в ϵ-окрестности графика функции $F(t, x)$ на K. (Если для некоторого $\epsilon > 0$ точки (t_i, x_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots$, лежат на графиках функций F_{δ_i} $(\delta_i \to 0)$, во вне ϵ-окрестности графика функции F, то, выбирая из этих точек сходящуюся подпоследовательность и пользуясь β-непрерывностью функции F в предельной точке, придем к противоречию.)

2. Будем говорить, что многозначная функция $F(t, x)$ в области G удовлетворяет *основным условиям*, если при всех $(t, x) \in G$ множество $F(t, x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и функция F β-непрерывна по t, x.

Лемма 1. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в области G. Тогда предел $x(t)$ любой равномерно сходящейся последовательности δ_k-решений $x_k(t)$ $(\delta_k \to 0, k = 1, 2, \ldots)$ включения* (4) *есть решение этого включения (если график предельной функции $x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, содержится в G)*.

Доказательство. Возьмем любое $t_0 \in [a, b]$ и любое $\epsilon > 0$. Функция F β-непрерывна, поэтому найдется такое $\eta > 0$, что в области $G_0(|t - t_0| < 2\eta, |x - x(t_0)| < 3\eta)$ имеем

$$F(t, x) \subset F_0^{\epsilon}, \quad F_0 = F(t_0, x(t_0)). \tag{6}$$

Так как все $x_k(t)$ непрерывны, то $x(t)$ — тоже. Найдутся такие $\gamma \in (0, \eta)$ и k_0, что при $k > k_0$, $|t - t_0| < \gamma$ имеем

$$\delta_k < \min\{\eta; \epsilon\}, \quad |x_k(t) - x(t)| < \eta, \quad |x(t) - x(t_0)| < \eta.$$

Отсюда и из (6) следует при $\delta = \delta_k$, $k > k_0$, $|t - t_0| < \gamma < \eta$

$$t^{\delta} \subset t_0^{2\eta}, \quad (x_k(t))^{\delta} \subset (x(t_0))^{3\eta}, \quad F(t^{\delta}, (x_k(t))^{\delta}) \subset F_0^{\epsilon}.$$

Так как $x_k(t)$ есть δ_k-решение, а F_0 выпукло, то почти всюду

$$\dot{x}_k(t) \in [\operatorname{co} F(t^{\delta}, (x_k(t))^{\delta})]^{\delta} \subset [\operatorname{co} F_0^{\epsilon}]^{\delta} \subset F_0^{2\epsilon}.$$

Теперь из лемм 9 и 13 § 5 следует, что при $|t - t_0| < \gamma$ функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и $\dot{x}(t) \in F_0^{2\epsilon}$ там, где существует $\dot{x}(t)$, т.е. почти всюду на интервале $|t - t_0| < \gamma$.

Такими интервалами можно покрыть весь отрезок $[a, b]$, поэтому на $[a, b]$ функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду существует $\dot{x}(t)$. Для каждого t_0, при котором существует $\dot{x}(t_0)$, доказано, что $\dot{x}(t_0) \in F_0^{2\epsilon}$ при сколь угодно малом $\epsilon > 0$. Поэтому $\dot{x}(t_0) \in F_0 = F(t_0, x(t_0))$, т.е. $x(t)$ — решение.

Следствие 1. *Если $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям, то предел равномерно сходящейся последовательности решений дифференциального включения* (4) *является решением этого включения.*

Следствие 2. *Если $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям, кроме условия выпуклости, то предел равномерно сходящейся последовательности решений включения* (4) *есть решение включения $\dot{x} \in \operatorname{co} F(t, x)$*. (Так как в этом случае в силу леммы 16 § 5 функция $\operatorname{co} F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям, то к включению $\dot{x} \in \operatorname{co} F(t, x)$ можно применить следствие 1.)

Теорема 1 [120], [122], [33]. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в области G.*

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

Если область G содержит цилиндр Z $(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a, \; |x - x_0| \leqslant b)$, то решение существует по меньшей мере на отрезке

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + d, \quad d = \min\left\{a; \frac{b}{m}\right\}, \quad m = \sup_Z |F(t, x)|. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е. Если область G содержит цилиндр Z' $(t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0, \; |x - x_0| \leqslant b)$, то решение существует при $t_0 - d' \leqslant t \leqslant t_0$, где d' выражается, подобно (8), через a, b, и $m' = \sup |F(t, x)|$ в Z'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существуют такие $a > 0$, $b > 0$, что $Z \subset G$. По лемме 15 § 5 $m < \infty$. Для $k = 1, 2, \ldots$ возьмем

$$h_k = d/k, \quad t_{ki} = t_0 + ih_k, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Построим ломаную $x_k(t)$. Положим $x_k(t_{k0}) = x_0$. Если для некоторого $i \geqslant 0$ значение $x_k(t_{ki}) = x_{ki}$ уже определено и

$$|x_{ki} - x_0| \leqslant m\,|t_{ki} - t_0|, \tag{9}$$

то при $t_{ki} < t \leqslant t_{k,i+1}$ определим $x_k(t)$ равенством

$$x_k(t) = x_{ki} + (t - t_{ki})v_{ki}, \tag{10}$$

взяв любое $v_{ki} \in F(t_{ki}, x_{ki})$. Так как в силу (9) $(t_{ki}, x_{ki}) \in Z$, то $|v_{ki}| \leqslant |F(t_{ki}, x_{ki})| \leqslant m$, и из (9) и (10) имеем

$$|x_k(t) - x_0| \leqslant m\,|t - t_0| \quad (t_{ki} < t \leqslant t_{k,i+1}). \tag{11}$$

Поэтому значение $x_k(t_{k,i+1}) = x_{k,i+1}$ определено и удовлетворяет неравенству, получаемому из (9) заменой i на $i + 1$.

Таким образом, $x_k(t)$ последовательно строится на отрезках $[t_{ki}, t_{k,i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. В силу (11) и (8) график функции $x_k(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + d)$ содержится в Z. В силу (10) функция $x_k(t)$ непрерывна и $|\dot{x}_k(t)| \leqslant m$ $(t \neq t_{ki}, i = 1, 2, \ldots)$. Поэтому функция $x_k(t)$ абсолютно непрерывна. Так как

$$\dot{x}_k(t) = v_{ki} \in F(t_{ki}, x_{ki}), \quad 0 < t - t_{ki} < h_k, \quad |x_k(t) - x_{ki}| \leqslant mh_k,$$

то $x_k(t)$ есть δ_k-решение включения (4), где

$$\delta_k = \max\{h_k; mh_k\} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Функции $x_k(t)$ в силу (11) и оценки $|\dot{x}_k(t)| \leqslant m$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. По теореме Арцела из них можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Ее предел $x(t)$ по лемме 1 есть решение включения (4). Из $x_k(t_0) = x_0$ следует $x(t_0) = x_0$

Л е м м а 2. *Если $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в замкнутой ограниченной области D, то все решения включения (4), проходящие в этой области, равностепенно непрерывны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 15 § 5 $|F(t, x)| \leqslant m$ в D. Поэтому для всех проходящих в D решений $|\dot{x}| \leqslant m$

$$|x(t'') - x(t')| \leqslant m\,|t'' - t'|.$$

Т е о р е м а 2 [122], [33]. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в замкнутой ограниченной области D.*

Тогда каждое решение включения (4), проходящее внутри D, можно продолжить в обе стороны до выхода на границу области D.

Чтобы это доказать, надо повторить доказательство теоремы 4 § 1, учитывая, что теперь в формуле (3) § 1 $m(s) \equiv \text{const} = m$, и вместо теоремы 1 § 1 использовать теорему 1 § 7.

Для решений дифференциального включения (4) с функцией F, удовлетворяющей основным условиям в замкнутой ограниченной области D, справедливы также утверждения лемм 4 и 5 из § 1. Их доказательства не меняются, лишь вместо лемм 2 и 3 из § 1 используются из § 7 лемма 2 и следствие 1 леммы 1.

Теорема 3 [33], [122], [133]. *Пусть функция $F(t,x)$ удовлетворяет основным условиям в области G. Пусть все решения включения (4) с данным начальным условием $x(t_0) = x_0$ (или со всевозможными начальными условиями $(t_0, x(t_0)) \in A$, A — заданный компакт, $A \subset G$) при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ существуют и их графики проходят в области G. Тогда множество H точек, лежащих на этих графиках при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (отрезок воронки), ограничено и замкнуто. Множество этих решений является компактом в метрике $C[\alpha, \beta]$.*

Чтобы это доказать, надо повторить доказательство теоремы 5 § 1, заменив ссылки на утверждения § 1 ссылками на аналогичные утверждения § 7.

Замечание. При условиях теоремы 3 в случае, когда A — точка или связный компакт, множество решений связно в метрике $C[\alpha,\beta]$ и сечение множества H любой плоскостью $t = \text{const} \in [\alpha, \beta]$ (сечение воронки) тоже связно [133].

3. В доказанных в п. 2 леммах и теоремах нельзя отбросить условие выпуклости.

Пример. Пусть $x \in R^1$, множество $F(t,x)$ состоит из одной точки $-\operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$ и из двух точек ± 1 при $x = 0$. Тогда многозначная функция $F(t,x)$ β-непрерывна по t, x. Для любого t_0 решение с начальным условием $x(t_0) = 0$ не существует при $t > t_0$. Функции $x_k(t)$, построенные в замечании к лемме 13 § 5 (см. рис. 9), являются δ_k-решениями, $\delta_k = 1/k \to 0$, но их предел $x(t) = 0$ не является решением.

От требования выпуклости можно отказаться, если вместо условия β-непрерывности функции F потребовать, чтобы она была α-непрерывной по x (см. п. 5). Тогда теоремы о существовании и продолжении решений сохраняются, но множество решений и отрезок воронки могут быть незамкнутыми.

Пример [134]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y^2 + u^2, \quad \dot{y} = u; \quad -1 \leqslant u(t) \leqslant 1. \tag{12}$$

Здесь множество $F(x,y)$ есть дуга параболы

$$v_1 = v_2^2 - y^2, \quad -1 \leqslant v_2 \leqslant 1,$$

т.е. невыпукло (v_1 и v_2 — проекции точек множества $F(x,y)$ на оси координат).

Рассмотрим при $0 \leqslant t \leqslant 1$ множество решений с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0$. Если $y(t) \equiv 0$, то $u(t) = 0$ почти всюду, $\dot{x} = -y^2 + u^2 = 0$, $x(t) \equiv 0$. Если $y(t) \not\equiv 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, то $\dot{x} = -y^2 + u^2 \leqslant 1$; при этом $\dot{x} < 1$ на тех интервалах, где $y(t) \neq 0$. Следовательно, $x(1) < 1$ для всех решений, и точка $t = 1$, $x = 1$, $y = 0$ не принадлежит графикам решений и не принадлежит отрезку $0 \leqslant t \leqslant 1$ воронки.

Рассмотрим решение $x_k(t)$, $y_k(t)$, для которого $x_k(0) = y_k(0) = 0$,

$$u = 1 \quad \left(\frac{2i}{k} \leqslant t < \frac{2i+1}{k}\right), \qquad u = -1 \quad \left(\frac{2i+1}{k} \leqslant t < \frac{2i+2}{k}\right),$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$0 \leqslant y_k(t) \leqslant \frac{1}{k}, \quad \dot{x}_k(t) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}, \quad x_k(1) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Следовательно, сколь угодно близко к точке $t = 1$, $x = 1$, $y = 0$ имеются точки графиков решений с нулевыми начальными условями, а сама эта точка не лежит на графике такого решения. Итак, множество этих решений и отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$ воронки не замкнуты.

Уравнения (12) можно рассматривать как уравнения управляемой системы, т.е. системы, движением которой можно управлять, выбирая произвольно функцию $u(t)$ в указанных пределах. Из сказанного следует, что эту систему за единицу времени нельзя перевести из состояния $x = y = 0$ в состояние $x = 1$, $y = 0$, но можно перевести в состояние, сколь угодно близкое к $x = 1$, $y = 0$, меняя достаточно быстро функцию $u(t)$ от 1 до -1 и обратно (скользящий режим).

При отказе от требования выпуклости множества $F(t,x)$ соотношения между множествами решений включения $\dot{x} \in F(t,x)$ и включения $\dot{x} \in \operatorname{co} F(t,x)$ изучались, в частности, в [135]—[140].

Если многозначная функция $F(t,x)$ α-непрерывна по t, x ограничена и удовлетворяет условию Липшица по x:

$$\alpha(F(t,x'),\ F(t,x'')) \leqslant l(t)\, |x' - x''|,$$

где функция $l(t)$ суммируема, то для любого решения $x_0(t)$ включения $\dot{x}\in \operatorname{co} F(t, x)$ существует последовательность решений включения $\dot{x}\in F(t,x)$, равномерно сходящаяся к $x_0(t)$ на данном отрезке [138]. Эти условия можно ослабить [136], [140], но отбросить условие Липшица или заменить его условием Гёльдера нельзя.

Пример [137]. Множество $F(x,y)$ не зависит от t и состоит из двух точек

$$(1, x^2+\sqrt{|y|}), \qquad (-1,\ x^2+\sqrt{|y|}).$$

Тогда $\operatorname{co} F(x,y)$ — отрезок, соединяющий эти точки. Вектор-функция $(x_0(t),\ y_0(t)) \equiv \equiv 0$ удовлетворяет включению $(\dot{x},\dot{y}) \in \operatorname{co} F(x,y)$, но не удовлетворяет включению

$$(\dot{x},\dot{y})\in F(x,y). \tag{13}$$

Предположим, что включение (13) имеет последовательность решений $x_k(t)$, $y_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, сходящуюся к нулю на некотором интервале $\alpha<t<\beta$. Так как $x\equiv y\equiv 0$ — не решение включения (13), то на любом интервале $(\gamma,\delta)\subset(\alpha,\beta)$ для каждого k найдется точка t_k, в которой $y_k\neq 0$ или $y_k=0$, $x_k\neq 0$. Так как для всех решений

$$\dot{y}=x^2+\sqrt{|y|}\geqslant\sqrt{|y|},$$

то в случаях $y_k(t_k)>0$ и $y_k(t_k)=0$, $x_k(t_k)\neq 0$ при $t>t_k$ имеем $y_k(t)>0$,

$$\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{y_k(t)}-t\right)=\frac{\dot{y}_k(t)}{\sqrt{y_k(t)}}-1\geqslant 0.$$

Поэтому $2\sqrt{y_k(t)}-t$ не убывает при $t\geqslant t_k$,

$$2\sqrt{y_k(t)}-t\geqslant 2\sqrt{y_k(t_k)}-t_k, \qquad y_k(t)\geqslant (t-t_k)^2/4,$$

и $y_k(t)$ не может стремиться к нулю на интервале $\delta<t<\beta$.

В случае $y_k(t_k)<0$ при $t<t_k$ имеем $y_k(t)<0$,

$$\dot{y}_k(t)\geqslant\sqrt{-y_k(t)}, \quad \frac{d}{dt}\left(2\sqrt{-y_k(t)}+t\right)\leqslant 0.$$

Значит, $2\sqrt{-y_k(t)}+t$ не возрастает,

$$y_k(t)\leqslant-(t_k-t)^2/4 \qquad (t<t_k),$$

и $y_k(t)$ не может стремиться к нулю на интервале $\alpha<t<\gamma$.

Итак, решение $x\equiv y\equiv 0$ включения $(\dot{x},\dot{y})\in \operatorname{co} F(x,y)$ ни на каком интервале не может быть пределом последовательности решений включения (13).

Однако оказывается, что любое решение включения $\dot{x}\in \operatorname{co} F(t,x)$ $(x\in R^n)$ всегда является пределом некоторой последовательности приближенных решений включения $\dot{x}\in F(t,x)$, даже если рассматривать более узкий класс приближенных решений, чем в п. 1, — класс квазитраекторий.

Для дифференциального включения $\dot{x}\in F(t,x)$ с ограниченной α-непрерывной по t,x функцией $F(t,x)$ *квазитраекторией* называется [135] абсолютно непрерывная вектор-функция $z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, для которой существует последовательность абсолютно непрерывных вектор-функций $x_k(t)$, обладающих свойствами

$$|\dot{x}_k(t)|\leqslant m\ ;\ \ x_k(t)\to z(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b);$$

$$\rho(\dot{x}_k(t),\ \ F(t,x_k(t)))\to 0 \text{ почти всюду на } [a,b].$$

Дополнительное требование, чтобы последний предельный переход был равномерным по t, не меняет класса квазитраекторий [141].

Теорема 4 [135]. *Если множество $F(t,x)$ не пусто, ограничено, замкнуто и функция F α-непрерывна по t,x, то множество квазитраекторий включения $\dot{x}\in F(t,x)$ совпадает с множеством решений включения $\dot{x}\in \operatorname{co} F(t,x)$.*

4. В некоторой открытой или замкнутой области $(n+1)$-мерного пространства t,x рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x}=f(t,x)$ с кусочно непрерывной правой частью, как в п. 1 § 4, а также уравнение

$$\dot{x}=f(t,x,u_1(t,x),\ldots,u_r(t,x)) \tag{14}$$

при условиях в) п. 2 § 4. На поверхностях разрыва правая часть доопределяется как в случаях а) или в) п. 2 § 4. Пусть области непрерывности функции $f(t,x)$ удовлетворяют условию γ п. 1 § 6. Тогда согласно п. 1 § 6 решения уравнений $\dot{x}=f(t,x)$ и (14) совпадают с решениями некоторых дифференциальных включений с выпуклыми правыми частями, β-непрерывными по t, x. Поэтому из утверждений, доказанных в п. 2 для дифференциальных включений, вытекают такие же утверждения для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями при только что указанных условиях:

А. Через любую внутреннюю точку (t_0, x_0) области проходит решение.

Б. Каждое решение, проходящее внутри рассматриваемой замкнутой ограниченной области, продолжается в обе стороны до выхода на границу области.

В. Все решения, проходящие в замкнутой ограниченной области, равностепенно непрерывны.

Г. Предел равномерно сходящейся последовательности решений (или δ_k-решений, где $\delta_k \to 0$) является решением.

Д. Если все решения с данным начальным условием $x(t_0) = x_0$ (или со всевозможными начальными условиями $(t_0, x_0) \in A$, A — заданный компакт) существуют при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то множество точек, лежащих на графиках этих решений (отрезок воронки), ограничено и замкнуто. Множество этих решений является компактом в метрике $C[a, b]$

Е. Если в утверждении Д компакт A связен, то множество решений связно в метрике $C[a, b]$; любое сечение $t = t_1 \in [a, b]$ воронки — связный компакт.

5. Очень общие теоремы существования решений для дифференциальных включений с выпуклой правой частью доказаны в [142], [143]. Докажем сначала лемму о приближенных решениях, усиливающую один из результатов статьи [144].

Л е м м а 3. *Пусть при $a < t < b$ вектор-функции $x_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ абсолютно непрерывны и их графики содержатся в ограниченной замкнутой области D. Пусть в области D при почти всех t множество $F(t, x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое; функция F β-непрерывна по x; $|F(t, x)| \leqslant m(t)$, функция $m(t)$ суммируема;*

$$\dot{x}_k(t) \in [\operatorname{co} F(t, (x_k(t))^{\eta_k(t)})]^{\eta_k(t)}, \tag{15}$$

$$\eta_k(t) \geqslant 0, \quad \int_a^b \eta_k(t)\,dt \to 0 \qquad (k \to \infty). \tag{16}$$

Тогда а) *функции $x_k(t)$ равностепенно непрерывны на $[a, b]$;* б) *предел любой сходящейся подпоследовательности функции $x_k(t)$ есть решение включения $\dot{x} \in F(t, x)$.*

З а м е ч а н и е 1. $F(t, (x_k(t))^{\eta_k(t)})$ есть объединение множеств $F(t, x)$ для всех $x \in (x_k(t))^{\eta_k(t)}$, т.е. для всех x из замкнутой окрестности радиуса $\eta_k(t)$ точки $x_k(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Условие (15) выполнено, в частности, тогда, когда

$$\dot{x}_k(t) = u_k(t) + q_k(t), \quad u_k(t) \in F(t, x_k(t) + p_k(t));$$

$$|p_k(t)| \leqslant \eta_k(t), \quad |q_k(t)| \leqslant \eta_k(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (15) следует, что почти всюду

$$|\dot{x}_k(t)| \leqslant m(t) + \eta_k(t). \tag{17}$$

Для любого $\epsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и k_0, что для любых непересекающихся интервалов $(\alpha_l, \beta_l) \subset [a, b]$ с суммой длин, меньшей δ, и любого $k > k_0$

$$\sum_l \int_{\alpha_l}^{\beta_l} m(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \int_a^b \eta_k(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда при $k > k_0$ из (17) следует

$$\sum_l |x_k(\beta_l) - x_k(\alpha_l)| = \sum_l \left| \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \dot{x}_k(t)\,dt \right| < \epsilon. \tag{18}$$

Отсюда вытекает утверждение а).

Переходя в (18) к пределу по любой сходящейся подпоследовательности

$$x_k(t) \to x(t), \qquad k = k_1, k_2, \ldots \to \infty, \tag{19}$$

получаем, что предельная функция $x(t)$ абсолютно непрерывна.

Покажем, что почти всюду $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$. Из (16) следует, что для любого $\epsilon > 0$ мера множества, где $|\eta_k(t)| \geqslant \epsilon$, стремится к нулю при $k \to \infty$, т.е. последовательность $\eta_k(t)$ сходится к нулю по мере. Поэтому из подпоследовательности $\eta_k(t)$, $k = k_1, k_2, \ldots$, можно выбрать ([64], стр. 110) новую подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду на $[a, b]$. Для краткости обозначим ее $\{\eta_l(t)\}$, а соответствующую подпоследовательность из (19) обозначим $\{x_l(t)\}$.

При почти всех t из $x_l(t) \to x(t)$, $\eta_l(t) \to 0$ с учетом β-непрерывности функции $F(t, x)$ по x следует

$$F(t, (x_l(t))^{\eta_l(t)}) \subset [(F(t, x(t))]^{\nu_l(t)}, \qquad \nu_l(t) \to 0.$$

Здесь в правой части стоит выпуклое множество, поэтому перед левой частью можно дописать знак co. Тогда из (15) имеем

$$\dot{x}_i(t) \in [F(t, x(t))]^{\nu_i(t)+\eta_i(t)}.$$

Значит, для любого $v \in R^n$ при почти всех t

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\ \dot{x}_i(t)\cdot v = \varphi(t) \leq \psi(F(t, x(t)), v), \tag{20}$$

где ψ — опорная функция (п. 3 § 6).

Для любых α, β $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ имеем

$$v\cdot(x_i(\beta) - x_i(\alpha)) = \int_\alpha^\beta v\cdot\dot{x}_i(t)\cdot dt \leq \int_\alpha^\beta \sup_{j\geq i} v\cdot\dot{x}_j(t)\cdot dt.$$

Так как $\sup v\cdot\dot{x}_j(t)$ $(j \geq i)$ при возрастании i не возрастает и стремится к левой части (20), то при $i \to \infty$ получаем

$$\int_\alpha^\beta v\cdot\dot{x}(t)\cdot dt \equiv v\cdot(x(\beta) - x(\alpha)) \leq \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt.$$

Интервал (α, β) — произвольный, поэтому $v\cdot\dot{x}(t) \leq \varphi(t)$ почти всюду. В силу (20) почти всюду на $[a, b]$

$$v\cdot\dot{x}(t) \leq \psi(F(t, x(t)), v).$$

То же справедливо для счетного всюду плотного множества векторов v. Следовательно (см. лемму 6 § 6 и абзац после нее), $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ почти всюду.

Теорема 5 [143]. *Пусть при почти всех $t \in [t_0, t_0 + a]$ для $|x - x_0| \leq b$*

1) *множество $F(t, x)$ — непустое, замкнутое, выпуклое;*
2) *функция F β-непрерывна по x;*
3) *существует однозначная вектор-функция $f(t, x) \subset F(t, x)$, которая при каждом x измерима по t;*
4) *существует такая суммируемая функция $m(t)$, что $|f(t, x)| \leq m(t)$.*

Тогда на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + d$, где d определяется как в (3) § 1, *существует решение задачи*

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{21}$$

Замечание. Если при каждом x функция F измерима по t, то условие 3) выполнено в силу теоремы 5 § 6.

Доказательство. Для $k = 1, 2, \ldots$ возьмем

$$h_k = d/k, \quad t_{ki} = t_0 + ih_k, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Построим функцию $x_k(t)$. Пусть $x_k(t_{k0}) = x_0$. Если для некоторого $i \geq 0$ значение $x_k(t_{ki}) = x_{ki}$ уже определено и

$$|x_{ki} - x_0| \leq \varphi(t_{ki}) \qquad \left(\varphi(t) \equiv \int_{t_0}^t m(s)\,ds\right), \tag{22}$$

то при $t_{ki} < t \leq t_{k,i+1}$ полагаем

$$x_k(t) = x_{ki} + \int_{t_{ki}}^t f(s, x_{ki})\,ds. \tag{23}$$

Так как $|f(t, x)| \leq m(t)$; то из (22) и (23) имеем

$$|x_k(t) - x_0| \leq \varphi(t) \leq b \qquad (t_{ki} \leq t \leq t_{k,i+1}). \tag{24}$$

Таким образом, $x_k(t)$ строится последовательно на отрезках $I_{ki} = [t_{ki}, \ t_{k,i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. На всем отрезке $[t_0, t_0 + d]$ справедливы неравенства (24), вектор-функции $x_k(t)$ абсолютно непрерывны и почти всюду на каждом отрезке I_{ki}

$$\dot{x}_k(t) = u_k(t) = f(t, x_{ki}) \in F_0(t, x_{ki}),$$

где $F_0(t, x)$ — часть множества $F(t, x)$, содержащаяся в шаре радиуса $m(t)$ с центром в начале координат. Функция $F_0(t, x)$ также удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы 5.

Пусть $z_k(t) = x_{ki}$ $(t_{ki} < t \leq t_{k,i+1}, \ i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Тогда

$$|x_k(t) - z_k(t)| \leq \max_i (\varphi(t_{k,i+1}) - \varphi(t_{ki})) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

В силу леммы 3 из последовательности $\{x_k(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность; ее предел есть решение задачи $\dot{x} \in F_0(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, значит, и задачи (21).

Лемма 4 [143]. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и* $|F(t, x)| \leq m_1(t)$, *функция* $m_1(t)$ *суммируема.*

Тогда множество решений задачи (21) *на отрезке* $[t_0, t_0+d]$ *является компактом в метрике* C.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3, если взять $z_k(t) = x_k(t)$, $u_k(t) = \dot{x}_k(t)$.

Теорема 6. *Пусть многозначная функция* $F(t, x)$ *определена в области* G *и в каждой ограниченной замкнутой области* $D \subset G$ *выполнены условия леммы* 4, *может быть, с разными функциями* $m(t)$ *и* $m_1(t)$ *для разных областей* D.

Тогда решения включения $\dot{x} \in F(t, x)$ *в области* G *обладают свойствами* A–E, *перечисленными в п.* 4.

Доказывается теми же методами, что и аналогичные утверждения в п. 2; при этом ссылки на леммы 1, 2 и теорему 1 заменяются ссылками на леммы 3, 4 и теорему 5. При несколько менее общих условиях эти утверждения доказаны в [143].

В случае, когда множество $F(t,x)$ может быть невыпуклым, β-непрерывности функции F недостаточно для существования решения (пример в п. 3).

Теорема 7 [145]. *Пусть при* $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|x - x_0| \leq b$ *множество* $F(t, x)$ — *непустое, замкнутое;* $|F(t, x)| \leq m(t)$, *функция* $m(t)$ *суммируема; функция* F α-*непрерывна по* x, *измерима по* t. *Тогда при* $t_0 \leq t \leq t_0 + d$ *существует решение задачи* (21).

В [146] показано, что в тех точках, где множество $F(t,x)$ выпукло, условие α-непрерывности функции F по x можно ослабить до β-непрерывности.

6. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, обобщающие уравнения Каратеодори на случай, когда правые части могут быть разрывными и по t, и по x, рассматривались в [107], [108], [93].

Пусть вектор-функция $f(t, x)$ определена почти всюду и измерима в области G пространства t, x $(x \in R^n)$ и для каждой ограниченной замкнутой области $D \subset G$ существует такая почти всюду конечная функция $m(t)$, что почти всюду в D

$$|f(t, x)| \leq m(t). \tag{25}$$

Пусть $F(t,x)$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(t,x')$, когда $x' \to x$, пробегая почти всю (за исключением множества меры нуль) окрестность точки x, т.е.

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\mathrm{co}}\, f(t, x^\delta \setminus N). \tag{26}$$

Здесь $\overline{\mathrm{co}}$ означает выпуклое замыкание (п. 1 § 5); пересечение берется по всем множествам N меры нуль и по всем $\delta > 0$.

Так как функция $f(t, x)$ измерима в области G, то при почти всех t она измерима на сечении G_t множества G плоскостью $t = \mathrm{const}$ и в (25) $m(t) < \infty$. При этих t (множество таких t обозначим E) функция $f(t, x)$, рассматриваемая как функция только от x, почти всюду аппроксимативно непрерывна ([64], стр. 287, 396), т.е. всюду, кроме множества $N_0(t)$ меры нуль. При $t \in E$ вместо (26) можно написать

$$F(t,x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\mathrm{co}}\, f(t, x^\delta \setminus N_0(t)), \tag{27}$$

следовательно, множество $F(t,x)$ не пусто, ограничено, замкнуто, выпукло. При остальных t множество $F(t, x)$ можно не определять. Вместо пересечения по всем $\delta > 0$ можно взять пересечение по произвольной последовательности $\delta = \delta_i \to +0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Легко показать, что функция (27) β-непрерывна по x.

Вектор-функция $x(t)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется [93] *решением* уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{28}$$

если она абсолютно непрерывна и почти всюду $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$.

Очевидно, это определение не зависит от выбора системы координат в пространстве x. Определения из [107] и [108] не обладают этим свойством.

Решения в смысле этого определения для уравнений Каратеодори совпадают с решениями в смысле п. 1 § 1, а для уравнений с кусочно непрерывными правыми частями — с решениями в смысле определения а) п. 2 § 4.

Теорема 8 [93]. *Пусть в области* G *вектор-функция* $f(t, x)$ *измерима и почти всюду удовлетворяет неравенству* (25) *с суммируемой функцией* $m(t)$.

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ *существует решение уравнения* (28) *с начальным условием* $x(t_0) = x_0$. *Решение определено по меньшей мере на отрезке* $[t_0 - d, t_0 + d]$, *где* d *таково, что цилиндр* Z

$$|t - t_0| \leq d, \qquad |x - x_0| \leq r$$

(r *равно большему из интегралов от функции* $m(t)$ *по отрезкам* $[t_0 - d, t_0]$ *и* $[t_0, t_0 + d]$) *весь содержится внутри области* G.

Доказательство. Пусть $\rho_0 = \rho(Z, \partial G)$, ω_k — объем шара $|y| < \rho_k = 2^{-k}\rho_0$,

$$f_k(t, x) = \frac{1}{\omega_k} \int_{|y| < \rho_k} f(t, x + y)\, dy. \tag{29}$$

Для $k = 1, 2, \ldots$ функция f_k определена при $|x - x_0| \leq r$ и почти всех $t \in [t_0 - d, t_0 + d]$, непрерывна по x, измерима по t, x, значит, измерима по t при почти всех x (а вследствие непрерывности по x — и при всех x), $|f_k(t, x)| \leq m(t)$. Таким образом, функция f_k в Z удовлетворяет условиям Каратеодори, и по теореме 1 § 1 при $t_0 - d < t < t_0 + d$ существует решение $x_k(t)$ задачи

$$\dot x_k = f_k(t, x_k), \qquad x_k(t_0) = x_0,$$

проходящее в цилиндре Z. Из (29) и леммы 12 § 5 следует, что почти всюду (точнее, при $t \in E$; множество E определено выше)

$$f_k(t, x) \in \overline{\text{co}}\, f(t, x^{\rho_k} \setminus N_0(t)),$$

$N_0(t)$ то же, что в (27). При $y \in x^{\rho_k} \setminus N_0(t)$ функция $f(t, y)$ аппроксимативно непрерывна по y, поэтому $f(t, y) \in F(t, y)$. Следовательно, почти всюду

$$\dot x_k(t) = f_k(t, x_k(t)) \in \text{co} F(t, (x_k(t))^{\rho_k}). \tag{30}$$

Так как функция F β-непрерывна по x, то из леммы 14 § 5 следует, что множество $F(t, (x_k(t))^{\rho_k})$ в правой части (30) замкнуто. В силу леммы 3, где $u_k(t) = \dot x_k(t)$, из последовательности $\{x_k(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, и ее предел есть решение включения $\dot x \in F(t, x)$, т.е. решение уравнения (28).

Т е о р е м а 9 [93]. *При выполнении условий теоремы* 8 *решения уравнения* (28) *обладают свойствами* А—Е, *перечисленными в п.* 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решения уравнения (28) совпадают с решениями включения $\dot x \in F(t, x)$ с функцией F, определяемой в (26) и (27). Функция F удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 5.

Покажем, что условия 3) и 4) тоже выполнены. Было показано, что функция (29) измерима по t и $|f_k(t, x)| \leqslant m(t)$ почти всюду, точнее, при $t \in E$. Пусть $H(t, x)$ есть множество всех предельных точек последовательности $f_k(t, x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, при $t \in E$ множества $H(t, x)$ и $\text{co}\, H(t, x)$ — ограниченные, замкнутые. Так как для любого $a \in R^n$

$$\rho(a, H(t, x)) = \varliminf_{k \to \infty} |f_k(t, x) - a|,$$

то функции $\rho(a, H(t, x))$ и $H(t, x)$ измеримы по t, $\text{co}\, H(t, x)$ — тоже (п. 3 § 6).

Так как, подобно (30), $f_k(t, x) \in \text{co} F(t, x^{\rho_k})$, $\rho_k \to 0$, а функция F β-непрерывна по x, то $\text{co} H(t, x) \subset \text{co} F(t, x) \subset F(t, x)$. По теореме 5 § 6 существует однозначная измеримая по t функция

$$f^*(t, x) \in \text{co} H(t, x) \subset F(t, x).$$

Из (25) следует, что $|F(t, x)| \leqslant m(t)$ при почти всех t. Следовательно, для функции $F(t, x)$ выполнены также условия 3) и 4) теоремы 5. Тогда в силу теоремы 6 решения включения $\dot x \in F(t, x)$, значит, и решения уравнения (28) обладают свойствами А—Е.

Теоремы о дифференциальных неравенствах для уравнений с разрывными правыми частями см. в [112].

§ 8. Зависимость решения от начальных условий и от правой части уравнения

Здесь показывается, что в случае единственности решения оно непрерывно зависит от начальных условий и от правой части уравнения или включения, а в случае неединственности множество решений с данными начальными условиями полунепрерывно зависит от начальных условий. Обосновывается применимость доопределений а)—в) § 4 для приближенного описания движений в различных физических системах.

1. Пусть многозначная функция $F(t, x)$ определена в некоторой ϵ_0-окрестности D_0 множества D, а $F^*(t, x)$ — на множестве D. Тогда при $0 < \delta\sqrt{2} < \epsilon_0$ для каждой точки $(t, x) \in D$ определено множество $F(t^\delta, x^\delta)$ — объединение множеств $F(t_1, x_1)$ для всех $t_1 \in t^\delta$, $x_1 \in x^\delta$. Будем писать $d_D(F^*, F) \leqslant \delta$ в тех и только тех случаях, когда для всех $(t, x) \in D$

$$F^*(t, x) \subset [\text{co} F(t^\delta, x^\delta)]^\delta \tag{1}$$

(обозначения см. в п. 1 § 7). При выполнении (1) всякое проходящее в D решение включения $\dot x \in F^*(t, x)$ является δ-решением (п. 1 § 7) включения $\dot x \in F(t, x)$.

Число $d_D(F^*, F)$, равное нижней грани тех δ, для которых справедливо (1), можно назвать мерой отклонения многозначной функции F^* от F. При условиях, сформулированных в замечании в п. 1 § 7, из (1) следует при достаточно малом δ, что график функции F^* содержится в малой окрестности графика функции F.

Л е м м а 1. *Пусть* $F(t, x)$ *удовлетворяет основным условиям* (*п.* 2 § 7) *в области* G, *а* $x_i(t)$ — δ_i-*решение включения*

$$\dot x \in F(t, x), \tag{2}$$

проходящее при $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$ *в замкнутой ограниченной области* $D \subset G$, $i = 1, 2, \ldots$;

$$\delta_i \to 0, \quad \alpha_i \to \alpha, \quad \beta_i \to \beta, \quad x_i(\alpha_i) \to x_0, \quad x_i(\beta_i) \to x^*. \tag{3}$$

Тогда из последовательности $\{x_i(t)\}$ *можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом отрезке* $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$ *к решению* $x(t)$ *включения* (2); *при этом* $x(\alpha) = x_0$, $x(\beta) = x^*$.

Доказательство. По лемме 15 § 5 $|F(t,x)| \leqslant m$ в D^ρ, где $\rho > 0$ столь мало, что $D^\rho \subset G$. Тогда при $\delta_i\sqrt{2} \leqslant \rho$

$$|\dot{x}_i(t)| \leqslant [\operatorname{co} F(t^{\delta_i}, (x_i(t))^{\delta_i})]^{\delta_i}| < m + \rho. \tag{4}$$

Далее, надо повторить рассуждения из доказательства леммы 5 § 1, взяв $m(t) = m + \rho$. Предел сходящейся подпоследовательности будет решением по лемме 1 § 7.

Теорема 1. *Пусть* $F(t, x)$ *удовлетворяет основным условиям* (п. 2 § 7) *в области* G; $t_0 \in [a, b]$, $(t_0, x_0) \in G$; *все решения задачи*

$$\dot{x} \in F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$ *существуют и их графики содержатся в* G.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любых* $t_0^* \in [a, b]$, x_0^* *и* $F^*(t, x)$, *удовлетворяющих условиям*

$$|t_0^* - t_0| \leqslant \delta, \quad |x_0^* - x_0| \leqslant \delta, \quad d_G(F^*, F) \leqslant \delta \tag{6}$$

и основным условиям, каждое решение задачи

$$\dot{x}^* \in F^*(t, x^*), \qquad x^*(t_0^*) = x_0^* \tag{7}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$ *существует и отличается от некоторого решения задачи* (5) *не больше, чем на* ϵ.

Это значит, что каждое решение $x^*(t)$ задачи (7) или существует на $[a, b]$, или его можно продолжить на весь отрезок $[a, b]$, и для него найдется такое решение $x(t)$ задачи (5), что

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^*(t) - x(t)| \leqslant \epsilon.$$

Доказательство. Множество H точек (t, x), $a \leqslant t \leqslant b$, лежащих на графиках решений задачи (5), ограничено и замкнуто по теореме 3 § 7. По лемме 1 § 5 $\rho(H, \partial G) = \rho_0 > 0$.

Предположим, что теорема неверна. Тогда для некоторого ϵ $(0 < 2\epsilon < \rho_0)$ найдется последовательность решений $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, задач

$$\dot{x}_i \in F_i(t, x_i), \qquad x_i(t_{0i}) = x_{0i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

для которых при $\delta_i \to 0$ $(i \to \infty)$ имеем

$$|t_{0i} - t_0| \leqslant \delta_i, \qquad |x_{0i} - x_0| \leqslant \delta_i, \qquad d_G(F_i, F) \leqslant \delta_i,$$

и или решение x_i не продолжается на весь отрезок $[a, b]$, или для каждого решения $x(t)$ задачи (5) при всех i

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_i(t) - x(t)| > \epsilon. \tag{9}$$

В обоих случаях для всех $i > i_0$ точка (t_{0i}, x_{0i}) лежит внутри H^ϵ и решение $x_i(t)$ проходит в H^ϵ при $\alpha_i \leqslant t \leqslant \beta_i$, $t_{0i} \in (\alpha_i, \beta_i)$, а точки

$$p_i(\alpha_i, x_i(\alpha_i)), \qquad q_i = (\beta_i, x_i(\beta_i))$$

лежат на границе ∂H^ϵ замкнутой области H^ϵ (теорема 2 § 7).

Выберем такую подпоследовательность $i = i_1, i_2, \ldots \to \infty$, по которой

$$p_i \to p = (t_p, x_p) \in \partial H^\epsilon, \qquad q_i \to q = (t_q, x_q) \in \partial H^\epsilon. \tag{10}$$

Применив лемму 1 к подпоследовательности $x_i(t)$, $i = i_1, i_2, \ldots$, получим новую подпоследовательность P, сходящуюся к решению $x(t)$ включения (2), проходящему через точки p и q.

Так как решение $x_i(t)$ проходит через точку $(t_{0i}, x_{0i}) \to (t_0, x_0)$, то в силу (4) при $i > i^*$ решение $x_i(t)$ на отрезке с концами t_{0i} и t_0 проходит внутри H^ϵ и

$$x(t_0) = \lim x_i(t_0) = \lim x_i(t_{0i}) = x_0.$$

Значит, $x(t)$ – решение задачи (5), и его график при

$$\max\{a;\ t_q\} \leqslant t \leqslant \min\{b;\ t_p\}$$

содержится в H. Тогда из (10) следует, что $t_p < a$, $t_q > b$. Теперь из леммы 1 вытекает, что подпоследовательность P сходится к $x(t)$ равномерно на $[a, b]$. Это противоречит (9).

Следствие 1. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в области G, задача* (5) *при $t \geqslant t_0$ имеет единственное решение $x(t)$ и его график на отрезке $[t_0, b]$ проходит внутри G.*

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых t_0^*, x_0^*, $F^*(t, x)$, удовлетворяющих неравенствам (6) *и основным условиям в G, каждое решение задачи* (7) *на отрезке $[t_0, b]$ существует и отличается от $x(t)$ меньше, чем на ϵ.*

Таким образом, из правосторонней единственности решения следует правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий и от функции F. Аналогичное утверждение справедливо для отрезка $[a, t_0]$.

Следствие 2. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям в области G и все решения задач* (5) *с начальными условиями $(t_0, x_0) \in M$, M – заданный компакт, при $a \leqslant t \leqslant b$ существуют и их графики содержатся в G.*

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого компакта $M^* \subset M^\delta$ и любой функции $F^*(t, x)$, удовлетворяющей основным условиям и условию $d_G(F^*, F) \leqslant \delta$, каждое решение задачи (7) *с любыми $(t_0^*, x_0^*) \in M^*$ при $a \leqslant t \leqslant b$ существует и отличается от некоторого решения задачи* (5) *с некоторыми $(t_0, x_0) \in M$ не больше, чем на ϵ.*

Доказательство. Если утверждение неверно, то найдется последовательность решений задач (8), для которых начальные точки неограниченно приближаются к M, а сами решения или удовлетворяют неравенству (9), или существуют не на всем отрезке $[a, b]$. Выберем подпоследовательность решений, для которых начальные точки сходятся к некоторой точке $(t_0, x_0) \in M$. Для этих решений справедливо утверждение теоремы 1. Но это противоречит сделанному предположению.

Согласно следствию 2 множество всех решений задачи (7) с $(t_0^*, x_0^*) \in M^*$ содержится в ϵ-окрестности (в метрике $C[a, b]$) множества всех решений задачи (5) с $(t_0, x_0) \in M$. Следовательно, отрезок $a \leqslant t \leqslant b$ воронки множества M^* для включения $\dot{x} \in F^*(t, x)$ содержится в ϵ-окрестности отрезка воронки множества M для включения (2). Итак, множество решений с начальными условиями из данного компакта и отрезок интегральной воронки полунепрерывным сверху образом зависят от этого компакта и от правой части включения.

2. Из теоремы 1 выводятся аналогичные теоремы для дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями, если решения понимаются в смысле определения а) или в) § 4.

Пусть вектор-функции $f(t, x)$ и $f^*(t, x)$ в области G кусочно непрерывны, как в п. 1 § 4, и удовлетворяют условию γ п. 1 § 6. Будем писать $d^0(f^*, f) \leqslant \delta$ в том и только в том случае, когда для каждой непрерывности (t, x) функции f^* найдется такая точка непрерывности (t', x') функции f, что

$$|t' - t| \leqslant \delta, \qquad |x' - x| \leqslant \delta,$$
$$|f(t', x') - f^*(t, x)| \leqslant \delta. \tag{11}$$

Заметим, что из (11) не следует, что при каком-либо из доопределений а) –в) § 4 значения функций f^* и f на поверхности разрыва отличаются не больше, чем на δ. Например, если $x = (x_1, x_2)$,

$$f(u(x)) = (2 - u;\ 0{,}1 - 0{,}1u), \qquad f^*(u(x)) = (2 - u;\ \ 0{,}2 - 0{,}1u),$$
$$u = 0 \ \ (x_2 < 0), \qquad u = 3 \ \ (x_2 > 0),$$

то $|f^* - f| = 0{,}1$ при $x_2 \neq 0$, а в силу любого из доопределений а) –в) § 4 при $x_2 = 0$ имеем $f = (1, 0)$, $f^* = (0, 0)$.

В следующей теореме предполагается, что в области G вектор-функции $f(t, x)$ и $f^*(t, x)$ кусочно непрерывны и удовлетворяют условию γ, все решения понимаются в смысле а) § 4, $t_0 \in [a, b]$, $(t_0, x_0) \in G$.

Теорема 2. *Пусть все решения задачи*

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{12}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$ *существуют и их графики содержатся в* G.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любых* $t_0^* \in [a, b]$, x_0^* *и* $f^*(t, x)$, *удовлетворяющих условиям*

$$|t_0^* - t_0| \leqslant \delta, \qquad |x_0^* - x_0| \leqslant \delta, \qquad d^0(f^*, f) \leqslant \delta, \tag{13}$$

каждое решение задачи

$$\dot{x}^* = f^*(t, x^*), \qquad x^*(t_0^*) = x_0^* \tag{14}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$ *существует и отличается от некоторого решения задачи* (11) *не больше, чем на* ϵ.

Доказательство. Согласно п. 1 § 6 уравнения (12) и (14) при условии γ равносильны включениям

$$\dot{x} \in F(t, x), \qquad \dot{x}^* \in F^*(t, x^*).$$

В областях непрерывности функции f имеем $F = f$, а в точках разрыва $F(t, x) = \operatorname{co} H(t, x)$, где $H(t, x)$ — множество предельных значений для $f(t_i, x_i)$ при $t_i \to t$, $x_i \to x$. Аналогично для F^*. Согласно п. 1 § 6 функции F и F^* β-непрерывны по t, x.

Если функция f^* непрерывна в точке (t, x), то из (11) имеем

$$F^*(t, x) = f^*(t, x) \subset [f(t', x')]^\delta \subset [F(t^\delta, x^\delta)]^\delta.$$

Если же f^* разрывна в точке (t, x) и непрерывна в точках $(t_i, x_i) \to (t, x)$, то

$$f^*(t_i, x_i) \subset [f(t_i', x_i')]^\delta, \qquad |t_i' - t_i| \leqslant \delta, \qquad |x_i' - x_i| \leqslant \delta. \tag{15}$$

Покажем, что при достаточно больших i точки $f(t_i', x_i')$ содержатся в сколь угодно малой окрестности множества $F(t^\delta, x^\delta)$. В противном случае для некоторого $\epsilon > 0$ нашлась бы подпоследовательность точек $f(t_i', x_i')$, не содержащаяся в $[F(t^\delta, x^\delta)]^\epsilon$. Из нее можно было бы выбрать новую подпоследовательность $(i = i_1, i_2, \ldots \to \infty)$, по которой

$$(t_i', x_i') \to (t_0', x_0') \in (t^\delta, x^\delta), \qquad f(t_i', x_i') \to u.$$

Но тогда $u \in F(t_0', x_0') \subset F(t^\delta, x^\delta)$. Это противоречит выбору первой подпоследовательности.

Из доказанного и из (15) следует, что множество $H^*(t, x)$ предельных значений для $f^*(t_i, x_i)$ содержится в $[F(t^\delta, x^\delta)]^\delta$. Так как $F^*(t, x) = \operatorname{co} H^*(t, x)$ (п. 1 § 6), то с помощью леммы 9 § 5 получаем

$$F^*(t, x) \subset \operatorname{co}([F(t^\delta, x^\delta)]^\delta) = [\operatorname{co} F(t^\delta, x^\delta)]^\delta.$$

Итак, из (13) следует (1), и из теоремы 1 вытекает справедливость утверждения теоремы 2.

Сформулируем подобную теорему для задачи

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t, x), \ldots, u_r(t, x)), \tag{16}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{17}$$

где $(t, x) \in G$, f — непрерывная вектор-функция, $u_i(t, x)$ — скалярная функция, разрывная только на гладкой поверхности S_i, $i = 1, \ldots, r$. Близкая теорема имеется в [95]. Как в случае в) § 4, решениями уравнения (16) называются решения включения

$$\begin{gathered} \dot{x} \in \operatorname{co} F_1(t, x), \\ F_1(t, x) = f(t, x, U_1(t, x), \ldots, U_r(t, x)). \end{gathered} \tag{18}$$

В точках непрерывности функции u_i множество $U_i(t, x)$ есть точка $u_i(t, x)$, а в точках разрыва, т.е. на поверхности S_i, множество $U_i(t, x)$ есть отрезок, соединяющий точки $u_i^-(t, x)$ и $u_i^+(t, x)$ — предельные значения для $u_i(t', x')$ при $t' \to t$, $x' \to x$.

Предполагается, что $(t_0, x_0) \in G$, $a \leqslant t_0 \leqslant b$. Такие же предположения делаются и для задачи

$$\dot{x} = f^*(t, x, u_1^*(t, x), \ldots, u_r^*(t, x)), \quad x(t_0^*) = x_0^*. \tag{19}$$

Функция f^* непрерывна, функция u_i^* непрерывна или разрывна только на поверхности S_i^*, $i = 1, \ldots, r$.

Теорема 3. *Пусть все решения* (*в смысле определения* в) § 4) *задачи* (16), (17) *при* $a \leqslant t \leqslant b$ *существуют и проходят в области* G.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для любых* $t_0^* \in [a, b]$, x_0^*, f^*, u_i^*, *удовлетворяющих условиям*

$$|t_0^* - t_0| \leqslant \delta, \quad |x_0^* - x_0| \leqslant \delta, \quad |f^* - f| \leqslant \delta, \quad d^0(u_i^*, u_i) \leqslant \delta, \tag{20}$$

$i = 1, \ldots, r$, *каждое решение задачи* (19) *при* $a \leqslant t \leqslant b$ *существует и отличается от некоторого решения задачи* (16), (17) *не больше, чем на* ϵ.

Доказательство. Согласно п. 1 § 6 функция $\operatorname{co} F_1(t, x)$ удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7. Множество H точек (t, x), $a \leqslant t \leqslant b$, лежащих на графиках решений задачи (16), (17), ограничено и замкнуто по теореме 3 § 7. По лемме 1 § 5 $\rho(H, \partial G) \geqslant 3\sigma > 0$. Далее, функции u_i и f рассматриваются только при $(t, x) \in H^\sigma$, $(t', x') \in H^{2\sigma}$.

Для любых точек (t, x) и (t', x') из одной и той же области непрерывности функции u_i при $t' \in t^\eta$, $x' \in x^\eta$ имеем

$$|u_i(t', x') - u_i(t, x)| \leqslant \mu(\eta). \tag{21}$$

Функцию $\mu(\eta)$ можно взять общей для всех u_i, $i = 1, \ldots, r$; $\mu(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$. При $t' \in t^\eta$, $x' \in x^\eta$ и

$$|u_i' - u_i| \leqslant \eta + \mu(\eta), \quad i = 1, \ldots, r,$$

имеем

$$|f(t', x', u_1', \ldots, u_r') - f(t, x, u_1, \ldots, u_r)| \leqslant \nu(\eta), \tag{22}$$

$\nu(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Рассуждением от противного с использованием компактности H^σ доказывается следующее утверждение. Для любого $\theta > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\theta) > 0$, что для каждого набора индексов $N = (i_1, \ldots, i_s)$ и каждой такой точки $(t, x) \in H^\sigma$, в окрестности (t^δ, x^δ) которой содержатся точки всех поверхностей S_i, $i \in N$, найдется в множестве (t^θ, x^θ) общая точка всех этих поверхностей, точнее, точка множества $\bigcap_{i \in N} \overline{S}_i$. Очевидно, $\delta(\theta) \leqslant \theta$.

Пусть $0 < \theta < \sigma$, $0 < \delta < \delta(\theta)$. В силу последнего из неравенств (20) для каждой точки (τ, ξ), близкой к рассматриваемой точке $(t, x) \in H^\sigma$, и каждого $i \leqslant r$ найдется такая точка $(\tau_i', \xi_i') \in (\tau^\delta, \xi^\delta)$, что

$$|u_i^*(\tau, \xi) - u_i(\tau_i', \xi_i')| \leqslant \delta. \tag{23}$$

Если в (t^δ, ξ^δ) нет точек поверхностей $S_1, \ldots, S_r$, то при $(\tau, \xi) \to (t, x)$ все предельные значения функции $u_i^*(\tau, \xi)$ в силу (23) и (21) содержатся в $(\delta + \mu(\delta))$-окрестности значения $u_i(t, x)$, т.е.

$$U_i^*(t, x) \subset (U_i(t, x))^{\delta + \mu(\delta)}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{24}$$

Если же в (t^δ, x^δ) имеются точки одной или нескольких поверхностей S_i (т.е. поверхностей S_i с номерами $i \in N$), то в (t^θ, x^θ) имеется общая точка (t', x') всех этих поверхностей. Сколь угодно близко к ней найдутся точки каждой из двух областей, на которые поверхность S_i делит пространство, т.е. точки каждой из областей непрерывности функции u_i, $i \in N$. В обоих случаях ($i \in N$ и $i \notin N$) сколь угодно близко к точке (t', x') найдутся точки (τ_i^0, ξ_i^0), принадлежащие той же области непрерывности функции u_i, что и точка (τ_i', ξ_i') в (23).

Можно считать, что τ, ξ, τ_i^0, ξ_i^0 отличаются от t, x, t', x' (соответственно) меньше, чем на $\delta/2$. Так как $(t', x') \in (t^\theta, x^\theta)$, $(\tau_i', \xi_i') \in (\tau^\delta, \xi^\delta)$, то $|\tau_i' - \tau_i^0| < \eta$, $|\xi_i' - \xi_i^0| <$

$<\eta, \quad \eta = \theta + 2\delta$. А тогда в силу (21)

$$|u_i(\tau'_i, \xi'_i) - u_i(\tau^0_i, \xi^0_i)| \leqslant \mu(\eta). \tag{25}$$

При $(\tau, \xi) \to (t, x)$, $(\tau^0_i, \xi^0_i) \to (t', x')$ из (23) и (25) следует, что

$$U^*_i(t, x) \subset (U_i(t', x'))^{\delta + \mu(\eta)}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{26}$$

Итак, для каждой точки $(t, x) \in H^\sigma$ найдется точка $(t', x') \in (t^\theta, x^\theta)$, для которой справедливо (26) (в случае (24) $t' = t$, $x' = x$). Тогда в силу (22) и неравенства $|f^* - f| \leqslant \delta$ множество

$$F^*_1(t, x) = f^*(t, x, U^*_1(t, x), \ldots, U^*_r(t, x))$$

содержится в $(\delta + \nu(\eta))$-окрестности множества $F_1(t', x') \subset F_1(t^\theta, x^\theta)$. С помощью леммы 9 § 5 получаем

$$\mathrm{co} F^*_1(t, x) \subset [\mathrm{co} F_1(t^\theta, x^\theta)]^{\delta + \nu(\eta)}. \tag{27}$$

При $\delta \to 0$ можно взять $\theta = \theta(\delta) \to 0$, тогда $\eta = \theta + 2\delta \to 0$, $\nu(\eta) \to 0$. Значит, при достаточно малых δ число $d_D(\mathrm{co} F^*_1, \mathrm{co} F_1)$ для области $D = H^\sigma$ сколь угодно мало, и из теоремы 1 следует утверждение теоремы 3 для решений включений

$$\dot{x} \in \mathrm{co} F_1(t, x), \quad \dot{x} \in \mathrm{co} F^*_1(t, x),$$

равносильных уравнениям (16) и (19).

Следствие. *Если при условиях теоремы* 2 (*или теоремы* 3) *задача* (12) (*соответственно задача* (16), (17)) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, b]$, *а также на любом меньшем отрезке* $[t_0, c] \subset [t_0, b]$, *то это решение при* $t_0 \leqslant t \leqslant b$ *непрерывно зависит от начальных условий и правой части уравнения.*

В данном случае малыми изменениями правой части считаются такие, как в (13) и (20) при малом δ. Это значит, что допускаются не только малые изменения кусочно непрерывных функций f в (12) и u_i в (16) в областях их непрерывности, но и малые изменения границ этих областей.

3. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями часто применяются для упрощенного математического описания некоторых физических систем. Выбор того или иного способа доопределения правой части уравнения на поверхности разрыва, например доопределений а), б) или в) § 4, зависит от характера движения этой физической системы вблизи рассматриваемой поверхности. Пусть вне некоторой окрестности поверхности разрыва функции $f(t, x)$ движение происходит в соответствии с уравнением $\dot{x} = f(t, x)$. В этой окрестности закон движения может быть известен не полностью. Например, известно, что в этой окрестности движение может происходить только в двух режимах, а переключение с одного режиме движения на другой происходит с запаздыванием, о величине которого известно лишь то, что она мала. Требуется с помощью этих неполных сведений выбрать способ доопределения правой части уравнения на поверхности разрыва таким образом, чтобы при достаточно малой ширине окрестности движения физической системы сколь угодно мало отличались от решений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, доопределенного выбранным способом. Доказанные выше теоремы позволяют обосновать выбор того или иного способа доопределения в ряде часто встречающихся случаев.

Пусть кусочно непрерывная вектор-функция $f(t, x)$ и решения задачи (12) удовлетворяют условиям теоремы 2, функция $y(t)$ абсолютно непрерывна и $|y(t_0) - x_0| \leqslant \delta$. В каждой из областей непрерывности G_i функция f равна некоторой непрерывной в G_i функции f_i. Пусть функция f_i непрерывно продолжена из области G_i в ее δ-окрестность.

1° Пусть вне δ-окрестности M^δ множества M, на котором функция f разрывна, $y(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = f(t, y)$, а в самой окрестности при почти всех t

$$|\dot{y}(t) - f(t, z(t))| \leqslant \delta, \tag{28}$$

где $z(t)$ — любая такая функция, что $|z(t) - y(t)| \leqslant \delta$. В частности, в каждой точке из M^δ, находящейся на расстоянии, не большем δ, от областей $G_i, G_j, G_k, \ldots$, движение может происходить по любому из законов

$$\dot{y} = f_i(t, y), \quad \dot{y} = f_j(t, y), \quad \dot{y} = f_k(t, y), \ldots$$

Переключение, т.е. переход от движения по закону $\dot{y} = f_i(t, y)$ к движению по закону $\dot{y} = f_j(t, y)$, может происходить в любой точке из M^δ, находящейся на расстоянии, не большем δ, от областей G_i и G_j (рис. 12).

Тогда для любого $\epsilon > 0$ при достаточно малом δ функции $y(t)$ на данном отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ отличается меньше, чем на ϵ, от некоторого решения (в смысле определения а) § 4) задачи (12).

Покажем это. В силу определения а) § 4 уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ равносильно дифференциальному включению $\dot{x} \in F(t, x)$. Согласно (28) $\dot{y}(t) \in [F(t, (y(t))^\delta]^\delta$, и из теоремы 1 следует доказываемое утверждение.

2° Пусть при почти всех t

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t-\tau)), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \delta.$$

Запаздывание δ может быть постоянным или как угодно меняющимся между 0 и δ.

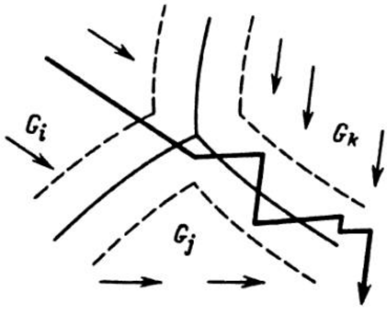


Рис. 12.

Тогда для $y(t)$ справедливо то же утверждение, что в случае 1°.

Покажем это. В области, где $|f| \leqslant m$, при $0 \leqslant \tau \leqslant \delta$ имеем

$$|y(t-\tau) - y(t)| \leqslant m\delta, \quad \dot{y}(t) \in F(t, (y(t))^{m\delta}),$$

функция F та же, что в случае 1°. Из теоремы 1 следует доказываемое утверждение.

3° Пусть в δ-окрестности множества точек разрыва функции f при почти всех t производная $\dot{y}(t)$ отличается не больше, чем на δ, от некоторого среднего (с любыми неотрицательными весами) значений функции $f(t, x)$ в δ-окрестности точки $(t, y(t))$, например,

$$\begin{gathered} |\dot{y}(t) - (\alpha_1 f(t, z_1) + \ldots + \alpha_m f(t, z_m))| \leqslant \delta, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \qquad |z_i - y(t)| \leqslant \delta, \; i = 1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{29}$$

числа α_i и векторы z_i могут произвольным образом зависеть от t и $y(t)$.

Другая возможность: $|\dot{y}(t) - f^*(t, y(t))| \leqslant \delta$,

$$\begin{gathered} f^*(t, y) = \int\limits_{|x-y| \leqslant \delta} f(t, x) p(t, x, y)\, dx, \\ p(t, x, y) \geqslant 0, \qquad \int\limits_{|x-y| \leqslant \delta} p(t, x, y)\, dx = 1. \end{gathered} \tag{30}$$

В частности, если функция $p(t, x, y)$ непрерывна при $|x - y| \leqslant \delta$, то функция (30) непрерывна.

Тогда в каждом из случаев (29) и (30) для $y(t)$ справедливо то же утверждение, что в случае 1°.

Покажем это. Значения функции $f(t, x)$, через которые выражается среднее, принадлежат множеству $f(t^\delta, y^\delta) \subset F(t^\delta, y^\delta)$, поэтому среднее принадлежит множеству $\mathrm{co}F(t^\delta, y^\delta)$, а

$$\dot{y}(t) \in [\mathrm{co}F(t^\delta, y^\delta)]^\delta.$$

Из теоремы 1 следует доказываемое утверждение.

З а м е ч а н и е. Если в (29) α_i — не числа, а матрицы, то утверждение, вообще говоря, несправедливо.

4° Известны и другие случаи, когда решения разрывной системы должны пониматься в смысле определения а) § 4. Например, в [147] показано, что для линейной системы общего положения со скалярным управлением решение, оптимальное по быстродействию, является также решением в смысле определения а) § 4 некоторой разрывной системы, полученной в результате решения задачи синтеза оптимального управления.

5° Рассмотрим теперь уравнение (16). Пусть функции $f, u_1, \ldots, u_r$ и решения задачи (16), (17) удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме 3 и перед ней. Пусть абсолютно непрерывная вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет неравенствам $|y(t_0) - x_0| \leqslant \delta$ и почти всюду

$$|\dot{y}(t) - f(t, y(t), v_1(t, y(t)), \ldots, v_r(t, y(t)))| \leqslant \delta, \tag{31}$$

причем $|v_i(t, y) - u_i(t, y)| \leqslant \delta$ вне δ-окрестности поверхности S_i, на которой функция u_i разрывна, а в этой окрестности

$$\inf u_i - \delta \leqslant v_i \leqslant \sup u_i + \delta, \tag{32}$$

где inf и sup берутся по δ-окрестности точки (t, y). Тогда для функции $y(t)$ справедливо утверждение теоремы 3.

Покажем это. Пусть U_i те же, что в (18). В силу (32) и (31)

$$v_i(t, y) \in [U_i(t^\delta, y^\delta)]^\delta = U_i^*(t, y), \quad \dot{y}(t) \in F_1^*(t, y(t)),$$

$$F_1^*(t, y) = [f(t, y, U_1^*(t, y), \ldots, U_r^*(t, y))]^\delta.$$

Пусть F_1 — функция (18). Подобно (27)

$$\operatorname{co} F_1^*(t, y) \subset [\operatorname{co} F_1(t^\theta, x^\theta)]^{\delta + \nu(\eta)},$$

и доказательство завершается так же, как в теореме 3.

З а м е ч а н и е. Утверждение остается верным, если в (31) функцию f заменить суммой

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(t, y(t), v_1^k(t, y(t)), \ldots, v_r^k(t, y(t))),$$

где все $\alpha_k = \alpha_k(t) \geqslant 0, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$, а все v_i^k удовлетворяют тем же условиям, что v_i. (Тогда в силу леммы 7 § 5 $\dot{y}(t) \in \operatorname{co} F_1^*(t, y(t))$, а в остальном доказательство не меняется.)

Доказанное утверждение и замечание содержатся в [95].

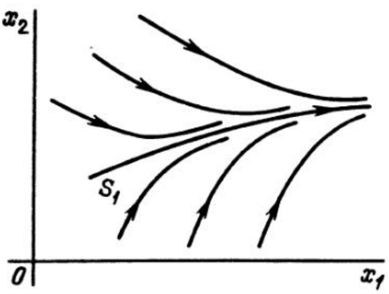


Рис. 13.

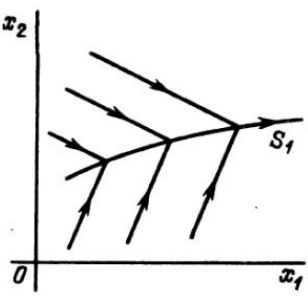


Рис. 14.

6° Рассмотрим случаи, когда можно применять доопределение б) § 4. Во-первых, если в (16) функция f линейна по $u_1, \ldots, u_r$, каждая функция $u_i(t, x)$ разрывна только на гладкой поверхности S_i и в точках пересечения всех или некоторых поверхностей S_i нормальные к ним векторы линейно независимы, то доопределения а), б), в) совпадают (п. 2 § 4), и в любом из только что рассмотренных случаев 1° – 5° можно применять любое из этих доопределений.

Во-вторых, доопределение б) можно применять в следующем случае. Пусть в уравнении (16) $f \in C^1$ и на гладкой поверхности S_1 ($\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_1 \in C^2$) разрывна только одна функция $u_1(t, x)$. Пусть в реальной системе вместо разрывной функции $u_1(t, x)$ имеется непрерывная функция $v_1(t, x)$, равная $u_1(t, x)$ вне окрестности $|\varphi_1(x)| < \delta$ поверхности S_1 и линейно зависящая от $\varphi_1(x)$ (или от x) на каждом проходящем в этой окрестности отрезке нормали к S_1. Тогда проходящие вблизи поверхности S_1 решения реальной системы (рис. 13) при $\delta \to 0$ стремятся к решениям уравнения (16) в смысле доопределения б) (рис. 14). Это доказано в [7] (стр. 40, 57).

7° Имеются и другие случаи, когда решения дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями могут использоваться для приближенного описания движений реальных систем. В частности, в [7] (гл. 5) рассматриваются системы, содержащие малые параметры при производных в части уравнений. Наличие таких параметров может быть обусловлено, например, малыми инерционностями различного рода, малыми индуктивностями в электрических цепях и т.п. Отбрасывание членов с малыми параметрами приводит к понижению порядка системы. Методы исследования таких систем с непрерывными правыми частями хорошо известны. В [7] показывается, что эти методы применимы и в случаях, когда после понижения порядка получается система уравнений с разрывными правыми частями, в которой имеются движения по поверхностям разрыва.

8° Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями возникают в реальных задачах не только в результате предельных переходов, например, таких, как в случаях 1° – 7°. В ряде случаев физические законы выражаются разрывными функциями, например, разрывная зависимость силы трения от скорости в случае сухого трения [148], [149], модель Прагера – Ишлинского упруго-пластического элемента [150], [151] и др. В ряде случаев к полученным таким путем уравнениям с разрывными правыми частями обоснованно применялись методы качественной теории дифференциальных уравнений и делались заключения, например, об устойчивости решений, о существовании периодических решений.

4. Ниже излагаются теоремы о непрерывной зависимости решения при более слабых, чем в пп. 1, 2, предположениях о правой части дифференциального уравнения или включения.

Теорема 4. *Пусть в области G при почти всех t многозначная функция $F(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и леммы 4 § 7. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $(t_0, x_0) \in G$ и при $a \leqslant t \leqslant b$ каждое решение задачи*

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{33}$$

существует и проходит внутри области G.

Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $t_0^* \in [a, b]$, x_0^*, $F^*(t, x)$, удовлетворяющих условиям $|t_0^* - t_0| < \delta$, $|x_0^* - x_0| < \delta$,

$$F^*(t, x) \subset [\operatorname{co} F(t, x^{\mu(t)})]^{\mu(t)}, \quad \int_a^b \mu(t) dt < \delta \tag{34}$$

и условиям 1)–3) *теоремы* 5 § 7 *для функции F^*, каждое решение задачи*

$$x \in F^*(t, x), \quad x(t_0^*) = x_0^* \tag{35}$$

при $a \leqslant t \leqslant b$ существует и отличается от некоторого решения задачи (33) *не больше, чем на ϵ (в том же смысле, что в теореме* 1 § 8).

Доказательство. Покажем, что для решений задач (33) и (35) выполнены условия леммы 6 § 1, где $a_0 = (t_0, x_0)$, а роль параметра μ играет функция $\mu(t) \in L_1[a, b]$; $\mu_0 = 0$, условие $\mu \to \mu_0$ означает, что $\|\mu\|_{L_1} \to 0$, т.е. интеграл в (34) стремится к нулю.

Из теорем 5 и 6 § 7 следует, что выполнены условия 1) и 2) леммы 6 § 1 и отрезок $a \leqslant t \leqslant b$ воронки задачи (33) – компакт $K \subset G$. Следовательно, выполнены условия 5) и 6) леммы. Условия 3) и 4) выполнены в силу леммы 3 § 7. Тогда из леммы 6 § 1 следует утверждение доказываемой теоремы.

Докажем аналогичную теорему для дифференциального уравнения с разрывной измеримой правой частью. Решения понимаются в том же смысле, что в п. 6 § 7.

Теорема 5. *Пусть вектор-функция $f(t, x)$ измерима в области G и почти всюду $|f(t, x)| \leqslant m(t)$, функция $m(t)$ суммируема. Пусть $t_0 \in [a, b]$, $(t_0, x_0) \in G$ и при $a \leqslant t \leqslant b$ каждое решение задачи*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{36}$$

существует и проходит внутри области G.

Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых $t_0^* \in [a, b]$, x_0^*, удовлетворяющих условиям $|t_0^* - t_0| < \delta$, $|x_0^* - x| < \delta$, и любой измеримой в G функции $f^*(t, x)$ такой, что *при почти всех t для $(t,x)\in G$ положительна мера множества тех z, для которых*

$$|z-x|<\mu(t),\quad |f^*(t,x)-f(t,z)|<\mu(t), \tag{37}$$

причем интеграл от $\mu(t)$ по отрезку $[a,b]$ меньше δ, каждое решение задачи

$$\dot x=f^*(t,x),\quad x(t_0^*)=x_0^*$$

при $a<t<b$ существует и отличается от некоторого решения задачи (36) меньше, чем на ϵ.

Доказательство. Решения уравнения $\dot x=f(t,x)$ совпадают с решениями включения $\dot x\in F(t,x)$ с функцией F, определенной в (26) и (27) § 7. При доказательстве теоремы 9 § 7 показано, что функция F удовлетворяет условиям теоремы 5 § 7, значит, и условиям теоремы 4 § 8 (неравенство $|F(t,x)|\leqslant m(t)$ очевидно). Функция $F^*(t,x)$, определяемая аналогично через функцию $f^*(t,x)$, в силу (37) удовлетворяет условию (34). Поэтому из теоремы 4 вытекает утверждение теоремы 5.

О применении известного метода усреднения для получения асимптотических (при малых ϵ) решений дифференциальных уравнений вида $\dot x=\epsilon f(t,x)$ с разрывными правыми частями и дифференциальных включений см. [27], [152]–[154].

§ 9. Замена переменных

Здесь показывается, что обычные замены переменных, применяемые к дифференциальным уравнениям с непрерывными правыми частями, точно так же можно применять и к дифференциальным уравнениям с разрывными правыми частями и к дифференциальным включениям.

1. Используемые ниже действия с многозначными функциями определены в п. 2 § 5. Рассмотрим замену переменных

$$y_i=\psi_i(t,x_1,\ldots,x_n),\quad i=1,\ldots,n, \tag{1}$$

в области D, где $\psi_1,\ldots,\psi_n\in C^1$ и преобразование (1) взаимно однозначно. Преобразование (1) запишем в векторном виде $y=\psi(t,x)$, а обратное преобразование — в виде $x=\psi^{-1}(t,y)$. Линейное преобразование n-мерного пространства с матрицей $(\partial\psi_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n}$ обозначим $\psi'_x(t,x)$.

Лемма 1 ([155], стр. 321). *Всякое взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение компакта непрерывно и в другую сторону и, следовательно, является топологическим отображением.*

Теорема 1 [120]. *Каждое решение $x(t)$ дифференциального включения*

$$\dot x\in F(t,x) \tag{2}$$

после замены $y=\psi(t,x)$ переходит в решение $y(t)=\psi(t,x(t))$ дифференциального включения

$$\dot y\in\psi'_t(t,x)+\psi'_x(t,x)F(t,x)|_{x=\psi^{-1}(t,\,y)}, \tag{3}$$

получаемого из (2) формальной заменой $y=\psi(t,x)$.

Доказательство. На любом отрезке $a\leqslant t\leqslant b$ функция $x(t)$ абсолютно непрерывна. В замкнутой ограниченной области, содержащей график функции $x(t)$, функция $\psi(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица. Подобно [64] (стр. 264) получаем, что функция $y(t)=\psi(t,x(t))$ абсолютно непрерывна.

Почти всюду на отрезке $[a,b]$ $\dot y(t)=\psi'_t(t,x)+\psi'_x(t,x)\dot x(t)$. Отсюда и из (2) следует, что $y(t)$ — решение включения (3).

Замечание 1 [120]. Если функция F в (2) удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7, то правая часть включения (3) тоже удовлетворяет (функция $x=\psi^{-1}(t,y)$ непрерывна по лемме 1).

Свойство β-непрерывности по x (или α-непрерывности) также сохраняется при переходе от (2) к (3).

Замечание 2. Если $\det\psi'_x\neq 0$, то преобразование $x=\psi^{-1}(t,y)$ обладает теми же свойствами, что $y=\psi(t,x)$. Тогда каждому решению $y(t)$ включения (3) соответствует решение $x(t)=\psi^{-1}(t,y(t))$ включения (2).

Следующая теорема усиливает теорему 6 из [120].

Теорема 2. *Пусть функция $t(\tau)$ — строго монотонная и абсолютно непрерывная.*

Тогда каждое решение дифференциального включения (2) *при замене переменного* $t = t(\tau)$ *переходит в решение* $y(\tau) = x(t(\tau))$ *дифференциального включения*

$$\frac{dy}{d\tau} \in G(\tau, y), \quad G(\tau, y) = F(t(\tau), y)t'(\tau), \tag{4}$$

$G(\tau, y) = 0$ *при тех* τ, *при которых* $t'(\tau)$ *равна нулю или не существует. Каждое решение включения* (4) *получается такой заменой из некоторого решения включения* (2).

Доказательство. Если функция $x(t)$ является решением включения (2), то она абсолютно непрерывна и почти всюду

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \in F(t, x(t)),$$

функция $v(t)$ суммируема. Для любых t_0, t_1

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt. \tag{5}$$

После замены $t = t(\tau)$ получаем ([64], стр. 283)

$$y(\tau_1) = y(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} v(t(\tau))t'(\tau)d\tau, \tag{6}$$

причем подынтегральная функция считается равной нулю там, где $t'(\tau) = 0$ или $t'(\tau)$ не существует. Интеграл в (6) — интеграл Лебега, поэтому функция $y(\tau)$ абсолютно непрерывна и почти всюду $dy/d\tau$ равно подынтегральной функции. Значит, $y(\tau)$ — решение включения (4).

Обратно, пусть $y(\tau)$ — решение включения (4). Так как функция $t(\tau)$ абсолютно непрерывна, то множество M_1 меры 0 тех τ, при которых $t'(\tau)$ или $y'(\tau)$ не существует или $y'(\tau)$ не принадлежит $G(\tau, y(\tau))$, она преобразует в множество N_1 значений t меры 0 ([64], стр. 268). Множество M_2 тех τ, при которых $t'(\tau) = 0$, функция $t(\tau)$ преобразует в множество N_2 тоже меры 0 ([64], стр. 281). При всех остальных τ существуют $y'(\tau)$ и $t'(\tau)$, $t'(\tau) \neq 0$, и из равенства $y'(\tau) = v(t(\tau))t'(\tau)$ функция $v(t)$ определяется однозначно для $t \notin N_1 \cup N_2$, т.е. для почти всех t. При этих t, т.е. при $\tau \notin M_1 \cup M_2$, имеем

$$y'(\tau) \in G(\tau, y(\tau)) = F(t(\tau), y(\tau))t'(\tau).$$

Поэтому, обозначая $y(\tau(t)) = x(t)$, имеем при $t \notin N_1 \cup N_2$

$$v(t) \in F(t, x(t)). \tag{7}$$

При этих t существуют $\tau'(t) = 1/t'(\tau)$ и $y'(\tau)$, $\tau = \tau(t)$, поэтому существует

$$x'(t) = y'(\tau)\tau'(t) = v(t) \in F(t, x(t)). \tag{8}$$

Покажем, что функция $x(t) = y(\tau(t))$ абсолютно непрерывна, даже если $\tau(t)$ не абсолютно непрерывна. Так как $\tau(t)$ непрерывна и монотонная, а $y(\tau)$ ограниченной вариации, то функция $x(t)$ тоже ограниченной вариации. Значит, функция $v(t)$ в (8) суммируема. Тогда правая часть (5) есть абсолютно непрерывная функция от t_1 и равна правой части (6), т.е. равна $y(\tau(t_1)) = x(t_1)$. Следовательно, функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и в силу (8) является решением включения (2).

Теорему 2 можно применять для того, чтобы дифференциальное уравнение или включение с неограниченной правой частью, оцениваемой суммируемой функцией от t, свести к дифференциальному уравнению или включению с ограниченной правой частью.

Лемма 2 [93] *Пусть многозначная функция* $F(t, x)$ *определена в области* Q *пространства* t, x, *и пусть для каждой ограниченной замкнутой области* $D \subset Q$ *существует такая суммируемая функция* $m_D(t)$, *что* $|F(t, x)| \leqslant m_D(t)$ *в* D *при почти всех* t.

Тогда существует такая функция $t(\tau)$, *абсолютно непрерывная вместе с обратной функцией* $\tau(t)$, *что после замены переменных* $t = t(\tau)$ *дифференциальное включение*

(2) *переходит в дифференциальное включение* (4), *правая часть которого ограничена в каждой замкнутой ограниченной области, содержащейся в* Q.

Доказательство. Пусть $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ — замкнутые ограниченные области, объединение которых есть Q, причем D_k содержится в полосе $-k \leqslant t \leqslant k$ и в D_k при почти всех t

$$|F(t, x)| \leqslant m_k(t), \tag{9}$$

функции $m_k(t)$ суммируемы, $m_k(t) = 0$ при $|t| \geqslant k$. Пусть

$$b_k = 2^k \int_{-k}^{k} m_k(t)dt, \quad \varphi_k(t) = \frac{1}{b_k} \int_{-\infty}^{t} m_k(s)ds.$$

Функция $\varphi_k(t)$ — абсолютно непрерывная, неубывающая, $0 \leqslant \varphi_k(t) \leqslant 2^{-k}$. Поэтому ряд $t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \ldots$ сходится и его сумма $\tau(t)$ — возрастающая абсолютно непрерывная функция на каждом конечном отрезке. Почти всюду $\tau'(t) \geqslant 1$, следовательно, обратная функция тоже абсолютно непрерывна,

$$t'(\tau) = \frac{1}{\tau'(t)} \leqslant \frac{1}{1 + b_k^{-1} m_k(t)} \quad (-k \leqslant t \leqslant k).$$

Теперь из (4) и (9) следует, что в той области, в которую переходит область D_k при замене $t = t(\tau)$, имеем $|G(\tau, y)| \leqslant b_k$.

Следствие. *Дифференциальное уравнение* $\dot{x} = f(t, x)$, *удовлетворяющее условиям Каратеодори в области* Q *или в каждой замкнутой ограниченной области* $D \subset Q$, *можно преобразовать заменой* $t = t(\tau)$ *в уравнение Каратеодори с правой частью, ограниченной в каждой замкнутой ограниченной области* $D \subset Q$.

2. Покажем, что к автономным дифференциальным включениям $\dot{x} \in F(x)$ можно применять такие же преобразования, как к автономным системам дифференциальных уравнений.

Теорема 3. *Пусть непрерывная функция* $p(x) > 0$ *в области* G. *Тогда в этой области дифференциальные включения*

$$\dot{x} \in F(x), \tag{10}$$

$$\dot{x} \in p(x)F(x) \tag{11}$$

имеют одни и те же траектории.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение включения (11), т.е. функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \in p(x(t))F(x(t))$$

при почти всех t. На отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ полагаем

$$\tau(t) = \int_{t_0}^{t} p(x(s))ds.$$

Производная $\tau'(t) = p(x(t)) \geqslant c > 0$ непрерывна. Существует обратная функция $t(\tau)$. Функция $x^*(\tau) = x(t(\tau))$ абсолютно непрерывна ([64], стр. 264), и

$$\frac{dx^*(\tau)}{d\tau} = \frac{dx}{dt} t'(\tau) = \frac{v(t(\tau))}{p(x^*(\tau))} \in F(x^*(\tau))$$

почти всюду (так как функции $\tau'(t)$ и $t'(\tau)$ непрерывны, то условия "при почти всех t" и "при почти всех τ" равносильны; см. [64], стр. 268), т.е. $x^*(\tau)$ — решение включения (10).

Итак, траектория любого решения включения (11) является также траекторией некоторого решения включения (10). Верно и обратное, так как функция $1/p(x) > 0$ тоже непрерывна.

Замечание. Если в некоторых точках траектории $x = x(t)$ включения (10) функция $p(x)$ обращается в 0, то эта траектория может разбиваться такими точками на несколько (иногда бесконечно много) траекторий включения (11).

Дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \tag{12}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, равносильно автономному дифференциальному включению в $(n+1)$-мерном пространстве $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$\frac{dx_0}{dt} = 1, \quad \frac{dx}{dt} \in F(t, x). \tag{13}$$

Графики решений включения (12) в пространстве t, x после переименования t в x_0 совпадают с траекториями включения (13) в пространстве $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Включение (13) не общего вида, так как множество допустимых значений производной

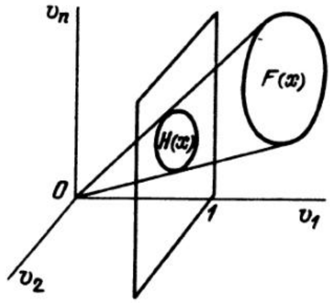


Рис. 15.

dx^*/dt, где $x^* = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, лежит в n-мерной гиперплоскости $(n+1)$-мерного пространства. Поэтому обратный переход от автономного дифференциального включения к дифференциальному включению в пространстве меньшей размерности возможен не всегда и требует дополнительного рассмотрения.

Множество F в (10) и (12) расположено в n-мерном пространстве, которое можно назвать *пространством скоростей* $v_1, \ldots, v_n$. Пусть для всех $x \in G$, G — область в R^n, множество $F(x)$ замкнуто, ограничено и лежит в полупространстве $v_1 \geqslant \gamma > 0$, функция F β-непрерывна. Проектируя из начала координат множество $F(x)$ на плоскость $v_1 = 1$, получаем множество $H(x)$ (рис. 15). При этом каждой точке $v = (v_1, \ldots, v_n) \in F(x)$ соответствует точка

$$\left(1, \frac{v_2}{v_1}, \ldots, \frac{v_n}{v_1}\right); \quad \left(\frac{v_2}{v_1}, \ldots, \frac{v_n}{v_1}\right) \in H(x). \tag{14}$$

Обозначаем $(x_2, \ldots, x_n)$ через y, а точку x — через (x_1, y).

Л е м м а 3. *При сформулированных условиях траектории включения*

$$\frac{dx}{dt} \in F(x) \tag{15}$$

в области G совпадают с графиками решений включения

$$\frac{dy}{dx_1} \in H(x_1, y). \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — решение включения (15). Тогда функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и почти всюду

$$\frac{dx(t)}{dt} = (v_1(t), \ldots, v_n(t)) \in F(x(t)). \tag{17}$$

По предположению, $v_1(t) \geqslant \gamma > 0$. Поэтому для функции $x_1(t)$ существует обратная функция $t(x_1)$, монотонная и абсолютно непрерывная. При почти всех x_1 (это равносильно "при почти всех t" [64], стр. 268) из (17) получаем

$$\frac{dx(t(x_1))}{dx_1} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_1} = \left(1, \frac{v_2(t)}{v_1(t)}, \ldots, \frac{v_n(t)}{v_1(t)}\right). \tag{18}$$

Так как $x = (x_1, y)$, то из (18) и (14) следует (16).

Обратно, пусть $y(x_1) = (x_2(x_1), \ldots, x_n(x_1))$ — решение включения (16), $a < x_1 < b$. Тогда при почти всех x_1

$$\frac{dy}{dx_1} = \left(\frac{dx_2}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_n}{dx_1}\right) = (u_2(x_1), \ldots, u_n(x_1)) \in H(x_1, y(x_1)). \tag{19}$$

Выходящий из точки $(0, \ldots, 0)$ пространства $(v_1, \ldots, v_n)$ луч, проходящий через точку $(1, u_2(x_1), \ldots, u_n(x_1))$, пересекает множество $F(x)$. Пусть $(v_1(x_1), \ldots, v_n(x_1))$ — точка пересечения с наименьшей координатой v_1. Функции $F(x)$ и $F(x(x_1))$ β-непрерывны, поэтому функция $v_1(x)$ полунепрерывна снизу, значит, измерима, $0 < \gamma \leqslant v_1(x_1) \leqslant m$. Поэтому функция

$$t(x_1) = \int_a^{x_1} \frac{d\xi}{v_1(\xi)},$$

обратная функция $x_1(t)$ и сложная функция $x(t) = (x_1(t), y(x_1(t)))$ абсолютно непрерывны. Почти всюду

$$\frac{dx}{dt} = \left(1, \frac{dy}{dx_1}\right)\frac{dx_1}{dt} = (1, u_2, \ldots, u_n)v_1(x_1(t)). \tag{20}$$

Так как в силу (19) $(u_2, \ldots, u_n) \in H(x)$, то правая часть (20) принадлежит $F(x)$, т.е. $x(t)$ — решение включения (15).

3. Из доказанных теорем и лемм следуют аналогичные утверждения для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{21}$$

при доопределении а) § 4 и

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t, x), \ldots, u_r(t, x)) \tag{22}$$

при любом из доопределений б) и в) § 4. При этом предполагаются выполненными условия § 4 (кусочная непрерывность функции f в (21) и u_i в (22), непрерывность f в (22)) или теоремы 8 § 7 (измеримость функции f по t, x в (21) и неравенство $|f(t, x)| \leqslant m(t)$ с суммируемой функцией $m(t)$).

В самом деле, во всех этих случаях решениями дифференциального уравнения называются решения дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$, в котором функция $F(t, x)$ строится определенным образом с помощью множества предельных значений функции $f(t', x')$ (или $u_i(t', x')$) при $x' \to x$, $t' = t$ или при $x' \to x$, $t' \to t$. Так как все рассматриваемые в пп. 1, 2 преобразования непрерывны по x (и, кроме леммы 3, сохраняют плоскости $t = \text{const}$ или переводят их в плоскости $\tau = \text{const}$), то они переводят множество предельных значений в множество предельных значений, выпуклое множество допустимых значений производной $\dot{x}$ подвергается линейному преобразованию и переходит в выпуклое множество. Поэтому из результатов пп. 1, 2 следуют аналогичные утверждения для уравнений (21) и (22). В утверждении, аналогичном лемме 3, в случае доопределения а) надо предполагать выполнение условия γ п. 1 § 6. Ввиду сказанного приведем только формулировки этих утверждений.

Т е о р е м а 4 [93], [95]. *Каждое решение уравнения* (21) *или* (22) *после замены* $y = \psi(t, x)$, *где функция* $\psi \in C^1$ *и существует обратное преобразование* $x = \psi^{-1}(t, y) \in C$, *переходит в решение уравнения*

$$\dot{y} = \psi'_t(t, x) + \psi'_x(t, x)f(t, x)|_{x = \psi^{-1}(t, y)}, \tag{23}$$

или, соответственно, уравнения

$$\dot{y} = \psi'_t(t, x) + \psi'_x(t, x) f(t, x, u_1(t, x), \ldots, u_r(t, x))|_{x=\psi^{-1}(t, y)}. \tag{24}$$

Следствие. *При замене $y = \psi(t, x)$ уравнение $\dot{x} = f^0(t, x)$, определяющее решения уравнения* (21), *лежащие на поверхности разрыва или на пересечении таких поверхностей, переходит в уравнение $\dot{y} = g^0(t, y)$, определяющее такого же рода решения уравнения* (23).

Замечание. Если $\psi^{-1}(t, y) \notin C^1$, то может оказаться, что не каждое решение уравнения (23) или (24) получается из решения уравнения (21) или (22). Например, уравнение $\dot{x} = 1$ имеет только решения $x = t + c$, а после замены $y = x^3$ полученное уравнение $\dot{y} = 3y^{2/3}$ кроме решений $y = (t + c)^3$ имеет еще решение $y = 0$, не получаемое заменой $y = x^3$ из решений $x = t + c$.

Теорема 5 [93], [95]. *Пусть функция $t(\tau)$ строго монотонна и $t'(\tau)$ кусочно непрерывна. Тогда каждое решение $x(t)$ уравнения* (21) *или* (22) *при замене $t = t(\tau)$ переходит в решение $y(\tau) = x(t(\tau))$ уравнения*

$$\frac{dy}{d\tau} = f(t(\tau), y) t'(\tau)$$

(правая часть считается равной 0, *если $t'(\tau) = 0$) или*

$$\frac{dy}{dt} = f(t(\tau), y, u_1(t(\tau), y), \ldots, u_r(t(\tau), y)) t'(\tau).$$

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция $p(x) > 0$. Тогда уравнения $\dot{x} = f(x)$ и $\dot{x} = p(x) f(x)$ имеют одни и те же траектории в фазовом пространстве x. То же справедливо для уравнений*

$$\dot{x} = f(x, u_1(x), \ldots, u_r(x)), \quad x = p(x) f(x, u_1(x), \ldots, u_r(x)).$$

Замечание. После замен, указанных в теоремах 4—6, правые части полученных уравнений удовлетворяют тем же условиям (из числа сформулированных в начале п. 3), которым они удовлетворяли до замены. Условия, наложенные на $f(t, x)$ в теореме 8 § 7, сохраняются и при любой абсолютно непрерывной строго монотонной функции $t(\tau)$ в теореме 5.

§ 10. Достаточные условия единственности

Здесь даются достаточные условия, при которых решение, попавшее на поверхность разрыва правой части дифференциального уравнения или на пересечение поверхностей разрыва, продолжается единственным образом в сторону возрастания t.

1. Для уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

имеет место *правая единственность в точке* (t_0, x_0), если существует такое $t_1 > t_0$, что каждые два решения этого уравнения, удовлетворяющие условию $x(t_0) = x_0$, совпадают при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ или на той части этого отрезка, на которой они оба определены.

Для рассматриваемого уравнения имеет место *правая единственность в области* D (открытой или замкнутой), если для каждой точки $(t_0, x_0) \in D$ каждые два решения, удовлетворяющие условию $x(t_0) = x_0$, совпадают на каждом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, на котором они оба существуют и проходят в этой области.

Аналогично определяется *левая единственность* в точке и в области — единственность при $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$.

Лемма 1. *Из правой единственности в каждой точке области D следует правая единственность в области D. Из правой единственности в области D следует правая единственность в каждой внутренней точке этой области.*

Доказательство обоих утверждений легко проводится рассуждением от противного.

Для уравнений Каратеодори теорема 2 § 1 дает достаточное условие и правой, и левой единственности в области D, а замечание к этой теореме — условие правой единственности. Теорема и замечание (а также приведенное в § 1 доказательство) остаются справедливыми и для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, если их условия удовлетворяются не только для значений функции $f(t,x)$ в областях ее непрерывности, но и для тех значений, которыми доопределяется эта функция в точках ее разрыва.

Следующая теорема дает условия, при которых доопределяемые значения функции $f(t,x)$ можно не принимать во внимание.

Теорема 1 [93]. *Пусть функция $f(t,x)$ в области D разрывна только на множестве M меры нуль. Пусть существует такая суммируемая функция $l(t)$, что для почти всех точек (t,x) и (t,y) области D при $|x-y|<\epsilon_0$, $\epsilon_0>0$, имеем $|f(t,x)|\leqslant l(t)$,*

$$(x-y)\cdot(f(t,x)-f(t,y))\leqslant l(t)|x-y|^2. \tag{2}$$

Тогда для уравнения (1) *при доопределении* а) § 4 *имеет место правая единственность в области D.*

Доказательство. При почти всех t имеем $l(t)<\infty$, и неравенство (2) выполняется для почти всех x и y из рассматриваемой области. Тогда при этих t уже для любых x^*, y^*

$$(x^*-y^*)\cdot(v-w)\leqslant l(t)|x^*-y^*|^2, \tag{3}$$

где v и w — любые значения из множеств V и W предельных значений функции $f(t,x)$ при $x\to x^*$, соответственно функции $f(t,y)$ при $y\to y^*$. В силу леммы 8 § 5 неравенство (3) сохранится, если сначала условие $v\in V$ заменить условием $v\in \mathrm{co}\,V$, а затем условие $w\in W$ — условием $w\in \mathrm{co}\,W$. Поэтому неравенство (2) справедливо при почти всех t для всех x и y, $|x-y|<\epsilon_0$, если при $(t,x)\in M$ значение $f(t,x)$ заменить любым из множества $F(t,x)$, определенного в § 4; аналогично при $(t,y)\in M$.

Но тогда для двух любых решений $x(t)$ и $y(t)$ в области D при почти всех t

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t)-y(t)|^2\equiv(x(t)-y(t))(\dot{x}(t)-\dot{y}(t))\leqslant l(t)|x(t)-y(t)|^2.$$

Отсюда следует правая единственность (см. доказательство теоремы 2 § 1).

Теорема 1 справедлива [93] и для любой разрывной измеримой в области D функции $f(t,x)$, если решения определяются так, как в п. 6 § 7.

2. Пусть область $G\subset R^n$ разделена гладкой поверхностью S на области G^- и G^+. Пусть $f(t,x)$ и $\partial f/\partial x_i$, $i=1,\dots,n$, непрерывны в областях $(a<t<b,\ x\in G^-)$ и $(a<t<b,\ x\in G^+)$ вплоть до границы. На поверхности S для уравнения (1) применяется доопределение а) § 4. Пусть $f^-(t,x)$ и $f^+(t,x)$ — предельные значения функции f при приближении к точке (t,x), $x\in S$, из областей G^- и G^+ соответственно,

$$f^+(t,x)-f^-(t,x)=h(t,x)$$

— "вектор разрыва", f_N^-, f_N^+, h_N — проекции векторов f^-, f^+, h на нормаль к S в точке x, направленную от G^- к G^+.

В областях G^- и G^+ имеет место единственность решения (правая и левая) вследствие непрерывности производных $\partial f/\partial x_i$, $i=1,\dots,n$.

Лемма 2. *Если в некоторой точке $x_0\in S$ имеем $f_N^+(t_0,x_0)>0$ (или $f_N^+(t_0,x_0)<0$), то в области G^+ существует единственное решение уравнения* (1) *с начальным условием $x(t_0)=x_0$. Это решение определено на некотором интервале $t_0<t<t_1$ (соответственно $t_1<t<t_0$). Аналогичные утверждения справедливы для G^- в случаях $f_N^-<0$ и $f_N^->0$.*

Доказательство. Продолжим непрерывно функцию $f(t,x)$ из G^+ в полную окрестность точки (t_0,x_0). Решение с начальным условием $x(t_0)=x_0$ будет существовать. Для всех таких решений вектор $\dot{x}(t_0)=f^+(t_0,x_0)$ направлен в сторону области G^+, так как $f_N^+(t_0,x_0)>0$. Значит, каждое такое решение при $t_0\leqslant t<t_1$ проходит в $S\cup G^+$, а там $f\in C^1$ и решение единственно.

Следствие 1. *На участке поверхности S, где $f_N^->0$, $f_N^+>0$ (или $f_N^-<0$, $f_N^+<0$), решения переходят из G^- в G^+ (соответственно из G^+ в G^-), и единственность не нарушается.*

Проходящих по поверхности S решений здесь нет в силу доопределения а) § 4 (см. пояснение к рис. 3).

С л е д с т в и е 2. *На участке поверхности S, где $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, при каждом t в каждую точку поверхности S приходит ровно одно решение из области G^- и одно из G^+.*

В случае $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$ решения при возрастании t не могут сойти с поверхности S ни в область G^-, ни в область G^+. Они остаются на S и согласно а) § 4 удовлетворяют уравнению $\dot{x} = f^0(t, x)$, где функция f^0 определена формулой (5) § 4. Если $S \in C^1$, то единичный вектор $n(x)$ нормали к S есть непрерывная функция точки x, поэтому $f_N^- \in C$, $f_N^+ \in C$ и в силу (5) § 4 $f^0 \in C$.

Если же $f \in C^2$, то $n(x) \in C^1$, поэтому вектор $f^0(t, x)$ — гладкая (класса C^1) функция от локальных координат на поверхности. (Если в окрестности рассматриваемой точки имеем $\partial\varphi/\partial x_i \neq 0$, то уравнение $\varphi(x) = 0$ поверхности S разрешается относительно x_i и локальными координатами являются $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.) Тогда через каждую точку рассматриваемого участка поверхности S проходит ровно одно решение уравнения $\dot{x} = f^0(t, x)$.

Такие рассуждения еще не дают возможность доказать правую единственность в точках, где $f_N^- > 0$, $f_N^+ = 0$ или $f_N^- = 0$, $f_N^+ < 0$, и не применимы к случаю, когда решения в течение конечного промежутка времени бесконечно много раз попадают на поверхность разрыва и сходят с нее. Излагаемые ниже лемма 3 и теорема 2 охватывают и эти случаи.

Л е м м а 3. *Пусть $S \in C^1$, в точках лежащей на поверхности S области S_0 при $a < t < b$ вектор $h = f^+ - f^-$ направлен по нормали к поверхности (или равен нулю) и $h_N \leqslant 0$.*

Тогда для уравнения (1) *при $a < t < b$ имеет место правая единственность в окрестности любой точки $x_0 \in S_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что выполнено неравенство (2) с $l(t) = \text{const}$. Если обе точки x и y лежат с одной стороны от S, то (2) следует из ограниченности $\partial f/\partial x_i$ в рассматриваемой окрестности при $x \notin S$.

Если же $x \in G^+$, $y \in G^-$, то пусть z — ближайшая к x точка пересечения отрезка xy с поверхностью S. Из ограниченности $\partial f/\partial x_i$ следует

$$|f(t,x) - f^+(t,z)| \leqslant l|x - z|, \qquad |f^-(t,z) - f(t,y)| \leqslant l|z - y|. \tag{4}$$

Так как $z \in S$, остальные точки отрезка zx лежат в G^+, а вектор $h = f^+(t,z) - f^-(t,z)$ направлен в сторону области G^- по нормали к S или равен нулю, то

$$(x - z) \cdot (f^+(t,z) - f^-(t,z)) \leqslant 0.$$

Это неравенство сохраняется, если вектор $x - z$ заменить направленным в ту же сторону вектором $x - y$. Складывая полученное неравенство с вытекающим из (4) неравенством

$$(x - y) \cdot (f(t,x) - f^+(t,z) + f^-(t,z) - f(t,y)) \leqslant l|x - y|^2,$$

получаем неравенство (2). Из теоремы 1 следует утверждение леммы.

З а м е ч а н и е. Знак числа $h_N = f_N^+ - f_N^-$ не меняется ни при переименовании областей G^- и G^+, ни при дифференцируемых преобразованиях координат. Например, если $h_N < 0$, то сумма $|x_N| + |y_N|$ расстояний от касательной плоскости к S точек $x(t) \in G^+$ и $y(t) \in G^-$, близких к точке $x_0 \in S$, уменьшается, так как $x_N > 0$, $y_N < 0$,

$$\dot{x}_N - \dot{y}_N = f_N^+(t, x_0) - f_N^-(t, x_0) + \alpha = h_N(t, x_0) + \alpha < 0,$$

число α мало. Свойство уменьшения или увеличения этого расстояния, а значит и знак $h_N(t, x_0)$, сохраняется при дифференцируемых преобразованиях.

Общий случай при условии $h_N \leqslant 0$ будет сведен к случаю леммы 3 с помощью дифференцируемого преобразования координат.

Л е м м а 4. *Пусть функция $g(z_2, \ldots, z_n, t) \in C^1$, а $f(z_2, \ldots, z_n, t)$ имеет непрерывные первые и вторые производные, может быть, кроме $\partial^2 f/\partial t^2$.*

Тогда существует функция $\eta(z_1, \ldots, z_n, t)$, имеющая непрерывные первые и вторые производные, может быть, кроме $\partial^2\eta/\partial t^2$, и удовлетворяющая при $z_1 = 0$ условиям $\eta = f$, $\partial\eta/\partial z_1 = g$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$\eta(z_1, \dots, z_n, t) = f(z_2, \dots, z_n, t) + z_1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(z_2 + u_2 z_1, \dots, z_n + $$

$$+ u_n z_1, t)\, du_2 \dots du_n$$

удовлетворяет условиям $\eta = f$, $\partial\eta/\partial z_1 = g$ при $z_1 = 0$. В следующих интегралах аргументы функции g те же, что в предыдущем:

$$\frac{\partial\eta}{\partial z_1} = \int_0^1 \dots \int_0^1 g\, du_2 \dots du_n + z_1 \sum_{i=2}^{n} \int_0^1 \dots \int_0^1 u_i \frac{\partial g}{\partial z_i} du_2 \dots du_n.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$z_1 \int_0^1 u_i \frac{\partial g}{\partial z_i}\, du_i = g|_{u_i = 1} - \int_0^1 g\, du_i.$$

Следовательно, $\partial\eta/\partial z_1$ имеет непрерывные вплоть до плоскости $z_1 = 0$ первые производные по всем аргументам. То же справедливо для $\partial\eta/\partial z_j$, $j = 2, \dots, n$.

Л е м м а 5. *Пусть на поверхности S $(x_1 = \xi(x_2, \dots, x_n) \in C^2)$ задан некасательный вектор $h(x_2, \dots, x_n, t) \in C^1$, $|h| \geqslant \delta > 0$.*

Тогда в окрестности поверхности S существует такое преобразование

$$x_i = \varphi_i(z_1, \dots, z_n, t), \quad i = 1, \dots, n,$$

с якобианом $J \neq 0$, что поверхность $z_1 = 0$ совпадает с S, а координатные линии z_1 (т.е. линии, на которых постоянны $z_2, \dots, z_n$) в точках поверхности S касаются вектора h;

$$\varphi_i, \partial\varphi_i/\partial x_j \in C^1, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

при $z_1 = 0$ функции φ_i не зависят от t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразование

$$y_1 = x_1 - \xi(x_2, \dots, x_n), \quad y_2 = x_2, \dots, \quad y_n = x_n$$

переводит S в плоскость $y_1 = 0$. Направление вектора $h = (h_1, \dots, h_n)$ выражается уравнениями

$$\frac{dx_1}{h_1} = \dots = \frac{dx_n}{h_n}$$

в старых координатах и уравнениями

$$\frac{dy_1}{g} = \frac{dy_2}{h_2} = \dots = \frac{dy_n}{h_n}, \quad g = h_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial\xi}{\partial x_i} h_i \tag{5}$$

в новых. Вектор h не касается S, поэтому $g \neq 0$.

Теперь перейдем к $z_1, \dots, z_n$ по формулам

$$y_1 = z_1, \quad y_i = \eta_i(z_1, \dots, z_n, t), \quad i = 2, \dots, n, \tag{6}$$

так, чтобы η_i и $\partial\eta_i/\partial z_j \in C^1$, и при $z_1 = 0$

$$\eta_i = z_i; \quad \frac{\partial\eta_i}{\partial z_1} = \frac{h_i}{g}, \quad i = 2, \dots, n. \tag{7}$$

Такие функции η_i существуют по лемме 4. Вдоль координатных линий z_1 имеем $dz_2 = \dots = dz_n = dt = 0$, т.е. в силу (6) и (7) в точках поверхности $z_1 = 0$

$$dy_i = \frac{\partial\eta_i}{\partial z_1} dy_1 = \frac{h_i}{g} dy_1.$$

Отсюда и из (5) следует, что при $z_1 = 0$ координатные линии z_1 касаются вектора h. Выражая $x_1, \dots, x_n$ через $z_1, \dots, z_n$, получаем требуемое преобразование. В силу

(7) якобиан преобразования (6) равен 1 при $z_1 = 0$; якобиан преобразования от x к y тоже равен 1.

Теорема 2 [93]. *Пусть выполнены условия п. 2, поверхность $S \in C^2$ и вектор $h(t, x) = f^+ - f^- \in C^1$. Если при каждом $t \in (a, b)$ в каждой точке $x \in S$ выполнено хотя бы одно из неравенств $f_N^- > 0$ или $f_N^+ < 0$ (возможно, различные неравенства при разных x и t), то в области G при $a < t < b$ для уравнения* (1) *имеет место правая единственность.*

Доказательство. В каждой точке поверхности S выполнено хотя бы одно из трех условий:

а) $f_N^- > 0$, $f_N^+ > 0$; б) $f_N^- < 0$, $f_N^+ < 0$; в) $f_N^+ - f_N^- < 0$.

В случаях а) и б) в окрестности такой точки имеет место единственность в силу следствия 1 леммы 2.

В случае в) в некоторой окрестности точки неравенство $f_N^+ - f_N^- < 0$ тоже выполняется, а уравнение поверхности S можно разрешить относительно одной из координат, например, x_1. После такого преобразования $x = \varphi(z, t)$, как в лемме 5, поверхность S перейдет в плоскость $z_1 = 0$, а вектор $h = f^+ - f^-$ — в вектор, ортогональный этой плоскости. Уравнение (1) по теореме 4 § 9 преобразуется в уравнение

$$\dot{z} = \psi_t'(t, x) + \psi_x'(t, x) f(t, x)|_{x = \varphi(z, t)}, \tag{8}$$

где $z = \psi(t, x)$ — преобразование, обратное к $x = \varphi(z, t)$, ψ_t' — вектор, а ψ_x' — матрица (см. п. 1 § 9). Функция ψ обладает такими же свойствами гладкости, как φ в лемме 5, поэтому правая часть (8) и ее производные $\partial/\partial z_i$ непрерывны в окрестности рассматриваемой точки при $z_1 > 0$ и при $z_1 < 0$ вплоть до плоскости $z_1 = 0$.

Покажем, что вектор разрыва правой части (8)

$$h^*(t, x) = \psi_x'(t, x)(f^+(t, x) - f^-(t, x)) = \psi_x' h$$

ортогонален плоскости разрыва $z_1 = 0$. Координатные линии z_1 в пространстве x, т.е. линии

$$x = x(z_1) = \varphi(z_1, c_2, \ldots, c_n, t), \tag{9}$$

касаются вектора h в точках поверхности S. Значит, вектор φ_{z_1}' при $z_1 = 0$ коллинеарен вектору h, т.е.

$$\varphi_{z_1}'|_{z_1 = 0} = \lambda h. \tag{10}$$

Применяя к обеим частям равенства (9) преобразование $z = \psi(t, x)$, обратное к φ, получаем

$$z = (z_1, c_2, \ldots, c_n) = \psi(t, \varphi(z_1, c_2, \ldots, c_n, t)).$$

Дифференцируя по z_1, имеем

$$(1, 0, \ldots, 0) = \psi_x' \cdot \varphi_{z_1}'.$$

При $z_1 = 0$ отсюда и из (10) следует, что вектор $\psi_x' h = h^*$ коллинеарен вектору $(1, 0, \ldots, 0)$, т.е. ортогонален плоскости $z_1 = 0$.

В силу замечания к лемме 3 из неравенства $h_N = f_N^+ - f_N^- < 0$ следует $h_N^* < 0$. По лемме 3 в окрестности рассматриваемой точки в случае в) имеет место правая единственность для уравнения (8), а значит, и для уравнения (1).

3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)) \tag{11}$$

с доопределением б) на поверхности разрыва. Пусть функции f, $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\partial f/\partial u$ непрерывны, а функция $u(t, x)$ разрывна на гладкой поверхности S $(s(x) = 0)$, делящей область G на области G^- $(s(x) < 0)$ и G^+ $(s(x) > 0)$, в которых $u(t, x)$ и $\partial u/\partial x_i$ непрерывны вплоть до границы. Считаем, что $s(x) \in C^1$, градиент $\nabla s \neq 0$ на S. Предельные значения функции $u(t, x)$ при приближении к S из областей G^- и G^+ обозначим $u^-(t, x)$ и $u^+(t, x)$, а функции $f(t, x, u(t, x))$ — через $f^-(t, x)$ и $f^+(t, x)$. Пусть f_N, f_N^-, f_N^+ — проекции векторов f, f^-, f^+ на нормаль к S, как в п. 2, т.е.

$$f_N(t, x, u) = \frac{\nabla s(x) \cdot f(t, x, u)}{|\nabla s(x)|}.$$

Пусть $U(t, x)$ — отрезок с концами $u^-(t, x)$ и $u^+(t, x)$. Если $x \in S$ и $f_N^-(t, x) f_N^+(t, x) \leqslant 0$, т.е. функция $f_N(t, x, u)$ при изменении u на отрезке $U(t, x)$ не сохраняет знака "+" или "−", то существует решение $u^{eq}(t, x) \in U(t, x)$ уравнения $f_N(t, x, u^{eq}(t, x)) = 0$, т.е.

$$\nabla s(x) \cdot f(t, x, u^{eq}(t, x)) = 0. \tag{12}$$

Тогда вектор $f^{eq}(t, x) \equiv f(t, x, u^{eq}(t, x))$ касается поверхности S в точке x и уравнение (11) в таких точках доопределяется следующим образом:

$$\dot{x} = f(t, x, u^{eq}(t, x)). \tag{13}$$

Лемма 6. *Если $S \in C^2$, и в точке $x \in S$ имеем*

$$f_N^-(t, x) f_N^+(t, x) \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_N(t, x, u)}{\partial u} \neq 0 \tag{14}$$

при всех $u \in U(t, x)$, то уравнение (12) относительно u^{eq} на отрезке $U(t, x)$ имеет единственное решение $u^{eq}(t, x)$; функции $u^{eq}(t, x)$ и $\partial u^{eq}/\partial x_i$ непрерывны по t, x.

Доказательство. Функция $f_N(t, x, u)$ при изменении u на отрезке $U(t, x)$ в силу (14) монотонна и меняет знак или равна 0 в конце отрезка, поэтому решение $u^{eq}(t, x)$ существует и единственно. По теореме о неявной функции $u^{eq}(t, x) \in C$. Если $S \in C^2$, то $\partial f_N/\partial x_i \in C$, поэтому существуют непрерывные $\partial u^{eq}/\partial x_i$.

Следствие. *Если на куске S_0 поверхности $S \in C^2$*

$$f_N^-(t, x) > 0, \quad f_N^+(t, x) < 0, \quad \frac{\partial f_N(t, x, u)}{\partial u} \neq 0$$

при всех $u \in U(t, x)$, то на куске S_0 и в некоторой окрестности каждой его точки для уравнения (11) имеет место правая единственность.

Следующая теорема, подобно теореме 2, охватывает также случаи, когда решение в течение конечного промежутка времени может бесконечно много раз попадать на поверхность S и сходить с нее.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия, указанные в начале п. 3, кроме того,*

$$S \in C^2; \quad f, \ \frac{\partial f}{\partial u} \in C^1; \quad u^-(t, x), \ u^+(t, x) \in C^1;$$

$$\frac{\partial f_N(t, x, u)}{\partial u} \neq 0 \qquad \text{при всех } u \in U(t, x).$$

Если при каждом $t \in (a, b)$ в каждой точке $x \in S$ выполнено хотя бы одно из неравенств $f_N^- > 0$ или $f_N^+ < 0$ (возможно, различные неравенства для разных t и x), то в области G при $a < t < b$ для уравнения (11) имеют место существование решения с начальным условием $x(t_0) = x_0 \in G$ и правая единственность.

Доказательство. Как в теореме 2, достаточно рассмотреть случай $f_N^+ - f_N^- < 0$. В окрестности точки, где $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, правая единственность обеспечивается следствием леммы 6. Остается рассмотреть случаи, когда в рассматриваемой точке $f_N^- > 0$, $f_N^+ = 0$ или $f_N^- = 0$, $f_N^+ < 0$. Второй случай сводится к первому переименованием областей G^- и G^+.

Пусть $f_N^-(t_0, x_0) > 0$, $f_N^+(t_0, x_0) = 0$. По теореме о неявной функции решение $u^{eq}(t, x)$ уравнения (12) существует и принадлежит C^1 в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) ($|t - t_0| < \delta$, $x \in S$, $|x - x_0| < \delta$) даже и там, где $f_N^+ > 0$. Поэтому функция

$$v(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} f(t, x, u^+ + \sigma(u^{eq} - u^+))\, d\sigma = \frac{f^{eq} - f^+}{u^{eq} - u^+}, \tag{15}$$

где $f^{eq} = f(t, x, u^{eq}(t, x))$, в такой окрестности принадлежит C^1. Так как $\partial f_N/\partial u$ сохраняет знак (может быть, в меньшей окрестности), то $v_N(t, x)$ тоже сохраняет знак. Пусть

$$\operatorname{sgn} v_N(t,x) = \theta, \qquad f^+(t,x) + \theta v(t,x) = f_*^-(t,x). \tag{16}$$

Тогда $f_*^-(t, x) \in C^1$, вектор v коллинеарен разности $f^{eq} - f^+$, а конец вектора f_*^- лежит на прямой, проведенной через концы векторов f^+ и f^{eq} (рис. 16). Гладко продолжим функцию f_*^- с поверхности S в ее полуокрестность, лежащую в G^-.

Покажем, что решения уравнения

$$\dot{x} = f_*(t,x) = \begin{cases} f(t, x, u(t,x)), & x \in G^+, \\ f_*^-(t,x), & x \in G^-, \end{cases} \tag{17}$$

доопределенного на S согласно а) § 4, в области G^+ и на S совпадают с решениями уравнения (11), доопределенного согласно б) § 4. В самом деле, в силу (16)

$$f^+(t,x) - f_*^-(t,x) = -\theta v(t,x) = h(t,x), \qquad h_N(t,x) < -\eta < 0, \tag{18}$$

поэтому $(f_*^-)_N > \eta/2 > 0$ в окрестности точки (t_0, x_0). В тех точках этой окрестности, где $f_N^+ \leqslant 0$, определены векторы $f^{eq} = f(t, x, u^{eq}(t, x))$ и $f_*^0(t,x)$ — скорость

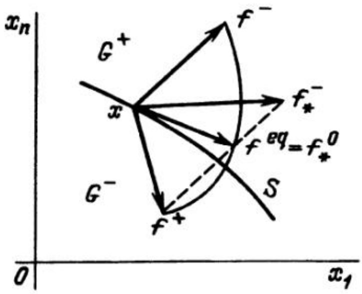


Рис. 16.

движения по поверхности S для уравнения (17). Концы этих векторов лежат на прямой, проходящей через концы векторов f^+ и f_*^-, и в то же время в плоскости, касательной к S. В силу (18) эта прямая пересекает плоскость только в одной точке, которая и является концом векторов f^{eq} и f_*^0. Следовательно, $f^{eq} \equiv f_*^0$. (Это же можно получить и иначе, выражая f^{eq} через f^+ и f_*^- с помощью формул (15), (16), а f_*^0 — с помощью формулы (5) § 4.)

Таким образом, решения уравнения (11) в G^+ и на S совпадают с решениями уравнения (17). Для обоих уравнений решения с S не сходят в область G^-. Для уравнения (17) с доопределением а) § 4 существование решения при любых начальных условиях доказано в п. 4 § 7, а правая единственность — в теореме 2 § 10. Условие $f \in C^1$ в G^- обеспечивает существование и единственность решения уравнения (11) в области G^-. Поэтому при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0 \in G$ существует решение уравнения (11) и при $t \geqslant t_0$ оно единственно.

4. Укажем достаточные условия правой единственности в точках пересечения нескольких поверхностей разрыва.

Пусть область $G \subset R^n$ разделена гладкими гиперповерхностями S_i^k на области S_j^n, $j = 1, \ldots, r$. Верхний индекс означает размерность, нижний — номер поверхности или области; S_i^1 — линии, S_i^0 — точки. Считаем, что край каждой гиперповерхности не принадлежит ей и состоит из конечного числа гладких гиперповерхностей меньших размерностей и точек.

Например, если G — трехмерное пространство, разделенное тремя координатными плоскостями, то S_j^3 ($j = 1, \ldots 8$) — координатные октанты, S_i^2 ($i = 1, \ldots 12$) — четверти координатных плоскостей, S_i^1 ($i = 1, \ldots, 6$) — координатные полуоси, S_1^0 — начало координат.

Пусть $\bar{M}$ — замыкание множества M. Вектор $v \neq 0$ называется *касательным к множеству* M в точке $x \in \bar{M}$, если существует такая последовательность точек $a_i \in M$ ($i = 1, 2, \ldots$), что $a_i \to x$,

$$\frac{a_i - x}{|a_i - x|} \to \frac{v}{|v|} \qquad (i \to \infty). \tag{19}$$

В области G рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{20}$$

Пусть выполнено следующее условие:

1°. Вектор-функция $f(t, x)$ при $\alpha < t < \beta$ непрерывна по t, x в каждой из областей S_j^n вплоть до границы, т.е. $f(t, x) = f_j^n(t, x)$ в S_j^n, функция f_j^n непрерывна в $\bar{S}_j^n$. На всех или некоторых гиперповерхностях $\bar{S}_i^k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, или на их некоторых замкнутых подмножествах заданы непрерывные вектор-функции $f_i^k(t, x)$; вектор $f_i^k(t, x)$ лежит в k-мерной касательной плоскости к S_i^k в точке x. (Если точка x лежит на крае поверхности S_i^k, то вектор, лежащий в касательной плоскости, может не касаться S_i^k в смысле (19).) В точке S_i^0 может быть или задан нулевой вектор $f_i^0 = 0$, или не задано никакого вектора.

Решением уравнения (20) считается абсолютно непрерывная на отрезке вектор-функция $x(t)$, которая при почти всех таких t, что $x(t) \in S_i^k$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = f_i^k(t, x(t)). \tag{21}$$

Следовательно, в те точки поверхностей S_i^k, где функции f_i^k не определены, решение может попадать только на множестве значений t меры нуль.

Эти условия выполнены, в частности, когда для уравнения (20) на поверхностях разрыва применяется доопределение а) или б) § 4, если только при этом все векторы $f_i^k(t, x)$ определяются о д н о з н а ч н о, где они определены, т.е. если определенное в п. 2 § 4 множество $F(t, x)$ (или, соответственно, $F_1(t, x)$) для каждого $x \in S_i^k$ имеет не более одной общей точки с k-мерной плоскостью $P_i^k(x)$, касательной к S_i^k в точке x.

В самом деле, функция $F(t,x)$ β-непрерывна по t, x (п. 1 § 6), поэтому она, а также функция

$$K_i^k(t, x) = F(t, x) \cap P_i^k(x) \tag{22}$$

имеют замкнутые графики (лемма 14 § 5). Значит, функция (22) β-непрерывна; если она однозначна, то функция $f_i^k(t, x) = K_i^k(t, x)$ непрерывна. Те же рассуждения справедливы для функции $F_1(t, x)$ в случае доопределения б).

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнено условие* 1° *и*

1) *решения уравнения* (20) *не могут переходить из одного множества* S_i^k *в другое бесконечно много раз за конечное время*;

2) *в каждом из множеств* $\bar{S}_i^k$, *где определена функция* $f_i^k(t, x)$, *для уравнения* (21) *имеет место правая единственность*;

3) *если в точке* $x \in \bar{S}_i^k$ *определен вектор* $f_i^k(t, x)$, *касательный к* S_i^k *или равный нулю, то в этой точке нет ни одного вектора* $f_j^l(t, x)$ (*для каждого* $\bar{S}_j^l \neq \bar{S}_i^k$), *равного нулю или касательного к своем,* S_j^l, *кроме случая* $f_i^k(\tau, x) = f_j^l(\tau, x) = 0$ *при всех* $\tau \geqslant t$.

Тогда для уравнения (20) *в области G имеет место правая единственность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что условия теоремы выполнены, но при некотором начальном условии $x(t_0) = x_0 \in G$ существуют два решения $x(t)$ и $y(t)$, причем $x(t) \not\equiv y(t)$ для $t_0 < t < t_0 + h$. Пусть t_1 — нижняя грань таких $t \in (t_0, t_0 + h)$, при которых $x(t) \neq y(t)$. Тогда $x(t_1) = y(t_1) = x_1$ и существует убывающая последовательность $t_m \to t_1 + 0$, для которой $x(t_m) \neq y(t_m)$, $m = 2, 3, \ldots$ В силу условия 1) для некоторого m^*

$$x(t)\in S_i^k,\quad y(t)\in S_j^l \qquad (t_1<t<t_{m^*}).$$

В силу условия 2) $S_i^k\neq S_j^l$. Согласно (21)

$$x(t)=x(t_1)+\int_{t_1}^{t} f_i^k(\tau, x(\tau))\,d\tau.$$

Так как функция f_i^k непрерывна в $\overline{S}_i^k$, то существует вектор $\dot x(t_1) = f_i^k(t_1, x_1)$, касательный к S_i^k или равный нулю. Аналогично, существует вектор $\dot y(t_1) = f_j(t_1, x_1)$, касательный к S_j^l или равный нулю. В силу условия 3) это возможно только в случае, когда $f_i^k(t, x_1)=f_j^l(t, x_1)=0$ при всех $t\geqslant t_1$.

Хотя бы одна из функций $x(t)$ и $y(t)$ непостоянна при $t_1\leqslant t<t+\delta$ для сколь угодно малых δ, например, $x(t)$. Тогда задача $\dot x=f_i^k(t,x)$, $x(t_1)=x_1$ имеет в $\overline{S}_i^k$ два решения: $x(t)\not\equiv x_1$ и $x^*(t)\equiv x_1$, так как $f_i^k(t,x_1)=0$. Это противоречит условию 2). Следовательно, предположение неверно, и теорема доказана.

Условие 1) теоремы далеко от необходимого. Его можно ослабить, например, так: "для любого t_1 и любого решения существует такое $t_2>t_1$, что при $t_1<t<t_2$ это решение содержится в о д н о м из множеств S_i^k". Но отбросить условие 1) нельзя. Это видно из следующего примера. Система

$$\dot x=\operatorname{sgn} x-2\operatorname{sgn} y,\qquad \dot y=2\operatorname{sgn} x+\operatorname{sgn} y \tag{23}$$

при начальном условии $x(t_0)=y(t_0)=0$ имеет решение $x(t)\equiv y(t)\equiv 0$ и, кроме того, бесконечно много решений, траектории которых — раскручивающиеся спирали.

Так как каждая следующая точка пересечения траектории с осями координат втрое дальше от точки $(0, 0)$, чем предыдущая, а скорость движения постоянна, то промежутки времени между моментами этих пересечений образуют геометрическую прогрессию. Поэтому движение от точки $(0, 0)$ до любой точки траектории занимает конечное время. Значит, при некотором конечном t_0 начальным условиям $x=y=0$ удовлетворяют по меньшей мере два решения: одно $x(t)\equiv y(t)\equiv 0$ и другое с траекторией в виде спирали. Правой единственности нет.

Заметим, что в силу системы (23) $\dfrac{d}{dt}(|x|+|y|)\equiv 2$. Поэтому все решения, для которых $|x(t_1)|+|y(t_1)|=2a$, вышли из точки $(0, 0)$ в один и тот же момент $t_0=t_1-a$.

§ 11. Вариация решений

Здесь выводятся уравнения в вариациях, которым удовлетворяет главная часть разности двух близких решений в тех случаях, когда решения пересекают поверхность разрыва правой части дифференциального уравнения, входят на эту поверхность или сходят с нее.

1. Векторы $x\in R^n$ и $f(t,x)\in R^n$ будем записывать в виде столбцов, например, $x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$, ${}^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования, а вектор $\varphi_x=(\partial\varphi/\partial x_1,\ldots,\partial\varphi/\partial x_n)$ — в виде строки; $f_x=(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n}$ — матрица. Произведения векторов и матриц определяем по правилу умножения прямоугольных матриц (строки первой умножаются на столбцы второй). В таких произведениях можно производить группировку сомножителей без их перестановки, например, $a(Ax)=(aA)x$, где a — вектор-строка, x — столбец, A — матрица. Тогда ax — скалярное произведение векторов, xa — матрица $(x_ia_j)_{i,j=1,\ldots,n}$; E — единичная матрица. Легко доказывается, что

$$(xa)^2=xa\cdot ax. \tag{1}$$

Решения и поверхности разрыва рассматриваются в $(n+1)$-мерном пространстве t,x. Все рассматриваемые поверхности и их пересечения — гладкие класса C^2.

2. Рассмотрим вариацию решения на участке, где правая часть уравнения — гладкая. Пусть $x(t)$ и $\widetilde x(t)$ — решения одного и того же уравнения $\dot x=f(t,x)$ $(x\in R^n)$ с начальными условиями $x(t_0)=x_0$, $\widetilde x(t_0)=x_0+h_0$, причем f и $\partial f/\partial x_j$ непрерывны.

Тогда, как известно,

$$\tilde{x}(t) - x(t) = Y(t)h_0 + o(h_0)\,, \tag{2}$$

матрица $Y(t)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot{Y}(t) = f_x(t, x(t))\,Y(t), \qquad Y(t_0) = E. \tag{3}$$

Результат остается справедливым, если в некоторой окрестности рассматриваемого участка решения $x(t)$ функции f и $\partial f/\partial x_j$ непрерывны по x и по модулю не превосходят какой-либо суммируемой функции $m(t)$. Если тем же условиям удовлетворяют и $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k$, то в (2) остаточный член можно заменить на $O(h_0^2)$ и можно написать уравнение для второй вариации.

3. Рассмотрим вариацию решения, пересекающего поверхность разрыва [156]. Пусть вектор-функция $f(t, x)$ имеет разрыв на гладкой поверхности $\varphi(t, x) = 0$, причем f и $\partial f/\partial x_j$ непрерывны с обеих сторон этой поверхности вплоть до самой поверхности. Решение задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

пусть при $t = t_*$ в точке $x_* = x(t_*)$ переходит с одной стороны поверхности $\varphi(t, x) = 0$ на другую, причем в этой точке

$$\varphi_t + \varphi_x f^- \neq 0, \qquad \varphi_t + \varphi_x f^+ \neq 0, \tag{5}$$

т.е. пересечение происходит без касания. Здесь $f^{\pm} = f(t_* \pm 0, x(t_* \pm 0))$. Тогда разность двух близких решений представима в виде (2), где матрица $Y(t)$ с обеих сторон поверхности удовлетворяет уравнению (3), а на поверхности имеет скачок

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = \frac{(f^+ - f^-)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^-}\, Y(t_* - 0) = \frac{(f^+ - f^-)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^+}\, Y(t_* + 0)\,, \tag{6}$$

значения φ_t и φ_x берутся в точке (t_*, x_*). Согласно обозначениям п. 1 числитель дроби в (6) — матрица ранга 1, а знаменатель — число.

В случае $t_* > t_0$ вместо (5) достаточно потребовать $\varphi_t + \varphi_x f^- \neq 0$, тогда справедливо первое из равенств (6), но матрица $Y(t_* + 0)$ может быть вырожденной.

Докажем формулу (6). Вблизи точки (t_*, x_*) уравнение поверхности $\varphi(t, x) = 0$ можно записать в виде

$$\varphi_t(t - t_*) + \varphi_x(x - x_*) + o(|t - t_*| + |x - x_*|) = 0, \tag{7}$$

а уравнение траектории $\tilde{x}(t)$ до ее пересечения с поверхностью — в виде

$$\tilde{x}(t) = x(t) + Y(t)h_0 + o(h_0) = x_* + (t - t_*)f^- + Y^- h_0 + o(|t - t_*| + |h_0|)\,, \tag{8}$$

где $Y^- = Y(t_* - 0)$. Чтобы найти точку пересечения этой траектории с поверхностью, надо в (7) вместо x подставить $\tilde{x}(t)$ из (8). Получим

$$(t - t_*)(\varphi_t + \varphi_x f^-) + \varphi_x Y^- h_0 + o(|t - t_*| + |h_0|) = 0.$$

Отсюда имеем для точки пересечения

$$t - t_* = -\frac{\varphi_x Y^- h_0}{\varphi_t + \varphi_x f^-} + o(h_0), \qquad \tilde{x}(t) = x_* - f^- \frac{\varphi_x Y^- h_0}{\varphi_t + \varphi_x f^-} + Y^- h_0 + o(h_0)\,. \tag{9}$$

В случае $t < t_*$ на интервале (t, t_*) имеем $d\tilde{x}/dt = f^+ + O(h_0)$, поэтому $\tilde{x}(t_*) - x(t_*) = \tilde{x}(t_*) - \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t) - x_* = (t_* - t)f^+ + o(h_0) + \tilde{x}(t) - x_*$, и с помощью (9) получаем

$$\tilde{x}(t_*) - x(t_*) = (f^+ - f^-)\frac{\varphi_x Y^- h_0}{\varphi_t + \varphi_x f^-} + Y^- h_0 + o(h_0)\,. \tag{10}$$

Так как оба решения уже пересекли поверхность $\varphi(t, x) = 0$, то левая часть (10) равна $Y(t_* + 0)h_0 + o(h_0)$ и первое равенство в (6) доказано. В случае $t > t_*$ аналогичным образом получается тот же результат.

Второе равенство в (6) получается из первого, если его разрешить относительно $Y(t_* - 0)$ и воспользоваться свойством (1).

4. Рассмотрим вариацию решения, проходящего по поверхности разрыва. Пусть при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ решения $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ проходят по гладкой поверхности $\varphi(t, x) = 0$ и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^0(t, x)$. Вектор-функция f^0 — непрерывная по t, x и гладкая по x; вектор $(1, f^0(t, x))^T$ касается этой поверхности в точке (t, x). Продолжим функцию $f^0(t, x)$ с поверхности на ее окрестность с сохранением непрерывности f^0 и f_x^0. Тогда для вариации начального условия $\tilde{x}(t_*) = x(t_*) + h_*$, не выводящей с поверхности (т.е. такой, что $\varphi_x(t_*, x_*)h_* = o(h_*)$, где $x_* = x(t_*)$), вариация решения записывается подобно (2), (3), т.е.

$$\tilde{x}(t) - x(t) = Y^0(t)h_* + o(h_*), \qquad \dot{Y}^0(t) = f_x^0(t, x(t))\,Y^0(t), \tag{11}$$

$Y^0(t_*) = E$. Решения $\tilde{x}(t)$ и $x(t)$ лежат на поверхности, поэтому в (11) $\tilde{x}(t) - x(t)$ не зависит от способа продолжения функции f^0. Значит, $Y^0(t)h$ тоже не зависит (для всех таких векторов h, что $\varphi_x(t_*, x_*)h = 0$), хотя матрица $Y^0(t)$ может зависеть от способа продолжения функции f^0.

Эти формулы справедливы и для решений, лежащих на гладкой гиперповерхности любой размерности, например, на пересечении конечного числа поверхностей разрыва. Для применения этих формул функцию f^0 надо гладко продолжить с этой гиперповерхности в ее окрестность.

5. Рассмотрим вариацию решения, достигающего поверхности разрыва и далее проходящего по ней. Пусть решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ при $t_0 \leqslant t < t_*$ проходит в области G_1, где f и f_x непрерывны, при $t = t_*$ достигает гладкой поверхности S $(\varphi(t, x) = 0)$ под ненулевым углом, а затем проходит по участку поверхности S, где решения не сходят с S и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^0(t, x)$. Пусть функции f^0 и f_x^0 непрерывны.

Чтобы написать уравнение в вариациях, гладко продолжим функцию f^0 с поверхности S в ее одностороннюю окрестность, не принадлежащую области G_1. После этого применимы те же рассуждения, что в п. 3, лишь функции f^- и f^+ заменяются на f и f^0. При этом $\varphi_t + \varphi_x f \neq 0$ в точке (t_*, x_*). Подобно (6), при $t = t_*$ матрица $Y(t)$ имеет разрыв

$$Y(t_* + 0) - Y(t_* - 0) = \frac{(f^0 - f)\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f}\, Y(t_* - 0), \tag{12}$$

значения $f^0, f, \varphi_t, \varphi_x$ берутся в точке (t_*, x_*).

Покажем, что при $t \geqslant t_*$ матрица $Y(t)$ — вырожденная. Близкие к $x(t)$ решения попадают на S в момент, близкий к t_*, и остаются на S. Поэтому в (2) при $t > t_*$ и любом (малом) h_0 вектор $Y(t)h_0$ касается $(n-1)$-мерного сечения поверхности S плоскостью $t = \mathrm{const}$ и $\operatorname{rang} Y(t) \leqslant n - 1$.

При $t > t_*$ матрица $Y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y}(t) = f_x^0(t, x(t))\,Y(t). \tag{13}$$

Покажем, что $Y(t)$ не зависит от способа продолжения функции f^0 с поверхности S в ее окрестность.

Если поверхность S — плоскость $x_n = 0$, то при любом малом $h_0 = \tilde{x}(t_0) - x(t_0)$ вектор $Y(t)h_0$, как говорилось выше, при $t > t_*$ лежит в плоскости $x_n = 0$. Поэтому последняя строка матрицы $Y(t)$ состоит из нулей. Остальные $n - 1$ строк определяются однозначно из $(n-1)$-мерного уравнения в вариациях, написанного в плоскости $x_n = 0$, при известном из (12) начальном значении $Y(t_* + 0)$. Поэтому они не зависят от способа продолжения функции f^0 и матрица $Y(t)$ определяется однозначно.

Случай любой гладкой поверхности S сводится к случаю плоскости заменой переменных.

6. Рассмотрим вариацию решения с начальным условием на поверхности разрыва. Исследуем случай, когда допускается вариация начального условия, выводящая с поверхности разрыва S $(\varphi(t, x) = 0)$. Пусть решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_*) = x_*$ при $t > t_*$ лежит на S и удовлетворяет уравнению $\dot{x} = f^0(t, x)$, а вблизи S в области $\varphi(t, x) > 0$ имеем уравнение $\dot{x} = f^+(t, x)$, а в области $\varphi(t, x) < 0$ — уравнение $\dot{x} = f^-(t, x)$; векторы f^+ и f^- направлены к поверхности S, т.е.

$$\varphi_t + \varphi_x f^+ < 0, \qquad \varphi_t + \varphi_x f^- > 0.$$

Начальное условие $\tilde{x}(t_*) = x_* + h_*$ решения $\tilde{x}(t)$ в случае $\varphi_x h_* > 0$ ($\varphi_x h_* < 0$) лежит в области $\varphi(t, x) > 0$ (соответственно $\varphi(t, x) < 0$), если h_* достаточно мало (требуемая малость $|h_*|$ зависит от направления вектора h_*).

Тогда вариация решения при $t > t_*$ выражается формулами (2), (13), в которых в случае $\varphi_x h_* \neq 0$ условие $Y(t_*) = E$ заменяется условием

$$Y(t_*) = E + \frac{(f^0 - f^{\pm})\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x f^{\pm}}, \tag{14}$$

где f^+ (f^-) берется в случае $\varphi_x h_* > 0$ (< 0); значения $f^0, f^+, f^-, \varphi_t, \varphi_x$ берутся в точке (t_*, x_*).

Докажем формулу (14). Пусть $\varphi_x h_* < 0$. Этот случай можно получить из рассмотренного в п. 3, если положить $t_0 = t_* - 0$, а функцию f^0, продолженную на область $\varphi(t, x) > 0$, обозначить f^+. Так как решение $\tilde{x}(t)$, достигнув поверхности $\varphi(t, x) = 0$, остается на ней, то справедлива формула (12). Скачок $Y(t)$ при $t = t_*$ описывается первым равенством в (6), где f^+ заменяется на f^0. Из этого равенства следует (14) с f^- вместо $f^{\pm}$.

Случай $\varphi_x h_* > 0$ получается из рассмотренного очевидной заменой обозначений.

7. Рассмотрим вариацию решения, переходящего с одной поверхности на другую. Пусть решения идут по гладкой поверхности S^1 ($\psi^1(t, x) = 0$) и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^1(t, x)$. Достигнув поверхности S^2 ($\psi^2(t, x) = 0$) под ненулевым углом (т.е. $\psi_t^2 + \psi_x^2 f^1 \neq 0$), они продолжаются по этой поверхности, не сходя с нее, и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^2(t, x)$.

Чтобы написать уравнение вариации таких решений при вариациях h_0 начального условия, не выводящих с поверхности S^1, продолжим функцию f^1 с поверхности S^1 на ее окрестность, лежащую с одной стороны от S^2. Тогда задача сводится к рассмотренной в п. 5. При указанных выше h_0 вариация решения $x(t)$ выражается формулами (2), (13), где f^0 заменяется на f^1 при $t < t_*$ и на f^2 при $t > t^*$ (решение $x(t)$ достигает S^2 при $t = t_*$); скачок $Y(t)$ при $t = t_*$ выражается формулой (12), где теперь f, f^0 и φ надо заменить на f^1, f^2 и ψ^2.

Рассмотрим случай, когда поверхность S^1 касается поверхности S^2 по $(n-1)$-мерной поверхности P. Проведем через P вспомогательную поверхность $\varphi(t, x) = 0$ и рассмотрим случай, когда $\varphi_t + \varphi_x f^1 \neq 0$ на P, т.е. проходящие по S^1 решения не касаются поверхности $\varphi = 0$. Такая задача аналогична рассмотренной в п. 3. Скачок матрицы $Y(t)$ выражается формулой (12), где f и f^0 заменяются на f^1 и f^2.

8. Рассмотрим вариацию решения, сходящего с поверхности разрыва. Пусть решения идут по гладкой поверхности $\psi^1(t, x) = 0$ и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^1(t, x)$. Дойдя до пересечения P этой поверхности с гладкой поверхностью $\varphi(t, x) = 0$ (которая может быть или, как и поверхность $\psi^1 = 0$, поверхностью разрыва правой части данного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, или вспомогательной поверхностью, служащей только для определения множества P точек схода решений с поверхности $\psi^1 = 0$), они сходят с поверхности $\psi^1 = 0$ и продолжаются в область G, где они удовлетворяют уравнению $\dot{x} = f(t, x)$; функции f и f_x непрерывны в G. Множество точек (t, x), лежащих на этих решениях в области G, образует поверхность $\psi^2(t, x) = 0$. Тогда задача о вариации решения $x(t)$, проходящего сначала по поверхности $\psi^1 = 0$, а затем в области G по поверхности $\psi^2 = 0$, сводится к задаче, рассмотренной в п. 7, но с функцией f вместо f^2. Как и в п. 7, предполагается, что $\varphi_t + \varphi_x f^1 \neq 0$, т.е. при достижении множества P решения не касаются поверхности $\varphi(t, x) = 0$.

В том случае, когда в точках схода решений с поверхности $\psi^1 = 0$ имеем $f^1 = f$, матрица $Y(t)$ в точках схода не имеет скачка.

9. Рассмотрим вариацию решения, идущего по поверхности разрыва и переходящего на пересечение P этой поверхности с другой поверхностью разрыва. Пусть решения идут по гладкой k-мерной поверхности S^k ($2 \leqslant k \leqslant n$) и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^1(t, x)$. Дойдя до $(k-1)$-мерного пересечения P этой поверхности с гладкой n-мерной поверхностью S^n ($\varphi(t, x) = 0$), они далее идут по P и удовлетворяют там уравнению $\dot{x} = f^2(t, x)$. Предполагается, что $\varphi_t + \varphi_x f^1 \neq 0$, т.е. что, дойдя до P, решения не касаются поверхности S^n.

Вариация решения определяется как в пп. 5, 7, скачок $Y(t)$ в момент t^* достижения P выражается формулой (12), где теперь f и f^0 заменяются на f^1 и f^2.

Подобно п. 8 рассматривается случай, когда решения идут по пересечению (любой размерности) поверхностей разрыва, а затем сходят с него на одну из этих поверхностей или в область непрерывности правой части уравнения.

10. Таким образом, вариацию решения можно написать в форме (2), когда решение проходит по области гладкости правой части уравнения, когда оно пересекает поверхность разрыва или вступает на нее и идет по ней, когда решение попадает на пересечение поверхностей разрыва и идет по нему или сходит с него, или сходит с поверхности разрыва. При этом предполагается, что

1) все поверхности разрыва и их пересечения любых размерностей класса C^2, а функции, определяющие скорости движения, класса C^1;

2) из каждой области S^{n+1} непрерывности правой части уравнения, с поверхности S^n разрыва или с пересечения S^k таких поверхностей (верхний индекс указывает размерность) варьируемое решение $x(t)$ попадает только на поверхность (или пересечение поверхностей) P^l на единицу меньшей размерности и под ненулевым углом; P^l лежит на S^k или на границе S^k;

3) далее, решение или тотчас сходит с P^l, или идет по P^l в течение некоторого времени; сойти с P^l оно может, только достигнув под ненулевым углом какой-либо гладкой гиперповерхности Q^j, $j = i - 1$ (т.е. $\dim Q^j = \dim P^l - 1$), лежащей на P^l или на границе P^l; сход с P^l возможен в любое из примыкающих к P^l множеств S^m размерности $m \geqslant i - 1$;

4) сходы решений с любых S^k однозначно определяются направлениями векторов скорости $f(t, x)$ в множествах S^m $(m > k)$, примыкающих к S^k;

5) на конечном интервале времени может существовать только конечное число точек перехода решений из одного множества S^k в другое.

Например, если поверхности разрыва — грани S^2 куба S^3, то рассматриваются вариации только таких решений, которые не попадают из S^3 сразу на ребро S^1 или в вершину S^0, а также из S^2 в S^0. Сход с грани S^2 осуществляется при достижении под ненулевым углом некоторой линии Q^1, которая может быть или не быть ребром. Сход с грани возможен или на ребро (но не в вершину), или во внутренность или внешность куба.

При условиях 1)–5) все решения с начальными условиями, достаточно близкими к $x(t_0)$, попадают на поверхности S^k в том же порядке, что решение $x(t)$. Вариация решения определяется формулой (2). Матрица $Y(t)$ при прохождении решения в каждом множестве S^k удовлетворяет уравнению вида (3) или (13), а при переходе из одного S^k в другое испытывает скачки, указанные в пп. 3–9.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ

В гл. 3 основные методы качественной теории дифференциальных уравнений применяются для исследования дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и дифференциальных включений. Излагаются общие свойства траекторий автономных систем, свойства траекторий на плоскости (в частности, при наличии только правой единственности), условия существования ограниченных и периодических решений, методы исследования устойчивости с помощью функций Ляпунова и по первому приближению.

§ 12. Траектории автономных систем

Здесь показывается, что многие свойства траекторий автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений сохраняются и для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, и для дифференциальных включений. Имеющиеся различия в свойствах вызваны в основном не наличием разрывов правой части уравнения, а отсутствием единственности.

1. В области G пространства R^n рассмотрим автономное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x) \tag{1}$$

или автономную систему дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, приводящуюся к (1), например, с помощью доопределения а) или в) § 4. Предполагается, что выполнены *основные условия* п. 2 § 7: при каждом $x \in G$ множество $F(x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и функция F β-непрерывна. В этом случае для каждой ограниченной замкнутой области $D \subset G$ функция F ограничена в D (лемма 15 § 5) и решения обладают следующими свойствами, установленными в пп. 2, 4 § 7:

А° При любом начальном условии $x(t_0) = x_0$, где x_0 — внутренняя точка области D, решение существует и продолжается при возрастании t (и при убывании t) или неограниченно, т.е. при $t \to \infty$, или до выхода на границу области D.

Б° Все проходящие в D решения равностепенно непрерывны.

В° Предел каждой равномерно сходящейся последовательности решений есть решение.

Г° Если $x(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ и $y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ — решения и $x(t_1) = y(t_1)$, то решением является также функция

$$z(t) = x(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \qquad z(t) = y(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Только из наличия свойств А° — Г° вытекают и некоторые другие свойства решений. В частности, если все решения с данным начальным условием $x(t_0) = x_0$ существуют при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то множество этих решений является компактом в метрике $C[t_0, t_1]$ (теорема 3 § 7); этот компакт является полунепрерывной сверху (относительно включения) функцией начальной точки (t_0, x_0) (следствие 2 теоремы 1 § 8). Если решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$ единственно на отрезке $[t_0, t_1]$ и на любом меньшем отрезке $[t_0, t'] \subset [t_0, t_1]$, то оно непрерывно зависит от t_0, x_0 и от правой части уравнения или включения (следствие 1 теоремы 1 § 8).

2. Для дифференциального включения (1) (или приводящегося к нему дифференциального уравнения) *траекторией* называется точка или линия в пространстве x, определяемая вектор-функцией $x = \varphi(t)$, которая является решением включения (1). Траектории, проходящие через точку p, обозначаются $T(p)$, $T_1(p)$, $T_2(p)$, $L(p)$, $R(p)$ и т.п. Часть траектории $T(p)$, пробегаемая при $t \geqslant t_0$ (где $\varphi(t_0) = p$), обозначается $T^+(p)$, а при $t \leqslant t_0$ обозначается $T^-(p)$ (положительная и отрицательная полутраектории).

Точка $x = p$ называется *стационарной*, если она является траекторией, т.е. если $x(t) \equiv p$ есть решение включения (1). Название "особая точка" здесь не используется, так как кроме стационарных точек будут рассматриваться и другие особые точки, например, точки ветвления и точки слияния траекторий.

Из определения решения и независимости от t правой части включения (1) вытекают следующие свойства решений и траекторий.

Если $x = \varphi(t)$ — решение (при $\alpha < t < \beta$), то для любого постоянного c функция $x = \varphi(t + c)$ $(\alpha - c < t < \beta - c)$ — тоже решение и эти решения имеют одну и ту же траекторию.

Точка p — стационарная для включения (1) в том и только в том случае, когда $0 \in F(p)$.

Множество стационарных точек, содержащихся в замкнутой области D, является замкнутым.

Как известно ([157], стр. 30), при наличии единственности решений каждая траектория автономной системы является или стационарной точкой, или замкнутой кривой, или незамкнутой кривой без самопересечений. Траектории автономного дифференциального включения (1) в общем случае могут иметь любые самопересечения.

Т е о р е м а 1. *При наличии правой единственности каждая траектория дифференциального включения* (1) *принадлежит одному из следующих типов:*

1) *стационарная точка — траектория решения* $x(t) \equiv p$;

2) *замкнутая кривая без самопересечений — траектория периодического решения* $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$;

3) *незамкнутая кривая без самопересечений*;

4) *траектория, входящая в стационарную точку, т.е. состоящая из простой дуги без самопересечений* $x = \varphi(t)$ $(t < t_1)$ *и стационарной точки* $x = \varphi(t) \equiv p$ $(t \geqslant t_1)$;

5) *траектория, вливающаяся в замкнутую траекторию, т.е. состоящая из простой дуги без самопересечений* $x = \varphi(t)$ $(t < t_1)$ *и замкнутой траектории* $x = \varphi(t) \equiv \varphi(t + l)$ $(t \geqslant t_1,\ l = \mathrm{const} > 0)$.

В случаях 4) *и* 5) *части* $t < t_1$ *и* $t \geqslant t_1$ *траектории* $x = \varphi(t)$ *не имеют общих точек.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ для решения $x = \varphi(t)$ $(-\infty \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant \infty)$ при любых t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, то имеем случай 3). В остальных случаях пусть t_1 — нижняя грань таких τ, что $\varphi(\tau) = \varphi(\sigma)$ хотя бы для одного значения $\sigma > \tau$. Пусть $\sigma - \tau = h$. Тогда $\psi(t) = \varphi(t + h)$ — решение, $\psi(\tau) = \varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$. Значит, $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ при $t \geqslant \tau$,

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t + h) \qquad (t \geqslant \tau). \tag{2}$$

Если $\varphi(t) = \varphi(\tau)$ при $\tau \leqslant t \leqslant \sigma$, то в силу (2) $\varphi(t) = \varphi(\tau)$ при всех $t \geqslant \tau$, а вследствие непрерывности функции φ — и при всех $t \geqslant t_1$, если $t_1 > \alpha$. Так как $\varphi(t) \neq \varphi(t_1)$ при $t < t_1$ в силу выбора t_1, то имеет место случай 4). Если же $t_1 = \alpha$, то $\varphi(t) = \mathrm{const}$ — случай 1).

Пусть $\varphi(t) \not\equiv \mathrm{const}$ при $\tau \leqslant t < \sigma$ и $\tau + l$ — нижняя грань тех $t > \tau$, для которых $\varphi(t) = \varphi(\tau)$. Тогда $0 < l \leqslant h$ (если $l = 0$, то, подобно (2), $\varphi(t) \equiv \varphi(t + l_l)$ $(t \geqslant \tau)$ при сколь угодно малых l_l и, так как функция φ непрерывна, $\varphi(t) \equiv \mathrm{const}$ $(t \geqslant \tau)$, что противоречит предположению). Следовательно, $\varphi(t) \equiv \varphi(t + l)$ $(t \geqslant \tau)$, т.е. при $t \geqslant \tau$ функция $\varphi(t)$ — периодическая с наименьшим периодом $l > 0$. Замкнутая кривая $x = \varphi(t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \tau + l)$ не имеет самопересечений, так как в противном случае $\varphi(\tau_1) = \varphi(\sigma_1)$, $0 < \sigma_1 - \tau_1 < l$, и, подобно (2), функция φ имела бы период $\sigma_1 - \tau_1 < l$. Если при этом $t_1 = \alpha$, то имеем случай 2), а если $t_1 > \alpha$, то случай 5).

Л е м м а 1. *Пусть D — ограниченная замкнутая область,*

$$x = \varphi_i(t), \quad a_i \leqslant t \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

— последовательность дуг траекторий включений (1), *содержащихся в D,*

$$\varphi_i(a_i) = p_i \to p, \quad \varphi_i(b_i) = q_i \to q \qquad (i \to \infty);$$

при этом $b_i - a_i = l_i \geqslant \gamma > 0$, $i = 1, 2, \ldots$

Тогда:

1) *если* $\varliminf_{i\to\infty} l_i = l < \infty$, *то в D содержится дуга* $0 \leqslant t \leqslant l$ *некоторой траектории* $x = \varphi(t)$, $\varphi(0) = p$, $\varphi(l) = q$;

2) *если* $\varlimsup_{i\to\infty} l_i = \infty$, *то в D содержатся некоторые полутраектории* $T^+(p)$ $(x = \varphi(t),$ $0 \leqslant t < \infty)$ *и* $T^-(q)$ $(x = \psi(t), -\infty < t \leqslant 0)$.

Дуга pq или полутраектории $T^+(p)$ *и* $T^-(q)$ *являются пределами некоторой подпоследовательности данных дуг* p_iq_i *или их частей.*

Доказательство. Решения

$$x = \psi_i(t) \equiv \varphi_i(a_i + t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant l_i) \tag{3}$$

имеют те же траектории, что и решения $\varphi_i(t)$. Для сколь угодно больших k возьмем $\lambda_k = l - 2^{-k}$ в случае 1) и $\lambda_k = k$ в случае 2). Зафиксируем k. Последовательность решений (3) для $i = i_k, i_k + 1, \ldots$ компактна в метрике C на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \lambda_k$ согласно Б°. Выберем из нее подпоследовательность, для которой $l_i \to l$ в случае 1) или $l_i \to \infty$ в случае 2). Из последней выберем равномерно сходящуюся подпоследовательность. Ее предел — тоже решение $x = \varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \lambda_k$, траектория которого содержится в D,

$$\varphi(0) = \lim \psi_i(0) = \lim p_i = p.$$

Теперь рассмотрим решения подпоследовательности при $0 \leqslant t \leqslant \lambda_{k+1}$ и выберем из них новую подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $0 \leqslant t \leqslant \lambda_{k+1}$. Ее предел — решение при $0 \leqslant t \leqslant \lambda_{k+1}$, совпадающее с решением $\varphi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \lambda_k$, поэтому для него можно сохранить обозначение $\varphi(t)$. Продолжая аналогично, получим решение $\varphi(t)$ при $0 \leqslant t < l$ (в случае 2) $l = \infty$), траектория которого содержится в D. В случае 2) полутраектория $T^+(p)$ построена, $T^-(q)$ строится аналогично.

В случае 1) $|F(x)| \leqslant m$ в D, значит, для всех решений $|\dot{x}(t)| \leqslant m$, и существует $\lim_{t\to l-0} \varphi(t) = \varphi(l)$. Для любого $\epsilon > 0$ при $k > k_0(\epsilon)$ и $i > i_0(k, \epsilon)$ имеем

$$|\varphi(l) - \varphi(\lambda_k)| \leqslant m(l - \lambda_k) = 2^{-k}m < \epsilon, \quad |\varphi(\lambda_k) - \psi_i(\lambda_k)| < \epsilon,$$

$$|\psi_i(\lambda_k) - \psi_i(l_i)| \leqslant m(\lambda_k - l_i) < \epsilon, \quad |\psi_i(l_i) - q| = |q_i - q| < \epsilon.$$

Следовательно, $|\varphi(l) - q| < 4\epsilon$. Так как ϵ произвольно, то $\varphi(l) = q$.

3. В следующей теореме рассматривается поведение траекторий вблизи нестационарной точки без предположения единственности.

Теорема 2. *Пусть точка b — нестационарная для включения* (1), *т.е.* $0 \notin F(b)$. *Тогда существуют такие вектор* v $(|v| = 1)$, *постоянная* $\gamma > 0$ *и замкнутая окрестность* K $(|x - b| \leqslant \epsilon_0)$ *точки b, что для всех траекторий, проходящих в K, имеем*

$$v \cdot \dot{x}(t) \geqslant \gamma > 0, \tag{4}$$

а угол между векторами v *и* $\dot{x}(t)$ *не больше* α,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\gamma}{m}, \quad m = \max_{x\in K} |F(x)|. \tag{5}$$

Все траектории, имеющие общие точки с диаметральным сечением S $(v \cdot x = v \cdot b,$ $|x - b| \leqslant \epsilon_0)$ *окрестности K, пересекают это сечение в одном направлении — в направлении возрастания произведения* $v \cdot x$.

Доказательство. Так как $0 \notin F(b)$, а множество $F(b)$ выпукло, то по лемме 3 § 5 существует плоскость P, разделяющая 0 и $F(b)$. Уравнение плоскости P можно записать в виде $v \cdot x = \gamma$, где $|v| = 1$, $\gamma > 0$. Точка 0 лежит в области $v \cdot x < \gamma$, а множество $F(b)$ — в области $v \cdot x > \gamma$. По лемме 1 § 5 $\rho(F(b), P) = \rho_0 > 0$. Так как функция F β-непрерывна, то найдется такое $\epsilon_0 > 0$, что при $|x - b| \leqslant \epsilon_0$ имеем

$\beta(F(x), F(b)) \leqslant \rho_0$, т.е. $F(x) \subset (F(b))^{\rho_0}$. Тогда $F(x)$ лежит в области $v \cdot x \geqslant \gamma$, и для любого решения включения (1) в области $|x-b| \leqslant \epsilon_0$ имеем (4).

Далее, при $|x-b| \leqslant \epsilon_0$ множество $F(x)$ лежит в шаре $|x| \leqslant m$ (лемма 15 § 5). Для любого $y \in F(x)$ имеем $|y| \leqslant m$, $\gamma \leqslant v \cdot y = |v| \cdot |y| \cos\alpha_1$, α_1 — угол между векторами v и y. Так как $|v| = 1$, то $\cos\alpha_1 \geqslant \gamma/|y| \geqslant \gamma/m$. Отсюда следует (5).

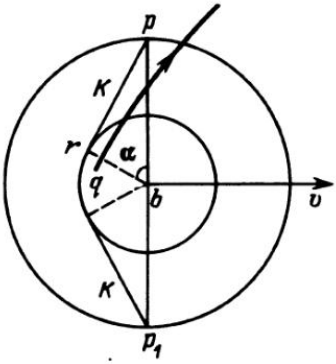


Рис. 17.

Следствие 1. *При условиях теоремы 2 для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каждая траектория, проходящая в δ-окрестности b^δ точки b, не выходя из ее ϵ-окрестности b^ϵ, пересечет построенное в теореме 2 сечение S и затем выйдет из b^ϵ.*

Доказательство. Пусть $\epsilon < \epsilon_0$, указанного в теореме 2, $\delta = \gamma\epsilon/m$. Каждая траектория, проходящая через точку $q \in b^\delta$, в силу (4) не может оставаться в b^ϵ, поэтому выходит на границу окрестности b^ϵ и при убывании, и при возрастании t. Рассмотрим (рис. 17) конус с осью, направленной вдоль вектора v, с основанием pp_1 ($|x-b| \leqslant \epsilon, v \cdot x = v \cdot b$), с боковой поверхностью, касающейся шара b^δ. Тогда $\cos\alpha = |br| : |bp| = \delta/\epsilon = \gamma/m$, угол между образующей rp и вектором v также равен α. Так как угол между векторами $\dot{x}(t)$ и v не больше α (см. (5)), то траектория из точки q шара b^δ не выйдет из конуса, пока не пересечет его основание pp_1.

Следствие 2. *Пусть на дуге ab траектории T ($x = \varphi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$) имеет место правая единственность и точка b — нестационарная.*

Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что каждая траектория, проходящая через точку $a_1 \in a^\eta$, при возрастании t пересекает сечение S, проходящее через точку b, в некоторой точке c_1, вся дуга $a_1c_1 \subset (ab)^\epsilon$ и время движения по дуге a_1c_1 сколь угодно мало отличается (при малых η) от времени движения по ab.

Доказательство. Для данного ϵ найдется такое $\delta < \epsilon$, как в следствии 1. Из наличия правой единственности следует существование такого $\eta > 0$, что у любой траектории $T_1(a_1)$ ($x = \psi(t)$, $\psi(\alpha) = a_1$) дуга a_1b_1 ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$) содержится в δ-окрестности $(ab)^\delta$ дуги ab (следствие 1 теоремы 1 § 8). Так как $\psi(\beta) = b_1 \in b^\delta$, то траектория $T_1(a_1)$ пересекает S в некоторой точке c_1; при этом дуга $b_1c_1 \subset b^\epsilon$. Тогда вся дуга $a_1c_1 \subset (ab)^\epsilon$. Так как дуга $b_1c_1 \subset b^\epsilon$, то $|v \cdot (c_1 - b_1)| \leqslant 2\epsilon$ (если $|v| = 1$) и из (4) следует, что время движения по дуге b_1c_1 не больше $2\epsilon/\gamma$.

Следующие две известные теоремы о выпрямлении траекторий в окрестности нестационарной точки при наличии единственности приводятся в той форме, которая нужна для дальнейшего изложения.

Теорема 3. *Пусть непрерывная функция $x = \psi(v)$, где $v = (v_1, \ldots, v_{n-1})$, взаимно однозначно отображает компакт $K \subset R^{n-1}$ на множество $M \subset R^n$. Пусть для каждого $x_0 \in M$ решение $x = \xi(t; x_0)$ включения (1) или уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $\xi(0; x_0) = x_0$ на отрезке $I = [\alpha, \beta]$ ($\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$) существует, единственно и дуги $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ траекторий таких решений не имеют общих точек.*

Тогда функция $x = \xi(t; \psi(v))$ топологически отображает множество $I \times K$ на множество $Q \subset R^n$, заполненное дугами $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ траекторий с начальными условиями $x(0) \in M$. Эти дуги являются образами отрезков прямых v = const.

Доказательство. Взаимная однозначность отображения $I \times K$ на Q следует из отсутствия общих точек у рассматриваемых дуг траекторий. Его непрерывность следует из непрерывности функций $\psi(v)$ и $x = \xi(t; x_0)$; функция ξ непрерывна вследствие единственности решений. Обратное отображение непрерывно по лемме 1 § 9.

Теорема 4. *Пусть для уравнения $\dot{x} = f(x)$ выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, K — замкнутая ограниченная область в R^{n-1}, $f \in C^1$, $\psi \in C^1$ и при всех $v \in K$, $x = \psi(v)$ векторы $f(x)$, $\partial\psi/\partial v_1, \ldots, \partial\psi/\partial v_{n-1}$ линейно независимы.*

Тогда отображение $x = \xi(t, \psi(v))$ множества $I \times K$ на Q и обратное отображение непрерывно дифференцируемы.

Доказательство. По теореме 3 отображение $x = \xi(t, \psi(v))$ — топологическое. Оно непрерывно дифференцируемо, так как $\xi(t, x_0) \in C^1$ по теореме о дифференцируемости решения по начальным условиям. Производные $u_i = \partial x/\partial v_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют уравнению в вариациях с начальными условиями $u_i(0) = \partial\psi/\partial v_i$.

Так как уравнение $\dot{x} = f(x)$ автономно, то решение $x(t;\ t_0, x_0)$ с начальным условием $x(t_0;\ t_0, x_0) = x_0$ зависит только от $t - t_0$ и x_0. Поэтому функция $u_0 = \partial x/\partial t \equiv -\partial x/\partial t_0$ удовлетворяет уравнению в вариациях с начальным условием $u_0(t_0) = f(x_0)$ ([13], стр. 120). Из условия теоремы следует, что векторы $u_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, линейно независимы при $t = 0$. Они удовлетворяют линейному однородному уравнению в вариациях, поэтому линейно независимы и при любом t. Значит, составленный из них детерминант, являющийся якобианом отображения $x = \xi(t, \psi(v))$, не равен нулю, и обратное отображение тоже непрерывно дифференцируемо.

4. Многие свойства предельных множеств траекторий автономной системы дифференциальных уравнений сохраняются и для предельных множеств траекторий дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ при выполнении основных условий п. 1. Прежде всего это относится к тем свойствам, которыми обладают предельные множества любых непрерывных кривых в пространстве R^n, заданных в виде $x = \varphi(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$.

Точка $q \in R^n$ называется *ω-предельной* для кривой L $(x = \varphi(t),\ t_0 \leqslant t < \infty,\ \varphi \in C)$, если существует такая последовательность $t_1, t_2, \ldots$, стремящаяся к ∞, что $\varphi(t_i) \to q$ $(i \to \infty)$. Множество всех ω-предельных точек кривой L называется *ω-предельным множеством* кривой L и обозначается $\Omega(L)$.

Для кривой $x = \varphi(t)$ $(-\infty < t \leqslant t_0,\ \varphi \in C)$ точка $p \in R^n$ называется *α-предельной*, если существует последовательность точек $\varphi(t_i) \to p$ $(i = 1, 2, \ldots;\ t_i \to -\infty)$; *α-предельное множество* кривой — множество всех ее α-предельных точек.

Если данная кривая $x = \varphi(t)$ является траекторией или полутраекторией автономного дифференциального уравнения или включения, то говорят о предельных точках и множествах этой траектории или полутраектории.

Следующие известные и легко доказываемые утверждения относятся не только к предельным множествам траекторий, но и к предельным множествам любых непрерывных кривых в R^n. Утверждения формулируются для ω-предельных множеств; α-предельные множества обладают аналогичными свойствами.

1) Пусть L — кривая $x = \varphi(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$, а L_k — ее часть, $t_k \leqslant t < \infty$, причем $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Тогда

$$\Omega(L) \subset \bar{L}, \quad \Omega(L) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{L}_k.$$

2) Множество $\Omega(L)$ замкнуто.

3) Множество $\Omega(L)$ пусто тогда и только тогда, когда $|\varphi(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$.

4) Множество $\Omega(L)$ ограничено тогда и только тогда, когда кривая L $(x = \varphi(t),\ t_0 \leqslant t < \infty)$ содержится в ограниченной области.

5) Если множество $\Omega(L)$ ограничено, то

$$\rho(\varphi(t),\ \Omega(L)) \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

6) Всегда

$$\frac{\rho(\varphi(t),\ \Omega(L))}{1 + |\varphi(t)|^2} \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

Лемма 2. *Множество $\Omega(L)$ не является объединением двух непересекающихся непустых замкнутых множеств, из которых хотя бы одно ограничено.*

Доказательство. Предположим, что $\Omega(L) = A \cup B$, $A \cap B = \phi$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, A и B замкнуты, B ограничено. По лемме 1 § 5 $\rho(A, B) = 2d > 0$. Возьмем точки $a \in A$, $b \in B$. Они ω-предельные, поэтому найдется такая возрастающая последовательность $t_1, t_2, \ldots$, стремящаяся к ∞, что

$$\rho(\varphi(t_{2k-1}), a) < d, \quad \rho(\varphi(t_{2k}), b) < d, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\rho(\varphi(t_{2k-1}), B) > d$, $k = 1, 2, \ldots$ (в противном случае

$$\rho(a, B) \leqslant \rho(a, \varphi(t_{2k-1})) + \rho(\varphi(t_{2k-1}), B) < 2d,$$

что невозможно, так как $\rho(A, B) = 2d$). Непрерывная функция $\rho(\varphi(t), B)$ больше d при $t = t_{2k-1}$ и меньше d при $t = t_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$, значит, для некоторого

$t = \tau_k > t_{2k-1}$ имеем

$$\rho(\varphi(\tau_k), B) = d, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau_k \to \infty.$$

Ограниченная последовательность $\varphi(\tau_k)$ имеет предельную точку $c \in \Omega(L)$. Так как $\rho(c, B) = d > 0$, $\rho(A, B) = 2d$, то $c \notin B$, $c \notin A$. Это противоречит тому, что $c \in \Omega(L) = A \cup B$.

Следствие. *Если $\Omega(L)$ ограничено, то оно связно.*

Формулировка леммы 2 упрощается, если пространство R^n дополнить одной точкой $x = \infty$ до компакта $[R^n]$ с естественной топологией: $x_k \to x$, если $|x_k - x| \to 0$; $x_k \to \infty$, если $|x_k| \to \infty$. Тогда лемму 2 можно сформулировать так: множество $\Omega(L)$ связно в $[R^n]$.

Лемма 3. *Если $\Omega(L)$ не имеет общих точек с линией L ($x = \varphi(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$), то L содержится в одной из компонент G_1 открытого множества $R^n \setminus \Omega(L)$, $\Omega(L)$ нигде не плотно, $\Omega(L) = \partial G_1$, т.е. $\Omega(L)$ является границей области G_1.*

Доказательство. Первое утверждение следует из условия леммы и связности линии L. Из $L \subset G_1$ следует $\Omega(L) \subset \partial G_1$, а так как $G_1 \subset R^n \setminus \Omega(L)$, то $\partial G_1 \subset \Omega(L)$. Следовательно, $\Omega(L) = \partial G_1$. В силу определения границы области в любой окрестности каждой точки $a \in \partial G_1$ имеются точки области G_1, значит, множество $\Omega(L) = \partial G_1$ нигде не плотно.

Далее рассматриваются предельные множества траекторий дифференциального включения (1) в замкнутой области D при выполнении основных условий (п. 1) и условия $|F(x)| \leqslant m$ в D.

Условие $|F(x)| \leqslant m$ не является сильным ограничением, так как в каждой ограниченной части $D_k = D \cap B_k$ (B_k — шар, $|x| \leqslant k$) области D по лемме 15 § 5 $|F(x)| \leqslant m_k$. Поэтому включение (1) можно заменить включением $\dot{x} \in p(|x|)F(x)$, которое по теореме 3 § 9 имеет те же траектории, что и включение (1), но у которого правая часть ограничена во всей области D. Для этого достаточно взять в качестве $p(\xi)$ такую непрерывную неубывающую функцию, что $p(k-1) \geqslant m_k$, $k = 1, 2, \dots$

Лемма 4. *Через каждую точку $a \in \Omega(T)$ проходит целая траектория T_0 ($x = \psi(t)$, $-\infty < t < \infty$), содержащаяся в $\Omega(T)$. То же справедливо для α-предельного множества $A(T)$.*

Доказательство. Точка a — ω-предельная для траектории T ($x = \varphi(t)$), т.е. существует такая последовательность $t_i \to \infty$, что $\varphi(t_i) \to a$. Функции

$$\psi_i(t) \equiv \varphi(t + t_i) \qquad (t_0 - t_i \leqslant t < \infty)$$

являются решениями, и $\psi_i(0) \to a$. Так как $|F(x)| \leqslant m$, то на любом конечном отрезке $-k \leqslant t < k$ решения $\psi_i(t)$, начиная с некоторого, определены, равностепенно непрерывны и равномерно ограничены. Поэтому из последовательности $\{\psi_i(t)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $-1 \leqslant t \leqslant 1$ к решению $\psi(t)$, из нее — подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $-2 \leqslant t \leqslant 2$ к тому же решению, продолженному на отрезок $[-2; 2]$, и т.д. Получим решение $\psi(t)$, определенное при $-\infty < t < \infty$. При этом $\psi(0) = \lim \psi_i(0) = a$. Траектория этого решения содержится в $\Omega(T)$, так как для любого t точка $\psi(t)$ есть предел некоторой подпоследовательности точек $\psi_i(t) \equiv \varphi(t + t_i)$, $i = i_j \to \infty$.

Случай $a \in A(T)$ сводится к рассмотренному заменой t на $-t$.

5. Исследуем более детально свойства предельных множеств в том случае, когда выполнены условия, перечисленные перед леммой 4, и, кроме того, решение с любым начальным условим $x(t_0) = x_0 \in D$ единственно при $t \geqslant t_0$.

Лемма 5. *Если траектория T ($x = \varphi(t)$, $\alpha < t < \infty$) имеет общую точку $x_* = \varphi(t_*)$ с множеством $\Omega(T)$, то или $T \subset \Omega(T)$, или некоторая полутраектория T^+ ($x = \varphi(t)$, $t_1 \leqslant t < \infty$) содержится в $\Omega(T)$, а остальная часть траектории T ($t < t_1$) не имеет ни самопересечений, ни общих точек с $\Omega(T)$.*

Доказательство. По лемме 4 через точку x_* проходит некоторая траектория $T_0 \subset \Omega(T)$. Пусть T_0 — траектория решения $x = \psi(t)$. Так как $x = \psi(t + c)$ — решение при любом c, то можно считать, что $\psi(t_*) = x_* = \varphi(t_*)$. Тогда вследствие правой единственности $\psi(t) = \varphi(t)$ при всех $t \geqslant t_*$. Пусть t_1 — нижняя грань таких t_*, что $\varphi(t_*) \in \Omega(T)$. Из доказанного следует, что $\varphi(t) \in \Omega(T)$ при всех $t > t_1$. Если $t_1 = \alpha$, то $T \subset \Omega(T)$. Если $t_1 > \alpha$, то $\varphi(t) \notin \Omega(T)$ при $\alpha < t < t_1$ в силу выбора t_1, а $\varphi(t_1) \in \Omega(T)$ в силу непрерывности $\varphi(t)$ и замкнутости $\Omega(T)$. Отсутствие самопересечений дуги $\varphi(t)$ при $\alpha < t < t_1$ следует из теоремы 1.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены условия указанные перед леммой 4, и в области D имеет место правая единственность. Если траектория T имеет общую точку с $\Omega(T)$, то возможны только следующие случаи:*

1) $\Omega(T)$ совпадает с T или с некоторой полутраекторией $T^+ \subset T$; в этом случае $\Omega(T)$ — стационарная точка или замкнутая траектория;

2) $\Omega(T)$ содержит хотя бы одну точку, не принадлежащую T; в этом случае $\Omega(T)$ состоит из несчетного множества (континуума) траекторий; в окрестности любой точки $a \in \Omega(T)$ имеются как точки траектории T, так и точки множества $\Omega(T) \setminus T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\Omega(T)$ — стационарная точка или замкнутая траектория, то имеет место случай 1). Если он не имеет места, то точка $b \in T \cap \Omega(T)$ — нестационарная. По теореме 2 через нее проходит локальное сечение S. Так как точка b — ω-предельная для траектории T $(x = \varphi(t))$, то существует последовательность $\varphi(t_i') \to b$, $t_i' \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ Траектория T, попавшая в некоторую окрестность точки b при $t = t_i'$ $(i = i_1, i_1 + 1, \ldots)$, в силу следствия 1 теоремы 2 должна пересечь сечение S в некоторый момент t_i, близкий к t_i'. Таким образом, имеем последовательность точек

$$\varphi(t_i) = b_i \to b, \quad b_i \in S \cap T^+(b) \subset S \cap \Omega(T),$$

так как $T^+(b) \subset \Omega(T)$ по лемме 5.

Все точки b_i различны, так как $T^+(b)$ не является замкнутой траекторией. Поэтому точка b — предельная для замкнутого множества $M = \Omega(T) \cap S$. То же справедливо для каждой точки множества M, может быть, кроме точек, лежащих на границе ∂S сечения S. Удалив из M точки, лежащие на ∂S и не являющиеся предельными для точек из $M \setminus \partial S$, получим непустое замкнутое множество M_0, не содержащее изолированных точек, следовательно, имеющее мощность континуума ([64], стр. 58).

Каждая траектория, пересекающая S, после пересечения должна выйти из некоторой окрестности точки b (в силу (4)), прежде чем вновь пересечь S. Поэтому промежутки времени между двумя пересечениями не могут быть сколь угодно малыми. Значит, каждая траектория может пересечь S не более чем в счетном множестве точек. Поэтому через точки множества $M_0 \subset \Omega(T) \cap S$ проходит, кроме T, несчетное множество (континуум) других траекторий, содержащихся в $\Omega(T)$. Это справедливо для любой окрестности любой точки $a \in \Omega(T)$.

Лемма 5 и теорема 5 позволяют детализировать классификацию траекторий, которую дает теорема 1. При этом учитывается наличие или отсутствие пересечений траектории с ее ω-предельным множеством.

В случаях 1) и 4) теоремы 1 $\Omega(T)$ есть точка, в случаях 2) и 5) — замкнутая траектория. При этом в случаях 1) и 2) $\Omega(T) = T$, а в случаях 4) и 5) $\Omega(T) \subset T$, но $\Omega(T) \neq T$. В случае 3) траектория T — незамкнутая кривая без самопересечений, и имеются следующие возможности:

3а) $\Omega(T)$ пусто;

3б) $\Omega(T)$ не пусто и не имеет общих точек с T;

3в) $T \subset \Omega(T)$, но $T \neq \Omega(T)$;

3г) часть $t < t_1$ траектории T $(x = \varphi(t))$ не имеет общих точек с $\Omega(T)$, а остальная ее часть $t_1 \leqslant t < \infty$ содержится в $\Omega(T)$, но не совпадает с ним.

По теореме 5 в случаях 3в) и 3г) множество $\Omega(T)$ содержит, кроме траектории T (или ее части $t_1 \leqslant t < \infty$), еще несчетное множество (континуум) других траекторий.

Примеры траекторий типов 1), 2), 4), 5) очевидны, типа 3а) — траектория $x = t$, типа 3б) — траектория $x = e^{-t}$, типа 3в) — траектория из иррациональной обмотки тора ([158], стр. 70); другие примеры см. в [158] (стр. 408 и 418), типа 3г) — траектория, извне приближающаяся к тору и вливающаяся в одну из траекторий его иррациональной обмотки.

С помощью рассуждений, аналогичных использованным в лемме 5 и теореме 5, можно изучить расположение траектории по отношению к α-предельному множеству $A(T)$. Возможны случаи $A(T) = \phi$ и $A(T) \neq \phi$, $A(T) \cap T = \phi$. Если траектория T имеет общую точку a с множеством $A(T)$, то в силу леммы 4 и правой единственности $T^+(a) \subset A(T)$. При этом, как в теореме 5, возможны случаи: $T = A(T)$, тогда T — стационарная точка или замкнутая траектория; $T \subset A(T)$, но $T \neq A(T)$, тогда $A(T)$ содержит, кроме T, еще континуум траекторий; возможен также случай, когда T содержит точки $a \in A(T)$ и $b \notin A(T)$, тогда $T^-(b) \cap A(T) = \phi$, $T^+(a) \subset A(T)$. Последний случай имеет место, например, для траектории

$$x = \cos\theta(t), \quad y = \sin\theta(t); \quad \theta(t) = \min\{e^t; 2\pi\}.$$

6. Пусть выполнены основные условия п. 1. Единственность не предполагается. Если все решения дифференциального включения (1) определены при $-\infty < t < \infty$, то они определяют [120] обобщенную (т.е. без единственности) динамическую систему. Такие системы обладают некоторыми свойствами обычных динамических систем, в частности, относящимися к минимальным множествам и рекуррентным траекториям [159], [160].

Множество M называется *минимальным*, если оно не пусто, замкнуто, состоит из целых траекторий (т.е. через каждую точку $p \in M$ проходит хотя бы одна целая траектория $x = \varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, содержащаяся в M) и не содержит никакого подмножества $M_0 \neq M$, обладающего этими же свойствами. Траектория T называется *рекуррентной*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\tau(\epsilon)$, что ϵ-окрестность любой дуги траектории T, пробегаемой за время $\tau(\epsilon)$, содержит всю траекторию T.

Теорема 6 [159]. *Любое непустое компактное множество, состоящее из целых траекторий, содержит минимальное множество.*

Следствие. *Если множество $\Omega(T)$ не пусто и ограничено, то оно содержит минимальное множество.*

Теорема 7 [159]. *Каждая целая траектория, содержащаяся в компактном минимальном множестве, рекуррентна.*

Теорема 8 [159]. *Замыкание рекуррентной траектории, содержащейся в ограниченной области, является компактным минимальным множеством.*

§ 13. Свойства траекторий на плоскости

Здесь выясняется, какие из хорошо известных свойств траекторий уравнения $\dot{x} = f(x)$ $(x \in R^2, f \in C^1)$ сохраняются для траекторий дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ $(x \in R^2)$ и, следовательно, для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в области на плоскости при доопределении а) или в) § 4. В частности, для таких уравнений и включений устанавливаются теоремы, аналогичные теоремам Бендиксона о предельных множествах на плоскости и о замкнутых траекториях.

1. Общие свойства траекторий дифференциальных уравнений на плоскости при наличии единственности изучались в [161] и в [158] (гл. 2, § 1), а без предположения единственности — в [162] и в [13] (гл. 7, § 4). Многие из этих свойств с небольшими изменениями сохраняются и для дифференциальных включений (см., в частности, [163], [164]). Доказательства проводятся по тому же плану, что в [13] и в [158], со следующими изменениями. Вместо отрезка нормали к траектории или дуги без контакта, пересекаемой траекториями только в одном направлении, рассматривается сечение, построенное в теореме 2 § 12; вместо теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий используется локальная компактность множества решений (свойства Б° и В° п. 1 § 12).

В замкнутой области на плоскости рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \tag{1}$$

удовлетворяющее основным условиям п. 1 § 12 и условию $|F(x)| \leqslant m$.

Сечением называется любой отрезок S, пересекаемый траекториями только в одном направлении, точнее, такой, что в некоторой его окрестности для любого x и любого $u \in F(x)$ имеем $v \cdot u \geqslant \gamma > 0$, где v — заданный вектор, ортогональный отрезку S. Для любой нестационарной точки существование сечения, проходящего через эту точку, доказано в теореме 2 § 12.

Лемма 1. *Если на сечении S имеется точка $b \in \Omega(T)$ (или $b \in A(T)$), то траектория T $(x = \varphi(t))$ пересекает сечение S при сколь угодно больших $|t|$, и из точек пересечения можно выбрать последовательность*

$$b_i = \varphi(t_i) \to b, \quad t_i \to \infty \quad (i \to \infty)$$

(соответственно $t_i \to -\infty$).

Доказательство. Точка b — ω-предельная для траектории T $(x = \varphi(t))$, значит, на T существует последовательность точек $a_i = \varphi(t'_i) \to b$, $t'_i \to \infty$. В силу следствия 1 теоремы 2 § 12 траектория T, проходящая через любую точку a_i, достаточно близкую к b, пересечет S в точке b_i, и из $a_i \to b$ следует $b_i \to b$, и, с учетом (4) § 12, $t_i - t'_i \to 0$, $t_i \to \infty$.

Случай $b \in A(T)$ сводится к рассмотренному заменой t на $-t$.

В следующих леммах 2 – 6 предполагается, что данная траектория T $(x = \varphi(t))$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий: а) или $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ при любых t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, б) или в точках траектории T имеет место правая единственность. О других траекториях, кроме T, ничего не предполагается.

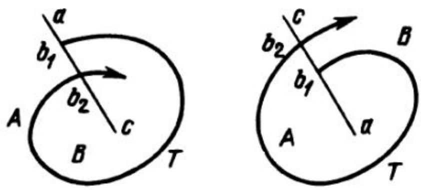


Рис. 18.

Такое предположение является сильным ограничением для дифференциальных включений. Оно выполняется, в частности, для тех дифференциальных включений, к которым сводятся с помощью доопределения а) § 4 дифференциальные уравнения с разрывной правой частью при наличии правой единственности.

Лемма 2. *Если траектория T пересекает сечение S несколько раз, то точки пересечения расположены на S монотонно (при условии* а) *строго монотонно), т.е. в том же порядке, что на траектории.*

Доказательство. Если траектория T пересекла сечение $S = ac$ в точках b_1 и b_2, то замкнутая кривая, состоящая из дуги $b_1 b_2$ траектории T и отрезка $b_2 b_1$ сечения S, делит плоскость на две части A и B. Пусть $ab_1 \subset A$, $b_2 c \subset B$ (рис. 18). Пройдя точку b_2, траектория T остается в B и не может попасть ни на участок ab_1 сечения, лежащий в A, ни на участок $b_1 b_2$, к которому траектории подходят только из области A. Поэтому траектория T после точки b_2 может пересечь сечение ac только на участке $b_2 c$.

Лемма 3. *Для траектории T $(x = \varphi(t))$ множество $\Omega(T)$ может пересекать сечение S не более чем в одной точке. Если b — точка пересечения $\Omega(T)$ с S, то T пересекает S только в точках*

$$b_i = \varphi(t_i), \quad t_i < t_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad t_i \to \infty; \tag{2}$$

точки b_i стремятся к b монотонно на S.

Аналогичное утверждение справедливо для $A(T)$, но тогда $t_{i+1} < t_i$, $t_i \to -\infty$.

Доказательство. Пусть $b \in \Omega(T) \cap S$. По лемме 1 существует последовательность (2) точек пересечения T с S. Из оценки $v \cdot \dot{x}(t) \geqslant \gamma > 0$ следует, что после каждого пересечения решение должно выйти из определенной окрестности сечения S. Поэтому интервалы времени между последовательными пересечениями не меньше положительной постоянной. Перенумеруем все точки пересечения, начиная с некоторой, в порядке возрастания чисел t_i. В силу леммы 1 некоторая подпоследовательность этой последовательности сходится к точке b. По лемме 2 точки b_i расположены на S монотонно, поэтому вся последовательность $b_i \to b$.

Если пересечение $\Omega(T) \cap S$ содержит, кроме b, еще точку a, то подобно предыдущему $b_i \to a$. Это невозможно, если $a \neq b$.

Для $A(T)$ доказательство проводится аналогично.

Теорема 1. *Если траектория T имеет общую точку b_1 с множеством $\Omega(T)$ и на T имеет место правая единственность, то $\Omega(T)$ является стационарной точкой или замкнутой траекторией и совпадает с T или ее полутраекторией $T^+(b_1)$.*

Доказательство. Если b_1 — стационарная точка, то в силу правой единственности $b_1 = T^+(b_1) = \Omega(T)$. Если точка b_1 — нестационарная, то по лемме 3 точки b_1,

$b_2, \ldots$ пересечения T с сечением S, проведенным через b_1, расположены на S монотонно и стремятся к b_1. Это возможно только в случае $b_1 = b_2 = \ldots$ Значит, для траектории T $(x = \varphi(t))$ имеем $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $t_1 \neq t_2$. Тогда $T^+(b_1)$ — замкнутая траектория (см. доказательство теоремы 1 § 12) и $\Omega(T) = T^+(b_1)$.

С л е д с т в и е. *При правой единственности на плоскости не может существовать траекторий типов* 3в) *и* 3г) (*п.* 5 § 12).

Т е о р е м а 2. *Если траектория T имеет общую точку a с множеством $A(T)$ и на T имеет место правая единственность, то или T — стационарная точка, или T — замкнутая траектория, или $A(T)$ состоит только из стационарных точек, а $\Omega(T) = a \in A(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть нестационарная точка $b \in A(T)$. Проходящее через точку b сечение S по лемме 3 пересекает $A(T)$ только в точке b, а траекторию T $(x = \varphi(t))$ — в точках

$$b_i = \varphi(t_i) \to b, \quad t_{i+1} < t_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad t_i \to -\infty. \tag{3}$$

Если $b_i = b$ для некоторого i, то, так как последовательность $\{b_i\}$ монотонна на S, имеем $b_i = b_k = b$ для всех $k \geqslant i$. Тогда дуга $x = \varphi(t)$, $t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_k$, траектории T — замкнутая кривая. Вследствие правой единственности $T^+(b_{k+1})$ — замкнутая кривая. Так как $b_k = \varphi(t_k)$, $t_k \to -\infty$ $(k \to \infty)$, то вся траектория T — замкнутая кривая и $A(T) = T$.

Если $b_i \neq b$ для всех i, то в силу (3) и монотонности последовательности $\{b_i\}$ имеем $b_i \neq b_{i+1}$ для некоторого $i = i_1$, а вследствие правой единственности — и для всех $i \geqslant i_1$. Для такого i дуга $b_{i+2}b_i$ траектории T и отрезок $b_i b_{i+2} \in S$ делят плоскость на три части, в одной из которых содержится $T^+(b_i)$, кроме точки b_i, а в другой — $T^-(b_{i+1})$ и, значит, $A(T)$ (рис. 19). Взяв такое большое i, что $b_i \neq a$ и точка $a \in T \cap A(T)$ лежит на $T^+(b_i)$, получаем противоречие.

Итак, или T — замкнутая траектория, или $A(T)$ состоит только из стационарных точек. В последнем случае из $a \in T \cap A(T)$ и из теоремы единственности следует, что $T^+(a) = a = \Omega(T)$. Тогда или $T = a$, или $T^-(a) \neq a$, и $A(T)$ состоит или из одной точки a, или из бесконечного множества точек.

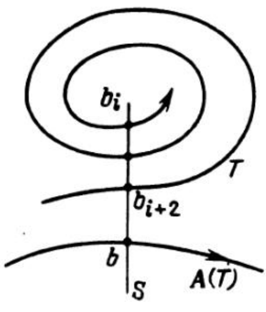


Рис. 19.

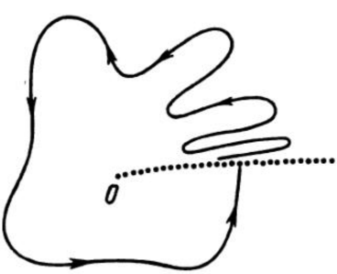


Рис. 20.

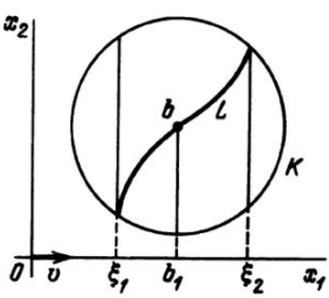


Рис. 21.

Следующие примеры (где ρ, θ — полярные координаты, $c \geqslant 0$ — произвольная постоянная) показывают, что оба последних случая возможны.

1) $\theta(t) = \min\{e^t;\ 2\pi\}$, $\quad \rho(t) = c$.

2) $\theta(t) = \min\{e^t;\ 2\pi\}$, $\quad \rho(t) = c\left(2 + \sin \dfrac{1}{\theta(t)}\right)$. Эта траектория изображена на рис. 20.

2. На дифференциальные включения с правой единственностью (а в некоторых случаях и без нее) переносится ряд утверждений о свойствах ω-предельных множеств, содержащих нестационарные точки.

В следующих ниже леммах 4 — 6 и теоремах 3 — 5 предполагаются выполненными основные условия п. 1 § 12, условие $|F(x)| \leqslant m$ и в точках траектории T хотя бы одно из условий а) и б), сформулированных перед леммой 2.

Л е м м а 4. *У каждой нестационарной точки* $b \in \Omega(T)$ *имеется такая окрестность, в которой проходит только одна простая дуга одной траектории* $L \subset \Omega(T)$ *и нет других точек множества* $\Omega(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4 § 12 через точку b проходит траектория $L \subset \subset \Omega(T)$. По теореме 2 § 12 существует круг K $(|x - b| \leqslant \epsilon_0)$, в котором для всех траекторий $v \cdot \dot{x} \geqslant \gamma > 0$, угол между векторами $\dot{x}$ и v не больше $\alpha, \alpha < \pi/2$, v — постоянный вектор, $|v| = 1$. Пусть $x = (x_1, x_2)$, ось Ox_1 параллельна v. Тогда для всех траекторий в K имеем $dx_1/dt \geqslant \gamma > 0$, и каждая хорда $x_1 = \text{const}$ круга K является сечением.

Проходящая через точку b траектория L пересекает каждую из хорд $x_1 = c$ $(\xi_1 < c < < \xi_2)$ в одной точке (рис. 21). По лемме 3 других точек из $\Omega(T)$ нет в части $\xi_1 < x_1 < < \xi_2$ круга K.

Л е м м а 5. *Если замкнутая траектория (без стационарных точек)* $L \subset \Omega(T)$, *то* $\Omega(T) = L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4 каждая точка $b \in L$ имеет окрестность, не содержащую точек множества $M = \Omega(T) \setminus L$. Объединение таких окрестностей — открытое множество $G \supset L$. Его дополнение $R^2 \setminus G = D$ замкнуто, $M \subset D$. Так как $M = \Omega(T) \cap \cap D$, то M замкнуто. Значит, $\Omega(T) = L \cup M$, L и M замкнуты, $L \cap M = \phi$, L ограничено. По лемме 2 § 12 это возможно только в случае $M = \phi$, $\Omega(T) = L$.

Л е м м а 6. *Пусть траектория* $L \subset \Omega(T)$, *множество* $\Omega(L)$ *или* $A(L)$ *не пусто и на* L *нет стационарных точек.*

Тогда или L *— замкнутая траектория и* $L = \Omega(T)$, *или все ее* α- *и* ω-*предельные точки — стационарные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть нестационарная точка $b \in \Omega(L)$. Через точку b проходит сечение S. По лемме 1 L пересекает S в точках $b_1, b_2, \ldots \to b$. Так как $L \subset \Omega(T)$, то $b_i \in \Omega(T)$ и из леммы 3 следует $b_1 = b_2 = \ldots = b$. Значит, через точку b проходит дуга $b_1 b_2$ траектории L, являющаяся замкнутой кривой $L_0 \subset L \subset \Omega(T)$. По лемме 5 $\Omega(T) = L_0$. Значит, $\Omega(T) = L = L_0$.

Случай $b \in A(L)$ рассматривается аналогично.

З а м е ч а н и е. Леммы 4 — 6 остаются верными, если $\Omega(T)$ заменить α-предельным множеством $A(T)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия, указанные в начале п. 2. Если множество* $\Omega(T)$ *или* $A(T)$ *ограничено и не содержит стационарных точек, то оно состоит из одной замкнутой траектории.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая траектория $L \subset \Omega(T)$ ограничена, значит, множество $\Omega(L) \subset \bar{L}$ не пусто. Так как $\Omega(T)$ замкнуто, то $\bar{L} \subset \Omega(T)$ и в $\bar{L}$ нет стационарных точек. В силу леммы 6 $\Omega(T)$ — замкнутая траектория.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия, указанные в начале п. 2. Пусть множество* $\Omega(T)$ *не является замкнутой траекторией.*

Тогда

1) *множество* Ω_0 *стационарных точек, содержащихся в* $\Omega(T)$, *или пусто, или замкнуто;*

2) *множество нестационарных точек, содержащихся в* $\Omega(T)$, *или пусто, или состоит из конечного или счетного множества непересекающихся дуг траекторий* $L_i \subset \Omega(T)$;

3) *для этих дуг* L_i *множества* $\Omega(L_i)$ *и* $A(L_i)$ *или пусты (если* L_i *уходит в бесконечность), или состоят только из стационарных точек и содержатся в* Ω_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Множество $\Omega(L)$ замкнуто (п. 4 § 12), множество M всех стационарных точек — тоже (п. 2 § 12), поэтому множество $\Omega_0 = \Omega(T) \cap M$ замкнуто.

2) Через каждую нестационарную точку из $\Omega(T)$ в силу леммы 4 проходит единственная траектория L_i, и дуги таких траекторий, не содержащие стационарных точек, или не пересекаются, или совпадают. Покажем, что различных дуг L_i не более чем счетное множество. В силу леммы 4 для каждой дуги L_i можно построить круг с центром $b \in L_i$, не имеющий общих точек с другими дугами L_j. Круги вдвое меньшего радиуса не пересекаются. Так как их не более чем счетное множество, то траекторий L_i — тоже.

3) Пусть $x = \varphi_i(t)$ $(\alpha_i < t < \beta_i)$ — максимальная дуга траектории $L_i \subset \Omega(T)$, не содержащая стационарных точек. Эта дуга (или ее часть) не может быть замкнутой траекторией по лемме 5, так как $\Omega(T)$ не есть замкнутая траектория. Если $\beta_i < \infty$, то

существует $\lim\limits_{t \to \beta_i} \varphi_i(t) = q_i$. Точка q_i — стационарная, иначе дугу L_i можно было бы продолжить за точку q_i. Положим $\varphi_i(t) = q_i$ при $\beta_i \leqslant t < \infty$. Аналогично поступаем, если $\alpha_i > -\infty$. Полученную целую траекторию $x = \varphi_i(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ снова обозначим L_i. Тогда $\Omega(L_i)$ (или $A(L_i)$) — стационарная точка.

Если $\beta_i = \infty$, то в случае $|\varphi_i(t)| \to \infty$ $(t \to \infty)$ множество $\Omega(L_i)$ пусто. В противном случае $\Omega(L_i)$ не пусто. Траектория L_i — незамкнутая, и $\Omega(L_i)$ состоит из стационарных точек по лемме 6. Так как $\Omega(L_i) \subset \bar{L}_i \subset \Omega(T)$, то $\Omega(L_i) \subset \Omega_0$.

Следствие. *Если множество $\Omega(T)$ содержит конечное или только счетное множество M стационарных точек, то $\Omega(T)$ или является стационарной точкой, или состоит из множества M и конечного или счетного множества дуг траекторий, у которых*

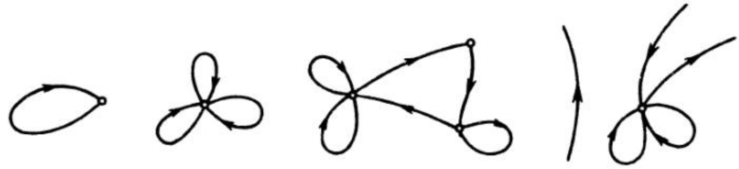


Рис. 22.

каждый конец или является одной из точек множества M, или уходит в бесконечность (рис. 22).

Доказательство. По лемме 2 § 12 множество $\Omega(T)$, если оно не является точкой, не может иметь изолированных точек. Тогда $\Omega(T)$ — замкнутое множество без изолированных точек, следовательно, имеет мощность континуума ([64], стр. 58). Значит, если M — не одна точка, то, кроме точек множества M, множество $\Omega(T)$ содержит и нестационарные точки. По теореме 4 они лежат на конечном или счетном множестве дуг траекторий L_i; $\Omega(L_i)$ или пусто (тогда L_i уходит в бесконечность), или содержится в M и в силу связности является точкой. В силу свойства 5) п. 4 § 12 траектория L_i или приближается к этой точке при $t \to \infty$ (или при $t \to -\infty$), или вливается в нее при конечном t. Утверждение доказано.

При условии а) или б) (см. перед леммой 2) множество $\Omega(T)$, содержащее нестационарную точку b, обладает некоторыми свойствами устойчивого предельного цикла. Если $\Omega(T)$ является замкнутой траекторией, то возможны два случая: или траектория T вся лежит с одной стороны от $\Omega(T)$ (внутри нее или вне), не имеет общих точек с $\Omega(T)$ и "навертывается" на $\Omega(T)$, или траектория T вливается в замкнутую траекторию $\Omega(T)$ в некоторой точке (случай 5) теоремы 1 § 12); при условии а) второй случай невозможен.

Мы говорим, что траектория T *навертывается* на предельное множество $\Omega(T)$, если она

1) не имеет общих точек с $\Omega(T)$ и, значит, вся лежит в одной из областей G^*, на которые множество $\Omega(T)$ делит плоскость;

2) существует не менее трех простых дуг $a_j a_j'$ $(j = 1, \ldots, m;\ m \geqslant 3)$, не имеющих попарно общих точек, лежащих в G^*, с концами $a_j \in \Omega(T)$ и пересекаемых траекторией T только в одном направлении, т.е. всегда так, что точка a_j' остается слева от T, а точка a_j — справа, $j = 1, \ldots, m$ (рис. 23), или всегда наоборот;

3) начиная с некоторой точки, траектория T пересекает эти дуги поочередно в одном и том же порядке, повторяемом бесконечно много раз.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия, указанные в начале п. 2. Если множество $\Omega(T)$ содержит нестационарную точку b, то*

1° или траектория T навертывается на $\Omega(T)$,

2° или траектория T совпадает с $\Omega(T)$ или вливается в $\Omega(T)$ в некоторой точке, и $\Omega(T)$ — замкнутая траектория.

При условии а) (см. перед леммой 2) случай 2° невозможен. Если T не является замкнутой траекторией, то в обоих случаях $A(T)$ не имеет общих точек с $\Omega(T)$.

Доказательство. Через точку b проведем сечение S. По лемме 3 траектория T пересекает S в точках b_i, обладающих свойствами (2).

Если $b_i = b$ для некоторого i, то вследствие монотонности последовательности $\{b_i\}$ имеем $b_{i+1} = b_i = b$. Значит, выполнено не условие а), а условие б) — правая единственность на T. Тогда дуга $b_i b_{i+1}$ траектории T есть замкнутая кривая L без стационарных точек и $T^+(b_i) = L = \Omega(T)$, т.е. имеет место случай 2°. Если при этом $T \neq L$, то из теоремы 2 следует, что $T \cap A(T) = \phi$. Так как $\Omega(T) \subset T$, то $\Omega(T) \cap A(T) = \phi$.

Пусть $b_i \neq b$ для всех i. Тогда не только при условии а), но и при условии б), траектория T не проходит дважды через одну точку (в противном случае в силу правой единственности траектория вливалась бы в замкнутую и было бы $b_i = b$, $i \geqslant i_1$). Поэтому

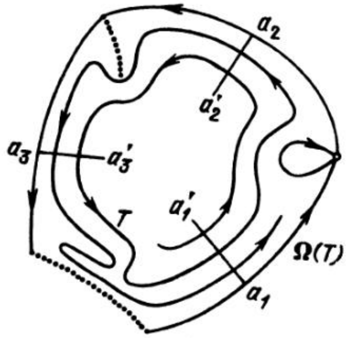


Рис. 23.

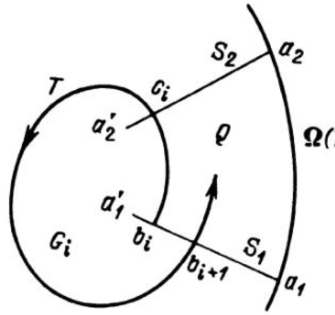


Рис. 24.

для всех i имеем $b_i \neq b_{i+1}$, и кривая K_i, состоящая из дуги $b_i b_{i+1}$ траектории и отрезка $b_{i+1} b_i$ сечения S, делит плоскость на две области: область G_i, содержащую $T^-(b_i) \setminus b_i$, и область H_i, содержащую $T^+(b_{i+1}) \setminus b_{i+1}$. Тогда $G_i \subset G_{i+1} \subset \ldots$; $\bar{G}_i \cap \bar{H}_{i+2} = \phi$, $\Omega(T) \subset \bar{H}_{i+2}$, $T^-(b_i) \subset \bar{G}_i$, следовательно, $\overline{T^-(b_i)} \cap \Omega(T) = \phi$. Так как i произвольно, то $T \cap \Omega(T) = \phi$, а так как $A(T) \subset \overline{T^-(b_i)}$, то $A(T) \cap \Omega(T) = \phi$.

Покажем, что T навертывается на $\Omega(T)$. По теореме 4 $\Omega(T)$ содержит бесконечно много нестационарных точек. Пусть S_j $(j = 1, \ldots, m)$ — сечения в каких-то m из этих точек $a_1, \ldots, a_m$. Укоротим сечения, чтобы они не пересекались. Пусть траектория T $(x = \varphi(t))$ первый раз пересекает S_j при $t = \tau_j$ и $\tau_0 = \max \tau_j$, $b_i = \varphi(\tau_0) \in S_1$. Тогда $T^-(b_i)$ пересекает все сечения $S_1, \ldots, S_m$. При этом точки $a_1, \ldots, a_m \in \Omega(T)$ лежат вне каждой из областей G_k. Поэтому можно укоротить сечения так, чтобы полутраектория $T^-(b_i)$ пересекала всех их по одному разу и чтобы все точки $a_1', \ldots, a_m'$ (концы сечений) лежали в области G_{i-1}. Тогда при каждом $k \geqslant i$ каждый отрезок $a_j a_j' \subset S_j$ пересекает границу области G_k, т.е. дугу $b_k b_{k+1}$ траектории T.

Если дуга $b_i b_{i+1} \subset T$ пересекает все сечения, например, в порядке $S_1, \ldots, S_m$, то дуга $b_{i+1} b_{i+2}$ пересекает их в том же порядке. В самом деле, пусть область Q ограничена дугой траектории T от точки b_i ее пересечения с сечением S_1 до первой точки c_i пересечения со следующим сечением S_2, отрезками $b_i a_1 \subset S_1$, $c_i a_2 \subset S_2$ этих сечений и частью множества $\Omega(T)$, ограниченной точками a_1 и a_2 (рис. 24). В Q нет точек других сечений, так как другие сечения не пересекают ни S_1, ни S_2, ни дугу $b_i c_i \subset T$. Траектория T, войдя в область Q в точке b_{i+1}, не может оставаться в ней, так как перед возвращением на S_1 в точке b_{i+2} траектория T проходит вне Q. Она может выйти из Q, только пересекая отрезок $c_i a_2 \subset S_2$. Следовательно, после каждого пересечения с S_1 траектория T пересекает другие сечения в одном и том же порядке.

3. Следующие теоремы, аналогичные известным теоремам качественной теории дифференциальных уравнений, справедливы для дифференциальных включений вида (1) в замкнутой области на плоскости при выполнении основных условий п. 1 § 12 и условия $|F(x)| \leqslant m$, без каких бы то ни было предположений о единственности решений.

Теорема 6. *Если полутраектория T^+ ограничена, то ее предельное множество $\Omega(T)$ содержит или стационарную точку, или замкнутую траекторию.*

Доказательство ([13], стр. 192). Множество $\Omega(T)$ ограничено и не пусто (свойство 3) п. 4 § 12). Пусть $\Omega(T)$ не содержит стационарных точек. Через любую точку $p \in \Omega(T)$ по лемме 4 § 12 проходит траектория $L \subset \Omega(T)$. Так как $\Omega(T)$ замкнуто, то $\Omega(L) \subset \bar{L} \subset \Omega(T)$. Поэтому множество $\Omega(L)$ ограничено и не содержит стационарных точек. Если траектория L $(x = \psi(t))$ не самопересекается, т.е. $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$ при любых $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, то $\Omega(L)$ есть замкнутая траектория по теореме 3.

Если же $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ при некоторых t_1, t_2, $t_1 < t_2$, то часть $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ траектории L есть замкнутая траектория.

Следствие. *Если полутраектория T^+ содержится в замкнутой области, в которой нет стационарных точек, то в этой области имеется замкнутая траектория.*

Заметим, что это возможно только в кольцевой области, как и в качественной теории дифференциальных уравнений.

Теорема 7 [164]. *Пусть в замкнутой области D, ограниченной замкнутой траекторией L, выполнены условия, указанные в начале п.* 3. *Тогда в этой области имеется стационарная точка.*

Доказательство можно провести тем же методом, что в [158] (стр. 54), для системы двух дифференциальных уравнений. Предположим, что в D нет стационарных точек. Через произвольную внутреннюю точку p области D проходит траектория T $(x = \varphi(t))$.

Если она дважды попадает во внутреннюю точку q области D, т.е. $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = q$, $t_1 < t_2$, то дуга $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ траектории T есть замкнутая траектория T_0, проходящая через точку q. Если T_0 имеет самопересечения, то из нее можно выделить меньшую замкнутую траекторию L_1 без самопересечений, проходящую через точку q (некоторая дуга траектории T_0, содержащая точку q, не самопересекается в силу оценки (4) § 12). Так как $q \notin L$, то $L_1 \neq L$.

Если траектория T не попадает дважды ни в одну внутреннюю точку области D, то каждая из ее полутраекторий или выходит на границу L области D, или навертывается на L либо на замкнутую траекторию $L_1 \neq L$. Если обе полутраектории выходят на L в точках a и b, то дуга ab траектории T и дуга $ba \subset L$ составляют замкнутую траекторию, проходящую через внутреннюю точку p. Если одна выходит на L, а другая навертывается на L, то они пересекаются внутри D. Не имея пересечений внутри D, обе навертываться на L не могут, так как по теореме 5 $A(T) \neq \Omega(T)$.

Таким образом, во всех случаях в D содержится замкнутая траектория $L_1 \neq L$. В области $D_1 \subset D$, ограниченной траекторией L_1, в силу тех же рассуждений содержится замкнутая траектория $L_2 \neq L_1$. Она ограничивает область $D_2 \subset D_1$ и т.д.

Последовательность вложенных замкнутых областей $D \supset D_1 \supset D_2 \supset \ldots$ имеет непустое пересечение D^*_ω. По предположению, любая точка $b \in \partial D^*_\omega$ — нестационарная. По теореме 2 § 12 существует круг K $(|x - b| \leqslant \epsilon_0)$, в котором для решений выполняются неравенства (4) и (5) из § 12. Пусть $x = (x_1, x_2)$, ось Ox_1 параллельна вектору v из формулы (4) § 12. Тогда каждая хорда $x_1 = \mathrm{const}$ круга K является сечением.

При $i > i^*(\delta)$ траектория L_i проходит через δ-окрестность точки b. В силу следствия 1 теоремы 2 § 12 L_i пересекает диаметр $x_1 = \beta_1$ круга K, а значит, и все близкие к нему хорды, притом каждую в одной точке (по лемме 3, так как $L_i = \Omega(L_i)$). В силу (5) § 12 уравнение траектории L_i в круге K записывается в виде $x_2 = \psi_i(x_1)$, где $|\psi_i'| \leqslant \operatorname{tg}\alpha$. Так как $D_1 \supset D_2 \supset \ldots$, то последовательность функций ψ_i монотонна и при $|x_1 - \beta_1| \leqslant \delta_0$ сходится к функции $\psi(x_1)$, график которой проходит через точку b и является траекторией L^*_ω включения (1) (свойства Б° и В° п. 1 § 12).

Если для некоторого i часть круга K, лежащая в полосе $|x_1 - \beta_1| \leqslant \delta_0$ выше кривой $L_i(x_2 = \psi_i(x_1))$, не принадлежит области D_i, а ниже кривой — принадлежит, то вследствие вложенности областей D_i то же будет при всех i. Поэтому часть круга K, лежащая в этой полосе выше траектории L^*_ω, не принадлежит D^*_ω, а ниже — принадлежит, т.е. множество D^*_ω имеет внутренние точки. Замыкание любой компоненты множества этих внутренних точек обозначим D_ω. По доказанному, границей замкнутой области D_ω является траектория L_ω.

Теперь можно построить трансфинитную последовательность вложенных областей и завершить доказательство с помощью теоремы Бэра, как в [158] (стр. 55).

Т е о р е м а 8. *Пусть в окрестности U стационарной точки p нет других стационарных точек.*

Тогда или существует траектория, одним концом входящая в точку p (за конечное или бесконечное время), или в каждой окрестности точки p имеются замкнутые траектории, окружающие эту точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В круге K ($|x-p| \leqslant \epsilon$, ϵ сколь угодно мало), содержащемся в U, возьмем последовательность $p_i \to p$. Если $T^+(p_i) \subset K$, то множество $\Omega(T) \subset \subset K$ по теореме 6 содержит стационарную точку — точку p (других нет) или замкнутую траекторию T_0. В первом случае или $\Omega(T) = p$, или в силу следствия теоремы 4 $\Omega(T)$ состоит из точки p и одной или большего числа траекторий, обоими концами входящих в точку p (других стационарных точек нет в K). Таким образом, существует траектория, одним концом входящая в точку p. Во втором случае внутри области, ограниченной траекторией T_0, по теореме 7 есть стационарная точка — точка p, так как других нет.

Если $T^+(p_i)$ выходит из круга K в точке q_i, то выберем сходящуюся подпоследовательность $q_i \to q$, $i = i_1, i_2, \ldots \to \infty$. Так как для решений $|\dot{x}| \leqslant |F(x)| \leqslant m$, то время движения по траектории T от точки p_i до q_i не меньше некоторого $\gamma > 0$. Тогда по лемме 1 § 12 в K содержится или дуга траектории, соединяющая точки p и q, или целая полутраектория $T^-(q) \subset K$. Последний случай рассматривается так же, как случай $T^+(p_i) \subset K$.

Возьмем последовательность кругов K_i ($|x-p| \leqslant \epsilon_i$), $\epsilon_i \to 0$. По доказанному, или хотя бы в одном из них имеется траектория, одним концом входящая в точку p, или в каждом круге имеется замкнутая траектория, окружающая точку p. Теорема доказана.

Некоторые результаты по качественной теории дифференциальных включений содержатся в работах по теории управляемых систем. Например, в [165] исследуются области на плоскости, в которые можно попасть, идя из данной точки по траекториям дифференциального включения.

§ 14. Ограниченные и периодические решения

Здесь излагается понятие вращения многозначного векторного поля и формулируются свойства вращения. С их помощью устанавливаются достаточные условия существования ограниченных и периодических решений дифференциальных включений, аналогичные известным для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Во всем § 14 предполагается, что многозначная функция F удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7 в области G, компакт $K \subset G$. Используются обозначения, введенные в § 5.

Л е м м а 1. *Для любого $\epsilon > 0$ и любого компакта K найдется такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\delta \leqslant \delta_0$ график функции $F_\delta(p) = [\operatorname{co} F(p^\delta)]^\delta$, $p \in K$, находится в ϵ-окрестности графика Γ функции $F(p)$, $p \in K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае найдутся такое $\epsilon > 0$ и такие последовательности $\delta_i \to 0$, $p_i \in K$, $q_i \in F_{\delta_i}(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\rho((p_i, q_i), \Gamma) \geqslant \epsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Пусть $\max \delta_i = \delta_1 < \rho(K, \partial G)$. По лемме 15 § 5 $|F(p)| \leqslant m$ для $p \in K^{\delta_1}$, поэтому $|F_{\delta_i}(p)| \leqslant m + \delta_1$ для $p \in K$. Вследствие этой оценки и компактности K можно считать, что $p_i \to p_0 \in K$, $q_i \to q_0$. Из (1) следует $\rho((p_0, q_0), \Gamma) \geqslant \epsilon$, значит, $\rho(q_0, F(p_0)) \geqslant \epsilon$.

В силу β-непрерывности функции F найдется такое $\delta > 0$, что $F(p) \subset (F(p_0))^{\epsilon/4}$ при всех $p \in p_0^\delta$, т.е. $F(p_0^\delta) \subset (F(p_0))^{\epsilon/4}$. Так как $F(p_0)$ и $(F(p_0))^{\epsilon/4}$ выпуклы, то $\operatorname{co} F(p_0^\delta) \subset \subset (F(p_0))^{\epsilon/4}$, и при $\delta_i < \delta/2$, $\delta_i < \epsilon/4$, $|p_i - p_0| < \delta/2$ имеем $(p_i)^{\delta_i} \subset p_0^\delta$,

$$q_i \in F_{\delta_i}(p_i) = [\operatorname{co} F(p_i^{\delta_i})]^{\delta_i} \subset [\operatorname{co} F(p_0^\delta)]^{\epsilon/4} \subset (F(p_0))^{\epsilon/2}.$$

Это противоречит неравенству $\rho(q_0, F(p_0)) \geqslant \epsilon$, так как $q_i \to q_0$.

Л е м м а 2. *Для данной многозначной функции $F(p)$ и любых $\delta, \epsilon > 0$ существует однозначная непрерывная вектор-функция $f(p)$, $p \in K$, график которой находится в ϵ-окрестности графика функции $F(p)$, $p \in K$, и при этом $f(p) \in \mathrm{co}\, F(p^\delta \cap K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для данного $\epsilon > 0$ возьмем такое δ_0, как в лемме 1, и любое $\delta < \delta_0$. Покроем компакт K конечным числом шаров $|p - p_i| < \delta$, $p_i \in K$, $i = 1, \ldots, k$. Возьмем какие нибудь $q_i \in F(p_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Положим $\theta_i(p) = \max\{0; \delta - |p - p_i|\}$,

$$\alpha_i(p) = \theta_i(p) / \sum_{j=1}^{k} \theta_j(p), \qquad f(p) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(p) q_i.$$

Все $\theta_i(p)$ непрерывны, $\Sigma\theta_i(p) > 0$, $\Sigma\alpha_i(p) = 1$. Поэтому функция $f(p)$ непрерывна. Так как $\alpha_i(p) \neq 0$ только при $p_i \in p^\delta$, то $f(p) \in \mathrm{co}\, F(p^\delta)$. По лемме 1 график $f(p)$ содержится в ϵ-окрестности графика функции $F(p)$.

З а м е ч а н и е. Функция $f(p)$ удовлетворяет условию Липшица.

Л е м м а 3. *Если $0 \notin F(p)$ для всех $p \in K$, K — компакт, то найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всех $p \in K$, $\delta \leqslant \delta_0$ имеем*

$$\rho(0, [\mathrm{co}\, F(p^\delta)]^\delta) \geqslant \rho_0 > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. График функции $F(p)$, $p \in K$, — замкнутое ограниченное множество (леммы 14 и 15 из § 5). Поэтому его проекция $F(K)$ — замкнутое множество. Так как $0 \notin F(K)$, то $\rho(0, F(K)) = 2\rho_0 > 0$. По лемме 1 найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \leqslant \delta_0$ график функции $F_\delta(p) = [\mathrm{co}\, F(p^\delta)]^\delta$, $p \in K$, находится в ρ_0-окрестности графика функции $F(p)$. Тогда $\rho(0, F_\delta(p)) \geqslant \rho_0$ для $x \in K$.

Л е м м а 4. *Пусть $0 \notin F(p)$ для всех $p \in K$, K — компакт, а вектор-функции $f(p)$ и $g(p)$ однозначны, непрерывны и их графики для $p \in K$ содержатся в δ-окрестности графика функции $F(p)$, $\delta < \delta_0$, δ_0 то же, что в лемме 3.*

Тогда $f(p) \neq 0$ в K, $g(p) \neq 0$ в K и в K не найдется точки p, в которой векторы $f(p)$ и $g(p)$ были бы противоположно направлены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $f(p)$ и $g(p)$ содержатся в выпуклом множестве $[\mathrm{co}\, F(p^\delta)]^\delta$. Если бы при некотором $p \in K$ они были бы противоположно направлены, то нашлось бы такое $\alpha \in (0, 1)$, что $\alpha f(p) + (1 - \alpha) g(p) = 0$. Сумма принадлежит тому же выпуклому множеству. Но по лемме 3 это множество не содержит нуля. Противоречие.

Л е м м а 5. *Если ограниченные замкнутые выпуклые множества A и B в R^n не содержат ни нуля, ни противоположно направленных векторов $u \in A$, $v \in B$, то $0 \notin \mathrm{co}\,(A \cup B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $0 \in \mathrm{co}\,(A \cup B)$. По теореме Каратеодори (§ 5) найдутся такие точки $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A \cup B$, $k \leqslant n$, и числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, что

$$0 = \alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_k a_k, \qquad \alpha_0 + \ldots + \alpha_k = 1. \tag{2}$$

Пусть, например, $a_0, \ldots, a_i \in A$; $a_{i+1}, \ldots, a_k \in B$; $\alpha_0 + \ldots + \alpha_i = \alpha$, $\alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_k = \beta$. Если $\beta = 0$, то $0 = \alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_i a_i \in A$; если $\alpha = 0$, то $0 \in B$, что противоречит условию. Значит, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда

$$\alpha^{-1}(\alpha_0 a_0 + \ldots + \alpha_i a_i) = u \in A, \qquad \beta^{-1}(\alpha_{i+1} a_{i+1} + \ldots + \alpha_k a_k) = v \in B$$

и в силу (2) $\alpha u + \beta v = 0$, т.е. векторы u и v противоположно направлены. Это невозможно. Поэтому предположение неверно, и лемма доказана.

2. Определение вращения непрерывного векторного поля в n-мерном случае при $n > 2$ является довольно сложным. Поэтому сначала изложим определение вращения и его свойства в случае $n = 2$, когда оно является элементарным.

Пусть $f(x)$ — однозначное непрерывное векторное поле в области G на плоскости R^2, L — непрерывная замкнутая кривая $x = \xi(s)$ в G, $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$. На кривой задано направление обхода — в направлении возрастания s. Пусть $f(x) \neq 0$ на L. Пусть $\theta(s)$ — непрерывная функция, равная величине угла между направлением оси Ox_1 и направлением вектора $f(\xi(s))$, $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$. Угол определен с точностью до слагаемого, кратного 2π. Это слагаемое выбирается так, чтобы функция $\theta(s)$ была непрерывной.

Вращением векторного поля $f(x)$ вдоль кривой L называется число

$$\gamma(f, L) = (\theta(s_1) - \theta(s_0))/2\pi.$$

Так как кривая замкнута, то $\theta(s_1) - \theta(s_0)$ кратно 2π и вращение — целое число. Если ∂G_1 — граница области $G_1 \subset G$, состоящая из одной или нескольких замкнутых кривых $L_1, \ldots, L_m$, то по определению

$$\gamma(f, \partial G_1) = \gamma(f, L_1) + \ldots + \gamma(f, L_m), \tag{3}$$

причем на каждой кривой L_i направление движения выбирается так, чтобы область G_1 оставалась слева (рис. 25).

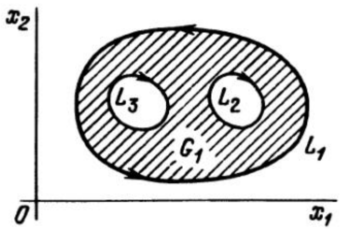


Рис. 25.

Особой точкой непрерывного векторного поля $f(x)$ называется точка $x = a$, в которой $f(a) = 0$. *Индексом* $\gamma(f, a)$ изолированной особой точки $x = a$ в векторном поле $f(x)$ называется вращение $\gamma(f, \partial H)$ поля f на границе ∂H любой области H, содержащей эту особую точку и не содержащей внутри или на границе других особых точек. (В силу сформулированного ниже свойства 3° число $\gamma(f, \partial H)$ одно и то же для всех таких областей H.)

Пусть на L определено векторное поле $f(x, \mu)$, зависящее от параметра μ. Если вектор-функция $f(x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных, то говорят, что векторное поле $f(x, \mu)$ непрерывно меняется при изменении μ.

Свойства вращения непрерывного векторного поля на плоскости и индекса особой точки в таком поле изложены, например, в [157] (стр. 205 — 216) и в [9] (стр. 434 — 437).

Пусть L — замкнутая кривая без самопересечений или граница ограниченной области, $f(x) \neq 0$ на L.

1° При непрерывном изменении векторного поля его вращение $\gamma(f, L)$ не меняется, если при этом f не обращается в нуль на L.

2° Если ни в одной точке $x \in L$ векторы $f(x)$ и $g(x)$ не обращаются в нуль и не являются противоположно направленными, то $\gamma(f, L) = \gamma(g, L)$.

3° Если $f(x) \neq 0$ в замкнутой области D, то $\gamma(f, \partial D) = 0$.

4° Индекс точки $x = 0$ в векторном поле $f(x) = Ax$ $(\det A \neq 0)$ равен $\gamma(Ax, 0) = \operatorname{sgn} \det A$.

5° Если в области G_0 имеется только конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_m$ и на ее границе $f(x) \neq 0$, то

$$\gamma(f, \partial G_0) = \gamma(f, a_1) + \ldots + \gamma(f, a_m).$$

Пусть $F(x)$ — многозначная вектор-функция, удовлетворяющая основным условиям в области G на плоскости, L — или граница ограниченной замкнутой области $D \subset G$, или замкнутая без самопересечений кривая в области G, и на L задано направление обхода (если оно не указано, то обход производится в положительном направлении). Пусть $0 \notin F(x)$ для каждого $x \in L$.

Вращением $\gamma(F, L)$ *многозначного векторного поля* $F(x)$ на L называется [100] вращение $\gamma(f, L)$ любого такого однозначного векторного поля $f(x)$ на L, что график функции $f(x)$ на L содержится в δ_0-окрестности графика функции $F(x)$ на L; δ_0 то же, что в лемме 3. Такая функция f существует по лемме 2. Из леммы 4 и свойства 2° следует, что $f(x) \neq 0$ на L и что число $\gamma(f, L)$ не зависит от выбора функции f.

Особой точкой многозначного векторного поля $F(x)$ называется такая точка $x = a$, что $0 \in F(a)$. *Индекс особой точки* $\gamma(F, a)$ определяется, подобно $\gamma(f, a)$, через вращение $\gamma(F, \partial H)$, где $a \in H$ и $\bar{H}$ не содержит других особых точек.

Покажем, что $\gamma(F, \partial H)$ не зависит от выбора области H. Пусть H_1 и H_2 — области с теми же свойствами, что H, и область H_0 содержится строго внутри пересечения $H_1 \cap H_2$, $a \in H_0$. Так как $0 \notin F(x)$ для всех x в замкнутой области $K = (\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2) \setminus H_0$, то в K можно построить однозначную непрерывную вектор-функцию $f(x) \neq 0$, график которой содержится в δ_0-окрестности графика функции $F(x)$ в K (лемма 3). По определению вращения поля F имеем

$$\gamma(F, \partial H_1) = \gamma(f, \partial H_1), \qquad \gamma(F, \partial H_2) = \gamma(f, \partial H_2).$$

Так как $f(x) \neq 0$ в K, то в силу свойства 3° и формулы (3)

$$0 = \gamma(f, \partial(H_i \setminus H_0)) = \gamma(f, \partial H_i) - \gamma(f, \partial H_0), \qquad i = 1, 2.$$

Следовательно, $\gamma(f, \partial H_1) = \gamma(f, \partial H_2)$, $\gamma(F, \partial H_1) = \gamma(F, \partial H_2)$.

Для многозначных векторных полей сохраняются свойства 3° и 5° с заменой f на F и условия $f(x) \neq 0$ на условие $0 \notin F(x)$. Это следует из определения $\gamma(F, L)$ через $\gamma(f, L)$ и леммы 4.

Свойство 2° заменяется следующим:

2*. *Если на L нет такой точки x, в которой или $0 \in F_1(x)$, или $0 \in F_2(x)$, или множества $F_1(x)$ и $F_2(x)$ содержат противоположно направленные векторы $u \in F_1(x)$, $v \in F_2(x)$, то $\gamma(F_1, L) = \gamma(F_2, L)$.*

Доказательство. Функция $F(x) = \mathrm{co}\,(F_1(x) \cup F_2(x))$ удовлетворяет основным условиям, так как β-непрерывность для функции $F_1(x) \cup F_2(x)$ очевидна, а для $F(x)$ следует из леммы 16 § 5. По лемме 5 $0 \notin F(x)$ для всех $x \in L$. По лемме 3 $0 \notin \mathrm{co}\, F(x^\delta)$ при $\delta \leqslant \delta_0$. По лемме 2 для любого $\delta > 0$ существуют такие непрерывные однозначные функции f_1, f_2, что для $x \in L$

$$f_i(x) \in \mathrm{co}\, F(x^\delta \cap L) \subset \mathrm{co}\, F(x^\delta), \qquad i = 1, 2,$$

Так как векторы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат одному и тому же замкнутому выпуклому множеству, не содержащему точки 0, то они не равны нулю и не направлены противоположно. В силу свойства 2° $\gamma(f_1, L) = \gamma(f_2, L)$. Отсюда и из определения $\gamma(F_i, L)$ следует утверждение 2*.

3. Пусть $f(x)$ — непрерывное векторное поле в R^n или на границе $L = \partial G_0$ ограниченной области $G_0 \subset R^n$, причем $f(x) \neq 0$ на L. Вращение $\gamma(f, L)$ определяется, например, в [167] (стр. 88) как степень отображения

$$Tx = f(x)/|f(x)| \qquad (x \in L)$$

границы L области G_0 на единичную сферу. Вращение является целым числом. Граница сначала предполагается гладкой, но затем определение вращения распространяется на случай произвольной границы ([167], п. 5.3).

В случае $n > 2$ степень отображения — неэлементарное топологическое понятие, поэтому и понятие вращения непрерывного векторного поля неэлементарно. В большинстве приложений используется не определение вращения, а его свойства, излагаемые ниже по книге [167] (§ 5).

Вращение $\gamma(f, L)$ обладает свойствами 1°—5° п.2. Формулировки этих свойств и определение индекса особой точки сохраняются без изменений при любом $n \geqslant 2$. Ниже указываются еще некоторые свойства вращения и индекса для случая любого $n \geqslant 2$.

6° $\gamma(-f, L) = (-1)^n \gamma(f, L)$.

7° Если $f(x) \in C^1$, $f(a) = 0$, $f'(a)$ — матрица

$$(\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{при} \quad x = a \quad \text{и} \quad \det f'(a) \neq 0, \text{ то}$$

$$\gamma(f, a) = \mathrm{sgn}\,\det f'(a).$$

8° Если область Q разбита поверхностями на области $Q_1, \ldots, Q_m$ и на их границах $f(x) \neq 0$, то

$$\gamma(f, Q) = \gamma(f, Q_1) + \ldots + \gamma(f, Q_m).$$

Понятие вращения векторного поля используется в теоремах о неподвижных точках непрерывного отображения $h(x)$, т.е. о решениях уравнения $h(x) = x$. Такие точки являются особыми точками векторного поля $f(x) \equiv h(x) - x$.

Т е о р е м а 1. *Пусть отображение $h(x)$ непрерывно в ограниченной замкнутой области $D \subset R^n$ и $\gamma(f, \partial D) \neq 0$, $f(x) \equiv h(x) - x$.*

Тогда существует такая точка $x \in D$, что $h(x) = x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если бы такой точки не нашлось, то $f(x) \neq 0$ в D и в силу свойства 3° вращение $\gamma(f, \partial D)$ было бы равно нулю.

Т е о р е м а 2 (теорема Брауэра). *Пусть замкнутая область $D \subset R^n$ гомеоморфна шару. Тогда при непрерывном отображении $h(x)$ области D в себя имеется по меньшей мере одна неподвижная точка x_0, т.е. такая, что $h(x_0) = x_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем теорему для шара K с центром $x = 0$. Для любой точки $x \in S = \partial K$ имеем $h(x) \in K$, поэтому вектор $h(x) - x$ не может быть направлен в ту же сторону, что вектор x. Значит, для любой точки $x \in S$ векторы $h(x) - x$ и $-x$ не являются противоположно направленными.

Если $h(x) - x = 0$ для некоторого $x \in S$, то x — неподвижная точка. Если же $h(x) - x \neq 0$ на S, то в силу свойств 2° и 4°

$$\gamma(h(x) - x, S) = \gamma(-x, S) = (-1)^n \neq 0.$$

По теореме 1 существует такая точка $x_0 \in K$, что $h(x_0) = x_0$.

Теперь пусть замкнутая область D гомеоморфна шару K, т.е. существует гомеоморфизм $y = g(x)$, $x = g^{-1}(y)$, $x \in D$, $y \in K$, g и g^{-1} непрерывны. Точкам x и $h(x)$ области D соответствуют точки $g(x) = y$ и $g(h(x)) = g(h(g^{-1}(y))) = z(y)$ шара K, отображение $z(y)$ непрерывно. По доказанному, существует точка $y_0 \in K$, для которой $z(y_0) = y_0$, т.е. $g(h(g^{-1}(y_0))) = y_0$. Отсюда $h(g^{-1}(y_0)) = g^{-1}(y_0)$, т.е. $h(x_0) = x_0$, где $x_0 = g^{-1}(y_0)$.

Пусть $F(x)$ — многозначная вектор-функция, удовлетворяющая основным условиям в ограниченной области $D \subset R^n$ с границей L.

Пусть $0 \notin F(x)$ для каждого $x \in L$. Вращение $\gamma(F, L)$ многозначного векторного поля $F(x)$ на L определяется точно так же, как в случае $n = 2$ (см. п. 2), через вращение вспомогательного однозначного векторного поля $f(x)$. Изложенные в п. 2 доказательство независимости $\gamma(f, L)$ от выбора поля $f(x)$ при достаточно малых δ и свойства вращения $\gamma(F, L)$ сохраняются в случае любого $n \geqslant 2$. Подробное изложение теории вращения многозначных векторных полей см. в [166].

4. Использование понятия вращения векторного поля дает возможность установить ряд теорем о существовании ограниченных и периодических решений дифференциальных уравнений ([167], §§ 6 – 8). Ниже излагаются некоторые из полученных в [168], [169] обобщений этих теорем на дифференциальные включения.

Т е о р е м а 3 [168]. *Пусть W — ограниченная замкнутая выпуклая область в R^n, $\varphi(x) \in C^1$, $\varphi(x) \leqslant 0$ в области W, $\varphi(x) = 0$ на ее границе ∂W. Пусть многозначная функция $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7 и*

$$F(t + l, x) \equiv F(t, x) \qquad (x \in W), \tag{4}$$

$$\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0 \qquad (\operatorname{grad} \varphi(x)) \cdot y \leqslant 0 \tag{5}$$

для всех $x \in \partial W$, $y \in F(t, x)$.

Тогда включение

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{6}$$

имеет в области W решение с периодом l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $x = 0$ лежит внутри W (в противном случае перенесем начало координат внутрь области W). В силу (5) и выпуклости области имеем

$$(\operatorname{grad} \varphi(x)) \cdot x \geqslant g_0 > 0 \qquad (x \in \partial W). \tag{7}$$

Для любых ϵ и $\delta > 0$ построим такую функцию

$$f(t, x) \in \operatorname{co} F(t^\delta, x^\delta \cap W) \qquad (0 \leqslant t \leqslant l, \quad x \in W),$$

как в лемме 2 при $p = (t, x)$. Рассуждением от противного с учетом компактности ∂W,

β-непрерывности $F(t,x)$ и неравенства (5) доказывается, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant l,\ x\in\partial W} (\operatorname{grad}\varphi(x))\cdot f(t,x)\leqslant\eta(\delta,\epsilon)\to 0 \qquad (\delta\to 0,\ \ \epsilon\to 0).$$

Возьмем последовательности $\delta_i\to 0$, $\epsilon_i\to 0$. Обозначим $\eta(\delta_i,\epsilon_i)$ через η_i, а функцию $f(t,x)$ для $\delta=\delta_i$, $\epsilon=\epsilon_i$ — через $f_i(t,x)$. Пусть $f_i(t,x)-2\eta_i g_0^{-1}x=f_i^*(t,x)$. В силу (5) и (7)

$$(\operatorname{grad}\varphi(x))\cdot f_i^*(t,x)\leqslant-\eta_i<0 \qquad (0\leqslant t\leqslant l,\ \ x\in\partial W).$$

Значит, решения уравнений $\dot{x}_i=f_i^*(t,x)$ не выходят из области W $(\varphi(x)\leqslant 0)$ при возрастании t. Так как f_i^* удовлетворяет условию Липшица, то решение $x_i=\psi_i(t;\ a)$ единственно, оно непрерывно зависит от начального условия $x_i(0)=a$.

Тогда $y=\psi_i(l;\ x)$, $x\in W$, есть непрерывное отображение замкнутой области W в себя. По теореме 2 существует такая точка $a_i\in W$, что $\psi_i(l;\ a_i)=a_i$.

Последовательность решений $x_i(t)=\psi_i(t;\ a_i)$ $(0\leqslant t\leqslant l)$, $i=1,2,\dots$, компактна, так как

$$|F(t,x)|\leqslant m \quad (x\in W), \qquad |\dot{x}_i|\leqslant m+2\eta_i g_0^{-1}\ |W|,$$

и из нее можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Так как график f_i^* лежит в ϵ_i^*-окрестности графика функции F, где

$$\epsilon_i^*=\epsilon_i+2\eta_i g_0^{-1}\,|W|\to 0 \qquad (i\to\infty),$$

то по лемме 1 § 7 предел подпоследовательности есть решение $x(t)$ включения (6), лежащее в области W. Так как $\psi_i(l;\ a_i)=a_i$, т.е. $x_i(l)=x_i(0)$, то $x(l)=x(0)$. Продолжим функцию $x(t)$ так, чтобы $x(t+l)\equiv x(t)$. Она будет периодическим решением вследствие периодичности функции $F(t,x)$.

Теорему 3 можно распространить [168] и на случай, когда область W задается конечным числом неравенств $\varphi_i(x)\leqslant 0$, $i=1,\dots,r$, как в [167] (стр. 44).

Для любого $x_0\in D$ пусть $x(t)=\psi(t;\ x_0)$ — единственное решение $(0\leqslant t\leqslant l)$ уравнения $\dot{x}=f(t,x)$ с начальным условием $x(0)=x_0$; функция f непрерывна. Тогда, как известно [32], функция $\psi(t;\ x_0)$ непрерывна $(0\leqslant t\leqslant l,\ x_0\in D)$.

Л е м м а 6 ([167], стр. 101). *Пусть D — замкнутая ограниченная область в R^n, $f(0,x)\neq 0$ $(x\in\partial D=L)$,*

$$\psi(t;\ x)\neq x \qquad (0\leqslant t\leqslant l,\ \ x\in L). \tag{8}$$

Тогда

$$\gamma(x-\psi(l,x),L)=\gamma(-f(0,x),L). \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция

$$y(t,x)=-\int_0^1 f(\lambda t,\psi(\lambda t,x))d\lambda=-\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau,\psi(\tau,x))d\tau$$

непрерывна по t,x $(0\leqslant t\leqslant l,\ x\in D)$ и равна $-f(0,x)$ при $t=0$, $(x-\psi(t,x))/t$ при $0<t\leqslant l$. В силу (8) $y(t,x)\neq 0$ при $x\in L$, и в силу свойства 1° п. 2 справедливо (9).

Т е о р е м а 4 [169]. *Пусть многозначная функция $F(t,x)$ удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7 при всех $t\in R^1$, $x\in R^n$ и $F(t+l,x)\equiv F(t,x)$. Пусть каждое решение включения* (6) *продолжимо до сколь угодно больших t. Пусть*

$$\varphi(x)\in C^1, \quad (\operatorname{grad}\varphi(x))\cdot y<0 \qquad (|x|\geqslant r_0,\ \ 0\leqslant t\leqslant l) \tag{10}$$

для всех $y\in F(t,x)$. Пусть вращение векторного поля $\operatorname{grad}\varphi(x)$ *на некоторой сфере $|x|=r^*>r_0$ не равно нулю.*

Тогда включение (6) *имеет решение с периодом l.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3 § 7 существуют такие $r_1>r_0+1$ и r_2, что все решения с начальными условиями t_0, x_0 $(0\leqslant t_0\leqslant l,\ |x_0|\leqslant r_0)$ при $t_0\leqslant t\leqslant l$ содержатся в шаре $|x|\leqslant r_1-1$, а решения с начальными условиями t_0, x_0 $(0\leqslant t_0\leqslant l,\ |x_0|\leqslant r_1)$ — в шаре $|x|\leqslant r_2-1$. Из (10) и β-непрерывности функции F следует, что для некоторого $\eta > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant l$, $r_0 \leqslant x \leqslant r_2$, $y \in F(t, x)$ имеем $(\operatorname{grad} \varphi(x)) \cdot y \leqslant -2\eta < 0$.

Возьмем последовательности $\delta_i \to 0$, $\epsilon_i \to 0$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots$ построим такую функцию $f_i(t, x)$, как в доказательстве теоремы 3, взяв в качестве W шар $|x| \leqslant r_2$. Тогда при $i \geqslant i_1$ имеем

$$(\operatorname{grad} \varphi(x)) \cdot f_i(t, x) \leqslant -\eta < 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant l,\ r_0 \leqslant |x| \leqslant r_2). \tag{11}$$

Для $i > i_2$ все решения уравнения $\dot{x} = f_i(t, x)$ с начальными условиями $0 \leqslant t_0 \leqslant l$, $|x_0| \leqslant r_0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant l$ содержатся в шаре $|x| < r_1$, а с начальными условиями $0 \leqslant t_0 \leqslant l$, $|x_0| \leqslant r_1$ – в шаре $|x| < r_2$ (в силу следствия 2 теоремы 1 § 8).

Покажем, что для всех решений уравнения $\dot{x} = f_i(t, x)$ $(i > \max\{i_1;\ i_2\})$ с начальными условиями $|x(0)| = r_1$ имеем

$$x(t) \neq x(0), \qquad 0 < t \leqslant l. \tag{12}$$

Эти решения содержатся в шаре $|x| < r_2$. Если $|x(t)| \geqslant r_0$, $0 < t \leqslant t_0 \leqslant l$, то при этих t в силу (11) $\varphi(x(t))$ убывает, значит, $x(t) \neq x(0)$. Если $t_0 < l$, $|x(t_0)| \leqslant r_0$, то по доказанному $|x(t)| < r_1$, $t_0 \leqslant t \leqslant l$, значит, $x(t) \neq x(0)$.

Так как $\operatorname{grad} \varphi(x) \neq 0$ при $|x| \geqslant r_0$ в силу (10), то вращение $\operatorname{grad} \varphi(x)$ на сферах $|x| = r^*$ и $L(|x| = r_1)$ одинаково (в силу свойства 3° п. 2) и не равно нулю. В силу (11) $f_i(x) \neq 0$ и векторы $-f_i(x)$ и $\operatorname{grad} \varphi(x)$ не противоположно направлены при $x \in L$, значит,

$$\gamma(-f_i, L) = \gamma(\operatorname{grad} \varphi, L) \neq 0. \tag{13}$$

Пусть $x = \psi_i(t;\ x_0)$ – решение уравнения $\dot{x} = f_i(t, x)$ с начальным условием $\psi_i(0; x_0) = x_0 \in L$. Из (12), леммы 6 и (13) следует

$$\gamma(x - \psi_i(l;\ x), L) = \gamma(-f_i, L) \neq 0.$$

Согласно 3° п. 2 в области $|x| \leqslant r_1$ есть точка x_{0i}, в которой $\psi_i(l;\ x_{0i}) = x_{0i}$.

Из последовательности решений $\psi_i(t;\ x_{0i})$ выберем равномерно сходящуюся при $0 \leqslant t \leqslant l$ подпоследовательность. По лемме 1 § 7 ее предел $x(t)$ – решение включения (6); при этом $x(l) = x(0)$. Продолжив функцию $x(t)$ с периодом l, получим искомое периодическое решение.

Т е о р е м а 5 [169]. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, кроме условия* (4). *Тогда включение* (6) *имеет хотя бы одно ограниченное решение*

$$x(t) \in W \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Взяв любое $k = 1, 2, \ldots$ и проведя те же рассуждения, что в доказательстве теоремы 3, но на отрезке $-k \leqslant t \leqslant k$ вместо отрезка $0 \leqslant t \leqslant l$, получим решение $x_k(t) \in W$ $(-k \leqslant t \leqslant k)$ включения (6). Из последовательности $\{x_k(t)\}$ выберем подпоследовательность, сходящуюся при $|t| \leqslant 1$, из нее выберем новую подпоследовательность, сходящуюся при $|t| \leqslant 2$, и т.д. Предельная функция $x(t)$ удовлетворяет (14) и в силу следствия 1 леммы 1 § 7 является решением включения (6).

Теоремы о диссипативных системах дифференциальных уравнений, например теорема 2.5 из [170], также распространяются на дифференциальные включения.

Дифференциальное включение (6), где функция $F(t, x)$ определена при $t > t_*$, $x \in R^n$, обладает свойством диссипативности, если каждое решение продолжимо до сколь угодно больших t и существует такой шар $|x| < b$, что каждое решение при возрастании t входит в этот шар и остается там.

Т е о р е м а 6. *Пусть многозначная функция $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7 и условию* (4). *Пусть при $|x| \geqslant a$ существует функция $\varphi(t, x) \in C^1$ со следующими свойствами*:

$$\varphi(t + l, x) \equiv \varphi(t, x); \qquad \varphi(t, x) \geqslant \varphi_0(x) \to \infty \qquad (|x| \to \infty),$$

и для каждого $y \in F(t, x)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\operatorname{grad}_x \varphi(t, x)) \cdot y < 0. \tag{15}$$

Тогда включение (6) *обладает свойством диссипативности.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение включения (6), $x(t_0) = x_0$. Множество D_1 $(0 \leqslant t \leqslant l, m \leqslant \varphi(t, x) \leqslant m_1, |x| \geqslant a)$, где $m = \max\limits_{|\xi|=a,\ 0 \leqslant t \leqslant l} \varphi(t, \xi)$; $m_1 > m$, $m_1 > \varphi(t_0, x_0)$, замкнуто и ограничено. На этом множестве график функции $F(t, x)$ — компакт K (леммы 14 и 15 § 5). Значит, левая часть (15) при $(t, x, y) \in K$ достигает максимума в некоторой точке, и этот максимум равен $-\eta < 0$. Поэтому для каждого решения включения (6), проходящего в области D_1, а в силу периодичности функций F и φ — и в области D $(|x| \geqslant a,\ m \leqslant \varphi(t, x) \leqslant m_1)$, при почти всех t

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x(t)) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\operatorname{grad}_x \varphi(t, x)) \cdot \dot{x}(t) \leqslant -\eta < 0.$$

Следовательно, $\varphi(x(t))$ убывает, и решение $x(t)$ за конечное время выйдет из области D в область, где $\varphi(t, x) \leqslant m$ или $|x| \leqslant a$, и останется там. Эта область не зависит от решения $x(t)$ и содержится в некотором шаре $|x| < b$.

5. Вопрос о существовании периодических решений дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в ряде работ, например в [1] (гл. 8), [4] (гл. 18, 19), исследуется обычными методами качественной теории дифференциальных уравнений. Для отыскания периодических решений применяются метод точечных отображений, "склеивание" решений из отдельных кусков [3] (гл. 2, § 4), [59], [171], [172], а также приближенные методы, в частности, метод гармонического баланса [172], [173]. Исследуется устойчивость периодических решений, например, в [96], [159], [172]. Рассматриваются бифуркации периодических решений [174], [175].

§ 15. Устойчивость

Здесь излагаются некоторые методы исследования устойчивости для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и для дифференциальных включений: метод функций Ляпунова, исследование устойчивости по первому приближению, разделение движений, метод точечных отображений. Приводятся примеры применения этих методов.

1. Для дифференциальных включений имеются два типа устойчивости: устойчивость и слабая устойчивость [176].

Решение $x = \varphi(t)$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{1}$$

называется *устойчивым* (соответственно *слабо устойчивым*), если для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\tilde{x}_0$, что $|\tilde{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, каждое решение (соответственно некоторое решение) $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \epsilon \qquad (t_0 \leqslant t < \infty). \tag{2}$$

Асимптотическая устойчивость и *слабая асимптотическая устойчивость* определяются аналогично, но с дополнительным условием $\tilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим систему с управлением $u(t)$:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad u = u(t) \in U(t, x). \tag{3}$$

Решением называется пара функций: абсолютно непрерывная функция $x(t)$ и измеримая функция $u(t)$, которые почти всюду на рассматриваемом интервале удовлетворяют системе (3).

Чтобы рассмотреть множество всех решений системы (3), можно ее заменить дифференциальным включением (1), где

$$F(t, x) = f(t, x, U(t, x)).$$

Тогда устойчивость решения $x = \varphi(t)$ включения (1) означает, что при $|\tilde{x}(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ решение $\tilde{x}(t)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ удовлетворяет неравенству (2) при *все-*

возможных допустимых управлениях $u(t)$, а слабая устойчивость — что при *некотором* допустимом управлении $u(t)$. Таким образом, слабая асимптотическая устойчивость решения $x = \varphi(t)$ означает, что система стабилизируема к этому решению при достаточно малых начальных отклонениях.

Примеры. 1) $\dot{x} = -|x|^\alpha$ $(-\infty < x < \infty,\ \alpha = \text{const} \geqslant 0)$. Решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. При $0 \leqslant \alpha < 1$ любое другое решение достигает положения равновесия $x = 0$ за конечное время, а при $\alpha \geqslant 1$ — за бесконечное время.

2) $\dot{x} \in F(x)$, $F(x)$ — отрезок с концами kx и mx; $k \leqslant m$. Вслегда $x(t) \equiv 0$ — решение. Для других решений имеем

$$k \leqslant \frac{\dot{x}}{x} \leqslant m, \qquad e^{kt} \leqslant \frac{x(t)}{x(0)} \leqslant e^{mt} \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

При $k \leqslant m < 0$ решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво,
при $k \leqslant m = 0$ — устойчиво,
при $k < 0 < m$ — слабо асимптотически устойчиво,
при $k = 0 < m$ — слабо устойчиво,
при $0 < k \leqslant m$ — неустойчиво.

Для функции $v(t, x) \in C^1$ определяются верхняя и нижняя производные в силу дифференциального включения (1):

$$\dot{v}^* \equiv \left(\frac{dv}{dt}\right)^* = \sup_{y \in F(t,x)} (v_t + \nabla v \cdot y), \qquad \dot{v}_* \equiv \left(\frac{dv}{dt}\right)_* = \inf_{y \in F(t,x)} (v_t + \nabla v \cdot y).$$

Здесь $\nabla v \equiv \text{grad}_x v$. При почти всех t производная $\dot{x}(t)$ существует и удовлетворяет включению (1). При этих t существует

$$\dot{v} \equiv \frac{d}{dt} v(t, x(t)) = v_t + \nabla v \cdot \dot{x}; \qquad \dot{v}_* \leqslant \dot{v} \leqslant \dot{v}^*. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть в замкнутой области D $(t_0 \leqslant t < \infty,\ |x| \leqslant \epsilon_0)$ функция $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7; $0 \in F(t, 0)$; существуют функции $v(t, x) \in C^1$, $v_0(x) \in C$, для которых*

$$v(t, 0) = 0, \qquad v(t, x) \geqslant v_0(x) > 0 \qquad (0 < |x| < \epsilon_0).$$

Тогда:

1) *Если $\dot{v}^* \leqslant 0$ в D, то решение $x(t) \equiv 0$ включения (1) устойчиво.*

2) *Если, кроме того, существуют функции $v_1(x) \in C$, $w(x) \in C$ $(|x| \leqslant \epsilon_0)$, причем*

$$0 < v_0(x) \leqslant v(t, x) \leqslant v_1(x), \qquad \dot{v}^* \leqslant -w(x) < 0 \qquad (0 < |x| < \epsilon_0), \qquad v_1(0) = 0,$$

то решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Изестные доказательства этих утверждений для дифференциальных уравнений остаются справедливыми и для дифференциальных включений; при этом для оценки сверху функции $v(t, x(t))$ используются соотношения (4).

Теорема 2 [176]. *Если выполнены условия теоремы 1, но с заменой $\dot{v}^*$ на $\dot{v}_*$, то решение $x(t) \equiv 0$ слабо устойчиво в случае 1) и слабо асимптотически устойчиво в случае 2).*

Доказательство. Множество $F(t, x)$ замкнуто, поэтому inf в формуле для $\dot{v}_*$ достигается на замкнутом подмножестве $F_1(t, x) \subset F(t, x)$. Для всех $y \in F_1(t, x)$

$$v_t + \nabla v \cdot y \leqslant 0 \qquad (\text{или } \leqslant -w(x) < 0). \tag{5}$$

Замкнув график G_1 многозначной функции $F_1(t, x)$, получим график G_2 функции $F_2(t, x)$, β-непрерывной по лемме 14 § 5. Так как функция F β-непрерывна, то ее график G замкнут, поэтому из $G_1 \subset G$ следует $G_2 = \overline{G}_1 \subset \overline{G} = G$, т.е. $F_2(t, x) \subset F(t, x)$. Так как левая часть (5) непрерывна по t, x, y, то для всех $(t, x, y) \in \overline{G}_1 = G_2$, т.е. для всех $y \in F_2(t, x)$, также справедливо (5).

При фиксированных t, x линейное по y неравенство (5) выполняется для тех и только тех y, которые принадлежат некоторому замкнутому полупространству $P(t, x)$. Значит, $F_2(t, x) \subset P(t, x)$. А тогда $F_0(t, x) = \text{co}\, F_2(t, x) \subset P(t, x)$, т.е. (5) справедливо для всех $y \in F_0(t, x)$. По лемме 16 § 5 функция $F_0(t, x)$ β-непрерывна. По теореме 1 решение $x(t) \equiv 0$ включения $\dot{x} \in F_0(t, x)$ устойчиво (или асимптотически устойчиво). Так как

$$F_0(t, x) = \text{co}\, F_2(t, x) \subset \text{co}\, F(t, x) = F(t, x),$$

то каждое решение включения $\dot{x} \in F_0(t, x)$ является решением включения (1). Отсюда следует утверждение теоремы.

В [176] получены более общие результаты, чем в теоремах 1 и 2. В частности, там рассматривается не только устойчивость точки $x = 0$, но и устойчивость компактного множества; допускаются негладкие и даже разрывные функции $v(t, x)$; при этом вместо производной dv/dt рассматривается верхняя правая производная и т.п.

В [5] (§ 2.3) различаются устойчивость *стационарного множества* (множества, состоящего из всех стационарных точек включения (1)) и точечная устойчивость этого множества. Точка c называется *стационарной*, если $x(t) \equiv c$ есть решение включение (1). Если включение (1) удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7, то стационарное множество замкнуто в силу следствия I леммы I § 7.

Множество $M \subset R^n$ (не обязательно стационарное) называется *устойчивым*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0)$ из δ-окрестности множества M при $t_0 \leqslant t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству $\rho(x(t), M) < \epsilon$. Очевидно, для устойчивости замкнутого множества $M \subset R^n$ необходимо, чтобы любое решение с начальным условием $x(t_0) \in M$ оставалось в M при $t_0 \leqslant t < \infty$. Для дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ стационарное множество может не обладать этим свойством (пример: $x \in R^1$, $F(x)$ — отрезок $[x - 1, x + 1]$, из множества стационарных точек $-1 \leqslant x \leqslant 1$ уходит решение $x = e^t$).

Стационарное множество называется *устойчивым в целом* [5], если оно устойчиво и каждое решение при $t \to \infty$ неограниченно приближается к этому множеству. Стационарное множество называется *точечно устойчивым в целом* [5], если оно устойчиво и каждое решение при $t \to \infty$ стремится к стационарной точке. Достаточные условия устойчивости, устойчивости в целом и точечной устойчивости в целом для ограниченного стационарного множества дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ в [5] (§ 2.3) сформулированы с помощью функций Ляпунова.

В [5] (гл. 3) рассматриваются системы вида

$$\dot{x} = Ax + b_1\varphi_1(c_1 \cdot x) + \ldots + b_m\varphi_m(c_m \cdot x),$$

где $x, b_i, c_i \in R^n$, функции φ_i кусочно непрерывны и в точках разрыва многозначны, значением функции φ_i в точке разрыва служит отрезок, содержащий предельные значения функции при приближении к этой точке. Для таких систем получены частотные условия устойчивости (в том или ином смысле) стационарного множества.

Пусть дифференциальное включение (1) получено из дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{6}$$

с кусочно непрерывной правой частью с помощью доопределения а) § 4 и функция $v(t, x) \in C^1$. Тогда при проверке выполнения условий теоремы 1 достаточно убедиться, что

$$\frac{dv}{dt} \equiv v_t + \nabla v \cdot f \leqslant 0 \qquad (\text{или} \leqslant -w(x) < 0), \quad |x| < \epsilon_0 \tag{7}$$

т о л ь к о в областях непрерывности функции $f(t, x)$. В самом деле, в этих областях $F(t, x) = f(t, x)$, а в точках разрыва функции f множество $F(t, x)$ определяется с помощью операций замыкания графика функции f (безразлично, в пространстве x или в пространстве t, x) и перехода к выпуклой оболочке. Как показано при доказательстве теоремы 2, эти операции не увеличивают верхней грани выражения $v_t + \nabla v \cdot f$. Поэтому из выполнения неравенства (7) в областях непрерывности функции f следует выполнение такого же неравенства для функции $\dot{v}^*$, определенной выше, т.е. выполнение условия теоремы 1.

Рассмотрим теперь случай, когда функция Ляпунова $v(t, x)$ может не принадлежать C^1, но удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки рассматриваемой области. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $x(t)$, значит и для любого решения, сложная функция $v(t, x(t))$ абсолютно непрерывна и почти всюду имеет производную по t. Однако решение может в течение некоторого промежутка времени идти по линии или поверхности, на которой grad v не существует, и производную dv/dt нельзя выразить как в (7). Покажем, что в этом случае

$$\frac{d}{dt} v(t, x(t)) = \frac{d}{dh} v(t+h, \quad x(t)+hy)\bigg|_{h=0} \quad (y = \dot{x}(t)). \tag{8}$$

В самом деле, если при некотором t производные $\dot{x}(t) = y$ и $dv(t, x(t))/dt$ существуют, то

$$\frac{d}{dt} v(t, x(t)) = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h, \quad x(t+h)) - v(t, x(t))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h, x(t)+hy) - v(t, x(t))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h, x(t+h)) - v(t+h, x(t)+hy)}{h}.$$

Последний предел равен нулю, так как $x(t+h) = x(t) + hy + o(h)$, а функция v удовлетворяет условию Липшица. Поэтому и предпоследний предел существует. Он равен правой части (8). Утверждение доказано.

Пример. Пусть $v = |t^2 - x|$, и в точке $t = x = 1$ пусть известно, что $\dot{x} = 2$. Тогда в этой точке в силу (8)

$$\dot{v} = \frac{d}{dh} v(t+h, \quad x+2h)\bigg|_{t=x=1,\ h=0} = \frac{d}{dh} h^2\bigg|_{h=0} = 0.$$

Заметим, что выразить $\dot{v}$ через правые производные функции v по t и x нельзя, так как в точке $t = x = 1$ (значок $^+$ означает правую производную)

$$v_t^+ = 2, \quad v_x^+ = 1, \quad \dot{v}^+ = 0 \neq v_t^+ + v_x^+ \cdot \dot{x} = 4.$$

В силу сказанного выше, например, для невозрастания функции $v(t, x(t))$ достаточно, чтобы выражение (8) было неположительным. Таким образом, в случае функции $v(t, x)$, удовлетворяющей условию Липшица, верхнюю и нижнюю производные $\dot{v}^*$ и $\dot{v}_*$ от функции v в силу включения (1) можно определить как sup и inf правой части (8) по всем $y \in F(t, x)$. Тогда теоремы 1 и 2 сохраняются, но доказательство теоремы 2 усложняется [177].

Более общие, чем (8), определения производной в силу дифференциального включения (1), имеются в [176] и [177].

Если $v \notin C^1$, то уже нельзя пренебрегать отысканием dv/dt на линиях и поверхностях разрыва функции $f(t, x)$ даже в случае доопределения а) § 4.

Пример. Производная функции $v = |x| + |y|$ в силу системы $\dot{x} = \operatorname{sgn} x$, $\dot{y} = -2\operatorname{sgn} y$ при $xy \neq 0$ равна

$$\dot{v} = v_x\dot{x} + v_y\dot{y} = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Этого недостаточно для применения теоремы 1, так как производные v_x и v_y разрывны на осях координат, т.е. там же, где разрывны правые части системы. На оси Ox при доопределении а) § 4 имеем $\dot{x} = \operatorname{sgn} x$, $\dot{y} = 0$, $v = |x|$, поэтому

$$\dot{v} = \frac{d}{dt}|x(t)| = \dot{x} \operatorname{sgn} x = 1 > 0,$$

и условия теоремы 1 не выполнены. Тот же результат получается по формуле (8):

$$\dot{v} = \frac{d}{dh} v(x + h \operatorname{sgn} x, 0)\bigg|_{h=0} = \frac{d}{dh}|x + h \operatorname{sgn} x|\bigg|_{h=0} = 1.$$

Так как на Ox имеем $\dot{x} = \operatorname{sgn} x$, $y = 0$, то решения по оси удаляются от точки (0,0) со скоростью 1 и решение $x \equiv y \equiv 0$ неустойчиво (рис. 26).

Приведем пример применения функции Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости нулевого решения разрывной системы. Условия следующей теоремы не инвариантны относительно преобразований вида $x_i = \gamma_i y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Условия устойчивости, инвариантные относительно таких преобразований, известны [178] для $n = 3$, $a_{ij} = \text{const}$.

Теорема 3. ([7], стр. 85). *Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы*

$$\dot{x}_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\,\mathrm{sgn}\, x_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

доопределяемой согласно а) § 4, *с непрерывными* $a_{ij}(t, x)$ *достаточно, чтобы при* $x = 0$ *и всех* t *квадратичная форма*

$$\varphi(p_1, \ldots, p_n;\ t, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\, p_i p_j$$

была положительно определенной (*условие* $a_{ij} = a_{ji}$ *не обязательно*).

Доказательство. Пусть $\mu(t, x) = \min \varphi$ на поверхности куба $|p_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$. В силу положительной определенности формы φ имеем $\mu(t_0, 0) > 0$. Так как

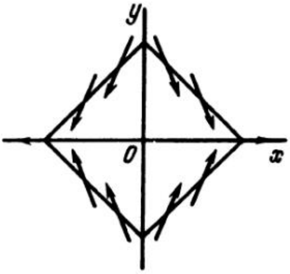


Рис. 26.

функции $a_{ij}(t, x)$, значит и $\mu(t, x)$, непрерывны при $x = 0$, то для некоторого $\delta_0 > 0$ в области Q ($|x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant \delta_0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta_0$) имеем $\mu(t, x) \geqslant h > 0$.

Пусть $v = |x_1| + \ldots + |x_n|$. В области Q при $x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i\,\mathrm{sgn}\, x_i = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{sgn}\, x_i\ \ \mathrm{sgn}\, x_j \leqslant -h < 0.$$

Рассмотрим теперь точку x, у которой одна или несколько координат равны нулю. Например, пусть

$$x_1 = \ldots = x_k = 0, \quad x_{k+1} \neq 0, \ldots, x_n \neq 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n - 1. \tag{10}$$

Согласно доопределению а) § 4 в такой точке $\dot{x}(t)$ может принимать лишь значения из наименьшего выпуклого замкнутого множества, содержащего предельные значения правой части (9), т.е. для $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = -\sum_{j=1}^{k} a_{ij} p_j - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}\ \mathrm{sgn}\, x_j = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j, \\ -1 \leqslant p_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, k; \\ p_j = \mathrm{sgn}\, x_j, \quad j = k+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{11}$$

Если решение $x(t)$ удовлетворяет условиям (10) на множестве значений t меры нуль, то значения $\dot{x}_i$ и $\dot{v}$ при этих t можно не учитывать. Если решение удовлетворяет условиям (10) на множестве M значений t положительной меры, то почти все эти значения t — неизолированные точки множества M. При почти всех таких неизолированных t существует $\dot{x}_i$, и из (10) и определения производной следует, что $\dot{x}_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Отсюда и из (11) имеем при таких t

$$\dot{v} = \sum_{i=k+1}^{n} \dot{x}_i\,\mathrm{sgn}\, x_i = -\sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j.$$

Прибавляя к этой сумме равную нулю сумму

$$0=\sum_{i=1}^{k} p_i\dot{x}_i = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_ip_j,$$

получаем квадратичную форму $\dot{v}=-\varphi(p_1,\ldots,p_n;t,x)\leqslant -h<0$ (так как $k\leqslant n-1$, то хоть одно из p_j есть 1 или -1).

Итак, в области Q при почти всех t имеем

$$\dot{v}(x(t))\leqslant -\mu(t,x(t))\leqslant -h<0,$$

пока $x(t)\neq 0$. Следовательно, если $v(x(t_0))<\min\{\delta_0;h\delta_0\}$, то вдоль решения $v(x(t))$ убывает и решение не выходит из этой области до момента $t=t_0+\delta_0$. В этот момент $v(x(t))=0$, $x(t)=0$. Равенство $x(t)=0$ сохраняется и при всех $t>t_0+\delta_0$, так как в окрестности каждой точки $(t,0)$ имеем $\dot{v}\leqslant 0$. Асимптотическая устойчивость доказана.

Замечание 1 ([7], стр. 86). Если при всех t, x функции $a_{ij}(t,x)$ ограничены и

$$\det\|a_{ij}+a_{ji}\|_{i,j=1,\ldots,n}\geqslant \text{const}>0,$$

то $\mu(t,x)\geqslant h>0$ при всех t, x и нулевое решение системы (9) асимптотически устойчиво в целом. (В самом деле, $\mu(t,x)\geqslant\lambda_1(t,x)$, где $\lambda_1(t,x)$ — минимум квадратичной формы φ на сфере $p_1^2+\ldots+p_n^2=1$, равный наименьшему собственному значению матрицы $\|(a_{ij}+a_{ji})/2\|_{i,j=1,\ldots,n}$. При сформулированных выше условиях корни характеристического уравнения этой матрицы ограничены снизу положительным числом).

Замечание 2. Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x}_i=b_i(t,x)-\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(t,x)\operatorname{sgn}x_j,\qquad i=1,\ldots,k,$$

с непрерывными $b_i(t,x)$ и $a_{ij}(t,x)$ достаточно выполнение хотя бы одного из двух условий:

а) $|b_i|+\sum\limits_{j=1}^{k}|a_{ij}|<a_{ii},\quad i=1,\ldots,k;$

б) $|b_1|+\ldots+|b_k|<\lambda_1$, λ_1 — наименьший корень уравнения

$$\det\left\|\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}-\lambda\delta_{ij}\right\|_{i,j=1,\ldots,k}=0,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ $(j\neq i)$.

В самом деле, в обоих случаях вследствие непрерывности разность между правой и левой частями неравенства в некоторой окрестности точки $(t,0)$ не меньше некоторого $h>0$. Тогда в этой окрестности в случае а) при $x_j(t)\neq 0$ $(j=1,\ldots,k)$ имеем $\dot{x}_i(t)\leqslant -h<0$, если $x_i(t)>0$, и $\dot{x}_i(t)\geqslant h>0$, если $x_i(t)<0$. Согласно доопределению а) § 4 это же справедливо и при любых $x_j(t)$ $(j\neq i)$, если $\dot{x}_i(t)$ существует, $x_i(t)\neq 0$. Значит, те координаты $x_i(t)$, которые не равны 0, убывают по абсолютной величине со скоростью, не меньшей h, и через конечное время решение станет равным нулю.

В случае б) вместо неравенства $\dot{v}\leqslant-\mu\leqslant -h<0$ получаем

$$\dot{v}\leqslant-\mu+|b_1|+\ldots+|b_k|\leqslant -\lambda_1+|b_1|+\ldots+|b_k|\leqslant -h<0,$$

и доказательство завершается так же, как раньше.

О других условиях устойчивости для системы (9) и об их сравнении см., например, [178].

2. Ниже излагаются некоторые методы исследования устойчивости однородных дифференциальных включений и уравнений. Если A — множество в R^n, c — число, то cA обозначает множество точек вида cx для всех $x\in A$.

Многозначная функция $F(x)$ называется *однородной* степени α, если $F(cx)\equiv c^\alpha F(x)$ для всех $c>0$.

Дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(x)\qquad (F(cx)\equiv c^\alpha F(x),\ c>0)\tag{12}$$

называется *однородным.* Оно не меняется при замене $x = cx_1$, $t = c^{1-\alpha} t_1$ с любым $c > 0$. Если $x = \varphi(t)$ — решение включения (12), то для любого $c > 0$ функция $x = c\varphi(c^{\alpha-1} t)$ тоже является решением.

Включения (12) и $\dot{x} \in F_0(x)$, где $F_0(x) \equiv |x|^{-\alpha} F(x)$ — однородная функция нулевой степени, имеют в области $x \neq 0$ одни и те же траектории, но разные скорости движения по траекториям (теорема 3 § 9).

Однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x) \qquad (f(cx) \equiv c^{\alpha} f(x),\ c > 0) \tag{13}$$

при любом из доопределений а), б), в) § 4 также обладает указанными выше свойствами. Все поверхности разрыва однородной кусочно непрерывной функции $f(x)$ — конические с вершиной в начале координат.

Далее в п. 2 предполагается, что многозначная функция $F(x)$ удовлетворяет основным условиям п. 2 § 7 и что в (12) и (13) $\alpha \geqslant 0$.

Лемма 1. *Если включение $\dot{x} \in F(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $x(t) \equiv 0$, то существует такое $\delta_0 > 0$, что все решения с начальными условиями $|x(0)| \leqslant \delta_0$ при $t \to \infty$ стремятся к нулю равномерно.*

Доказательство. В противном случае для любого $\delta > 0$ найдутся такие решения $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$|x_k(0)| \leqslant \delta, \qquad |x_k(t_k)| > \eta(\delta) > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots; \quad t_k \to \infty.$$

Решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво, поэтому можно взять δ столь малым, что для всех решений с $|x(0)| \leqslant \delta$ имеем

$$|x(t)| \leqslant \epsilon \quad (0 \leqslant t < \infty), \qquad x(t) \to 0 \quad (t \to \infty), \tag{14}$$

и при некотором $\mu > 0$ для всех решений с $|x(0)| < \mu$ имеем $|x(t)| \leqslant \eta(\delta)$ при $0 \leqslant t < \infty$. Тогда для всех $x_k(t)$

$$|x_k(0)| \leqslant \delta, \quad \mu \leqslant |x_k(t)| \leqslant \epsilon \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

так как в случае $|x_k(t^*)| < \mu$, $t^* \leqslant t_k$ для решения $z(t) = x_k(t + t^*)$ выполнялись бы неравенства $|z(0)| < \mu$, $|z(t_k - t^*)| > \eta(\delta)$, что противоречит выбору μ. Из последовательности отрезков решений (15) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, из нее — новую подпоследовательность, сходящуюся при $0 \leqslant t \leqslant t_2$, и т.д. Предельная функция $x(t)$ — решение, для которого

$$|x(0)| \leqslant \delta, \qquad \mu \leqslant |x(t)| \leqslant \epsilon \quad (0 \leqslant t < \infty).$$

Это противоречит (14).

Лемма 2. *Стремление всех решений включения* (12) *к нулю при $t \to \infty$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция $x(t) \equiv 0$ была асимптотически устойчивым решением.*

Доказательство. *Необходимость* следует из определения асимптотической устойчивости в силу свойства однородности.

Докажем *достаточность.* Пусть все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$. Тогда функция $x \equiv 0$ — решение (она является пределом решений $x_k(t) \equiv x_0(t + k)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $x_0(t)$ — какое-нибудь решение).

Предположим, что решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво. Тогда найдутся такие $\epsilon > 0$ и последовательность решений $x_i(t)$, что

$$|x_i(0)| = \delta_i \to 0, \quad |x_i(t_i)| \geqslant \epsilon, \quad t_i > 0.$$

Пусть a_i — последняя из точек отрезка $[0; t_i]$, в которой $|x_i(a_i)| = \delta$, а b_i — первая после a_i точка, в которой $|x_i(b_i)| = \epsilon$. Тогда $y_i(t) = x_i(t + a_i)$ — решение, $z_i(t) = \delta_i^{-1} y_i(\delta_i^{1-\alpha} t)$ — тоже решение включения (1),

$$|z_i(0)| = 1, \quad |z_i(t_i^*)| \geqslant \delta_i^{-1}\epsilon \to \infty, \quad 1 \leqslant |z_i(t)| \leqslant \delta_i^{-1}\epsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant t_i^*),$$

$$t_i^* = \delta_i^{\alpha-1}(b_i - a_i).$$

Все решения с $|z(0)| = 1$ существуют при $0 \leqslant t < \infty$, так как по условию они стремятся к нулю при $t \to \infty$. По теореме 3 § 7 множество этих решений на любом отрезке

$0 \leqslant t \leqslant l$ компактно. Поэтому $t_i^* \to \infty$ $(i \to \infty)$. Из последовательности $\{z_i(t)\}$ выберем подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $0 \leqslant t \leqslant 1$, из нее — подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $0 \leqslant t \leqslant 2$, и т.д. Предельная функция $z(t)$ — решение, $|z(t)| \geqslant 1$ при $0 \leqslant t < \infty$. Это противоречит тому, что все решения стремятся к нулю.

Следовательно, предположение неверно, и решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво. Так как все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$, то решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Т е о р е м а 4 [144]. *Если нулевое решение включения* (12) *асимптотически устойчиво и* $0 \leqslant \alpha < 1$, *то существуют такие постоянные* c_0 *и* c_1, *что для каждого решения* $x(t)$ *с* $|x(t_0)| \leqslant a$ *имеем*

$$|x(t)| \leqslant c_0 a \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t^*), \qquad x(t) = 0 \quad (t_0 + t^* \leqslant t < \infty), \quad t^* = c_1 a^{1-\alpha}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 найдется такое $\tau > 0$, что для всех решений с $|x(0)| \leqslant \delta_0$ имеем $|x(t)| \leqslant \delta_0/2$ при $\tau \leqslant t < \infty$, а по теореме 3 § 7 $|x(t)| \leqslant c_0 \delta_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Если $x(t)$ — решение с $|x(0)| \leqslant a$, то при $c = \delta_0 a^{-1}$ функция $x_0(t) = cx(c^{\alpha-1}t)$ — тоже решение, $|x_0(0)| \leqslant \delta_0$, поэтому

$$|x_0(t)| \leqslant \delta_0/2 \quad (\tau \leqslant t < \infty), \qquad |x_0(t)| \leqslant c_0 \delta_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau).$$

Возвращаясь от $x_0(t)$ к $x(t)$, получаем при $q = \delta_0^{\alpha-1} a^{1-\alpha}$

$$|x(t)| \leqslant c_0 |x(0)| \quad (0 \leqslant t \leqslant q\tau), \qquad |x(t)| \leqslant |x(0)|/2 \quad (q\tau \leqslant t < \infty). \tag{17}$$

Так как замена t на t + const переводит решение в решение, то из (17) следует, что если $|x(t_i)| \leqslant a_i$, то

$$|x(t)| \leqslant |x(t_i)|/2 \quad (t_i + q_i\tau \leqslant t < \infty; \qquad q_i = \delta_0^{\alpha-1} a_i^{1-\alpha}). \tag{18}$$

Для решения $x(t)$ с $|x(t_0)| \leqslant a$ возьмем $a_i = 2^{-i}a$, $t_{i+1} = t_i + q_i\tau$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда из (18) следует $q_i = (2^{-i}\delta_0^{-1}a)^{1-\alpha}$,

$$|x(t)| \leqslant 2^{-i} |x(t_0)| \quad (t_i \leqslant t < \infty, \quad i \geqslant 1). \tag{19}$$

Так как $\alpha < 1$, то

$$t_i - t_0 = (q_0 + q_1 + \ldots + q_{i-1})\tau \leqslant c_1 a^{1-\alpha}.$$

При $t \geqslant t_0 + c_1 a^{1-\alpha}$ неравенство (19) выполнено для всех i, т.е. $x(t) = 0$ при этих t.

З а м е ч а н и е. Все сказанное в доказательстве вплоть до оценки (19) справедливо при всех $\alpha \geqslant 0$. В случае $\alpha = 1$ имеем $q_i = 1$, $t_i = t_0 + i\tau$, и из (19) следует

$$|x(t)| \leqslant c_2 e^{-\gamma(t-t_0)} |x(t_0)| \quad (t_0 \leqslant t < \infty; \quad \gamma > 0). \tag{20}$$

Подобная оценка имеется в [179], [180].

В случае $\alpha > 1$ из (19) можно получить [144] оценку

$$|x(t)| \leqslant \min\{c_0 |x(t_0)|; \ c_1(t-t_0)^\beta\} \left(t_0 \leqslant t < \infty; \quad \beta = -\frac{1}{\alpha-1}\right).$$

Рассмотрим вопрос о сохранении асимптотической устойчивости нулевого решения однородного дифференциального включения при малых возмущениях, не нарушающих его однородности. При этом допускаются малые изменения и аргумента, и функции, как в п. 1 § 7. Через x^ϵ и M^ϵ обозначаются ϵ-окрестности точки x и множества M. Для однородной функции $F(x)$ степени α и чисел $p > 0$, $q > 0$ пусть

$$F_{pq}(x) = [\text{co}\, F(x^{p|x|})]^{q|x|^\alpha}. \tag{21}$$

Функция F_{pq} — однородная функция той же степени α. Если F удовлетворяет основным условиям, то F_{pq} — тоже.

Т е о р е м а 5. *Если нулевое решение включения* (12) *асимптотически устойчиво и* $\alpha \geqslant 0$, *то при достаточно малых* p *и* q *нулевое решение включения*

$$\dot{x} \in F_{pq}(x) \tag{22}$$

тоже асимптотически устойчиво. При этом постоянные c_0, c_1, c_2, γ *в оценках* (16) *и*

(20) *для решений включения* (22) *можно взять сколь угодно мало отличающимися от значений этих постоянных для включения* (12), *если* p *и* q *достаточно малы и* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $0 < \epsilon \leqslant 1/2$, постоянные c_0, c_1 те же, что в (16) для включения (12), $0 \leqslant \alpha < 1$. В силу следствия 2 теоремы 1 § 8 найдется такое $\delta > 0$, что при $0 \leqslant t \leqslant c_1$ все решения включения $\dot{x} \in F^*(x)$ с $|x(0)| \leqslant 1$ отличаются меньше, чем на ϵ, от решений включения (12) с теми же начальными условиями, если только $d(F^*, F) < \delta(\epsilon)$. Тогда они содержатся в шаре $|x| \leqslant c_0 + \epsilon$ при $0 \leqslant t \leqslant c_2$. При достаточно малых p и q неравенство $d_D(F_{pq}, F) < \delta(\epsilon)$ выполнено для области $D(|x| \leqslant \leqslant c_0 + 2\epsilon)$. Тогда для решений включения (22) с $|x(0)| \leqslant 1$ имеем

$$|x(t)| \leqslant c_0 + \epsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant c_1), \qquad |x(c_1)| \leqslant \epsilon. \tag{23}$$

Так как включение (22) однородно, то с помощью приемов, использованных при выводе неравенств (18) и (19), получаем из (23) для $i = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &|x(t)| \leqslant c_0^* \epsilon^i \quad (d_{i-1} \leqslant t \leqslant d_i), \\ &|x(d_i)| \leqslant \epsilon^{i+1}, \qquad d_i = d_{i-1} + c_1 \epsilon^{i(1-\alpha)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $c_0^* = c_0 + \epsilon$, $d_0 = c_1$. Так как $d_i \to d^* = c_1 + O(\epsilon)$, то $x(d^*) = 0$. Вследствие однородности включения (22) отсюда следует утверждение теоремы.

Если $\alpha > 1$, то с помощью леммы 1 получим для решений включения (12) с $|x(0)| \leqslant \leqslant 1$ оценку $|x(c_1)| \leqslant \epsilon/2$ при некотором $c_1 > 0$. Как в случае $\alpha < 1$, выводим для решений включения (22) неравенства (23) и (24). Из (24) с $d^* = \infty$ следует асимптотическая устойчивость нулевого решения.

Пусть $\alpha = 1$ и для решений включения (12) имеется оценка (20). Для любого $\epsilon > 0$ и $\beta \in (0, \gamma)$ возьмем такое $s > 0$, что $c_2 + \epsilon \leqslant e^{(\gamma - \beta)s}$. Как и в начале доказательства, показывается, что при достаточно малых p и q все решения включения (22) с начальными условиями $|x(0)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant s$ отличаются от некоторых решений включения (12) с $|x(0)| \leqslant 1$ меньше, чем на $\epsilon e^{-\gamma t}$, и поэтому с учетом (20) удовлетворяют неравенству $|x(t)| \leqslant (c_2 + \epsilon) e^{-\gamma t}$ $(0 \leqslant t \leqslant s)$. Беря за начальные условия $x(s)$, $x(2s)$, ... и применяя полученную оценку, находим

$$|x(t)| \leqslant (c_2 + \epsilon)^i e^{-\gamma t} \qquad ((i-1)s \leqslant t \leqslant is; \quad i = 1, 2, \ldots).$$

В силу выбора s правая часть не больше $(c_2 + \epsilon) e^{-\beta t}$. Теорема доказана.

В случае $\alpha = 1$ эта теорема доказана в [180].

Ряд результатов об устойчивости однородных дифференциальных включений с возмущениями и без них получен в [181] на основе принципа отсутствия ограниченных решений.

Следующая теорема дает условие устойчивости однородного ($\alpha = 0$) дифференциального включения с кусочно постоянной правой частью. Ее можно применять и к дифференциальным уравнениям с кусочно постоянной правой частью при доопределении а) или в) § 4.

Пусть куски конических гиперповерхностей S_p^m (m — размерность, p — номер куска) делят пространство R^n на конические области S_p^n с вершиной $x = 0$. Граница каждого куска S_p^m состоит из кусков гиперповерхностей меньших размерностей и не причисляется к S_p^m.

Теорема 6. *Пусть многозначная функция* $F(x)$ *удовлетворяет основным условиям и в каждой из областей* S_p^n *и на каждом куске* S_p^m *не зависит от* x, *т.е.* $F(x) = F_p^m$ *при* $x \in S_p^m$, $m = 1, \ldots, n$; $p = 1, \ldots, p_m$. *Пусть решения включения* $\dot{x} \in F(x)$ *не могут бесконечное число раз переходить из одного* S_p^m *в другое* $(1 \leqslant m \leqslant n)$. *Для того, чтобы функция* $x(t) \equiv 0$ *была асимптотически устойчивым решением, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* S_p^m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ *ни один вектор из* F_p^m *не лежал в* S_p^m *или на его границе* ∂S_p^m.

Доказательство. *Необходимость.* Если $v \neq 0$, $v \in F_p^m$ и $v \in S_p^m$ или $v \in S_q^l \subset \subset \partial S_p^m$, то $x = vt$ — решение (в случае $v \in S_q^l \subset \partial S_p^m$ имеем $v \in F_p^m \subset F_q^l$ вследствие

β-непрерывности функции F). Если $v = 0 \in F_p^m$, то для любого $x_0 \in S_p^m$ функция $x(t) \equiv x_0$ — решение. В этих случаях точка $x = 0$ не является асимптотически устойчивой.

Достаточность. Пусть решение $x(t)$ не входит в точку $x = 0$ при конечном t. Тогда при $t_1 < t < \infty$ оно остается в некотором S_p^m и

$$\frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} = \frac{1}{t - t_1} \int_{t_1}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau = y(t), \qquad |y(t)| \leqslant c. \tag{25}$$

Так как $\dot{x}(\tau) \in F_p^m$, множество F_p^m замкнуто и выпукло, то по лемме 12 §5 $y(t) \in F_p^m$ при $t_1 < t < \infty$. С другой стороны, $x(t) \in S_p^m$, S_p^m — коническое множество с вершиной 0, следовательно,

$$\frac{x(t)}{t - t_1} \in S_p^m, \quad \rho(y(t), S_p^m) \leqslant \rho\left(y(t), \frac{x(t)}{t - t_1}\right) = \frac{|x(t_1)|}{t - t_1} \to 0$$

при $t \to \infty$. Поэтому любая из предельных точек для $y(t)$ при $t \to \infty$ принадлежит и F_p^m, и $\overline{S_p^m}$. Это противоречит условию. Значит, предположение неверно, и каждое решение входит в точку $x = 0$ при конечном t.

Выйти из точки $x = 0$ решение не может, так как тогда $x(t_1) = 0$, $x(t) \in S_p^m$ $(t_1 < t < t_2)$ и в силу (25) $y(t) \in S_p^m$, $y(t) \in F_p^m$. Это невозможно, так как $F_p^m \cap S_p^m = \phi$.

Поэтому каждое решение входит в точку $x = 0$ и остается там. По лемме 2 $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое решение.

З а м е ч а н и е. Если решения могут переходить бесконечно много раз из одного множества S_p^m в другое, то утверждение о достаточности неверно. Пример: система (23) из § 10.

В случае, когда решения совершают бесконечно много переходов, устойчивость надо исследовать другими методами, например, с помощью функций Ляпунова, частотного метода ([5], гл. 3) или метода точечных отображений ([3], гл. 2, § 2). Изложим кратко последний метод в предположении правой единственности решений. Он может применяться не только к однородным, но и к другим уравнениям.

Пусть в окрестности точки $x = 0$ решения пересекают какую-либо поверхность P бесконечно много раз в одном направлении и такие пересечения происходят в каждой точки поверхности. Траектория, выходящая из любой точки $x \in P$, пересекает поверхность P следующий раз в точке $T^1 x$. Так как из правой единственности следует правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий, то точка $T^1 x$ непрерывно зависит от точки x, т.е. $T^1 x$ — непрерывное отображение поверхности P в себя.

Если отображение T^1 имеет неподвижную точку $a \in P$, т.е. $T^1 a = a$, то или a — стационарная точка, т.е. положение равновесия (если $x(t) \equiv a$ — решение), или решение, проходящее через точку a, — периодическое.

Если удается доказать, что для любой точки $x \in P$, достаточно близкой к точке 0, последовательность

$$x,\ T^1 x,\ T^2 x = T^1(T^1 x), \quad T^3 x = T^1(T^2 x), \ldots$$

сходится к 0, то после этого обычно легко доказывается асимптотическая устойчивость нулевого решения.

Если данное дифференциальное уравнение или включение однородно, то в качестве P берут полуплоскость или плоскость, проходящую через начало координат или коническую поверхность с вершиной $x = 0$. Тогда первоначальная n-мерная задача сводится к исследованию отображения T^1 $(n - 1)$-мерной поверхности P, а затем, в силу однородности, к исследованию отображения некоторой $(n - 2)$-мерной поверхности (при $n = 3$ — линии).

Примеры применения метода точечных отображений к разрывным системам имеются, например, в [1] (гл. 8).

П р и м е р. Исследовать, устойчиво ли нулевое решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\,\mathrm{sgn}\, x - 6\,\mathrm{sgn}\, y - 2\,\mathrm{sgn}\, z, \\ \dot{y} &= 6\,\mathrm{sgn}\, x - 4\,\mathrm{sgn}\, z, \\ \dot{z} &= 12\,\mathrm{sgn}\, x + \mathrm{sgn}\, y - 9\,\mathrm{sgn}\, z. \end{aligned} \tag{26}$$

Во всех координатных октантах

$$\operatorname{sgn}\dot{x} = -\operatorname{sgn} y, \quad \operatorname{sgn}\dot{y} = \operatorname{sgn}\dot{z} = \operatorname{sgn} x.$$

Поэтому траектории совершают обороты вокруг оси Ox_3 и много раз попадают на плоскость $x = 0$, пересекая ее при $y > 0$ в одном направлении, а при $y < 0$ – в другом. Построим отображение T^1 полуплоскости $x = 0$, $y > 0$ в себя, определяемое движением по траекториям системы.

Решение с начальными условиями $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $z_0 < 0$ проходит сначала в области $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$. В этой области $\dot{x} = -6$, $\dot{y} = -2$, $\dot{z} = -2$ и решение имеет вид

$$x = -6t, \quad y = y_0 - 2t, \quad z = z_0 - 2t.$$

Оно пересекает плоскость $y = 0$ в момент $t^* = y_0/2$ в точке

$$x^* = -3y_0 < 0, \quad y^* = 0, \quad z^* = z_0 - y_0 < 0.$$

Далее, оно проходит в области $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$, где $\dot{x} = 6$, $\dot{y} = -2$, $\dot{z} = -4$, и имеет вид

$$x = -3y_0 + 6(t - t^*), \quad y = -2(t - t^*), \quad z = z_0 - y_0 - 4(t - t^*).$$

Оно пересекает плоскость $x = 0$ в момент $t_1 = t^* + y_0/2$ в точке

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -y_0 < 0, \quad z_1 = z_0 - 3y_0 < 0.$$

Аналогично рассматриваются случаи $0 < z_0 \leqslant 2y_0$ (в этом и следующем случаях надо учесть, что траектория пересекает плоскость $z = 0$), $2y_0 < z_0 < 13y_0$ и $z_0 \geqslant 13y_0$. Получаем, что траектория из точки $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, z_0 возвращается на плоскость $x = 0$ первый раз в точке x_1, y_1, z_1, где $x_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
&y_1 = -y_0, \quad z_1 = z_0 - 3y_0 \qquad (z_0 \leqslant 0),\\
&y_1 = -y_0 + \frac{z_0}{3}, \quad z_1 = \frac{7}{6} z_0 - 3y_0 \qquad (0 \leqslant z_0 \leqslant 2y_0),\\
&y_1 = \frac{17y_0 - 14z_0}{33}, \quad z_1 = \frac{2z_0 - 26y_0}{33} \qquad (2y_0 \leqslant z_0 \leqslant 13y_0),\\
&y_1 = -5y_0, \quad z_1 = z_0 - 13y_0 \qquad (z_0 \geqslant 13y_0).
\end{aligned} \tag{27}$$

Это – отображение полуплоскости P_0 $(x = 0, y > 0)$ на полуплоскость P_1 $(x = 0, y < 0)$. Далее, траектория из точки $(x_1, y_1, z_1) \in P_1$ через область $x > 0$ идет в точку $(x_2, y_2, z_2) \in P_0$. Так как система (26) не меняется от одновременной замены x, y, z соответственно на $-x$, $-y$, $-z$, то это отображение выражается формулами, аналогичными (27), с заменой y_0, z_0 соответственно на $-y_1$, $-z_1$, а y_1, z_1 – на $-y_2$, $-z_2$. Следовательно, вместо отображения T^1 полуплоскости P_0 в P_0 в данном случае можно рассмотреть отображение T_*, получаемое из (27) заменой y_1 и z_1 соответственно на $-y_1$ и $-z_1$; при этом $T^1 = (T_*)^2$.

Пользуясь однородностью отображения T_*, сводим его к отображению прямой в себя. Полагая $z_0 = ky_0$, $z_1 = f(k)y_1$, получаем из (27) (после замены y_1, z_1 соответственно на $-y_1$, $-z_1$) $y_1 = \varphi(k)y_0$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(k) = 1, \quad f(k) = 3 - k \qquad (k \leqslant 0),\\
&\varphi(k) = 1 - \frac{k}{3}, \quad f(k) = \frac{18 - 7k}{6 - 2k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2),\\
&\varphi(k) = \frac{14k - 17}{33}, \quad f(k) = \frac{26 - 2k}{14k - 17} \qquad (2 \leqslant k \leqslant 13),\\
&\varphi(k) = 5, \quad f(k) = \frac{13 - k}{5} \qquad (k \geqslant 13).
\end{aligned}$$

Чтобы изучить итерации $(T_*)^i$, $i = 1, 2, \ldots$, преобразования T_*, рассмотрим для любого k_0 последовательность чисел $k_i = f(k_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots$ функция $f(k)$ — непрерывная, убывающая. Если k_0 лежит вне отрезка $0 \leqslant k \leqslant 13$, то после каждых двух итераций расстояние от точки k_i до этого отрезка уменьшается более чем в 5 раз, и после конечного числа итераций будем иметь

$$0 \leqslant k_j \leqslant 13, \quad 0 \leqslant k_{j+1} \leqslant 3, \quad 0{,}8 \leqslant k_i \leqslant 3 \qquad (j + 2 \leqslant i < \infty).$$

Тогда $\varphi(k_i) < 0{,}8$, значит, $y_i \to 0$, $z_i \to 0$ при $i \to \infty$. Следовательно, все решения системы (26) стремятся к 0 при $t \to \infty$ (при этом учитывается, что при движении от точки $(0, y_i, z_i)$ до точки $(0, y_{i+1}, z_{i+1})$ траектория проходит в области $|x| + |y| + |z| \leqslant \leqslant \mathrm{const}\,(|y_i| + |z_i|)$ и что на оси Oz в силу доопределения а) § 4 имеются решения, удовлетворяющие уравнению $\dot{z} = -\dfrac{5}{4}\operatorname{sgn} z$). По лемме 2 нулевое решение асимптотически устойчиво.

Покажем, что для системы (26) не существует функции Ляпунова вида

$$v = \alpha_1 |x| + \alpha_2 |y| + \alpha_1 |z| + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$

где $\alpha_i > |\beta_i|$, $i = 1, 2, 3$, иначе функция v не была бы положительно определенной.

Решение из точки $(0, y_0, z_0)$, где $z_0 > 13y_0 > 0$, попадает на плоскость $x = 0$ в точку $(0, -5y_0, z_0 - 13y_0)$, а затем в точку $(0, 5y_0, z_0 + 2y_0)$. В последней из этих точек значение любой функции v указанного вида больше, чем в точке $(0, y_0, z_0)$. Поэтому такая функция не может служить функцией Ляпунова.

С помощью методов, изложенных в [182], для системы (26) можно построить функцию Ляпунова

$$v = |x| + 2|y| + 10|z - 2y|.$$

К однородным дифференциальным включениям степени 1 сводится важный для приложений класс кусочно линейных систем — систем с переменной структурой [6]. Фазовое пространство такой системы делится плоскостями переключения, проходящими через начало координат, на области, в каждой из которых система линейна, но с разными коэффициентами в разных областях. Одним из употребительных методов исследования устойчивости таких систем является следующий. Если 1) каждая траектория попадает на плоскость переключения P или неограниченно приближается к ней; 2) с плоскости P траектории не могут сойти ни в одну, ни в другую сторону; 3) на этой плоскости все решения стремятся к нулю при $t \to \infty$, то решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво. Подробнее см. [6] (гл. 2 и 3), [7] (гл. 8).

Устойчивость систем автоматического управления исследовалась во многих работах, которые невозможно здесь перечислить. Одной из последних обзорных статей является [183].

3. Для исследования устойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений и включений, близких к однородным, можно заменить данное уравнение или включение "первым приближением" — уравнением или включением с однородной правой частью, см. [180] для случая $\alpha = 1$ и [144]. Эти результаты излагаются ниже в более общей форме.

В п. 3 везде предполагается, что многозначные функции $F(x)$ и $F(t, x)$ удовлетворяют основным условиям п. 2 § 7 и что $\alpha \geqslant 0$.

Для каждой точки $x \in R^n$ определим "полярные координаты": число $\rho = |x|$ и вектор $\omega = x/|x|$ длины 1. Тогда $x = \rho\omega$. Для $x = 0$ вектор ω произвольный или, лучше сказать, многозначный и принимает все значения с $|\omega| = 1$.

Пусть многозначная функция $F(x)$ $(|x| \leqslant \rho_1)$ удовлетворяет условиям: $|F(x)| \leqslant \leqslant m_1 |x|^\alpha$; существует такая последовательность $x_j \to 0$, что $|F(x_j)| \geqslant m_0 |x_j|^\alpha$, $m_0 > 0$. Выделим *однородную главную часть* $H(x)$ функции $F(x)$. Для каждого ω, $|\omega| = 1$, рассмотрим всевозможные последовательности $x_i \to 0$, такие, что $x_i \neq 0$, $\omega_i = x_i/|x_i| \to \omega$, и последовательности $y_i \in |x_i|^{-\alpha} F(x_i)$. Пусть $H(\omega) = \mathrm{co}\, H^0(\omega)$, где $H^0(\omega)$ — множество предельных точек для всех таких последовательностей $\{y_i\}$. Для каждого $x \neq 0$ пусть $H(x) = |x|^\alpha H(\omega)$, $\omega = x/|x|$; пусть $H(0) = 0$, если $\alpha > 0$, и $H(0) = \mathrm{co}\, H^0(0)$, где $H^0(0)$ — объединение всех множеств $H(\omega)$ $(|\omega| = 1)$ и множества $F(0)$, если $\alpha = 0$.

Тогда функция $H(x)$ — однородная степени α, $|H(x)| \leqslant m_1|x|^\alpha$. График функции $H^0(\omega)$ есть множество всех предельных точек последовательностей (ω_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots$ Поэтому он замкнут и функции $H^0(\omega)$, $H(\omega)$ и $H(x)$ β-непрерывны (леммы 14 и 16 § 5).

П р и м е р. Пусть круг $x_1^2 + x_2^2 \leqslant \rho_1^2$ разделен гладкими кривыми на конечное число секторов и в каждом секторе S_i функция $F(x)$, где $x = (x_1, x_2)$, однозначна и непрерывна вплоть до границы. На границе L_j двух секторов пусть $F(x)$ — выпуклый компакт, содержащий предельные значения $F(x')$ при $x' \to x$. Пусть $\lim F(x) = F_i$ при $x \in S_i$, $x \to 0$; $\alpha(F(x), F_j^*) \to 0$ при $x \in L_j$, $x \to 0$; обозначение $\alpha(A, B)$ см. в п. 3 § 5.

Тогда $H(x)$ — кусочно постоянная функция, равная F_i в каждой угловой области, границы которой — лучи, касающиеся в точке 0 границ сектора S_i, и равная F_j^* на луче, касающемся линии L_j в точке 0. Если одного луча касается в точке 0 несколько линий $L_j, L_k, \ldots$, то на этом луче $H(x)$ — выпуклое замыкание объединения множеств F_j^*, $F_k^*, \ldots$ (В последнем случае было бы ошибкой перейти от данного неоднородного дифференциального уравнения с разрывной правой частью к однородному дифференциальному уравнению, а затем к дифференциальному включению - тогда могут потеряться предельные значения правой части уравнения в бесконечно сужающихся секторах между такими линиями L_j, L_k.)

Пусть многозначная функция $F(t, x)$ $(|x| \leqslant \rho_1, a \leqslant t \leqslant b)$ удовлетворяет условиям $|F(t, x)| \leqslant m_1|x|^\alpha$ и для каждого $t \in [a, b]$ существует такая последовательность $x_j \to 0$, что $|F(t, x_j)| \geqslant m_0|x_j|^\alpha$. Пусть $H_s^0(\omega)$ — множество предельных точек для всевозможных последовательностей $y_i \in |x_i|^{-\alpha}F(t_i, x_i)$, где $t_i \to s$, $x_i \to 0$, $x_i \neq 0$, $x_i/|x_i| = \omega_i \to \omega$. Тогда график функции $H_s^0(\omega)$ $(a \leqslant s \leqslant b, |\omega| = 1)$ замкнут. Далее,

$$H_s(\omega) = \mathrm{co}\, H_s^0(\omega), \quad H_s(x) = |x|^\alpha H_s(\omega), \ \omega = x/|x|;$$

$H_s(0) = 0$, если $\alpha > 0$, а если $\alpha = 0$, то $H_s(0)$ — выпуклое замыкание множества предельных точек всех последовательностей $y_i \in F(t_i, x_i)$, $t_i \to s, x_i \to 0$. Функция $H_s(x)$ β-непрерывна как по s, x, так и по x при любом $s = \mathrm{const}$.

Пусть функция $H(x)$ — однородная степени α. Будем писать $d_\alpha(F, H) \leqslant \delta$ при $|x| \leqslant \rho_0$, если для каждого $\rho \in (0, \rho_0]$ график функции $\rho^{-\alpha}F(\rho\omega)$, рассматриваемой как функция от ω, $|\omega| = 1$, лежит в δ-окрестности графика функции $H(\omega)$, и $F(0) \subset \subset H(0)^\delta$. Будем говорить, что многозначная функция $F(x)$ близка к однородной функции $H(x)$ степени α, если $d_\alpha(F, H) \leqslant \delta(\rho)$ при $|x| \leqslant \rho$, где $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Многозначная функция $F(t, x)$ при $a \leqslant t < b$ близка к однородной функции $H_s(x)$ степени α, зависящей от параметра $s \in [a, b)$, если для каждого $s \in [a, b)$ и каждого $\delta > 0$ найдутся такие $l > 0$ и $\eta > 0$, что при каждом фиксированном $t \in (s - l, s + l)$, $t \in [a, b)$ имеем

$$d_\alpha(F, H_s) \leqslant \delta \qquad \text{при } |x| \leqslant \eta. \tag{28}$$

Л е м м а 3. *Если $H(x)$ — однородная главная часть многозначной функции $F(x)$, то функция $F(x)$ близка к однородной функции $H(x)$. То же справедливо для функции $F(t, x)$ и построенной для нее однородной функции $H_s(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует такое $\delta > 0$, что для некоторых сколь угодно малых $\rho > 0$ график функции $\rho^{-\alpha}F(\rho\omega)$ не лежит в δ-окрестности графика G функции $H(\omega)$. Тогда найдутся такие последовательности $\rho_i \to 0$, ω_i $(|\omega_i| = 1)$, $y_i \in \rho_i^{-\alpha}F(\rho_i\omega_i)$, что расстояние

$$\rho((\omega_i, y_i), G) \geqslant \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Так как $|y_i| \leqslant m_1$, то для некоторой подпоследовательности $\{i_k\}$ имеем $y_{i_k} \to y$, $\omega_{i_k} \to \omega$. Но тогда $y \in H(\omega)$ по определению множества $H(\omega)$, т.е. $(\omega, y) \in G$. Это противоречит (29). Отсюда следует первое утверждение леммы. Второе доказывается аналогично.

Следующие две теоремы позволяют исследовать "по первому приближению" устойчивость как автономных, так и некоторых неавтономных дифференциальных включений. Предполагается, что правые части всех рассматриваемых дифференциальных включений удовлетворяют основным условиям п. 2 § 7.

Т е о р е м а 7. *Пусть функция* $H(x)$ — *однородная степени* $\alpha \geqslant 0$ *и существует такая функция* $\delta(\rho) \to 0$ $(\rho \to 0)$, *что для каждого фиксированного* $t \in [t_1, \infty)$ *и* $\rho \leqslant \rho_0$

$$d_\alpha(F(t,x), H(x)) \leqslant \delta(\rho) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \rho.$$

Если включение

$$\dot{x} \in H(x) \tag{30}$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение, то это же справедливо для включения

$$\dot{x} \in F(t,x). \tag{31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что для всех указанных t и ρ график функции $\rho^{-\alpha}F(t, \rho\omega)$, рассматриваемой как функция от ω, $|\omega| = 1$, лежит в δ-окрестности графика функции $H(\omega) \equiv \rho^{-\alpha}H(\rho\omega)$; $\delta = \delta(\rho)$. Тогда $F(t, \rho\omega) \subset$ $\subset [H(\rho\omega^\delta)]^{\rho^\alpha\delta}$, т.е.

$$F(t,x) \subset [H(x^{\rho\delta})]^{\rho^\alpha\delta} \subset H_{pq}(x), \quad \rho = |x|, \tag{32}$$

где $p = q = \delta = \delta(\rho)$, а обозначение H_{pq} см. в (21).

Так как нулевое решение включения (30) асимптотически устойчиво, то по теореме 5 при достаточно малых p и q $(p, q \leqslant p_1)$ то же справедливо для включения

$$\dot{x} \in H_{pq}(x). \tag{33}$$

В силу теоремы 4 и замечания для решений включения (33) с $p = q = p_1$ имеем

$$|x(t)| \leqslant c_0|x(t_0)| \quad (t_0 \leqslant t < \infty), \qquad x(t) \to 0 \quad (t \to \infty), \tag{34}$$

при $\alpha = 1$ число c_0 заменяется на c_2 из (20).

Пусть число $\rho_1 > 0$ так мало, что при всех $\rho \in (0, \rho_1]$ имеем $\delta(2c_0\rho) \leqslant p_1$. Тогда в области $|x| \leqslant 2c_0\rho$ справедливо (32) с $p = q = p_1$, значит, в этой области решения включения (31) являются решениями включения (33). Поэтому решения включения (31) с $|x(t_0)| = \rho \leqslant \rho_1$ остаются в области $|x| \leqslant c_0\rho$. Тогда для них справедливо (34), т.е. нулевое решение включения (31) асимптотически устойчиво.

С л е д с т в и е. *Если функция* $F(x)$ *близка к однородной функции* $H(x)$ *и дифференциальное включение* (30) *имеет асимптотически устойчивое нулевое решение, то включение* $\dot{x} \in F(x)$ *также имеет асимптотически устойчивое нулевое решение.*

В случае $\alpha = 1$ подобное утверждение доказано в [180].

Следующая теорема утверждает, что в случае $0 \leqslant \alpha < 1$ для исследования устойчивости неавтономного дифференциального включения можно использовать метод "замораживания коэффициентов".

Т е о р е м а 8. *Пусть функция* $F(t,x)$ *при* $t_1 \leqslant t < \infty$ *близка к однородной функции* $H_s(x)$ *степени* α, $0 \leqslant \alpha < 1$. *Если при каждом значении параметра* $s \in [t_1, \infty)$ *включение*

$$\dot{x} \in H_s(x) \tag{35}$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение, то включение (31) *также имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Каждое решение включения* (31) *с достаточно малым* $|x(t_0)|$ *достигает точки* $x = 0$ *за конечное время.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t_0 \in [t_1, \infty)$. Возьмем $s = t_0$. Нулевое решение включения (35) асимптотически устойчиво. По теореме 5 существует такое $\delta > 0$, что при $p = q = \delta$ нулевое решение включения

$$\dot{x} \in H_{s,pq}(x) \tag{36}$$

тоже асимптотически устойчиво (функция $H_{s,pq}$ определяется через функцию H_s подобно (21)). По теореме 4 решения включения (36) с $|x(t_0)| = a$, a — любое, удовлетворяют соотношениям (16).

Так как функция $F(t, x)$ близка к однородной функции $H_s(x)$, то найдется такое $a_0 = a_0(\delta)$, что при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_0 + c_1 a_0^{1-\alpha}]$ и $\eta = 2c_0a_0$ (c_0 и c_1 те же, что в (16)) справедливо неравенство (28). Из него следует соотношение (32) в цилиндре $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + c_1a_0^{1-\alpha}$, $|x| \leqslant 2c_0a_0$, но с функцией $H_{s,pq}$ вместо H_{pq}. Тогда все решения включения (31), проходящие в этом цилиндре, являются решениями включения (36). Значит, решения включения (31) с $|x(t_0)| = a$, $a \leqslant a_0$, при $t \geqslant t_0$ являются решениями включения (36) и в силу (16) выходят из этого цилиндра только в точке $t = t_0 + c_1 a_0^{1-\alpha}$, $x = 0$.

Далее, решения включения (31) не сходят с прямой $x = 0$, так как в противном случае аналогичное рассуждение для цилиндра, построенного вблизи точки схода, приводит к противоречию с (16).

В [184] рассматривается устойчивость нулевого решения однородного дифференциального включения степени $\alpha = 1$ по отношению к постоянно действующим возмущениям. Если вектор-функция $g(t)$ абсолютно непрерывна, то включение

$$\dot{x} \in F(x) + g'(t) \tag{37}$$

равносильно включению

$$\dot{y} \in F(y + g(t)) \qquad (y = x - g(t)). \tag{38}$$

Включение (38) имеет смысл не только для абсолютно непрерывных функций $g(t)$, но и для некоторых других. В [184] переход к (38) служит для определения решения включения (37) и исследования его свойств в случае, когда функция $g(t)$ — функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале. Если функция $g(t)$ имеет скачки, то (37) — дифференциальное включение с импульсными возмущениями.

Следующая теорема относится к случаю, когда для данного дифференциального уравнения или включения решения естественным образом разделяются на решения, достигающие l-мерной гиперповерхности $S \subset R^n$ за конечное время, и решения, идущие по этой гиперповерхности. В частности, сюда относится случай, когда S является пересечением поверхностей разрыва правой части дифференциального уравнения или включения (но β-непрерывность сохраняется и на S), и исследуется устойчивость движений в скользящем режиме по поверхности S по отношению к возмущениям, выводящим с S.

Рассмотрим включение (31) при $t \in [t_1, \infty)$, $x \in G$, где $G \subset R^n$ — окрестность гиперповерхности S. Пусть координаты $x_1, \ldots, x_n$ выбраны так, что S— гиперплоскость $x_1 = \ldots = x_{n-l} = 0$. Обозначим $(x_1, \ldots, x_{n-l}) = y$, $(x_{n-l+1}, \ldots, x_n) = z$. Тогда $x = (y, z)$.

Пусть $G(t, y, z)$ и $H(t, y, z)$ — проекции множества $F(t, x)$ из (31) на подпространства y и z. Тогда каждое решение включения (31) есть решение системы

$$\dot{y} \in G(t, y, z), \quad \dot{z} \in H(t, y, z). \tag{39}$$

Обратное не всегда верно. Для лежащих на S решений $x(t) = (0, z(t))$ включения (31) функции $z(t)$ являются решениями включения

$$\dot{z} \in H_0(t, z) \quad (H_0(t, z) = F(t, x) \cap S \quad \text{при} \quad x = (0, z)). \tag{40}$$

Пусть $G_{sv}(y)$ — выпуклое замыкание множества всех предельных значений функции $G(t_i, r_i y_i, z_i)$ при $t_i \to s$, $z_i \to v$, $y_i \to y$, $r_i \to 0$. Тогда функция $G_{sv}(y)$ — однородная по y степени $\alpha = 0$.

Т е о р е м а 9. *Пусть $x_0(t) = (0, z_0(t))$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ — решение включения* (31). *Пусть для любых постоянных s, v $(s \in [t_0, \infty)$, $|v - z_0(s)| < \epsilon_0)$ включение $\dot{y} \in G_{sv}(y)$ имеет асимптотически устойчивое решение $y \equiv 0$, а решение $z_0(t)$ включения* (40) *устойчиво (или асимптотически устойчиво).*

Тогда решение $x_0(t)$ устойчиво (соответственно асимптотически устойчиво).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t) = (y(t), z(t))$ — решение включения (31), причем

$$|y(t_0)| < \eta, \quad |z(t_0) - z_0(t_0)| < \eta. \tag{41}$$

В замкнутой области $B(b)$ $(|y| \leqslant b, |z - z_0(t_0)| \leqslant b, t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + b)$ при некотором $b = b_0 > 0$ имеем $|H(t, y, z)| \leqslant m$, $|H_0(t, z)| \leqslant m$.

Методом, использованным при доказательстве леммы 3, показывается, что для любого $\delta > 0$ при достаточно малом $b = b(\delta) > 0$ в области $B(b)$ имеем

$$G(t, y, z) \subset G_{s,v;pq}(y), \tag{42}$$

где $s = t_0$, $v = z_0(t_0)$, $p = q = \delta$, а функция $G_{s,v;pq}(y)$ определяется через функцию $G_{sv}(y)$ подобно (21). По теореме 5 число δ можно взять столь малым, чтобы нулевое решение включения

$$\dot{y} \in G_{s,v;pq}(y) \tag{43}$$

было асимптотически устойчивым. Тогда для всех решений включения (43) по теореме 4 с $\alpha = 0$

$$|y(t)| \leqslant c_0 a \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + c_1 a), \qquad y(t) = 0 \quad (t \geqslant t_0 + c_1 a), \tag{44}$$

где $a = |y(t_0)|$. Пусть $\eta_0 > 0$ так мало, что

$$(c_0 + 1 + c_1 + mc_1)\eta_0 < b(\delta) < b_0. \tag{45}$$

Решение системы (39) с начальными условиями (41), где $\eta < \eta_0$, на некотором отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ проходит в области $B(b(\delta))$. Пусть $t_2 > t_0$ — первый момент выхода решения на границу этой области. Пока решение проходит в указанной области, его компонента $y(t)$ является решением включения (43), следовательно, удовлетворяет (44) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$, а $|\dot{z}| \leqslant m$. Поэтому при таких t

$$|y(t)| < c_0 \eta < b(\delta), \quad |z(t) - z_0(t_0)| < \eta + m(t - t_0). \tag{46}$$

Правая часть при $t - t_0 \leqslant c_1 \eta_0$ в силу (45) меньше $b(\delta)$, поэтому решение выходит из $B(b(\delta))$ лишь при $t_2 > t_0 + c_1\eta_0$, т.е. после того, как оно в силу (44) достигло плоскости S $(y = 0)$ в момент $t^* \leqslant t_0 + c_1\eta < t_2$ в точке $(0, z(t^*))$. В силу (46)

$$|z(t^*) - z_0(t_0)| < \eta + mc_1\eta. \tag{47}$$

При $t \geqslant t^*$ решение $(y(t), z(t))$ уже не сходит с S (доказывается такими же рассуждениями, как в конце доказательства теоремы 8).

Пусть $z^*(t)$ — решение включения (39) $(t \geqslant t_0)$, совпадающее с $z(t)$ при $t \geqslant t^*$. Так как $|H_0| \leqslant m$, то

$$|z^*(t_0) - z^*(t^*)| \leqslant m(t^* - t_0) \leqslant mc_1\eta.$$

Отсюда и из (47) получаем

$$|z^*(t_0) - z_0(t_0)| \leqslant \eta + 2mc_1\eta. \tag{48}$$

Так как решение $z_0(t)$ включения (40) по условию устойчиво, то из (48) следует

$$|z^*(t) - z_0(t)| < \epsilon \qquad (t_0 \leqslant t < \infty),$$

если η достаточно мало. Так как $z(t) = z^*(t)$ при $t \geqslant t^*$, а при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ имеем оценки (46), то для всех достаточно малых η решение $(y(t), z(t))$ при $t_0 \leqslant t < \infty$ отличается от решения $(0, z_0(t))$ меньше, чем на ϵ. Следовательно, решение $x_0(t) = (0, z_0(t))$ включения (31) устойчиво.

Если же решение $z_0(t)$ включения (40) асимптотически устойчиво, то, кроме уже доказанного, имеем $z^*(t) - z_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$, значит, $z(t) - z_0(t) \to 0$, и решение $x_0(t)$ асимптотически устойчиво.

Пример. Дать достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x}_i = b_i(t, x) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(t, x) \operatorname{sgn} x_j, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

где $n = k + l > k$, функции b_l и a_{ij} непрерывны, и используется доопределение а) §4.

Применяем теорему 9, взяв $y = (x_1, \ldots, x_k)^{\mathrm{T}}$, $z = (x_{k+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Обозначаем

$$\| a_{ij}(t, x) \|_{i,j=1,\ldots,k} = A_1, \quad \| a_{ij}(t, x) \|_{\substack{i=k+1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,k}} = A_2,$$

$$(b_1(t, x), \ldots, b_k(t, x))^{\mathrm{T}} = c(t, y, z), \quad (b_{k+1}(t, x), \ldots, b_n(t, x))^{\mathrm{T}} = d(t, y, z),$$

$(\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_k)^{\mathrm{T}} = \operatorname{sgn} y$. Система (49) принимает вид

$$\dot{y} = c(t, y, z) - A_1(t, y, z) \operatorname{sgn} y, \quad \dot{z} = d(t, y, z) - A_2(t, y, z) \operatorname{sgn} y, \tag{50}$$

аналогичный системе (39). Включение $\dot{y} \in G_{s,v}(y)$ из теоремы 9 здесь имеет вид

$$\dot{y} = c(s, 0, v) - A_1(s, 0, v) \operatorname{sgn} y \tag{51}$$

с доопределением а) § 4. Уравнение (51) есть векторная запись системы, аналогичной рассмотренной в замечании 2 к теореме 3; s и v — параметры. Пусть $a_{ij}(t, x)$ и $b_i(t, x)$ $(i, j = 1, \dots, k)$ при всех $t \geqslant t_0$, $x = (0, z)$, $|z| < \epsilon_0$, удовлетворяют одному из условий а) или б) указанного замечания. Тогда при любых $s \geqslant t_0$ и $|v| < \epsilon_0$ решение $y = 0$ уравнения (51) асимптотически устойчиво и, кроме того, $\det A_1 \neq 0$.

Уравнение движения по гиперплоскости $y = 0$ получается, если, как при доказательстве теоремы 3, заменить в (50) $\operatorname{sgn} y$ на вектор p, определить его из первого уравнения (50) при $\dot{y} = 0$ и подставить во второе. Получаем уравнение вида (40):

$$\dot{z} = H_0(t, z), \qquad H_0(t, z) = d - A_2 A_1^{-1} c \,|_{y = 0}. \tag{52}$$

Если нулевое решение уравнения (52) (с непрерывной правой частью) асимптотически устойчиво, а для уравнения (51) выполнено одно из указанных выше условий, то по теореме 9 нулевое решение системы (49) тоже асимптотически устойчиво.

В теореме 3 и замечаниях к ней даются лишь достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения систем (9) и (51). В случае постоянных коэффициентов необходимые и достаточные условия для системы (51) известны лишь при $k \leqslant 2$ (см. ниже в п. 3 § 20), а для системы (9) при $n \leqslant 3$ (см. в [182]). В случае $n = 3$ эти условия имеют весьма сложный вид. Достаточные условия для $n = 3$, которые в случае постоянных коэффициентов усиливают теорему 3, см. в [178].

ЛОКАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ

В этой главе изучаются особенности в расположении траекторий двумерных автономных систем с кусочно непрерывными правыми частями. Дается топологическая классификация особенностей на линиях и особенностей в точках. Указываются все типы грубых особых точек, лежащих на линии разрыва правых частей системы, особых точек первой степени негрубости и их бифуркации. Изучаются также особые точки, лежащие на пересечении линий разрыва.

§ 16. Линейные особенности

Здесь устанавливается топологическая классификация особенностей на линиях и даются аналитические условия принадлежности особенности на линии тому или иному классу. Дается также классификация относительно диффеоморфизмов.

1. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{1}$$

в конечной области G плоскости x_1, x_2. Систему (1) можно записать в векторной форме

$$\dot{x} = f(x) \qquad (x = (x_1, x_2) \in G). \tag{2}$$

Предполагается, что непрерывность правой части уравнения (2) и единственность решений могут нарушаться только на отдельных кусочно гладких линиях и в изолированных точках.

В тех случаях, когда решение, попавшее на линию разрыва, не может с нее сойти при возрастании t (или при убывании t), правая часть уравнения должна быть доопределена на этой линии, чтобы обеспечить существование решения при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$ и чтобы предел каждой равномерно сходящейся последовательности решений был решением. Вектор-функция $f^0(x)$, определяющая скорость движения по линии разрыва, должна быть, кроме изолированных точек, однозначна и непрерывна. При этих предположениях в областях единственности имеет место непрерывная зависимость решений от начальных условий.

Точка $x = a$ называется *стационарной,* если вектор-функция $x(t) \equiv a$ является решением. В точке $x = b$ *нарушается единственность,* если существуют два решения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию $x(t_0) = b$, но различные на сколь угодно малом интервале $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$. Если в стационарной точке нарушается единственность, то некоторые решения входят в эту точку (при возрастании или убывании t) за конечное время, а если не нарушается, то таких решений нет.

Области, все точки которых являются точками нарушения единственности, могут встречаться для уравнений и систем с недифференцируемыми правыми частями (пример в [13], стр. 31), а также для дифференциальных включений (пример: $\dot{x} = 1$, $|\dot{y}| \leqslant 1$). Такие случаи здесь не рассматриваются.

При этих предположениях можно выделить два типа топологически однородных областей:

1) не содержащие стационарных точек области, через каждую точку которых проходит единственная траектория;

2) области, состоящие только из стационарных точек, т.е. области, в которых $f(x) \equiv 0$.

Топологическая однородность области (или линии) означает, что у каждых двух ее точек a и b имеются такие окрестности V_a и V_b, для которых существует *топологическое* (т.е. взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное) *отображение* одной окрестности на другую, переводящее точку a в точку b и траектории в траектории; обратное отображение тоже переводит траектории в траектории.

По теореме 3 § 12 у каждой точки в области 1-го типа найдется окрестность, для которой существует топологическое отображение на прямоугольник, переводящее траектории в прямые, параллельные стороне прямоугольника. Поэтому область 1-го типа топологически однородна. Топологическая однородность области 2-го типа очевидна. Так как предполагается, что точки нарушения единственности не могут заполнять области, то других типов топологически однородных областей для рассматриваемого класса систем не существует.

Границы топологически однородных областей состоят из точек нарушения единственности и из стационарных точек. Для уравнений с кусочно непрерывными и кусочно гладкими правыми частями типичным является случай, когда такую границу можно разбить на конечное число топологически однородных линий.

Линейной особенностью называется максимальная топологически однородная линия, не проходящая внутри топологически однородной области.

Требование максимальности означает, что эта линия не является частью другой линии, обладающей теми же свойствами. Линия должна быть незамкнутой простой дугой $x = \varphi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ или замкнутой кривой. Отсутствие самопересечений следует из топологической однородности. Эта линия не должна проходить внутри топологически однородной области, иначе ее точки не будут топологически выделяться среди других точек области.

Не у каждой линейной особенности имеется полуокрестность (односторонняя окрестность), являющаяся топологически однородной областью. Например, пусть L — окружность, на которую снаружи и изнутри навертываются траектории. Среди них есть конечное число траекторий, в каждой точке которых нарушается единственность, т.е. которые являются линиями слияния траекторий. На других траекториях и на L единственность не нарушается. (Конкретный пример можно получить, сделав в системе $\dot{\eta} = (\sin\eta)^{1/3}$, $\dot{\xi} = 1$ замену $\xi = \theta$, $\eta = \theta + \ln|\rho - 1|$ и истолковав ρ, θ как полярные координаты.) Тогда L — топологически однородная линия, т.е. линейная особенность. В любой полуокрестности каждой точки линии L единственность нарушается только в точках бесконечного множества дуг, сходящихся к L. Следовательно, такая полуокрестность не является топологически однородной областью. В дальнейшем подобные случаи будут исключены условиями, накладываемыми в п. 2.

Приведем примеры линейных особенностей различных топологических классов. Во всех примерах линейной особенностью является прямая $v = 0$.

Линейные особенности 1-го рода, т.е. не содержащие стационарных точек:

1) $\dot{u} = 1$, $\dot{v} = -\operatorname{sgn} v$; 2) $\dot{u} = 1$, $\dot{v} = 0$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{v} = -1$ $(v > 0)$; 3) $\dot{u} = 1$, $\dot{v} = 3v^{2/3}$.

Линейные особенности 2-го рода, т.е. состоящие только из стационарных точек:

4) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = -\operatorname{sgn} v$; 5) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = v$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{v} = -1$ $(v > 0)$; 6) $\dot{u} = v$, $\dot{v} = 0$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = -1$ $(v > 0)$; 7) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = 0$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{v} = -1$ $(v > 0)$; 8) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = -v$; 9) $\dot{u} = v$, $\dot{v} = 0$; 10) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = v$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{u} = v$, $\dot{v} = 0$ $(v > 0)$; 11) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = 0$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{v} = -v$ $(v > 0)$; 12) $\dot{u} = 0$ $(v \leqslant 0)$, $\dot{u} = v$ $(v > 0)$, $\dot{v} = 0$; 13) $\dot{u} = 0$, $\dot{v} = 3v^{2/3}$; 14) пример нерегулярной линейной особенности:

$$\dot{u} = v^3 \cos(1/v) \quad (v \neq 0), \quad \dot{u} = 0 \quad (v = 0), \quad \dot{v} = -v^5;$$

траекториями являются линии $u = c + \sin(1/v)$ и стационарные точки $u = c$, $v = 0$. Нерегулярные линейные особенности исключаются условиями п. 2 и более подробно не рассматриваются.

Те из приведенных примеров, в которых правые части разрывны, могут быть заменены другими, с непрерывными правыми частями и принадлежащими тем же топологическим классам. Для этого, например, уравнение $\dot{v} = -\operatorname{sgn} v$ можно заменить уравнением $\dot{v} = -v^{1/3}$ и т.п. Таким образом, приведенная ниже в п.2 топологическая классификация линейных особенностей с небольшими дополнениями (из-за наличия примеров 3) и 13)) пригодна и для дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями, недифференцируемыми лишь на отдельных линиях.

Точечными особенностями назовем все точки, которые не принадлежат линейным особенностям и топологически однородным областям. Таким образом, к точечным особенностям относятся концы линейных особенностей и не принадлежащие названным выше особенностям и областям точки нарушения единственности, предельные для них точки и стационарные точки.

2. Укажем условия, достаточные для того, чтобы рассматриваемая система (1) имела линейные особенности того или иного типа, и перечислим локальные топологические классы линейных особенностей.

Пусть L — гладкая линия, например, линия разрыва вектор-функции $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ или линия, на которой $f(x) = 0$. Обозначим $f^-(x)$ и $f^+(x)$ предельные значения вектор-функции f при приближении к точке $x \in L$ из примыкающих к линии L областей G^- и G^+ непрерывности функции f, а $f_N^-(x)$ и $f_N^+(x)$ обозначим проекции векторов $f^-(x)$ и $f^+(x)$ на нормаль к линии L в точке x, направленную от G^- к G^+.

1° Пусть в конечной области G вектор-функция $f(x)$ *кусочно непрерывна и кусочно гладка*.

Это значит, что область G конечным числом гладких линий конечной длины (которые могут иметь общие концы) делится на конечное число подобластей, в каждой из которых f, $\partial f/\partial x_1$ и $\partial f/\partial x_2$ непрерывны вплоть до границы.

2° В тех точках x линии разрыва L, где $f_N^-(x)\, f_N^+(x) \leqslant 0$, кроме, может быть, случая

$$f_N^-(x) = f_N^+(x) = 0, \quad f^-(x) \neq f^+(x), \tag{3}$$

задана непрерывная вектор-функция $f^0(x)$, определяющая скорость движения $\dot{x} = f^0(x)$ по линии L. Вектор $f^0(x)$ касается L в точке x. Если $f_N^-(x) = 0$, то $f^0(x) = f^-(x)$; если $f_N^+(x) = 0$, то $f^0(x) = f^+(x)$.

Условие 2° выполняется, в частности, тогда, когда вектор $f^0(x)$ на L определяется согласно а) п. 2 § 4.

3° Случай (3) допускается только в конечном числе точек.

4° Если $f^+(x) = 0$ (или $f^-(x) = 0$) на линии L, то вблизи каждой точки линии L, может быть, кроме конечного числа точек, в G^+ (соответственно в G^-) или $f(x) \neq 0$ и функция

$$g(x) = f(x)/|f(x)| \tag{4}$$

удовлетворяет условию Липшица, или $f(x) \equiv 0$.

Л е м м а 1. *Если L — линия $x_2 = \psi(x_1)$, $\psi \in C^1$, и $f^+(x) = 0$ на L, то для выполнения условия Липшица для функции (4) в G^+ достаточно существование такого $m \geqslant 1$, чтобы на L односторонние (в сторону области G^+) производные удовлетворяли условиям*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_2^k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1; \qquad \frac{\partial^m f}{\partial x_2^m} \neq 0 \tag{5}$$

и чтобы вблизи L в G^+ производная $\partial^m f/\partial x_2^m$ удовлетворяла условию Липшица. То же справедливо и для G^-, если $f^-(x) = 0$ на L.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из представления функции $f(x_1, x_2)$ по формуле Тейлора с интегральным остаточным членом:

$$f(x_1, \psi(x_1) + z) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^z \frac{(z-s)^{m-1}\, \partial^m f(x_1, \psi(x_1) + s)}{\partial s^m}\, ds =$$

$$= \frac{z^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \frac{\partial^m f(x_1, \psi(x_1) + tz)}{\partial x_2^m}\, dt, \qquad x_2 = \psi(x_1) + tz,$$

так как последний интеграл при малых z (на L и в G^+ вблизи L) не обращается в нуль и удовлетворяет условию Липшица.

Из леммы 1 следует, что условие 4° выполняется, в частности, тогда, когда вблизи L функция f — аналитическая отдельно в G^+ и в G^- вплоть до L.

Л е м м а 2. *Пусть выполнено условие 1° и $f_N^+(x) \geqslant 0$ (или $\leqslant 0$) на L. Тогда ни одна траектория из области G^+ не может стремиться к какой-либо точке линии L при воз-*

растании (соответственно убывании) t до конечного предела, а если еще $f^+(x) \neq 0$ на L, то и при $t \to \infty$ (соответственно при $t \to -\infty$).

Доказательство. Предположим, что траектория $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ из области G^+ $(x_2 > \psi(x_1))$ достигает точки $(0, 0)$ линии L $(x_2 = \psi(x_1),\ \psi \in C^1$; можно считать $\psi(0) = \psi'(0) = 0)$ при $t \to t_1 - 0$. Тогда

$$z(t) \equiv \varphi_2(t) - \psi(\varphi_1(t)) > 0 \quad (t_0 \leqslant t < t_1), \quad z(t_1) = 0.$$

Следовательно, $\dot z = h(t, z)$, где

$$h(t, z) = f_2 - \psi'(\varphi_1(t)) f_1,$$

$$f_i = f_i(\varphi_1(t),\ \psi(\varphi_1(t)) + z), \qquad i = 1, 2.$$

Так как $(-\psi'(\varphi_1),\ 1)$ есть вектор, нормальный к L в точке $(\varphi_1, \psi(\varphi_1))$, то

$$h(t, 0) = f_2 - \psi' f_1 = \sqrt{1 + \psi'^2}\, f_N^+(\varphi_1, \psi(\varphi_1)) \geqslant 0.$$

Из ограниченности $\partial h/\partial z$ следует, что при $z > 0$

$$\dot z = h(t, z) \geqslant h(t, 0) - kz \geqslant -kz; \quad z(t) \geqslant z(t_0) e^{-k(t - t_0)}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Это противоречит предположению $z(t_1) = 0$.

Если же $f_N^+(x) \geqslant 0$, $f^+(x) \neq 0$ на L, то $|f^+(0, 0)| = m > 0$. Поэтому или $f_2^+(0, 0) = f_N^+(0, 0) > m/2$, или $|f_1(0, 0)| > m/2$. Хотя бы одно из неравенств $f_2 > m/2$ или $|f_1| > m/2$ выполнено и в некоторой односторонней (в G^+) окрестности точки $(0, 0)$. Значит, решение за конечное время выходит из этой окрестности и не может стремиться к точке $(0, 0)$ при $t \to \infty$.

Лемма 3. *Пусть функции $f(x_1, x_2)$ при $x_2 \geqslant \psi(x_1)$ и $\psi(x_1)$ удовлетворяют условию Липшица. Тогда функцию f можно продолжить в область $x_2 < \psi(x_1)$ с сохранением условия Липшица.*

Доказательство. Можно взять $f(x_1, x_2) = f(x_1, \psi(x_1))$ при $x_2 < \psi(x_1)$.

Рассмотрим возможные расположения траекторий системы (1) в односторонней окрестности линии L при условиях 1° и 4°.

А. Если $f_N^+(x) \neq 0$ на L, то в каждую точку линии L из области G^+ приходит ровно одна траектория: при возрастании t, если $f_N^+ < 0$, и при убывании t, если $f_N^+ > 0$ (рис. 27). Траектории из области G^+ достигают L при конечных значениях t.

Для доказательства можно продолжить функцию f из G^+ в G^- по лемме 3 и применить теорему существования и единственности.

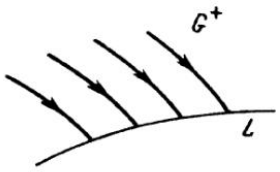


Рис. 27.

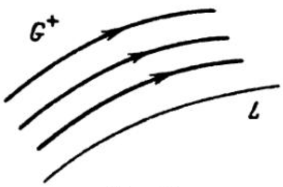


Рис. 28.

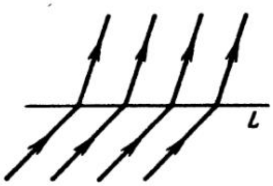


Рис. 29.

В. Если $f_N^+(x) \equiv 0$, $f^+(x) \neq 0$ на L, то из G^+ на линию L не приходит ни одна траектория (рис. 28).

Это следует из того, что после продолжения функции f из G^+ в G^- по лемме 3 линия L сама будет траекторией.

Если же $f^+(x) = 0$ на L, но $f \neq 0$ в G^+ вблизи линии L, то для функции (4) определяем $g^+(x)$ и $g_N^+(x)$ подобно $f^+(x)$ и $f_N^+(x)$. Тогда:

a) если $g_N^+(x) \neq 0$ на L, то траектории в G^+ расположены как в случае А, но могут приближаться к точкам линии L только при $t \to +\infty$ (если $g_N^+ < 0$ на L) или при $t \to -\infty$ (если $g_N^+ > 0$ на L);

b) если $g_N^+(x) = 0$ на L, то траектории в G^+ расположены как в случае В.

В самом деле, в области G^+ траектории уравнений $\dot{x} = f(x)$ и $\dot{x} = g(x)$ совпадают, а функция, равная $g(x)$ в G^+ и $g^+(x)$ на L, в силу 4° удовлетворяет условию Липшица; всегда $|g(x)| = 1$; поэтому различные траектории не имеют общих точек ни в G^+, ни на L.

c) Если $f \equiv 0$ в G^+ вблизи L, то некоторая односторонняя (в G^+) окрестность линии L заполнена стационарными точками.

В случаях B, a), b), c) некоторые функции обращатся в нуль на линии или в области. Поэтому такие случаи являются исключительными, редко встречающимися. Они приводятся для полноты классификации.

В области G^- вблизи L может иметь место также любой из случаев A, B, a), b), c). Сочетая каждый из случаев в области G^+ с каждым в G^-, получаем следующую классификацию.

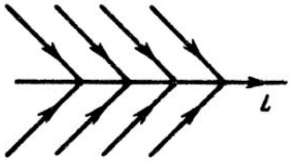


Рис. 30.

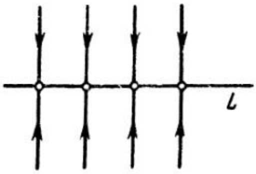


Рис. 31.

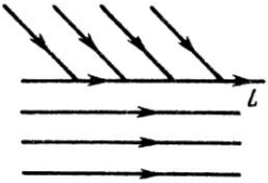


Рис. 32.

Случай AA_0. $f_N^- f_N^+ > 0$. Траектории пересекают линию L, и она не является линейной особенностью. Пример: $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2 + \operatorname{sgn} y$ (рис. 29).

Случай AA_1. $f_N^- f_N^+ < 0$, $f^0 \neq 0$. Траектории с обеих сторон вливаются в линию L при конечных значениях t, линия L — тоже траектория. См. пример 1 п. 1 (рис. 30).

Случай AA_2. $f_N^- f_N^+ < 0$, $f^0 \equiv 0$. Траектории с обеих сторон вливаются в L при конечных значениях t; линия L состоит вся из стационарных точек. См. пример 4 п. 1 (рис. 31).

Случай AB. $f_N^+ \neq 0$, $f_N^- = 0$, $f^- \neq 0$ (или $f_N^- \neq 0$, $f_N^+ = 0$, $f^+ \neq 0$). С одной стороны траектории вливаются в траекторию L при конечных t, а с другой стороны не вливается ни одна. См. пример 2 п. 1 (рис. 32).

Случай Aa. $f_N^- \neq 0$, $f^+ = 0$, $g_N^+ \neq 0$ (или $f_N^+ \neq 0$, $f^- = 0$, $g_N^- \neq 0$). С обеих сторон траектории приближаются к точкам линии L, с одной стороны — при конечных t, а с другой стороны — при $t \to \infty$ (или $t \to -\infty$); линия L состоит из стационарных точек. См. пример 5 п.1.

Случай Ab. $f_N^- \neq 0$, $f^+ = 0$, $g_N^+ = 0$ (или $f_N^+ \neq 0$, $f^- = 0$, $g_N^- = 0$). С одной стороны траектории приближаются к точкам линии L при конечных t, а с другой — не приближается ни одна; линия L состоит из стационарных точек. См. пример 6 п. 1.

Случай aa. $f^- = f^+ = 0$, $g_N^- \neq 0$, $g_N^+ \neq 0$. С обеих сторон траектории приближаются к точкам линии L при $t \to \infty$ или при $t \to -\infty$; эти точки — стационарные. См. пример 8 п. 1.

Случай ab. $f^- = f^+ = 0$ и, кроме того, или $g_N^- \neq 0$, $g_N^+ = 0$, или $g_N^- = 0$, $g_N^+ \neq 0$. С одной стороны траектории приближаются к точкам линии L при $t \to \infty$ (или $t \to -\infty$), а с другой — не приближаются; эти точки — стационарные. См. пример 10 п. 1.

Случай bb. $f^- = f^+ = 0$, $g_N^- = g_N^+ = 0$. Линия L состоит из стационарных точек, и к этим точкам ни с одной стороны не приближаются траектории. См. пример 9 п. 1.

В следующих случаях траектории с одной стороны от L расположены так же, как в случаях A, a), b) (см. выше), а с другой стороны от L все точки — стационарные.

Случай Ac. $f(x) \equiv 0$ в G^- вблизи L, $f_N^+ \neq 0$ (или $f(x) \equiv 0$ в G^+ вблизи L, $f_N^- \neq 0$). См. пример 7 п. 1.

Случай ac. $f(x) \equiv 0$ в G^- вблизи L, $f^+ = 0$, $g_N^+ \neq 0$ (или $f(x) \equiv 0$ в G^+ вблизи L, $f^- = 0$, $g_N^- \neq 0$). См. пример 11 п. 1.

Случай bc. Вблизи L в G^- $f(x) \equiv 0$, в G^+ $f(x) \neq 0$, на L $f^+ = g_N^+ = 0$ (или в G^+ $f(x) \equiv 0$, в G^- $f(x) \neq 0$, на L $f^- = g_N^- = 0$). См. пример 12 п. 1.

Случае cc в силу 2° L не является линейной особенностью.

Если ослабить условие 3°, допустив случай (3) не только в конечном числе точек, но и в каждой точке конечного числа дуг, то появляются возможности BB, Ba, Bb, Bc. Их классификация зависит от способа доопределения правой части дифференциального уравнения на линии L. Доопределение а) § 4 в этом случае многозначно. Приняв такое доопределение, можно выделить следующие случаи.

Случай BB_1. $f_N^- = f_N^+ = 0$, векторы f^- и f^+ направлены в одну сторону.

Случай BB_2. $f_N^- = f_N^+ = 0$, векторы f^- и f^+ направлены противоположно.

Случаи Ba, Bb и Bc не требуют пояснений.

Далее, такие случаи, когда на L скорость движения определяется неоднозначно, не будут рассматриваться.

Укажем достаточные условия существования линейной особенности такого типа, как в примере 3 п. 1. При этом производные функции $f(x)$ уже не будут непрерывны

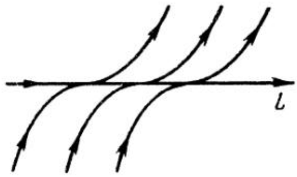


Рис. 33.

вплоть до линии L, т.е. условие 1° уже не будет выполнено. Пусть $x_2 = \psi(x_1)$ $(\alpha < x < < \beta)$ — уравнение линии L, $\psi \in C^1$. Замена $x_1 = x$, $x_2 - \psi(x_1) = y$ переводит линию L в кусок $\alpha < x < \beta$ прямой $y = 0$, а систему (1) — в систему

$$\dot{x} = p(x, y), \quad \dot{y} = q(x, y). \tag{6}$$

Лемма 4. *Пусть в окрестности линии L функции p, p'_y, q непрерывны, $p \neq 0$,*

$$q(x, y) = \varphi(y) h(x, y), \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{dy}{\varphi(y)} \neq \pm\infty, \tag{7}$$

$\epsilon > 0$, функции φ, h, h'_y непрерывны, $|h| \geqslant c > 0$, $\varphi(0) = 0$, при $0 < |y| < \epsilon$ или $\varphi(y) > 0$, или $\varphi(y) < 0$.

Тогда линия L $(y = 0)$ является дугой траектории системы (6) и из каждой точки линии L в одну сторону уходит положительная полутраектория, а в другую — отрицательная, т.е. в каждой точке линии L ее пересекает траектория.

Доказательство. Так как $p(x, y) \neq 0$, $\varphi(0) = 0$, то $y = 0$ — траектория. Деля второе уравнение в (6) на первое, после замены

$$\int_0^y \frac{dy}{\varphi(y)} = z, \quad dy = \varphi(y) dz, \quad h(x, y) = p(x, y) k(x, y)$$

получаем $dz/dx = k(x, y(z))$. Так как функции k и $\partial k(x, y(z))/\partial z = k'_y \cdot \varphi$ непрерывны, то через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит единственное решение $z(x)$. Так как $dz/dt = h$, то оно идет из области $z < 0$ в область $z > 0$ (или наоборот), если $h \geqslant c > 0$ (соответственно, если $h \leqslant -c < 0$). Возвращаясь от z к y, получаем утверждение леммы.

Замечание. Можно допустить, чтобы функция $\varphi(y)$ при $y = 0$ имела разрыв 1-го рода (скачок) с соблюдением условия $\varphi(+0)\ \varphi(-0) = 0$.

Линейные особенности, описанные в утверждении леммы 4, отнесем к классу AA_3 (пример 3 п. 1, рис. 33).

Если же линия L состоит из стационарных точек и в каждой точке ее пересекает траектория, то L — линейная особенность класса AA_4 (пример 13 п.1). Достаточные условия наличия такой особенности получаются из леммы 4, если отбросить условие $p \neq 0$ и потребовать, чтобы $p(x, \pm 0) = 0$ и чтобы функции p и h принадлежали C^1 при $y > 0$ и при $y < 0$ вплоть до линии $y = 0$.

Следующая теорема указывает условия, при которых система (1) или уравнение (2) имеет только конечное число линейных и точечных особенностей.

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения (2) в конечной области G удовлетворяет условию 1° и может обращаться в нуль только в конечном числе областей, границы которых состоят из конечного числа гладких линий, и, кроме того, еще в конечном числе точек и гладких линий. Все эти линии конечной длины. Пусть на линиях разрыва функций $f, \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2$ векторы $f^-(x), f^+(x), f^0(x)$ могут обращаться в нуль, а $f^-(x)$ и $f^+(x)$ — касаться линий разрыва только в конечном числе точек и, может быть, еще в каждой точке конечного числа дуг. На линиях разрыва и линиях, где $f(x) = 0$, пусть выполнены условия $2^\circ - 4^\circ$.*

Тогда в области G может содержаться только конечное число линейных и точечных особенностей.

Доказательство. В любой подобласти, где $f, \partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2$ непрерывны и $f(x) \neq 0$, через каждую точку проходит только одна траектория. Там и в подобластях, где $f(x) \equiv 0$, нет линейных и точечных особенностей. Границы тех подобластей, в которых $f(x) \equiv 0$, состоят из конечного числа линий, на которых выполнены условия $2^\circ - 4^\circ$. Такие линии состоят из конечного числа линейных особенностей классов Ac, ac, bc. Линии разрыва состоят из конечного числа гладких кусков, на каждом из которых каждая из функций f_N^- и f_N^+ или сохраняет знак, или тождественно равна нулю, а каждая из вектор-функций f^-, f^+ и f^0 или не обращается в нуль, или тождественно равна нулю. В силу условий $2^\circ - 4^\circ$ и рассуждений, проведенных при классификации, такие куски (кроме случая AA_0, когда особенности нет) являются линейными особенностями классов AA_1, AA_2, AB, Aa, Ab. В силу условия 4° остальные линии, на которых $f = 0$, состоят из конечного числа кусков, являющихся линейными особенностями классов aa, ab, bb. Таким образом, линейных особенностей конечное число. Точечными особенностями являются их концы и изолированные точки, где $f(x) = 0$, значит, и их конечное число.

Замечание. Если выполнены условия теоремы 1 и функция $f(x)$ непрерывна в G, то могут существовать линейные особенности только классов aa, ab, ac, bb, bc.

3. Покажем, что проведенная в п. 2 при условиях $1^\circ - 4^\circ$ классификация линейных особенностей — локальная топологическая. Будем говорить, что траектории двух данных систем в открытых или замкнутых областях G_1 и G_2 (соответственно) имеют *одинаковую топологическую структуру* ([157], стр. 125), или, короче, области G_1 и G_2 имеют одинаковую топологическую структуру, если существует топологическое отображение области G_1 на область G_2, переводящее, как и обратное отображение, траектории в траектории.

Это означает, что отображение области G_1 на область G_2 переводит каждую содержащуюся в G_1 дугу траектории (или стационарную точку) первой системы в дугу траектории (соответственно стационарную точку) второй системы, а обратное отображение переводит каждую содержащуюся в G_2 дугу траектории (или стационарную точку) второй системы в дугу траектории (или стационарную точку) первой системы. Это отображение не обязано сохранять направление движения по траекториям или менять его одновременно на всех траекториях ([157], стр. 128). Пример: тождественное отображение $x = x, y = y$ переводит траектории системы $\dot{x} = x, \dot{y} = 0$ в траектории системы $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = 0$ и обратно; направление движения по траекториям в полуплоскости $x > 0$ сохраняется, а в полуплоскости $x < 0$ меняется.

Если область G_1 замкнута и ограничена, то из непрерывности взаимно однозначного отображения G_1 на G_2 следует непрерывность обратного отображения ([155], стр. 321).

Требование, чтобы обратное отображение также переводило дугу траектории в дугу траектории, не вытекает из остальных требований.

Пример ([157], стр. 126). Каждая дуга траектории системы

$$\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = 0 \tag{8}$$

при тождественном отображении $x = x, y = y$ переходит в дугу траектории системы

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0, \tag{9}$$

но дуга $-1 < x < 1$ траектории $y = 0$ системы (9) не переходит в дугу траектории системы (8). Дополнительное требование, чтобы стационарная точка первой системы переходила в стационарную точку второй системы, не помогает, так как систему (9) можно заменить системой

$$\dot{x} = y^2 + 3\sqrt[3]{x^2}, \quad \dot{y} = 0, \tag{10}$$

для которой та же дуга $-1 < x < 1$, $y = 0$ есть дуга траектории решения $x = t^3, y = 0$.

Требование, чтобы стационарная точка переходила в стационарную точку второй системы, не вытекает из остальных требований. Это показывает отображение $x = x$, $y = y$ траекторий системы (9) в траектории системы (10) и обратное отображение (10) в (9).

В [157] (стр. 125) вместо требования, чтобы отображение переводило каждую дугу траектории в дугу траектории, содержится требование, чтобы отображение переводило каждые две точки, лежащие на одной траектории, в две точки, лежащие на одной траектории. Эти требования равносильны в том случае, когда при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ решение единственно, но не равносильны для систем с нарушением единственности, как показывает следующий пример (рис. 34, 35).

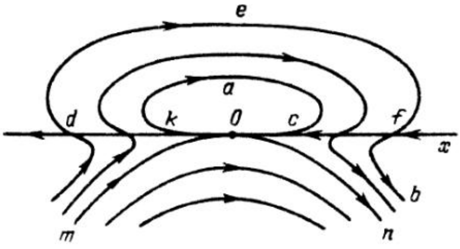


Рис. 34

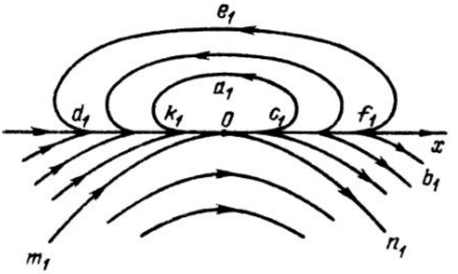


Рис. 35.

В обоих случаях ось Ox — траектория, в каждой точке которой нарушается единственность; решения достигают стационарной точки O за конечное время. Существует топологическое отображение, например, тождественное в областях $y > 0$ и ниже траектории mOn и очевидным образом продолженное (по траекториям) в области mOd и nOf, переводящее любые две точки одной траектории в две точки одной траектории. Точки a и b переходят в точки a_1 и b_1, но соединяющая их дуга траектории $acOdefb$ не переходит в дугу траектории; точки a_1 и b_1 соединены дугой траектории $a_1k_1Oc_1f_1b_1$. Индекс стационарной точки O равен 0 на рис. 34 и равен +1 на рис. 35.

Будем говорить, что линейные особенности L и K *принадлежат одному и тому же топологическому классу*, если у любых (неконцевых) точек $x \in L$, $x^* \in K$ имеются окрестности одинаковой топологической структуры. Таким образом, здесь проводится *локальная* топологическая классификация линейных особенностей.

Т е о р е м а 2. *При условиях* $1^\circ - 4^\circ$ *п. 2 существуют только* 11 *топологических классов линейных особенностей:* AA_1, AA_2, AB, Aa, Ab, Ac, aa, ab, ac, bb, bc.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что у каждой неконцевой точки x_0 линейной особенности L существует окрестность, которую можно топологически отобразить на окрестность любой точки оси Ou в соответствующем из примеров, указанных в пп. 1, 2, так, чтобы траектории переходили в траектории. Пусть $x = \psi(s)$ $(-\epsilon \leqslant s \leqslant \epsilon)$ — дуга l линейной особенности L, $\psi \in C^1$, $\psi'(s) \neq 0$, $\psi(0) = x_0$. Если на этой дуге $f_N^+(x) > 0$ (обозначения см. в п. 2), а $x = \varphi(t, s)$ — проходящее при $0 < t \leqslant t_1$ в G^+ решение с начальным условием $\varphi(0, s) = \psi(s)$, то по теореме 3 § 12 функция $\varphi(v, s)$ топологически отображает прямоугольник $-\epsilon \leqslant s \leqslant \epsilon$, $0 \leqslant v \leqslant t_1$, на некоторую одностороннюю (в G^+) окрестность точки x_0 линии L. Существование числа $t_1 > 0$, общего для всех таких решений $\varphi(t, s)$, $|s| \leqslant \epsilon$, следует из условия $f_N^+(x) > 0$ и равномерной непрерывности функции $f(x)$ в G^+ вблизи дуги l.

Случай $f_N^+ < 0$ сводится к рассмотренному заменой t на $-t$, а случай $g_N^+ > 0$ и $g_N^+ < 0$ — переходом к уравнению $\dot{x} = g(x)$, имеющему в силу (4) те же траектории в области G^+.

Если же на дуге $l \in L$ имеем $f_N^+ = 0$, $f^+ \neq 0$, то из точки $x_0 \in l$ проведем в область G^+ достаточно малый отрезок без контакта $x = \chi(\eta)$, $0 \leqslant \eta \leqslant \delta$ $(\chi \in C^1, \chi' \neq 0, \chi(0) = x_0)$.

Функцию f доопределим на L значениями $f = f^+$. Пусть $x = \varphi_1(t, \eta)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальным условиям $\varphi(0, \eta) = \chi(\eta)$. При $\eta = 0$ это решение пробегает часть дуги l за промежуток времени $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $t_1 < 0 < t_2$. В силу непрерывной зависимости решений от начальных условий при достаточно малых δ функция φ_1 определена и непрерывна в прямоугольнике P $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2, 0 \leqslant \eta \leqslant \delta)$. По теореме 3 § 12 она топологически отображает P на некоторую одностороннюю окрестность точки x_0.

Случай, когда $f^+ = 0, g_N^+ = 0, g^+ \neq 0$ на l, сводится к рассмотренному, если перейти к уравнению $\dot{x} = g(x)$.

Таким образом, в случаях A, B, a), b) п. 2. существует топологическое отображение некоторой односторонней окрестности точки $x_0 \in L$ на прямоугольник, при котором траектории переходят в параллельные прямые. В случае c) можно взять произвольное топологическое отображение такой окрестности на прямоугольник, лишь бы дуга $l \subset L$ переходила в одну из сторон прямоугольника.

Сочетая каждый из случаев A, B, a), b), c) в G^+ с каждым в G^- и замечая, что топологические отображения двух односторонних окрестностей (в G^+ и G^-) можно непрерывно соединить вдоль дуги l, получаем отображение полной окрестности точки x_0 на некоторый прямоугольник. Случаи BB_1, BB_2, Ba, Bb, Bc исключаются из-за условия 3°, в случае cc линейной особенности нет. Случай AA разбивается на подслучаи, как в п. 2.

В случаях AA_2, Aa, Ab, Ac, aa, ab, ac, bb, bc построенное топологическое отображение окрестности точки x_0 на прямоугольник является искомым (с точностью до обозначения координат). В случае AA_1 остается только обе половины прямоугольника (в случае AB — одну) с помощью линейного преобразования отобразить на параллелограммы, ограниченные линиями $v = 0$, $v = \pm\delta$ и двумя траекториями примера 1 (или примера 2) п. 1.

Таким образом, все линейные особенности, удовлетворяющие условиям одного и того же (любого) из 11 случаев $AA_1, \ldots$, bc п. 2, принадлежат одному и тому же топологическому классу. Эти 11 топологических классов различны. Например, в случае AA_2 каждая точка линейной особенности является стационарной и, кроме того, принадлежит двум другим траекториям, входящим в эту точку за конечное время, в случае Aa — только одной такой траектории, а в случае aa — ни одной. Различие других случаев доказывается столь же просто.

Условия 2° — 4° п. 2 допускают, чтобы требования, наложенные в каждом из случаев $AA_1, \ldots$, нарушались в конечном числе "исключительных" точек линии L. Если структура окрестности такой точки отлична от структуры окрестностей других точек линии L, то такая точка не принадлежит линейной особенности, а является границей двух линейных особенностей, лежащих на L. Если же структура окрестности такой точки одинакова со структурой окрестностей близких к ней точек линии L, то эта точка принадлежит линейной особенности. Принадлежность линейной особенности тому или иному топологическому классу определяется по выполнению требований на функции $f^+, f^-, \ldots$ в точках, не являющихся "исключительными". Так как в п. 2 рассмотрены все случаи, которые при условиях 1° — 4° могут выполняться на целой дуге линии L, то при этих условиях каждая линейная особенность принадлежит одному из указанных 11 топологических классов.

Изложенная здесь локальная топологическая классификация линейных особенностей может быть детализирована. Например, если рассматривать только топологические отображения, сохраняющие направление движения по траекториям или меняющие его одновременно на всех траекториях, то каждый из классов Aa, aa, bb распадается на два класса, а остальные классы сохраняются.

4. Продолжим теперь топологическую классификацию до классификации относительно *диффеоморфизмов*, т.е. топологических отображений, которые являются непрерывно дифференцируемыми вместе с обратными отображениями.

Условие 4° п. 2 надо теперь усилить, потребовав, чтобы $g(x) \in C^1$ вплоть до линии L. Заметим также, что если векторы f^+ и f^- (или f^+ и g^-, или f^- и g^+, или g^- и g^+) в некоторой точке x коллинеарны, то они сохраняют это свойство и после любого дифференцируемого отображения. Поэтому в дополнение к условиям 1° — 4° потребуем, чтобы линия L состояла из конечного числа дуг, на каждой из которых эти векторы или не коллинеарны ни в одной точке или коллинеарны в каждой точке дуги.

Далее, в случае bb после перехода к уравнению $\dot{x} = g(x)$ векторы $g^-(x)$ и $g^+(x)$ касаются L. Если они противоположно направлены, то заменим t на $-t$ в G^-. Так как всегда $|g(x)| = 1$, то получим уравнение $\dot{x} = g(x)$ с непрерывной функцией $g(x)$. Если на некотором участке линии L имеем $\dfrac{\partial}{\partial N} g_N^-(x) \neq \dfrac{\partial}{\partial N} g_N^+(x)$, то после любого диффеоморфизма для преобразованного уравнения эти производные оказываются различными, т.е. разрыв производной $\frac{\partial}{\partial N} g_N(x)$ по нормали к L нельзя устранить с помощью диффеоморфизма. Поэтому надо наложить еще одно условие: каждая линия разрыва состоит из конечного числа дуг, на каждой из которых равенство

$$\frac{\partial}{\partial N} g_N^-(x) = \frac{\partial}{\partial N} g_N^+(x) \tag{11}$$

или выполняется во всех точках дуги, или не выполняется ни в одной точке дуги.

Для таких дуг можно дать классификацию относительно диффеоморфизмов.

Теорема 3. *При сформулированных условиях имеются* 18 *классов линейных особенностей относительно диффеоморфизмов. Из* 11 *классов, указанных в теореме* 2, *класс* AA_1 *распадается на* 3 *класса, каждый из классов* AA_2, Aa, aa, bb — *на* 2 *класса, и добавляется класс* AA_0 *с неколлинеарными векторами* f^- *и* f^+.

Если на линии разрыва применяется доопределение а) § 4, *то вместо этих* 18 *классов имеются только* 15 (*классы* AA_1 *и* AA_2 *не распадаются*).

Доказательство. Пусть L — кусок линейной особенности класса AA_1 и в каждой точке $x \in L$ векторы $f^-(x)$ и $f^+(x)$ неколлинеарны, $f_N^- \neq 0$, $f_N^+ \neq 0$. Построим диффеоморфизм, переводящий траектории данной системы

$$\dot{x} = f(x) \quad (x \notin L), \qquad \dot{x} = f^0(x) \quad (x \in L) \tag{12}$$

вблизи L в траектории одной из двух систем:

$$\dot{u} = 1, \quad \dot{v} = -\operatorname{sgn} v \quad (v \neq 0), \qquad \dot{u} = 1, \quad \dot{v} = 0 \quad (v = 0), \tag{13}$$

$$\dot{u} = 1, \quad \dot{v} = -\operatorname{sgn} v \quad (v \neq 0), \qquad \dot{u} = -1, \quad \dot{v} = 0 \quad (v = 0). \tag{14}$$

Рассмотрим случай $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$ (к нему сводится случай $f_N^- < 0$, $f_N^+ > 0$ с помощью замены t на $-t$).

Для $x \in L$ рассмотрим функцию

$$\gamma(x) = -\frac{f_N^+(x)}{f_N^-(x)} > 0, \quad \gamma(x) \in C^1.$$

Продолжим ее в окрестность линии L с сохранением условий $\gamma(x) > 0$, $\gamma(x) \in C^1$ (например, так, как в лемме 3). Заменим данное уравнение (12) уравнением

$$\dot{x} = h(x) \quad (h(x) = f(x), \quad x \in G^+; \quad h(x) = \gamma(x) f(x), \quad x \in G^-), \tag{15}$$

имеющим в G^+ и G^- те же траектории, что (12). Так как $h_N^+ = f_N^+ = -h_N^- < 0$, то при $x \in L$ положим

$$\dot{x} = h^0(x), \quad h^0(x) = (h^+(x) + h^-(x))/2. \tag{16}$$

Вектор $h^0(x)$ касается L в точке x. Так как векторы f^- и f^+, значит h^- и h^+, неколлинеарны, то $h^0(x) \neq 0$.

Пусть $x_0 \in L$, а $x = \psi(t)$ — решение уравнения (16) с начальным условием $\psi(0) = x_0$. Для некоторого $\epsilon > 0$ дуга $x = \psi(t)$, $|t| \leqslant \epsilon$, лежит на L. Пусть $x = \varphi^-(t, s)$ и $x = \varphi^+(t, s)$ — проходящие соответственно в G^- и G^+ решения уравнения (15) с общим начальным условием $\varphi^-(0, s) = \varphi^+(0, s) = \psi(s)$. Как в доказательстве теоремы 2, функции φ^- и φ^+ определены при $|s| \leqslant \epsilon$, $-t_1 \leqslant t \leqslant 0$.

Покажем, что

$$x = \varphi^-(v, u - v) \quad (v \leqslant 0), \qquad x = \varphi^+(-v, u + v) \quad (v \geqslant 0) \tag{17}$$

— искомый диффеоморфизм. В самом деле, как в доказательстве теоремы 2, формулы (17) определяют гомеоморфизм замкнутой области $|v| \leqslant t_1$, $|u + |v|| \leqslant \epsilon$ на окрестность точки x_0. Траектории уравнения (15) выражаются формулами $x = \varphi^{\pm}(t, s)$ при $s = \text{const}$ и переменном t, значит, траектории системы (13) при $v \neq 0$ формулами (17) отображаются в траектории уравнения (15). В силу теоремы о дифференцируемости решения по параметру $\varphi^-, \varphi^+ \in C^1$. Очевидно, в (17) производная $\partial x/\partial u$ непрерывна и при $v = 0$.

Остается доказать непрерывность производной $\partial x/\partial v$ при $v = 0$. Так как $\varphi^-(t, s)$, $\varphi^+(t, s)$ и $\psi(t)$ — решения указанных выше уравнений, то при $v = 0$

$$\frac{\partial \varphi^-}{\partial t} = h^-, \quad \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} = h^+, \quad \frac{\partial \varphi^-}{\partial s} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = h^0.$$

Следовательно, для отображения (17)

$$\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{v=-0} = \frac{\partial \varphi^-(v, u - v)}{\partial v} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial s} = h^- - h^0; \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{v=+0} = -h^+ + h^0.$$

В силу (16) эти выражения совпадают. Значит, (17) — отображение класса C^1. При $v = 0$ вектор $\partial x/\partial u = \psi'(s) = h^0(x)$ касается L, а $\partial x/\partial v = h^- - h^0$ не касается. Следовательно, якобиан отображения (17) не равен нулю на линии L и в ее окрестности.

Итак, (17) — диффеоморфизм, переводящий траектории системы (13) в траектории системы (15), (16).

Если векторы $f^0(x)$ и $h^0(x)$ при $x \in L$ направлены в одну сторону, то траектории систем (12) и (15), (16) совпадают и диффеоморфизм (17) переводит траектории (13) в траектории (12). Если векторы $f^0(x)$ и $h^0(x)$ противоположно направлены, то диффеоморфизм (17) переводит траектории системы (14) в траектории (12). Если же $f^0(x) \equiv 0$ (случай AA_2) и векторы f^+ и f^- неколлинеарны, то диффеоморфизм (17) отображает траектории системы

$$\dot u = 1, \quad \dot v = -\operatorname{sgn} v \quad (v \neq 0), \qquad \dot u = \dot v = 0 \quad (v = 0)$$

в траектории системы (12).

К рассмотренному случаю сводятся случаи AA_0 (заменой $f(x)$ на $-f(x)$ в G^+ или в G^-) и Aa, aa (заменой функции $f(x)$ на функцию $g(x)$ из (4)) при неколлинеарных векторах f^+ и f^- (или g^+ и g^-).

Если же векторы $f^+(x)$ и $f^-(x)$ (или $g^+(x)$ и $g^-(x)$) при каждом $x \in L$ коллинеарны, но не касаются линии L, то в случае AA_0 траектории не имеют особенностей и отображаются на семейство параллельных прямых, а в случаях AA_1, AA_2, Aa, aa — в части прямых $u = \text{const}$ в полуплоскостях $v > 0$ и $v < 0$ и в траекторию (в случае AA_1) или в стационарные точки на прямой $v = 0$. Для построения диффеоморфизма в этих случаях надо заменить уравнение (12) уравнением $\dot x = g(x)$ (см. (4)) и в случае $g_N^+ g_N^- < 0$ заменить в G^+ или в G^- направление вектора $g(x)$ на противоположное. После этого $g(x) \in C^1$ в окрестности линии L и диффеоморфизм строится как в теореме 4 § 12.

Если на линии разрыва применяется доопределение а) § 4, то векторы f^0 в (12) и h^0 в (16) всегда направлены в одну сторону, а в случае коллинеарности f^+ и f^- имеем $f^0 = 0$, $h^0 = 0$. Поэтому в случаях AA_1 и AA_2 остается только по одной из перечисленных возможностей.

В случаях AB, Ab, ab с одной стороны от L строится вектор-функция $x = \varphi(t, s)$, а с другой $x = \varphi_1(t, \eta)$, как в доказательстве теоремы 2, но при этом функция f предварительно заменяется функцией g из (4). Так как на L векторы φ'_t и φ'_s неколлинеарны и векторы φ'_{1t} и $\varphi'_{1\eta}$ тоже неколлинеарны, то якобианы вектор-функций φ и φ_1 не обращаются в нуль. Поэтому вблизи L функции $s = s(x) \in C^1$, $\eta = \eta(x) \in C^1$ вплоть до L. Продолжая каждую из функций $s(x)$ и $\eta(x)$ на другую сторону линии L с сохранением класса C^1, получаем диффеоморфизм $s = s(x)$, $\eta = \eta(x)$, при котором L переходит в прямую $\eta = 0$, а траектории системы (12) с одной стороны от L — в прямые $s = \text{const}$, а с другой — в прямые $\eta = \text{const}$, т.е. в случаях Ab и ab — в траектории примеров 6) и 10) п.1. В случае AB надо еще сделать линейное преобразование, чтобы получить траектории примера 2) п.1.

В случае bb после перехода к уравнению $\dot x = g(x)$ (и, если $g^-(x) = -g^+(x)$, после замены t на $-t$ в G^-) получаем уравнение с непрерывной функцией $g(x)$. Так как $|g(x)| = 1$ и в случае bb на линии L вектор $g(x)$ касается этой линии, то на дуге $l \subset L$, где выполнено (11), производные $\partial g/\partial x_i$ непрерывны, $i = 1, 2$. В окрестности каждой точки этой дуги $g(x) \in C^1$, и по теореме 4 §12 существует диффеоморфизм, отображающий траектории уравнения $\dot x = g(x)$ на семейство параллельных прямых. Траектории исходной системы $\dot x = f(x)$ он отображает в траектории примера 9) п.1.

Пусть ни в одной точке дуги $l \subset L$ не выполнено равенство (11). Как в случае ab, с помощью диффеоморфизма переведем траектории в области G^- в параллельные прямые. Система примет вид

$$\dot\xi = 1, \quad \dot\eta = 0 \quad (\eta \leqslant 0); \qquad \dot\xi = 1, \quad \dot\eta = q(\xi, \eta) \quad (\eta \geqslant 0). \tag{18}$$

При этом $q(\xi, 0) = 0$ (имеем случай bb). Так как равенство (11) не выполняется, то в силу сказанного перед формулировкой теоремы $q'_\eta(\xi, 0) = \rho(\xi) \neq 0$. Сделаем замену

$$u = u(\xi) = \int_0^\xi \rho(\xi)\, d\xi, \quad d\tau = \rho(\xi)\, dt.$$

Получим систему

$$\frac{du}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = 0 \quad (\eta \leqslant 0); \qquad \frac{du}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{q(\xi(u), \eta)}{\rho(\xi(u))} \quad (\eta \geqslant 0).$$

Последнюю дробь обозначим $\theta(u, \eta)$. В силу выбора функции $\rho(\xi)$ имеем $\partial\theta/\partial\eta = 1$ при $\eta = 0$.

Пусть $u = \tau$, $\eta = \varphi(\tau, c)$ — решение с начальными условиями $u(0) = 0$, $\eta(0) = c \geqslant 0$. Положим

$$\eta = \varphi(u, ve^{-u}) \quad (v \geqslant 0), \qquad \eta = v \quad (v \leqslant 0); \qquad u = u. \tag{19}$$

Тогда траектории $u = \tau$, $\eta = \varphi(\tau, c)$ переходят в линии $u = \tau$, $v = ce^\tau$ при $c \geqslant 0$. Следовательно, система переходит в систему (здесь $\dot u = du/d\tau$ и т.д.)

$$\dot u = 1, \quad \dot v = 0 \quad (v \leqslant 0); \qquad \dot u = 1, \quad \dot v = v \quad (v \geqslant 0). \tag{20}$$

Покажем, что $\partial\eta/\partial v$ непрерывна при $v = 0$. Из (19) $\partial\eta/\partial v = e^{-u}\partial\varphi/\partial c$. Производная $\partial\varphi/\partial c = w$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\dot w = w\,\partial\theta/\partial\eta; \quad w(0) = 1.$$

При $\eta = 0$ имеем $\partial\theta/\partial\eta = 1$, следовательно,

$$w = e^\tau; \quad \partial\eta/\partial v\Big|_{v=+0} = e^{-u}e^\tau = 1.$$

При $v \leqslant 0$ имеем $\eta = v$, $\partial\eta/\partial v\Big|_{v=-0} = 1$. Следовательно, (19) — диффеоморфизм.

Итак, в случае bb траектории данной системы отображаются или в траектории примера 9) п.1, или в траектории системы (20).

В остальных случаях Ac, ac, bc с одной стороны от линии L строится, как в случае ab, диффеоморфизм, переводящий траектории в параллельные прямые. Затем этот диффеоморфизм произвольно продолжается через линию L в область, заполненную особыми точками.

§ 17. Топологическая классификация особых точек

Известная топологическая классификация особых точек по числу и расположению гиперболических, параболических, эллиптических секторов распространяется на особые точки и другие точечные особенности систем с кусочно непрерывными правыми частями. При этом число топологических классов секторов увеличивается.

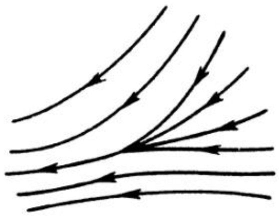


Рис. 36.

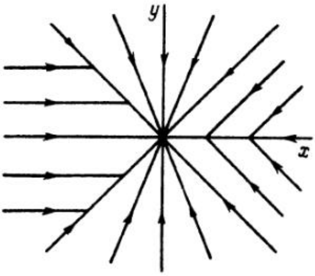


Рис. 37.

1. Для автономных систем с нарушениями единственности необходимо обобщить понятие сепаратрисы. Сепаратрисы могут иметься не только у стационарных точек (положений равновесия), но и у точек нарушения единственности, и у других точечных особенностей. Например, если пучок траекторий сливается в некоторой точке в одну траекторию, то две крайние полутраектории пучка и полутраектория, образующаяся после слияния, являются сепаратрисами, так как они разделяют траектории, имеющие разное поведение (рис. 36). Эти сепаратрисы аналогичны трем сепаратрисам седлоузла и отличаются от них лишь тем, что не являются целыми траекториями.

У особой точки могут иметься орбитно-устойчивые сепаратрисы. Например, у системы (рис. 37)

$$\dot{x} = -x, \qquad \dot{y} = \begin{cases} 0 & (x < -|y|), \\ -y & (|x| \leqslant |y|), \\ -x \operatorname{sgn} y & (x \geqslant |y|) \end{cases}$$

все положительные полутраектории стремятся к устойчивому узлу (0,0) и являются ω-орбитно-устойчивыми ([157], стр. 257). Три полутраектории:

$$y = 0, \quad x > 0; \quad y = x < 0; \qquad y = -x > 0$$

— линейные особенности и три полутраектории:

$$y = 0, \quad x < 0; \qquad y = x > 0; \qquad y = -x < 0$$

— сепаратрисы. Эти шесть полутраекторий разбивают окрестность точки (0,0) на шесть параболических секторов, из которых два принадлежат одному топологическому типу, а четыре — другому.

Ниже дается определение сепаратрисы для системы с конечным числом линейных и точечных особенностей (п.1 § 16). Во всех случаях концы дуги считаются не принадлежащими этой дуге.

Сепаратрисой l точечной особенности b называется траектория, стремящаяся к точке b, или дуга траектории с концом в точке b такая, что на l не нарушается единственность и что для любой точки $a \in l$ существуют такие дуги траекторий l_i, $i = 1, 2, \ldots$, что $b \notin l_i$ и, кроме того, или

1) $l_i = a_i b_i c_i$, $a_i b_i \to ab$, $\rho(c_i, b) \geqslant \epsilon_0 > 0$, $\quad i = 1, 2, \ldots,$

или

2) $l_i = a_i b_i \to ab$, точка b_i лежит на линейной особенности.

Различаются сепаратрисы 1-го и 2-го рода, для которых выполняется соответственно условие 1) или 2). Сепаратриса может принадлежать одновременно к 1-му и 2-му роду, например, сепаратриса ab на рис. 38 и 39 (на обоих рисунках bc — линейная особенность).

Сепаратриса точки b называется *целой сепаратрисой*, если она от точки b продолжена или неограниченно, или до ближайшей (вдоль нее) точечной или линейной особенности.

Для системы без нарушений единственности и только с изолированными особыми точками могут существовать только сепаратрисы 1-го рода. В этом случае данное выше определение сепаратрисы равносильно (в силу теоремы 38 из [157]) определению

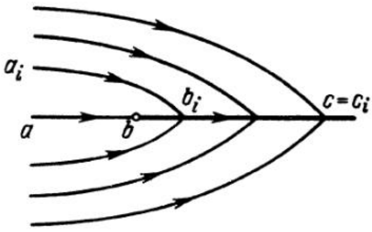


Рис. 38.

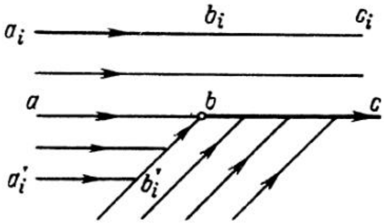


Рис. 39.

сепаратрисы как орбитно-неустойчивой полутраектории, стремящейся к особой точке, данному в [157] (стр. 277).

2. Рассмотрим систему в векторной записи

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset R^2, \tag{1}$$

удовлетворяющую условиям 1°–4° п.2 § 16. По теореме 1 § 16 эта система в конечной области G может иметь только конечное число линейных и точечных особенностей. Пусть точка o ($x = 0$) является стационарной точкой или точечной особенностью, и пусть у нее имеется окрестность, не содержащая других стационарных точек, точечных особенностей, целых линейных особенностей и целых сепаратрис.

Если имеются решения, входящие в точку o ($x = 0$) за конечное время, то заменим данное уравнение (1) уравнением

$$\dot{x} = |x|\, f(x), \tag{2}$$

имеющим в области $x \neq 0$ те же траектории. Так как $|f(x)| \leqslant m$ при $|x| \leqslant \delta$, то из (2) следует, что $|d|x|/dt| \leqslant |\dot{x}| \leqslant m|x|$, $|\ln|x(t_2)| - \ln|x(t_1)|| \leqslant m|t_2 - t_1|$. Поэтому решения уравнения (2) могут входить в точку $x = 0$ только за бесконечное время и точка $x = 0$ является стационарной точкой (в § 17 будем говорить *особой* точкой).

Ниже будет показано, что при этих условиях у точки $x = 0$, если она не является центром или центрофокусом, существует окрестность, которая траекториями, стремящимися к этой точке, разбивается на конечное число секторов десяти классов (рис. 40). Как известно ([157], § 19), для системы (1) с $f \in C^1$ эти секторы могут принадлежать только трем классам, т.е. быть эллиптическими (E), гиперболическими (H) или параболическими (P).

В каждом секторе одна из точек границы (на рис. 40 — нижняя) является особой точкой, а других особых точек и точечных особенностей в секторе и на его границе нет. Направление движения на всех траекториях одновременно можно заменить на противоположное. В каждом секторе через каждую внутреннюю точку, а в секторах E, H, P — и через граничную проходит только одна траектория. Секторы E, F, G — *эллиптические* (все траектории, может быть, кроме идущих по границам сектора, обоими концами стремятся к особой точке), H, K, L — *гиперболические* (все траектории, кроме идущих по границе сектора, обоими концами выходят из окрестности особой точки), P, Q, R, S — *параболические* (все траектории одним концом входят в особую точку, а другим — выходят из ее окрестности).

Каждый сектор ограничен простой замкнутой кривой, содержащей особую точку и конечное число дуг траекторий и дуг без контакта, пересекаемых траекториями без касания и только в одном направлении. Граница сектора E содержит одну траекторию, стремящуюся обоими концами к особой точке, граница каждого из остальных секторов содержит две полутраектории, стремящиеся к особой точке и называемые *боковыми* границами сектора. В секторах F и R эти две полутраектории имеют общую точку и замыкают сектор. Секторы G, L, S замыкаются одной дугой траектории с концами на боковых границах, сектор P — дугой без контакта, секторы K и Q — дугой без контакта и одной дугой траектории, а сектор H — двумя дугами без контакта и одной дугой траектории. На рис. 40 эти дуги без контакта обозначены пунктиром.

У секторов F, K, Q, R одна граничная траектория является линейной особенностью (или ее частью), а у секторов G, L, S — две. В эти линейные особенности вливаются

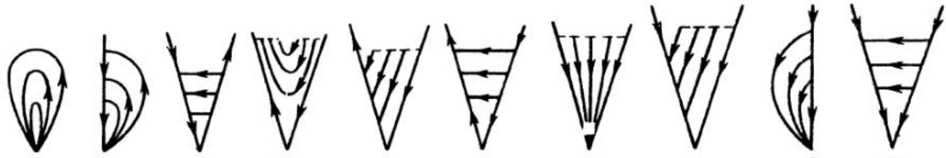


Рис. 40.

(соответственно одним концом или двумя) все траектории, проходящие через внутренние точки сектора. В секторе Q на дуге траектории, соединяющей любую внутреннюю точку сектора с особой точкой, есть точка слияния этой траектории с особой точкой, а в секторе R — нет. В секторе E все траектории — петли, обоими концами входящие в особую точку, причем из каждых двух петель одна лежит внутри другой.

Заметим еще, что вся окрестность особой точки может состоять из одного сектора P, Q или S. Такой сектор будем обозначать P_0, Q_0 или S_0. Сектор класса S_0 содержит линейную особенность класса AA_3 и поэтому может встречаться только в случаях, когда условие 1° п. 2 § 16 ослаблено, например, так, как в лемме 4 § 16. После того, как мы разрежем сектор вдоль одной из траекторий, он будет иметь такую же структуру, как сектор P, Q или S. У особой точки типа "центр" имеется окрестность, заполненная замкнутыми траекториями, окружающими эту точку, и ограниченная замкнутой траекторией. Такую окрестность можно рассматривать как сектор класса O_0.

Докажем, что описанные здесь классы секторов являются топологическими.

Л е м м а 1. *В секторе любого из классов F, R, G, L, S на боковой границе oc, являющейся линейной особенностью, возьмем монотонную последовательность точек a_i, $i = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к особой точке o. Траектории, вливающиеся в oc в точках a_i, отделяют от сектора области D_i, на границах которых лежит точка o и не лежит точка c. Тогда диаметр области D_i стремится к нулю при $i \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p_i — точка замкнутой области $\bar{D}_i$, наиболее удаленная от точки o. Последовательность a_i монотонна, поэтому

$$\bar{D}_1 \supset \bar{D}_2 \supset, \ldots, \quad |p_i - o| = d_i, \quad d_1 > d_2 > \ldots$$

Предположим, что p_i не стремится к o. Тогда среди предельных точек последовательности p_i есть точка $p \neq o$, принадлежащая всем областям $\bar{D}_i$.

Так как часть линии oc, содержащаяся в $\bar{D}_i$, есть дуга oa_i, сколь угодно малая при больших i, то $p \notin oc$. В секторах рассматриваемых классов через каждую точку сектора проходит дуга траектории, идущая внутри сектора от этой точки до некоторой точки на oc, отличной от точки o. Значит, из точки p идет дуга траектории pq, $q \in oc$, $q \neq o$. Она не может пересечь вышедшую из точки a_i траекторию, идущую по границе области $\bar{D}_i$, поэтому содержится в $\bar{D}_i$ и может выйти на oc только в точках дуги oa_i. Значит, $q \in oa_i$ при всех i, $q \neq o$. Это противоречит тому, что $a_i \to o$ $(i \to \infty)$. Итак, предположение неверно, и лемма доказана.

Л е м м а 2. *Пусть дуга $x_0 b_0$ траектории, выходящая из точки x_0 и проходящая в области единственности решений, достигает линейной особенности l в точке b_0. Тогда*

1) *все траектории, выходящие из точек x некоторой окрестности точки x_0, тоже достигают l в точках $b = b(x)$;*

2) *точка b и время движения t_{xb} по дуге xb непрерывно зависят от точки x.*

Доказательство. Через какую-либо точку a_0 дуги $x_0 b_0$ проведем сечение l_0 (например, дугу без контакта), пересекаемое траекториями только в одном направлении. В силу следствия 2 теоремы 2 § 12 все траектории, выходящие из точек x некоторой окрестности V_1 точки x_0, пересекают l_0, причем точка пересечения a и время движения t_{xa} по дуге xa непрерывно зависят от x.

В силу теоремы 2 § 16 у точки $b_0 \in l$ есть односторонняя (с той стороны от l, где проходит дуга $x_0 b_0$) окрестность U, которая топологически отображается на прямоугольник, заполненный прямыми — образами траекторий. Траектория $T(x)$, выходящая из любой точки x окрестности V_2 точки x_0, идет вблизи дуги $x_0 b_0$ и попадает в U. Тогда она достигает l в точке b, близкой к b_0.

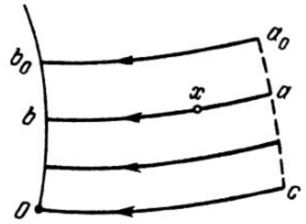


Рис. 41.

Следовательно, для $x \in V_1 \cap V_2$ определены точки $a(x)$ и $b(x)$ пересечения траектории $T(x)$ с линиями l_0 и l_1; при этом $a(x)$, $b(x)$ и t_{xa} непрерывно зависят от x. Если взять $x \in l$, то $b(x) = x$, значит, время движения t_{ba} непрерывно зависит от точки b. Тогда $t_{xb} = t_{xa} + t_{ab}$ (или $t_{xb} = t_{ab} - t_{ax}$ в зависимости от порядка точек a, x, b на траектории) непрерывно зависит от x.

Лемма 3. *Каждый из секторов K и Q можно топологически отобразить на прямоугольник так, что все траектории, проходящие внутри сектора, отображаются на прямые, параллельные его стороне.*

Доказательство. Сектор ограничен дугой $b_0 o$ линейной особенности, дугами траекторий $a_0 b_0$ и co и дугой без контакта $a_0 c$ ($x = \psi(v)$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$, $c = \psi(0)$) (рис. 41). По определению сектора K (или Q), через каждую его точку x, кроме особой точки o, проходит траектория, одним концом выходящая на дугу $a_0 c$ в точке a, другими — на дугу $b_0 o$ в точке b, и такие траектории не имеют общих точек. В силу следствия 2 теоремы 2 § 12 точка a и время движения $\tau(x)$ от x до a (или от a до x) непрерывно зависят от x при $x \neq o$. Это верно и при $x \in b_0 o$, т.е. при $x = b$. Следовательно, a непрерывно и монотонно (так как траектории не пересекаются) зависит от b, а b — от a (непрерывность обратной функции).

Пусть движение по траекториям направлено от дуги $a_0 c$ к дуге $b_0 o$, а $x = \varphi(t, a)$ — решение с начальным условием $\varphi(0, a) = a$. Тогда $b = \varphi(\tau(b), a)$. Точка b и число $\tau(b)$ непрерывно зависят от точки $a \in a_0 c$, но при $a \to c$ имеем $\tau(b) \to \infty$ (в противном случае по лемме 1 § 12 время движения от c до o было бы конечным), $b \to o$ (так как в каждую точку дуги $b_0 o$ вливается траектория, другим концом выходящая из сектора через дугу $a_0 c$).

Для $0 \leqslant v \leqslant v_0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ пусть $\sigma(v) = \tau(b)$ — время движения от точки $a = \psi(v)$ до точки $b \in b_0 o$, $s(v) = 1 - e^{-\sigma(v)}$,

$$t(u, v) = -\ln(1 - u s(v)), \quad x = \varphi(t(u, v), \psi(v)). \tag{3}$$

При $v = \mathrm{const}$ и изменении u от 0 до 1 точка x пробегает дугу траектории от точки $a = \psi(v)$ до точки b. Соответствие между (u, v) и точками x сектора взаимно однозначно. При $(u, v) \neq (1, 0)$ оно непрерывно вследствие непрерывности всех рассматриваемых функций. Докажем непрерывность при $u = 1$, $v = 0$. При $u \to 1$, $v \to 0$ имеем

$$a \to c, \quad b \to o, \quad \tau(b) \to \infty, \quad s(v) \to 1, \quad t(u, v) \to \infty.$$

Так как функция $\tau(x) = t_{ax} = t(u, v)$ непрерывна при $x \neq o$ и $\tau(x) \to \infty$ только при $x \to o$, то при $u \to 1$, $v \to 0$ в (3) имеем $x \to o$.

Итак, функция (3) непрерывна во всем прямоугольнике $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant v_0$ и отображает его на рассматриваемый сектор топологически (лемма 1 § 9).

Л е м м а 4. *Любые два сектора, принадлежащие разным классам, имеют различную топологическую структуру* (п. 3 § 16), *а принадлежащие одному и тому же классу* (*кроме* S_0) *— одинаковую структуру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы следует из приведенного выше описания секторов. Докажем второе утверждение. Для секторов классов E, H, P, P_0 и O_0 оно доказано в [157] (стр. 341 – 346 и 361). Для секторов классов F и R оно доказывается с помощью леммы 1 и того же рассуждения, что для сектора класса E в [157] (стр. 345). Для секторов K и Q утверждение следует из леммы 3.

В секторах класса G, L или S через любую точку x проходит траектория, выходящая обоими концами на боковые границы l_1 и l_2 сектора в точках a и b соответственно. По лемме 2 точки a и b и время движения t_{ax} и t_{xb} непрерывно зависят от точки x. В частности, при $x = a$ получается, что b и t_{ab} непрерывно зависят от a. Так как дуги траекторий не пересекаются внутри сектора, а в каждую точку на l_1 и l_2 приходит ровно одна такая дуга, то точка b монотонно зависит от a.

Разобьем сектор последовательностью дуг $a_i b_i$ траекторий, где $a_i \in l_1$, $b_i \in l_2$, $i = 1, 2, \ldots$; $a_i \to o$, на криволинейные четырехугольники $M_i = a_i b_i b_{i+1} a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Отобразим M_i на область

$$2^{-i-1} \leqslant \rho \leqslant 2^{-i}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$$

так, чтобы траектории перешли в дуги $\rho = \text{const}$. Это делается, как в доказательстве леммы 3, с упрощениями из-за непрерывности и ограниченности t_{ax} в M_i. На общих сторонах четырехугольников отображение можно сделать непрерывным ([157], стр. 340). Получим топологическое отображение в с е г о (в силу леммы 1) данного сектора $a_1 b_1 o$ на круговой сектор $0 \leqslant \rho \leqslant 2^{-1}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, при котором траектории переходят в дуги $\rho = \text{const}$. Непрерывность отображения в точке $\rho = 0$ доказывается с помощью леммы 1 и того же рассуждения, что в [157] (стр. 342).

З а м е ч а н и е. При топологическом отображении одного сектора класса G, L или S на другой сектор того же класса можно сделать, чтобы это отображение на одной боковой границе сектора совпадало с заданным топологическим отображением этой границы (переводящим особую точку в особую точку), а для сектора любого из остальных классов — чтобы оно совпадало с заданным на двух боковых границах. Это доказывается так же, как подобные утверждения в [157] (стр. 340–345).

3. Рассмотрим изолированную особую точку o системы, удовлетворяющей условиям $1^\circ - 4^\circ$ п. 2 § 16 и имеющей только конечное число линейных и точечных особенностей.

Л е м м а 5. *Пусть в сколь угодно малой окрестности точки o имеются точки линейных особенностей. Тогда у точки o имеется сколь угодно малая замкнутая окрестность U, граница которой — замкнутая кривая без самопересечений и в которой*

1) *нет других точечных особенностей, кроме o;*

2) *каждая линейная особенность одним концом входит в особую точку, а другим — выходит из окрестности;*

3) *каждая полутраектория или стремится к точке o, или достигает линейной особенности, или выходит из окрестности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий линейные особенности имеют конечную длину, поэтому они не могут иметь предельных множеств, отличных от точек. Следовательно, найдется окрестность, в которой все линейные особенности входят в точку o одним или обоими концами. Уменьшив окрестность так, чтобы она не содержала ни одной линейной особенности целиком, ни точечных особенностей, кроме точки o, получим утверждения 1) и 2).

Если полутраектория T не выходит из окрестности U, обладающей свойствами 1) и 2), и не имеет общих точек с линейными особенностями, то она содержится в области единственности решений. Ее предельное множество M не пусто и содержится в U. Если $M = o$, то полутраектория T стремится к o. Если M не содержит особых точек, то M — замкнутая траектория. Внутри M должна содержаться особая точка — точка o. Тогда траектория M, а значит и T, пересекает линейную особенность, которая одним концом входит в точку o, а другим — выходит из окрестности.

Если M содержит и точку o, и обыкновенные точки, то M состоит из особой точки o и траекторий, входящих обоими концами в эту точку. Если при этом T навертывается на M снаружи, то T пересекает линейную особенность, как в предыдущем случае. Если же T навертывается на M изнутри, то в U содержатся и α-, и ω-предельные множества для T. По теореме 5 § 13 они не имеют общих точек. Значит, лишь одно из них (M) содержит особую точку o, а другое (N) лежит внутри M. Там нет особых точек, поэтому N — замкнутая траектория. Но тогда внутри N есть особая точка, отличная от точки o, лежащей вне N. Это невозможно.

Теорема 1. *Пусть в некоторой окрестности изолированной особой точки содержится только конечное число (или не содержится вовсе) точечных особенностей, целых сепаратрис и кусков линейных особенностей. Тогда либо особая точка является центром или центрофокусом, либо у нее есть окрестность, состоящая или из одного сектора класса P_0 или Q_0, или из конечного числа секторов, которые могут принадлежать только классам $E, F, G, H, K, L, P, Q, R, S$.*

Доказательство. Пусть в некоторой окрестности особой точки o нет линейных особенностей и других особых точек и точечных особенностей. Тогда в этой окрестности не нарушается единственность решения (для данного уравнения или уравнения (2), имеющего те же траектории). Следовательно, справедливы известные результаты о структуре окрестности особой точки.

Если при этом в сколь угодно малой окрестности точки o имеются замкнутые траектории, то она является центром или центрофокусом ([158], стр. 77, 78).

Если же в некоторой окрестности особой точки o нет замкнутых траекторий, а число сепаратрис конечно, то ([157], стр. 351) существует каноническая окрестность этой точки, состоящая или из одного сектора класса P_0, или из конечного числа секторов классов E, H, P.

Пусть теперь в сколь угодно малой окрестности особой точки o имеются линейные особенности. Они не могут состоять из особых точек (особая точка o изолирована), поэтому могут принадлежать только классам AA_1, AB (п. 2 § 16). Найдется окрестность U точки o, обладающая свойствами, указанными в лемме 5, и не содержащая целых сепаратрис. Пусть l_0 — одна из линейных особенностей в U. По лемме 5 она одним концом входит в точку o, а другим — выходит из U.

а) Пусть в U имеется полутраектория, идущая из точки $p \in l_0$ в точку o и не имеющая общих точек, кроме p, с линейными особенностями. Эта полутраектория и дуга $po \subset l_0$ ограничивают область D_p, в которой нет линейных особенностей, так как имеющиеся в U линейные особенности одним концом выходят из U. Все полутраектории, выходящие из точек дуги $po \subset l_0$ в область D_p, остаются в D_p и по лемме 5 стремятся к точке o. Если они заполняют всю область D_p, то эта область — сектор класса F или R в зависимости от направления движения по этим траекториям и по l_0.

Если же такие полутраектории заполняют лишь часть B области D_p, то через точку $a \in D_p \cap \partial B$ (∂B — граница множества B) проходит траектория $T(a)$, входящая обоими концами в точку o по лемме 5. Так как через точки $a_i \in B, a_i \to a$ $(i = 1, 2, \ldots)$ проходят траектории, выходящие на l_0, то $T(a)$ — сепаратриса 2-го рода. Это невозможно, так как U не содержит целых сепаратрис.

б) Пусть не имеет места случай а), но в U имеется дуга pq траектории, идущая из точки $p \in l_0$ в точку q другой линейной особенности l_1 и не имеющая общих точек с другими линейными особенностями.

Если в области D_{pq}, ограниченной дугой pq и дугами $po \subset l_0$, $qo \subset l_1$, все траектории также одним концом выходят на l_0, а другим — на l_1, то D_{pq} — сектор класса G, L или S.

Если же траектории, выходящие одним концом на l_0, другим — на l_1, заполняют лишь часть области D_{pq}, то, как в случае а), в D_{pq} имеется целая сепаратриса. Это противоречит выбору окрестности U.

в) Пусть не имеют места случаи а) и б). В силу леммы 5 каждая полутраектория, выходящая из точек линии l_0 в рассматриваемую сторону, выходит из U. Такие полутраектории, например $T^+(p_i)$, из точек $p_i \in l_0$, $p_i \to o$ (точка p_{i+1} лежит между p_i и p_{i+2}, $i = 1, 2, \ldots$) выходят из U первый раз в точках $q_i \in \partial U$. Дуги $p_i q_i$ не пересекаются, поэтому последовательность точек q_i на ∂U тоже монотонна и имеет предел q. По лемме 1 § 12 через точку q проходит полутраектория $T^-(q) \subset U$, являющаяся пределом дуг $q_i p_i$ (рис. 42).

Кроме случая $T^-(q) = p_0 o \subset l_0$, полутраектория $T^-(q)$ не может иметь общих точек с линейными особенностями. В самом деле, если бы $T^-(q)$ имела бы общую точку $p^* \neq q$ с линейной особенностью l_1, то по лемме 2 при достаточно больших i дуги $q_i p_i$ достигали бы l_1 (значит, $l_1 = l_0$) с той же стороны, что $T^-(q)$, в точках, сколь угодно близких к p^*; это невозможно, так как $p_i \to o$, $p^* \neq o$. Тогда в силу леммы 5 $T^-(q)$ стремится к o.

Из точки $c \in T^-(q)$, лежащей внутри U, в ту сторону от $T^-(q)$, где проходят дуги $p_i q_i$, проведем дугу без контакта γ. При всех $i \geqslant k$ дуги $p_i q_i$ пересекают γ в точках $c_i \to c$ $(i \to \infty)$. Каждая траектория, выходящая из какой-нибудь точки дуги $p_k o \subset l_0$, лежит между некоторыми траекториями $p_i q_i$ и $p_{i+1} q_{i+1}$ $(i \geqslant k)$ или совпадает с одной из них. Так как она не может ни вернуться на l_0, ни подойти к точке o, то она выходит из U (лемма 5), значит, пересекает дугу $c_k c \subset \gamma$. Аналогично, все траектории, пересекающие эту дугу, выходят из точек дуги $p_k o \subset l_0$.

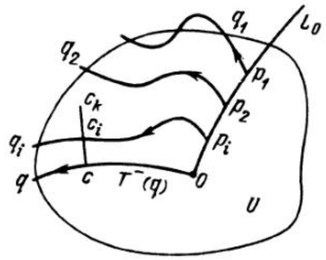


Рис. 42.

Если эти траектории заполняют всю область D_0, ограниченную дугами траекторий $p_k c_k$, $oc \subset T^-(q)$, $p_k o \subset l_0$ и дугой $c_k c \subset \gamma$, то эта область — сектор класса K или Q (класса Q_0, если $T^-(q) = p_0 o \subset l_0$).

Если же такие траектории заполняют лишь часть B области D_0, то через точку $a \in D_0 \cap \partial B$ проходит траектория $T(a)$, которая в силу сказанного выше не может выйти из D_0 ни на дугу $p_k o \subset l_0$, ни на дугу $c_k c \subset \gamma$. Тогда по лемме 5 она обоими концами стремится к точке o. Через точки $a_m \in B$, $a_m \to a$ $(m = 1, 2, \ldots)$ проходят траектории, выходящие на дугу $c_k c$ в точках c_m (при $m > m_1$). Пользуясь непрерывной зависимостью от начальных условий, из дуг $a_m c_m$ этих траекторий можно выделить части $a_m b_m$, сходящиеся к дуге $ao \subset T(a)$. Значит, $T(a)$ — сепаратриса 1-го рода. Это невозможно, так как в U нет целых сепаратрис.

Таким образом, при наличии линейных особенностей из U выделяется или сектор класса Q_0, содержащий некоторую окрестность точки o, или конечное число секторов, каждый из которых ограничен линейной особенностью, некоторой дугой траектории, входящей в точку o, может быть, еще дугой без контакта $c_k c$, и принадлежащий одному из классов F, G, K, L, Q, R, S. В остающихся секторах окрестности U, ограниченных каждый двумя полутраекториями, входящими в точку o, нет точечных и линейных особенностей, значит, нет точек нарушения единственности. Эти секторы разбиваются на конечное число секторов классов E, H, P, подобно тому, как это сделано в [157] (§ 19). При этом отбрасываются некоторые части окрестности U отстоящие на положительное расстояние от точки o. В результате остается окрестность точки o, состоящая из конечного числа секторов указанных классов. Теорема доказана.

Изучим некоторые свойства этого разбиения на секторы. Граница каждого сектора содержит две полутраектории, стремящиеся к точке o. Каждая из них является также граничной полутраекторией соседнего сектора. Поэтому *все секторы расположены в циклическом порядке вокруг точки o.*

Все линейные особенности и сепаратрисы, имеющиеся в окрестности, идут по границам секторов, кроме того, сектор E с двух сторон, а секторы F и R с одной стороны ограничены обычными полутраекториями, не являющимися ни сепаратрисами, ни линейными особенностями. При уменьшении окрестности линейные особенности и сепаратрисы остаются границами секторов, а названные выше обычные полутраектории уже не идут по границам. При этом от секторов E, F, R отделяются части, заполненные траекториями, которые одним концом стремятся к o, а другим — выходят из окрестности. Эти части присоединяются к соседним секторам класса P.

К сектору E с обеих сторон, а к секторам F и R с одной стороны прилегают секторы класса P (к той границе сектора F или R, в которую не вливаются другие траектории). В самом деле, разобрав другие возможные случаи, убеждаемся, что если бы к этой границе прилегал сектор любого другого класса, то она была бы целой сепаратрисой или целой линейной особенностью, а их нет в выбранной окрестности. Отсюда также следует, что *при уменьшении окрестности число, классы и циклический порядок секторов сохраняются.*

Для описания структуры особой точки надо перечислить классы секторов, встречающиеся при обходе вокруг особой точки в положительном направлении, начиная с любого сектора. Если при этом встречается сектор, являющийся образом стандартного (изображенного на рис. 40) сектора класса F, K, Q, R или S при топологическом отображении, меняющем ориентацию (например, при зеркальном отражении), то над обозначением класса ставится черта: $\bar{F}$, $\bar{K}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$, $\bar{S}$. Одновременное изменение направления движения на всех траекториях сектора, включая граничные, не влияет на наличие или отсутствие черты (рис. 43).

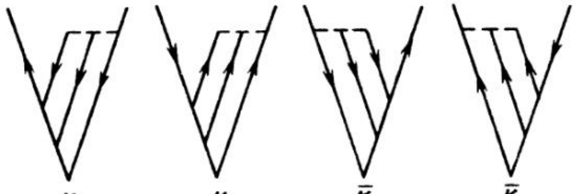

K K $\bar{K}$ $\bar{K}$

Рис. 43.

Согласно сказанному запись $HKPQ$ означает структуру особой точки на рис. 44, а $HKP\bar{Q}$ – на рис. 45. На обоих рисунках каждый сектор занимает одну координатную четверть. При циклической перестановке букв (например, $HKPQ$ и $KPQH$) циклический порядок секторов и структура особой точки не меняются. При топологическом отображении, меняющем ориентацию, порядок секторов меняется на обратный. При этом буквы F, K, Q, R, S приобретают черту (или теряют ее, если она была) Например, запись $HKP\bar{Q}$ переходит в $QP\bar{K}H$.

Сумма числа эллиптических секторов и числа гиперболических секторов для любой особой точки всегда четная. (Утверждение следует из того, что на обеих границах параболического сектора движение происходит в одном направлении – к особой точке или от нее, а на двух границах эллиптического или гиперболического сектора – в разных направлениях.)

Если требуется указать направление движения по траекториям, то достаточно задать направление движения на одной границе между двумя секторами – к особой точке (скажем, значком "+") или от нее (значком "–"). Тогда на остальных траекториях направление движения определяется однозначно. Например, с учетом направления движения структуру особой точки рис. 44 можно записать так: H_-KPQ (или HK_+PQ и т.п.).

В случае, когда окрестность особой точки состоит из любого числа секторов только классов G, L, S, в этой окрестности имеются окружающие особую точку кривые, состоящие из дуг траекторий. Каждая дуга пересекает один сектор, ее концы лежат на линейных особенностях, а концы всей кривой – на одной и той же линейной особенности (рис. 46). Кривая может быть замкнутой или незамкнутой. Поэтому две особые точки с секторами одних и тех же классов G, L, S могут иметь разную топологическую структуру. Их различать можно с помощью обобщенной функции последования.

На некоторой дуге l одной из линейных особенностей, начинающейся в особой точке, введем параметр s, монотонно и непрерывно возрастающий от $s = 0$ в особой точке до некоторого $s = \alpha_0 > 0$. Для каждого $s_0 \in (0, \alpha_0)$ из точки $s = s_0$ на дуге l выходит линия, составленная из дуг траекторий, пересекающая каждую границу секторов только в одной точке и делающая один оборот в положительном направлении вокруг особой точки. Эта линия возвращается на l в точке $s = s_1$. Функция $s_1 = \psi(s_0)$ называется *обобщенной функцией последования.*

Функция ψ — строго возрастающая, так как внутри секторов траектории не пересекаются и в каждую точку линейной особенности может входить из сектора не более одной траектории. Функция ψ непрерывна в силу леммы 2; $\psi(s) \to +0$ при $s \to +0$ (следует из леммы 1).

Две функции ψ и ψ^* назовем *эквивалентными*, если существует непрерывная и возрастающая замена переменных, при которой одна функция переходит в другую на некотором интервале $0 < s < \alpha$, т.е.

$$\psi^*(\theta(s)) \equiv \theta(\psi(s)). \tag{4}$$

Лемма 6. *Для эквивалентности возрастающих непрерывных функций ψ и ψ^* необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области $0 < s < \alpha$ интервалы, где $\psi(s) > s$, где $\psi(s) < s$, а также точки и отрезки, где $\psi(s) = s$, были расположены в том же порядке, как такого же рода интервалы, точки и отрезки для функции $\psi^*(s)$ области $0 < s < \alpha^*$.*

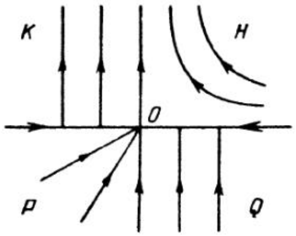


Рис. 44.

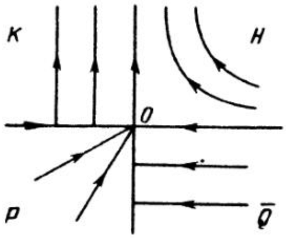


Рис. 45.

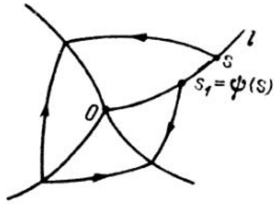


Рис. 46.

Доказательство. *Необходимость* следует из того, что при преобразовании $s^* = \theta(s)$, $\psi^*(s^*) = \theta(\psi(s))$ знак разности $\psi^*(s^*) - s^*$ совпадает со знаком разности $\psi(s) - s$ (функции $\psi(s)$ и $\theta(s)$ — возрастающие).

Достаточность. Каждой точке или отрезку, где $\psi(s) = s$, поставим в соответствие точку или отрезок (с сохранением их порядка), где $\psi^*(s^*) = s^*$; на таких отрезках соответствие между s и s^* можно задать, например, линейным. Получим функцию $s^* = \theta(s)$, определенную, непрерывную и возрастающую на замкнутом множестве тех s, при которых $\psi(s) = s$.

Пусть $\psi(s) > s$ на интервале (α_1, α_2), а на его концах $\psi(s) = s$. Для какого-нибудь $s_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ определим последовательности

$$s_i = \psi(s_{i-1}), \quad s_{-i} = \psi^{-1}(s_{-i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где функция ψ^{-1} — обратная для ψ. Тогда

$$\ldots < s_{-2} < s_{-1} < s_0 < s_1 < s_2 < \ldots, \quad s_i \to \alpha_2, \quad s_{-i} \to \alpha_1$$

при $i \to \infty$. Интервалу (α_1, α_2) соответствует интервал $(\beta_1, \beta_2) = (\theta(\alpha_1), \theta(\alpha_2))$, на котором $\psi^*(s^*) > s^*$. На интервале (β_1, β_2) аналогично построим возрастающую последовательность $\{s_i^*\}$,

$$\psi^*(s_i^*) = s_{i+1}^*, \quad i = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Зададим функцию $\theta(s)$ при $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ так, чтобы она была непрерывной и возрастающей, например, линейной, и $\theta(s_0) = s_0^*$, $\theta(s_1) = s_1^*$. Когда s возрастает от s_0 до s_1, функция $\psi(s)$ возрастает от s_1 до s_2, поэтому с помощью (4) функция $\theta(s)$ определяется при $s_1 < s \leqslant s_2$, ее непрерывность при $s = s_1$ следует из (5) и (6). Таким же образом с помощью (4) определяем функцию $\theta(s)$ последовательно на отрезках $[s_i, s_{i+1}]$, $i = 2, 3, \ldots$ Из (4) следует равенство

$$\theta(s) = \psi^{*-1}(\theta(\psi(s))),$$

из которого $\theta(s)$ определяется последовательно на отрезках $[s_{-i}, s_{-i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$

Таким образом, функция $\theta(s)$ определена на всем интервале (α_1, α_2) и отображает его на интервал (β_1, β_2). Аналогично можно определить $\theta(s)$ на интервалах, где $\psi(s) < s$. Получим функцию $\theta(s)$, которая при $0 < s < \alpha$ непрерывна, возрастает и удовлетворяет (4). Следовательно, функции ψ и ψ^* эквивалентны.

З а м е ч а н и е. При зеркальном отображении окрестности особой точки обобщенная функция последования $\psi(s)$ заменяется обратной функцией $\psi^{-1}(s)$ (напомним, что $\psi(s)$ определяется при обходе особой точки в положительном направлении).

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы у двух изолированных особых точек, удовлетворяющих условиям теоремы 1 и не являющихся центрофокусами, существовали окрестности одинаковой топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы они имели (может быть, после зеркального отражения одной из окрестностей) одну и ту же циклическую последовательность секторов, а в случае наличия только секторов классов G, L, S еще чтобы обобщенные функции последования были эквивалентными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость* следует из того, что топологическое преобразование одной окрестности в другую сохраняет классы секторов, их циклический порядок и переводит функцию последования одной особой точки в функцию последования другой особой точки.

Достаточность для особых точек типа "центр" доказана в [157] (стр. 361). В остальных случаях для каждой из двух особых точек в ее окрестности, разделенной на секторы, построим меньшую "каноническую" окрестность, подобно п 2. § 19 [157]. При этом каждый сектор можно заменить меньшим сектором того же класса.

Рассмотрим случай, когда имеется хоть один сектор, не принадлежащий классам G, L, S. В этом случае имеется хоть один сектор класса H, K, P или Q, так как к сектору класса E, F или R всегда примыкает сектор класса P. У секторов классов G, L, S уменьшение одной боковой границы вызывает вполне определенное уменьшение другой боковой границы. У секторов классов H, K, P, Q можно уменьшать их боковые границы, каждую независимо от другой, так как дуги без контакта, замыкающие такие секторы, можно провести из любых точек его боковых границ (для секторов P и H см. [157], стр. 331–339, а для секторов K и Q это следует из леммы 3).

Поэтому в рассматриваемом случае, уменьшая секторы, можно построить для особой точки окрестность, граница которой — простая замкнутая кривая, состоящая только из

1) дуг траекторий, идущих по границам секторов классов E, F, R и не доходящих до особой точки;

2) дуг траекторий, замыкающих секторы G, L, S;

3) дуг без контакта и дуг траекторий, замыкающих секторы классов H, K, P, Q.

Такую окрестность назовем *канонической* (рис. 47).

Построим канонические окрестности для обеих особых точек. По условию, в обеих окрестностях секторы расположены в одном и том же циклическом порядке. В силу леммы 4 можно поочередно топологически отображать каждый сектор первой окрестности на соответствующий сектор второй окрестности. Последним отображаем сектор класса H, K, P или Q. В силу замечания к лемме 4 отображения соседних секторов можно сделать совпадающими на их общей границе, а отображение последнего сектора — совпадающим на обеих его боковых границах с ранее построенными отображениями соседних секторов. Получим топологическое отображение канонической окрестности одной особой точки на каноническую окрестность другой особой точки, переводящее траектории в траектории. Следовательно, эти окрестности имеют одинаковую топологическую структуру.

Рассмотрим случай, когда имеются только секторы классов G, L, S. Кривой, составленной из дуг траекторий, начинающихся на линейной особенности l в точке $s = s_0$ (обозначения введены перед леммой 6), обходящей вокруг особой точки и возвращающейся на l в точке $s_1 = \psi(s_0)$, поставим в соответствие такую же кривую в окрестности другой особой точки, выходящую из точки $s^* = s_0^* = \theta(s_0)$ линейной особенности l^*; функция $\theta(s_0)$ та же, что в (4). Граница канонической окрестности состоит из одной такой кривой и, если $\psi(s_0) \neq s_0$, из куска линейной особенности l с концами $s = s_0$ и $s = \psi(s_0)$; граница окрестности другой особой точки — из соответствующей кривой и аналогичного куска линейной особенности l^*. С по-

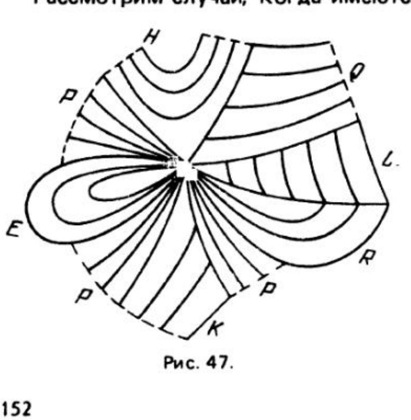


Рис. 47.

мощью леммы 4 и замечания к ней строится топологическое отображение первого сектора, прилегающего к l, на соответствующий сектор окрестности другой особой точки. На l оно должно совпадать с отображением $s^* = \theta(s)$. Затем строится отображение второго сектора, совпадающее на его границе с первым с уже имеющимся отображением первого сектора, и т.д. Отображение последнего сектора совпадает на l с уже построенным отображением $s^* = \theta(s)$ вследствие эквивалентности функций последования. Во всех случаях теорема доказана.

Ослабим условие 1° или 2° п. 2 § 16 так, чтобы кроме линейных особенностей, указанных в теореме 2 § 16, допустить также существование линейных особенностей класса AA_3. Тогда кроме рассмотренных выше случаев возможен также случай, когда окрестность особой точки состоит из одного сектора класса S_0. При допущении линейных особенностей AA_3 верны леммы 1–5; лемма 1 верна и для сектора S_0. В формулировке теоремы 1 после Q_0 добавляется "или S_0". Изменения в ее доказательстве: возможны также линейные особенности класса AA_3; в случае б) может оказаться, что $l_1 = l_0$, тогда образуется сектор S_0. В теореме 2 вместо "G, L, S" надо "G, L, S, S_0".

Теорема 2 и предыдущие рассуждения дают следующую топологическую классификацию изолированных особых точек при наличии лишь конечного числа точечных и линейных особенностей и сепаратрис (допускаются линейные особенности классов AA_1, AA_3, AB).

Точки без секторов: центр — класс O_0 и центрофокус — бесконечно много топологических классов.

Точки с одним сектором: узлы классов $P_0, Q_0, S_0(\psi)$. Символ $S_0(\psi)$ означает, что в случае сектора S_0 имеется бесконечно много топологических классов, каждый из которых определяется классом эквивалентных функций последования ψ. Класс $\overline{S}_0(\psi)$ совпадает с $S_0(\psi^{-1})$.

Точки с двумя и более секторами. Структура такой особой точки задается конечной циклической последовательностью, составленной из букв $E, F, \overline{F}, G, H, K, \overline{K}, L, P, Q, \overline{Q}, R, \overline{R}, S, \overline{S}$ со следующими ограничениями:

1. Суммарное число букв $E, F, \overline{F}, G, H, K, \overline{K}, L$ четно.
2. Буквы $E, F, \overline{F}, R, \overline{R}$ могут входить только в сочетаниях $PEP, PF, \overline{F}P, RP, P\overline{R}$.
3. Две буквы P не стоят рядом.
4. При наличии только секторов $G, L, S, \overline{S}$ надо задавать также обобщенную функцию последования ψ (с точностью до эквивалентности).
5. Любая последовательность и симметричная последовательность, т.е. последовательность тех же букв в обратном порядке с заменой F, K, Q, R, S на $\overline{F}, \overline{K}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}$ (и наоборот), а функции ψ — на ψ^{-1}, определяют два расположения секторов, получающиеся одно из другого зеркальным отражением.

Все рассматриваемые здесь классы особых точек существуют и у систем дифференциальных уравнений с н е п р е р ы в н ы м и правыми частями.

При дополнительных ограничениях на правые части число топологических классов уменьшается. В частности, при условиях 1°–4° п. 2 § 16 не может существовать линейных особенностей класса AA_3, поэтому в окрестности особой точки после любого из секторов F, G, Q, S не может стоять ни один из секторов $\overline{K}, L, R, S$, а после любого из секторов $K, L, \overline{R}, \overline{S}$ — ни один из секторов $\overline{F}, G, \overline{Q}, \overline{S}$.

В случае, когда для любых начальных условий $x(t_0) = x_0$ решение единственно при $t > t_0$, не могут существовать секторы классов G, L, S, S_0; в секторах классов $F, \overline{F}, Q, \overline{Q}, Q_0, \overline{Q}_0$ по линейной особенности возможно движение только в сторону особой точки, а в секторах классов $K, \overline{K}, R, \overline{R}$ — только от нее; это налагает еще новые ограничения на порядок следования секторов.

Рассмотрим теперь случай, когда среди линейных особенностей, оканчивающихся в рассматриваемой особой точке o, могут быть также линейные особенности 2-го рода, т.е. состоящие из особых точек. Тогда особая точка o — неизолированная. По-прежнему предполагается, что в некоторой окрестности этой точки может иметься только конечное число точечных и линейных особенностей и сепаратрис, а линейные особенности принадлежат классам, рассмотренным в пп. 2, 3 § 16. В этом случае изложенные выше результаты о структуре окрестности особой точки в основном сохраняются. Добавляется еще конечное число топологических классов секторов, отличающихся от изображенных на рис. 40 только тем, что одна или две боковые границы являются линейными особенностями, состоящими из особых точек, и круговые секторы, подобные секторам P_0, Q_0, S_0, но с линейной особенностью из особых точек. Появляются очевидные ограничения на классы соседних секторов.

4. Исследование изолированной точечной особенности $x = o$ уравнения (1), не являющейся особой (стационарной) точкой, сводится к исследованию особой точки $x = o$ уравнения (2). Такая точка не может быть центром или центрофокусом, так как тогда она была бы особой точкой и для уравнения (1). Поэтому в силу теоремы 1 ее окрестность разбивается на конечное число секторов, принадлежащих указанным в п. 2 классам.

Т е о р е м а 3. *Пусть правая часть уравнения* (1) *кусочно-непрерывна, применяется доопределение* а) § 4 *и точечная особенность о изолирована и не является стационарной точкой. Пусть в некоторой окрестности точки о может иметься только конечное число линейных особенностей. Тогда у этой точки имеется окрестность, содержащая ровно два гиперболических сектора и не содержащая эллиптических секторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 § 12 для всех траекторий в окрестности точки o справедливо неравенство (4) § 12. Тогда в этой окрестности нет стационарных точек, замкнутых траекторий и траекторий, стремящихся обоими концами к точке o, значит, нет эллиптических секторов. Сечение S (теорема 2 § 12) является диаметром некоторого круга. Траектории, пересекающие S, не могут войти в точку o в силу (4) § 12, следовательно, заполняют два гиперболических сектора. Они разделены траекториями, проходящими через точку o (и заполняющими параболические секторы, если таких траекторий более одной). Других гиперболических секторов нет, так как любая траектория в окрестности точки o должна пересечь сечение S.

§ 18. Грубые и негрубые системы

Понятия грубости системы и степеней негрубости распространяются на системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Указываются необходимые и достаточные условия грубости системы.

1. Грубые системы — это такие, которые сохраняют свою топологическую структуру при любых достаточно малых допустимых возмущениях (т.е. изменениях правых частей). Точное определение будет дано ниже. Сначала рассмотрим примеры.

Система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$ имеет особую точку $x = y = 0$ (типа "седло") и в ее окрестности является грубой по отношению к возмущениям класса C^1 ([185], § 9). Это означает, в частности, что любая система

$$\dot{x} = p(x, y), \quad \dot{y} = q(x, y),$$

правые части которой в заданной окрестности точки (0,0) достаточно близки в метрике C^1 (т.е. вместе с производными 1-го порядка) к правым частям данной системы, имеет в этой окрестности только одну особую точку; эта точка близка к точке (0,0) и тоже является седлом.

Система $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y^2$ — негрубая, так как она имеет одну особую точку (0,0), а система $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y^2 - a^2$, сколь угодно близкая к данной, если число a мало, имеет две особые точки: $(0, a)$ и $(0, -a)$ в окрестности точки (0,0).

Грубость или негрубость системы может зависеть от того, какие возмущения считаются допустимыми. Например, рассмотренная выше система $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$ — грубая относительно возмущений класса C^1. Если же считать допустимыми возмущения, разрывные на прямой $y = 0$ и гладкие вплоть до границы в каждой из областей $y < 0$ и $y > 0$, то эта же система не будет грубой, так как сколь угодно близкая система

$$\dot{x} = y + \delta, \quad \dot{y} = x \qquad (y < 0),$$

$$\dot{x} = y - \delta, \quad \dot{y} = x \qquad (y > 0)$$

($\delta > 0$ сколь угодно мало) имеет три особые точки: седла $(0, -\delta)$ и $(0, \delta)$ и центр (0,0). В этой главе допустимыми считаются возмущения, разрывные на заранее заданных линиях.

В конечной области G плоскости рассмотрим систему в векторной записи

$$\dot{x} = f(x) \qquad (x \in G \subset R^2). \tag{1}$$

Область G конечным числом гладких линий конечной длины, которые могут иметь общие концы, делится на конечное число подобластей G_j, $j = 1, \ldots, l$, в каждой из которых f, $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$ непрерывны вплоть до границы. На линиях разрыва используется доопределение а) § 4.

Пусть C_*^p — класс систем вида (1), у которых линии разрыва класса C^{p+1} (п. 1 § 4) и одни и те же для всех систем этого класса, а функции $f(x)$ вместе с производными до p-го порядка включительно непрерывны в каждой из подобластей G_j вплоть до границы.

Будем говорить, что система (1) и система

$$\dot{x} = \tilde{f}(x) \tag{2}$$

с теми же линиями разрыва *δ-близки* в метрике C_*^m, т.е. $\|\tilde{f} - f\|_m^* \leqslant \delta$, если в каждой из подобластей G_j компоненты вектор-функции $\tilde{f} - f$ и их частные производные до порядка m включительно не превосходят δ по абсолютной величине.

Далее, в §§ 18–20, рассматриваются системы класса C_*^p, $p \geqslant 1$. *Особыми точками* называются стационарные точки (в которых $f(x) = 0$ или $f^0(x) = 0$; обозначения те же, что в п. 2 § 16), точечные особенности (см. п. 1 § 16) и все точки, в которых вектор $f(x)$ касается линии разрыва, т.е. $f_N^-(x) = 0$ или $f_N^+(x) = 0$.

Это определение не является чисто топологическим, так как использует понятие касания. Оно равносильно следующему определению. *Особыми точками* называются стационарные точки, точечные особенности и бифурцирующие точки, т.е. такие, у которых сколь угодно малая окрестность меняет топологическую структуру при некоторых сколь угодно малых изменениях системы. Последнее означает, что для любого $m \geqslant 1$ и любых сколь угодно малых ϵ_0, $\epsilon < \epsilon_0$ и δ найдется система (2), δ-близкая в ϵ_0-окрестности U_0 рассматриваемой точки к данной системе (1) в метрике C_*^m и такая, что не существует топологического отображения окрестности U_0, сдвигающего каждую точку меньше, чем на ϵ, и переводящего дуги траекторий системы (2) в дуги траекторий системы (1) так, что обратное отображение тоже переводит дуги траекторий в дуги траекторий.

Равносильность этих двух определений особой точки следует из лемм 1–4. Эти леммы дают также информацию о том, какие особенности могут испытывать бифуркации, а какие — нет. В этих леммах "особая точка" — это точка, удовлетворяющая второму определению.

Л е м м а 1. *В области G_j гладкости функции f те точки, в которых $f(x) \neq 0$, не являются особыми. На линиях разрыва функции f те точки, в которых $f_N^-(x) \neq 0$, $f_N^+(x) \neq 0$ (и $f^0(x) \neq 0$, если определена функция $f^0(x)$), не являются особыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in G_j$, $f(x_0) \neq 0$. Из теоремы 3 § 12 следует, что точка x_0 не является точечной особенностью. Пусть $x = \psi(s)$ ($\psi \in C^1$, $\psi' \neq 0$, $|s| \leqslant h$) — дуга без контакта с траекториями системы (1), $\psi(0) = x_0$, а $x = \varphi(t, s)$ ($|t| \leqslant \tau$) — решение системы (1) с начальным условием $\varphi(0, s) = \psi(s)$; h и τ столь малы, что эти решения содержатся в G_j и $\varphi(t_1, s_1) \neq \varphi(t_2, s_2)$ при $(t_1, s_1) \neq (t_2, s_2)$.

Если система (2) достаточно близка к (1), то $x = \psi(s)$ — дуга без контакта и для системы (2), и для ее решений $x = \tilde{\varphi}(t, s)$ с $\tilde{\varphi}(0, s) = \psi(s)$ имеем

$$|\tilde{\varphi}(t, s) - \varphi(t, s)| < \epsilon \qquad (|s| \leqslant h, \ |t| \leqslant \tau).$$

Отображение, которое точке $\varphi(t, s)$ ставит в соответствие точку $\tilde{\varphi}(t, s)$, — топологическое. Структура окрестности точки x_0 не меняется при переходе к близкой системе. Точка x_0 — неособая.

В случае, когда точка x_0 лежит на линии разрыва, в качестве дуги $x = \psi(s)$ берется часть этой линии. В остальном доказательство аналогично.

Случай, когда x_0 — конец линии разрыва (тогда $f_N^-(x_0) = f_N^+(x_0) \neq 0$), сводится к предыдущему, если линию гладко продолжить за этот конец.

Л е м м а 2. *Общая точка x_0 нескольких гладких линий разрыва является неособой, если она не является ни стационарной точкой, ни точечной особенностью, и если для каждой из этих линий разрыва имеем $f_N^-(x_0) \neq 0$, $f_N^+(x_0) \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка x_0 не лежит на линейной особенности. Тогда в некоторой ее окрестности нет линейных особенностей и на линиях разрыва $f_N^-(x) f_N^+(x) > 0$, т.е. траектории пересекают линии разрыва под ненулевым углом. Значит, в окрестности точки x_0 единственность не нарушается. В точке x_0 тоже, так как она не является точечной особенностью.

Лишь в одном секторе, на которые окрестность точки x_0 делится линиями разрыва, имеется траектория, входящая в точку x_0 при возрастании t, и лишь в одном — выходящая из этой точки. Траектории не касаются линий разрыва. Все это справедливо и для любой достаточно близкой к (1) системы (2).

Через точку x_0 проведем дугу γ без контакта с траекториями системы (1), не касающуюся линий разрыва. Она будет дугой без контакта и для близкой системы (2). Каждую точку $a \in \gamma$ отобразим в себя. Точки пересечения траектории $x = \varphi(t, a)$ ($\varphi(0, a) = a$) системы (1) с линиями разрыва отобразим в точки пересечения траектории $x = \tilde{\varphi}(t, a)$ системы (2) с теми же линиями разрыва. Получим в окрестности точки x_0 топологическое отображение границ секторов (линий разрыва и дуги γ). На каждый сектор его продолжим по траекториям. Если траектория $x = \varphi(t, a)$ пересекает границы сектора при $t = t_1$ и $t = t_2$, а траектория $x = \tilde{\varphi}(t, a)$ — при $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$, то точке $\varphi(t, a)$ ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) поставим в соответствие точку $\tilde{\varphi}(\tau, a)$, где τ определяется из условия

$$(t - t_1):(t_2 - t_1) = (\tau - \tau_1):(\tau_2 - \tau_1).$$

Если при $t > t_2$ траектория $x = \varphi(t, a)$ уже не пересекает границы этих секторов, то точке $\varphi(t, a)$ ($t > t_2$) поставим в соответствие точку $\tilde{\varphi}(\tau, a)$, $\tau - \tau_2 = t - t_2$. Так как траектории не касаются границ секторов, то функции $t_1 = t_1(a)$ и т.п. непрерывны и это соответствие — топологическое в окрестности точки x_0. Структура окрестности не меняется при переходе к достаточно близкой системе (2). Точка x_0 — неособая.

Пусть точка x_0 лежит на линейной особенности l. Тогда l состоит из линий разрыва L_j и L_k с общим концом x_0 и в силу условий на f_N^- и f_N^+ принадлежит классу AA_1. В каждую точку $a \in l$ с каждой стороны входит по одной траектории, и они не касаются линий разрыва. Поэтому с каждой стороны от l топологическое отображение можно построить изложенным выше способом. И в этом случае точка x_0 — неособая.

Л е м м а 3. *Точка x_0 на гладкой линии разрыва L или на ее конце в случае $f_N^-(x_0) f_N^+(x_0) = 0$ является особой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в точке x_0 определена функция f^0 и $f^0(x_0) = 0$, то точка x_0 — стационарная, значит, особая. Рассмотрим другие случаи.

Пусть в сколь угодно малой окрестности точки x_0 на L имеются точки (значит, и дуги), где $f_N^-(x) f_N^+(x) < 0$. Эти дуги принадлежат линейным особенностям класса AA_1. Если при этом в любой окрестности точки x_0 имеются концы этих линейных особенностей, т.е. точечные особенности, или точка x_0 сама является таким концом, то x_0 — точечная особенность, значит, особая точка.

Если в некоторой окрестности точки x_0 таких концов нет, то x_0 — неконцевая точка линейной особенности класса AA_1. В ее ϵ_0-окрестности f_N^- и f_N^+ не меняют знаков, например, $f_N^- \geqslant 0$, $f_N^+ \leqslant 0$, а в точке x_0, например, $f_N^+(x_0) = 0$. Положим $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha n_0$ в G^- и в G^+, где n_0 — вектор, направленный в сторону области G^+ по нормали к L в точке x_0, а число $\alpha > 0$ сколь угодно мало. Тогда в точке x_0, значит и в некоторой ее окрестности, $\tilde{f}_N^- > 0$, $\tilde{f}_N^+ > 0$, т.е. там траектории переходят через L из G^- в G^+. Структура ϵ_0-окрестности точки x_0 изменилась, значит, точка x_0 — особая.

Пусть $f_N^-(x) f_N^+(x) \geqslant 0$ в некоторой ϵ_0-окрестности точки x_0 на L, а в этой точке $f_N^-(x_0) f_N^+(x_0) = 0$. Тогда в этой окрестности нет линейных особенностей класса AA_1 (следует из леммы 2 § 16). Положим

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha n_0 \quad (x \in G^-), \qquad \tilde{f}(x) = f(x) - \alpha n_0 \quad (x \in G^+), \tag{3}$$

где вектор n_0 тот же, что выше, $|\alpha|$ сколь угодно мало, $\alpha > 0$, если $f_N^-(x_0) \geqslant 0$, $f_N^+(x_0) \leqslant 0$, $\alpha < 0$ в остальных случаях. Тогда $\tilde{f}_N^-(x_0)\tilde{f}_N^+(x_0) < 0$, значит, точка x_0 лежит на линейной особенности класса AA_1. Структура окрестности точки x_0 изменилась, значит, точка x_0 — особая.

Л е м м а 4. *Общая точка x_0 нескольких гладких линий разрыва в случае, когда хотя бы для одной из этих линий $f_N^-(x_0)f_N^+(x_0) = 0$, является особой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится тем же способом, что в лемме 3, со следующим дополнением. Если x_0 — неконцевая точка линейной особенности l, то вблизи точки x_0 линия l состоит из дуг двух линий разрыва (L_j и L_k) и выходит обоими концами на границу ϵ_0-окрестности точки x_0 в точках a_j и a_k. Если при этом для линии L_k (или L_j) $f_N^-(x) \geqslant 0$ ($|x - x_0| \leqslant \epsilon_0$), $f_N^+(x_0) = 0$, то при переходе к функции $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha n_0$ (см. доказательство леммы 3) часть линии L_k (или L_j) перестает быть линейной особенностью. В достаточно малой ϵ-окрестности линии l система (2) уже не имеет линейных особенностей, соединяющих точки a_j и a_k (или близкие к ним). Тогда не существует топологического отображения, переводящего траектории системы (1) в ϵ_0-окрестности точки x_0 в траектории системы (2) и сдвигающего каждую точку меньше, чем на ϵ. Значит, x_0 — особая точка.

Если же для обеих линий L_j и L_k имеем

$$f_N^-(x_0) \neq 0, \quad f_N^+(x_0) \neq 0, \tag{4}$$

но для какой-нибудь третьей линии разрыва L_m имеем $f_N^+(x_0) = 0$, то линия L_m вблизи точки x_0 не содержит дуг линейных особенностей (иначе точка x_0 была бы точечной особенностью). Тогда при переходе к функции (3) на L_m появляется линейная особенность с концом x_0 и при достаточно малом α линии L_j и L_k остаются линейными особенностями в силу (4). Для системы (2) точка x_0 является точкой стыка трех линейных особенностей. Топологическая структура окрестности точки x_0 меняется при переходе к системе (2), и x_0 — особая точка.

2. Пусть A и $\tilde{A}$ — системы (1) и (2). Система $\tilde{A}$ в области $\tilde{H}$ *ϵ-тождественна* ([185], стр. 41) системе A в области H, т.е.

$$(\tilde{H}, \tilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A),$$

если существует такое топологическое отображение области $\tilde{H}$ на область H, при котором каждая точка сдвигается меньше, чем на ϵ, а траектории и особые точки системы $\tilde{A}$ переходят в траектории и особые точки системы A, и если обратное отображение обладает этими же свойствами. Такое отображение в дальнейшем называется *ϵ-отображением.*

Пусть система A класса C_*^1 в области G, а W — замкнутая или открытая подобласть, $\bar{W} \subset G$.

Система A называется *грубой* ([185], стр. 64) в области W, если существует такая область H, $\bar{W} \subset H \subset \bar{H} \subset G$, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждой системы $\tilde{A}$, δ-близкой к A в $C_*^1(G)$, найдется такая область $\tilde{H}$, что

$$(\tilde{H}, \tilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A). \tag{5}$$

Можно показать, что грубость или негрубость системы A в области W не зависит от того, какова область $G \supset W$.

З а м е ч а н и е. Пусть $\bar{D} \subset G$. Если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждой системы $\tilde{A}$, δ-близкой к A в $C_*^1(G)$, найдется такая область $\tilde{D}$, что $(\tilde{D}, \tilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (D, A)$, то система A не обязательно груба в D (пример в [185], стр. 482), но груба в любой подобласти W, строго внутренней для D (в самом деле, тогда условие (5) выполнено, если взять $H = D$).

Если система A груба в W, то найдется такая область H_1, содержащая W строго внутри, что система A груба и в области H_1.

Из определения грубости следует, что если система груба в некоторой области, то она груба и в любой подобласти. Это позволяет дать следующее определение. Траектория или ее часть (дуга, точка) называется *грубой*, если у нее существует окрестность, в которой система является грубой.

Обыкновенная точка (в которой $f(x) \neq 0$), лежащая внутри области G_j гладкости функции $f(x)$ в (1), является грубой. Грубой является также любая точка или дуга гладкой линии разрыва, если в этой точке или на этой дуге $f_N^-(x) f_N^+(x) \neq 0$ (и $f^0(x) \neq 0$, если $f_N^-(x) f_N^+(x) < 0$). Это следует из доказательства леммы 1.

Грубыми являются также лежащие внутри G_j особые точки типа "седло", "узел", "фокус", если матрица линеаризованной (в рассматриваемой особой точке) системы имеет $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} \neq 0$ ([185], §§ 8, 9). При наличии хотя бы одного собственного значения λ с $\operatorname{Re} \lambda = 0$ особая точка — негрубая ([185], стр. 75, 103).

Лежащая на линии разрыва точка может быть как грубой, так и негрубой, даже в том случае, когда в ее окрестности траектории расположены топологически так же, как в окрестности обыкновенной точки. Например, для системы

$$\dot{y} = 1 \quad (y < 0), \qquad \dot{y} = x^2 \quad (y > 0); \qquad \dot{x} = 1 \tag{6}$$

через каждую точку проходит единственная траектория. Точка (0, 0) в топологическом отношении ничем не выделяется. Сколь угодно близкая к (6) (при малых $a \neq 0$) система

$$\dot{y} = 1 \quad (y < 0), \qquad \dot{y} = x^2 - a^2 \quad (y > 0); \qquad \dot{x} = 1 \tag{7}$$

имеет линейную особенность — линию $-a < x < a$, $y = 0$, в точках которой траектории сливаются. Значит, система (7) не ϵ-тождественна системе (6). Поэтому система (6) — негрубая в любой окрестности точки (0, 0) и эта точка — негрубая.

Любая точка или дуга линейной особенности класса AB для системы (1) — негрубая, так как сколь угодно близкая к (1) система (2) с функцией $\tilde{f}$ вида (3) имеет линейную особенность уже другого класса — класса AA_1.

Грубые системы можно назвать системами нулевой степени негрубости. Среди негрубых систем можно последовательно выделить системы 1-й, 2-й и т.д. степеней негрубости. Пусть $k \geqslant 1$ и системы 0-й, ..., $(k-1)$-й степени негрубости уже определены.

Система A класса C_*^{2k+1} в области G называется *системой k-й степени негрубости* ([185], стр. 217, 338) в области W, $\overline{W} \subset G$, если A не является системой меньшей степени негрубости в W и если существует такая область H, $\overline{W} \subset H \subset \overline{H} \subset G$, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что каждая система $\tilde{A}$, δ-близкая к A в метрике $C_*^{2k+1}(G)$, или имеет в W степень негрубости меньше k, или для нее существует область $\tilde{H}$, в которой $(\tilde{H}, \tilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$.

Система A класса C_*^{∞} имеет степень негрубости ∞ в области W, если для любых $\delta > 0$ и k существуют системы степени негрубости $\geqslant k$ в области W, δ-близкие к A в метрике C_*^{2k+1}.

Из этих определений следует, что система k-й степени негрубости в области W имеет в любой подобласти степень негрубости не больше k.

Пусть последовательность областей $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ стягивается к точке a и в области G_i система имеет степень негрубости k_i. Тогда $k_0 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots$ и существует такое j, что $k_i = k_j$ для всех $i \geqslant j$. Для каждой содержащей точку a области $G \subset G_j$ найдется такая область G_i, что $a \in G_i \subset G \subset G_j$, поэтому в G степень негрубости системы равна k_j. Это число k_j называется *степенью негрубости точки* a. Таким образом, степень негрубости точки a для системы A есть степень негрубости этой системы в каждой достаточно малой области, содержащей точку a. Аналогично определяется степень негрубости траектории.

Выбор класса гладкости C_*^{2k+1} в определении системы k-й степени негрубости определяется свойствами особых точек типа сложного фокуса ([185], стр. 264) и лежащих на линиях разрыва и их пересечениях особых точек, состоящих только из секторов классов G, L, S, S_0 (пп. 2, 3 § 17). При отсутствии таких точек класс C_*^{2k+1} можно заменить классом C_*^{k+1}.

3. Число x_0 называется *корнем кратности* r функции $f(x) \in C^r$ $(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$, если

$$f(x_0) = 0, \ f^{(i)}(x_0) = 0 \quad (i < r), \qquad f^{(r)}(x_0) \neq 0, \quad r \geqslant 1. \tag{8}$$

Следующие леммы близки к утверждениям п. 3 § 1 [185] и доказываются теми же методами.

Л е м м а 5. *Пусть x_0 — корень кратности r функции $f \in C^r$, $f(x) \neq 0$ при $\alpha \leqslant x < x_0$ и при $x_0 < x \leqslant \beta$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что любая функция $\breve{f}$, при каком-нибудь $m \geqslant r$ удовлетворяющая неравенству*

$$\| \breve{f} - f \|_{C^m} < \delta, \tag{9}$$

может иметь на отрезке $[\alpha, \beta]$ не больше r корней; все они лежат на интервале $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$; сумма их кратностей равна r или меньше на четное число.

Л е м м а 6. *Пусть $f(x) \in C^p[a, b]$, $p \geqslant 1$, $x_0 \in (a, b)$ и*

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(p)}(x_0) = 0. \tag{10}$$

Тогда для любых $\epsilon > 0, \delta > 0, m \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant p$ существует функция $\breve{f}(x) \in C^p$, удовлетворяющая неравенству (9), совпадающая с $f(x)$ при $|x - x_0| \geqslant \epsilon$ и имеющая на отрезке $|x - x_0| \leqslant \epsilon/2$ корень x_0 кратности $p + 1 - k$ и еще не менее k различных корней c_i.

З а м е ч а н и е 1. Можно добиться того, чтобы любое заданное число $j \leqslant k$ корней c_i лежало на интервале $(x_0 - \epsilon/2, x_0)$.

З а м е ч а н и е 2. Можно сделать так, чтобы корни c_i были простыми, т.е. имели кратность 1.

Л е м м а 7 ([64], стр. 248). *Если $f(x)$ — непрерывная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то при почти всех c функция $f(x) - c$ имеет лишь конечное число корней на $[a, b]$.*

Утверждение леммы справедливо, в частности, для всех функций класса $C^1[a, b]$.

Л е м м а 8. *Пусть функция $f(x) \in C^p$ имеет на отрезке $[a, b]$ бесконечно много корней, x_0 — одна из предельных точек для корней. Тогда для любых $\delta > 0$ и $m \geqslant p$ найдется функция $\breve{f}(x) \in C^p$, удовлетворяющая (9) и имеющая на $[a, b]$ только конечное число корней, из которых корень x_0 имеет кратность p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя к $f, f', \ldots, f^{(p-1)}$ теорему Ролля, получаем, что $f^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$ имеет на $[a, b]$ бесконечно много корней с предельной точкой x_0. В этой точке справедливы равенства (10). Для заданных δ и m функция

$$f(x; \alpha) = f(x) + \alpha (x - x_0)^p$$

при всех $\alpha \in (\alpha_1, 2\alpha_1)$, где $\alpha_1 > 0$ достаточно мало, удовлетворяет (9) и имеет корень x_0 кратности p. В силу (10) для некоторого $\eta > 0$

$$f(x; \alpha_1) > 0 \quad (x_0 < x \leqslant x_0 + \eta), \qquad (-1)^p f(x; \alpha_1) > 0 \quad (x_0 - \eta \leqslant x < x_0).$$

То же справедливо для $f(x; \alpha)$ при всех $\alpha \in (\alpha_1, 2\alpha_1)$.

По лемме 7 найдется такое $\alpha \in (\alpha_1, 2\alpha_1)$, что функция

$$f(x; \alpha)(x - x_0)^{-p} \equiv f(x)(x - x_0)^{-p} + \alpha$$

имеет на отрезках $[a, x_0 - \eta]$ и $[x_0 + \eta, b]$ только конечное число корней. Тогда $\breve{f}(x) \equiv f(x, \alpha)$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

4. При исследовании грубости системы с гладкими правыми частями надо выяснить, являются ли грубыми ее особые точки, замкнутые траектории и имеются ли траектории, у которых обе полутраектории являются сепаратрисами ([185], стр. 165). По этому же плану исследуется грубость систем с кусочно непрерывными правыми частями класса C^1_*. Условия грубости особых точек таких систем получены в [186], см. ниже §§ 19, 20, а здесь рассматриваются замкнутые траектории, сепаратрисы и линейные особенности. При этом оказывается, что кроме траекторий надо рассматривать также линии, составленные из частей траекторий. С помощью таких линий в п. 3 § 17 строи-

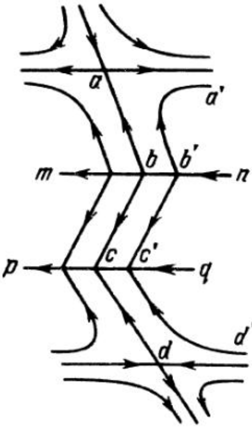


Рис. 48.

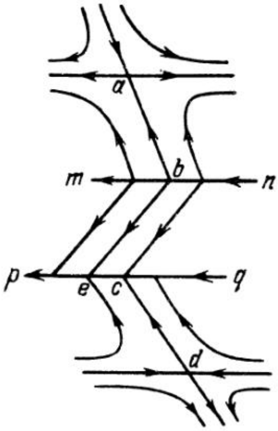


Рис. 49.

лась функция последования и определялся топологический класс особой точки, окрестность которой состоит из секторов G, L, S. Покажем, что такие же составные линии могут играть роль сепаратрис, идущих из одной особой точки в другую. Особые точки понимаются в смысле определения, данного в п. 1. Сепаратриса особой точки определяется так же, как определялась сепаратриса точечной особенности в п. 1 § 17.

На рис. 48 система с двумя линиями разрыва (mn и pq) содержит сепаратрисы ab и cd точек a и d. Эти сепаратрисы вместе с дугой bc траектории составляют линию $abcd$, которая идет из одной особой точки в другую и у которой оба конца являются сепаратрисами. Наличие такой линии приводит к негрубости системы. В самом деле, меняя сколь угодно мало наклон траекторий между линиями mn и pq, можно получить систему, в которой концы b и c сепаратрис ab и dc не соединены траекторией (рис. 49). Такая система имеет уже другую топологическую структуру. Следовательно, система, изображенная на рис. 48, — негрубая.

Система, изображенная на рис. 49, является грубой, если особые точки a и d — грубые. В этом случае точки a и d соединены линией $abecd$, состоящей из дуг траекторий и содержащей часть ec линейной особенности.

Сказанное приводит к следующему определению [186].

Линия, составленная из последовательно расположенных дуг траекторий, называется *политраекторией,* если она не проходит через особые точки и не содержит дуг линейных особенностей.

Политраекториями являются линии $abcd$ и $a'b'c'd'$ на рис. 48 и не является линия $abecd$ на рис. 49.

Из этого определения и теорем о существовании, единственности и продолжении решений следует, что для системы класса C^1_* через каждую неособую точку проходит единственная политраектория. Она продолжается или неограниченно, или до границы рассматриваемой области, или до особой точки. Политраектория может пересекать линейные особенности классов AA_1 и AA_3. Другие линейные особенности в соответствии с определением п. 1 состоят из особых точек, и политраектория, если достигает такой точки, заканчивается. Политраектория может быть также замкнутой кривой без самопересечений.

Каждая неконцевая точка политраектории является или точкой единственности, или точкой, в которой политраектория пересекает линейную особенность, переходя с одной ее стороны на другую. Поэтому две различные (из которых каждая не является продолжением другой) политраектории могут иметь общими только концы — особые точки. Политраектория может касаться линии разрыва правой части системы только своим концом (так как точка касания траектории с линией разрыва является особой; см. п. 1).

Двойной сепаратрисой называется траектория или политраектория, у которой обе концевые дуги являются сепаратрисами.

Л е м м а 9 [186]. *Система, грубая в ограниченной замкнутой области W, может иметь в этой области только конечное число особых точек.*

С л е д с т в и е. *Линейные особенности грубой системы могут принадлежать только классам* AA_1 *и* AA_3.

В самом деле, линейные особенности других классов состоят из особых точек. Грубая система имеет только конечное число особых точек.

Л е м м а 10 [186]. *Система, грубая в области W, не может иметь двойных сепаратрис, содержащихся в этой области.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что система A вида (1), грубая в области W, имеет двойную сепаратрису $ab \subset W$. Пусть H — такая область, как в определении грубости, $\bar{W} \subset H$. Тогда для некоторого $\rho_0 > 0$ замкнутая ρ_0-окрестность V сепаратрисы ab содержится в H и не содержит других особых точек, кроме a и b.

Пусть точка $x_0 \in ab$ такова, что в ее окрестности $f(x) \in C^1$, и $f(x_0) \neq 0$. Тогда для некоторого $\rho \in (0, \rho_0)$ угол между векторами $f(x)$ и $f(x_0)$ меньше $\pi/4$ при $|x - x_0| < \rho$. Положим для системы (2)

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha\eta(|x - x_0|)v, \tag{11}$$

где $v \neq 0$ — вектор, ортогональный вектору $f(x_0)$, число $\alpha > 0$ сколь угодно мало, а $\eta(\xi)$ — функция класса C^∞ $(0 \leqslant \xi < \infty)$,

$$\eta(\xi) > 0 \quad (\xi < \rho), \qquad \eta(\xi) = 0 \quad (\xi \geqslant \rho), \qquad \eta(\xi) = 1 \quad (\xi \leqslant \rho/2).$$

Тогда вне ρ-окрестности U точки x_0 траектории и политраектории системы (2) те же, что у (1), а внутри U траектории системы (2) пересекают траектории системы (1), все в одном направлении, например, слева направо. Вне U, но в той же области гладкости функции $f(x)$, через точку p дуги $x_0b \subset ab$ проведем сечение S (дугу без контакта) (рис. 50). Рассмотрим политраекторию T_2 системы (2), совпадающую с сепаратрисой ab системы (1) на участке от точки a до входа в U. В U она уже не совпадает с ab и пересекает сечение S в точке $p(\alpha)$, непрерывно зависящей от α и стремящейся к p при $\alpha \to 0$.

Так как ab — сепаратриса точки b, то существует такая последовательность дуг траекторий $a_ib_ic_i$ (или a_ib_i), $i = 1, 2, \ldots$, что

$$a_ib_i \to a_0b \subset ab, \qquad \rho(c_i, b) > \epsilon_0$$

(или точка b_i лежит на линейной особенности). Эти дуги, продолженные за точку a_i как политраектории, пересекают S в точках $p_i \to p$. Существует последовательность $\alpha_i \to 0$ $(i \to \infty)$, для которой $p(\alpha_i) = p_i$. При $\alpha = \alpha_i$ политраектория T_2, являющаяся сепаратрисой точки a, после пересечения с S в точке $p(\alpha_i) = p_i$ далее идет по дуге $a_ib_ic_i$ и

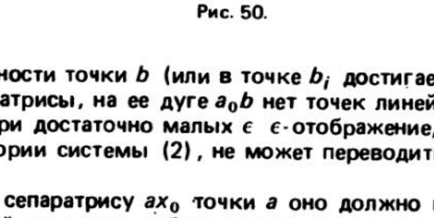


Рис. 50.

выходит из ϵ_0-окрестности точки b (или в точке b_i достигает линейной особенности). По определению сепаратрисы, на ее дуге a_0b нет точек линейных особенностей, поэтому в обоих случаях при достаточно малых ϵ ϵ-отображение, переводящее траектории системы (1) в траектории системы (2), не может переводить двойную сепаратрису ab в политраекторию T_2.

С другой стороны, сепаратрису ax_0 точки a оно должно переводить в сепаратрису точки a. Но для грубой системы особая точка a может иметь только конечное число сепаратрис (следует из [186]). Поэтому при достаточно малых ϵ ϵ-отображение не может переводить сепаратрису ax_0 ни в какую другую, кроме сепаратрисы T_2, совпадающей с ax_0 вблизи точки a. Это противоречит сказанному выше. Значит, предположение о существовании двойной сепаратрисы неверно, и лемма доказана.

У грубых систем класса C^1_* грубыми являются не только замкнутые траектории, но и замкнутые политраектории. Пусть замкнутая политраектория T пересекает последовательно гладкие линии разрыва $L_1, \ldots, L_k$ функции $f(x)$. По свойству политраекторий, пересечение происходит без касания. Пусть еще T пересекает без касания гладкую дугу L_0, лежащую в области гладкости функции $f(x)$ или совпадающую с L_k. Линии L_i заданы параметрически:

$$x = l_i(\sigma_i) \in C^1, \qquad l_i'(\sigma_i) \neq 0 \qquad (\alpha_i < \sigma_i < \beta_i).$$

Политраектория T выходит из точки $x^* = l_0(\sigma_0^*) \in L_0$ и возвращается на L_0 в ту же точку. С помощью теоремы о дифференцируемости решения по начальным условиям и

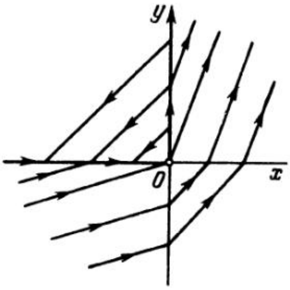


Рис. 51.

теоремы о неявной функции легко получить, что из любой точки $x_0 = l_0(\sigma_0) \in L_0$, достаточно близкой к x^*, выходит политраектория, проходящая вблизи T, пересекающая линии $L_1, \ldots, L_k$ в точках $l_i(\sigma_i)$, $i = 1, \ldots, k$, и возвращающаяся на L_0 в точке $x_{k+1} = l_0(\sigma_{k+1})$, и что для этих точек пересечения функции

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}(\sigma_i) \in C^1, \qquad \sigma_{i+1}'(\sigma_i) \neq 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{12}$$

Функция $\psi(\sigma_0) = \sigma_{k+1}(\sigma_k(\ldots\sigma_1(\sigma_0)\ldots)) \in C^1$ называется *обобщенной функцией последования*. Политраектории не пересекаются, поэтому $\psi(\sigma_0)$ возрастает; $\psi'(\sigma_0) \neq \neq 0$. Политраектория замкнутая тогда и только тогда, когда $\psi(\sigma_0) = \sigma_0$.

Если политраектория проходит через точку стыка нескольких линий разрыва, то эта точка — неособая (по определению политраектории). Поэтому в ее окрестности векторы $f(x)$ не касаются линий разрыва. Подобно предыдущему доказывается, что тогда существуют левая и правая производные $\psi_-'(\sigma_0)$ и $\psi_+'(\sigma_0)$ функции $\psi(\sigma_0)$.

Лемма 11 [186]. *Для грубости замкнутой политраектории, пересекающей дугу L_0 в точке $x^* = l_0(\sigma_0^*)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\psi_-'(\sigma_0^*) - 1)(\psi_+'(\sigma_0^*) - 1) > 0.$$

Замечание. В отличие от политраекторий, траектории систем класса C^1_* могут сливаться и могут проходить через особые точки. Поэтому не всякая замкнутая траектория является политраекторией. Для таких замкнутых траекторий не всегда справедливы утверждения, доказанные для политраекторий.

Например, у грубой системы устойчивый предельный цикл или его часть может являться линейной особенностью класса AA_1. В этом случае $\psi(\sigma_0) = \mathrm{const}$ на некотором интервале $\gamma_1 < \sigma_0 < \gamma_2$.

Далее, грубая система может иметь несчетное множество замкнутых траекторий, проходящих через особую точку. Например, у системы

$$\dot{x} = 2 + \operatorname{sgn} x - 2\operatorname{sgn} y, \qquad \dot{y} = 2 + 2\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y,$$

доопределяемой на линиях разрыва согласно а) § 4, замкнутыми траекториями являются трехзвенные ломаные с вершинами $(-a, 0)$, $(0, 0)$ и $(0, a)$ для любого $a > 0$ (рис. 51).

Теорема 1 [186]. *Для грубости системы (1) класса C^1_* в замкнутой ограниченной области необходимо и достаточно, чтобы она не имела двойных сепаратрис, чтобы* *особых точек и замкнутых политраекторий (если они есть) было только конечное число и чтобы все они были грубыми.*

Для систем класса C^1 подобная теорема доказана в [185] (стр. 165).

§ 19. Особые точки на линии разрыва

Здесь изучаются особые точки и точечные особенности, лежащие на линии разрыва правых частей системы двух дифференциальных уравнений. Устанавливаются аналитические критерии принадлежности этих точек тому или иному топологическому классу. Указываются все грубые особые точки и точки первой степени негрубости, а также некоторые другие.

1. Чтобы исследовать систему, правые части которой разрывны на гладкой линии, можно сделать гладкое преобразование, при котором эта линия переходит в отрезок оси Ox. Поэтому далее рассматриваются системы, с правыми частями, разрывными на оси Ox.

В области G, разделенной осью Ox на части G^- $(y<0)$ и G^+ $(y>0)$, рассмотрим систему

$$\dot{x}=P(x,y),\qquad \dot{y}=Q(x,y). \tag{1}$$

Пусть $P,Q\in C_*^k$, $k\geqslant 1$. Это значит, что

$$P=P^-(x,y),\quad Q=Q^-(x,y)\ \text{ в } G^-,\qquad P=P^+(x,y),\quad Q=Q^+(x,y)\ \text{ в } G^+,$$

$$P^-,\ Q^-\in C^k(\overline{G^-}),\qquad P^+,\ Q^+\in C^k(\overline{G^+}).$$

По тем отрезкам оси Ox, где $Q^-(x,0)Q^+(x,0)\leqslant 0$, возможно движение со скоростью

$$\dot{x}=P^0(x),\qquad \dot{y}=0. \tag{2}$$

Функция $P^0(x)$ определена и принадлежит C^k на этих отрезках всюду, может быть, кроме точек, где

$$Q^-(x,0)=Q^+(x,0)=0,\qquad P^-(x,0)\neq P^+(x,0). \tag{3}$$

Предполагается также, что

$$\begin{aligned} &P^0(x)=P^-(x,0), && \text{если} && Q^-(x,0)=0, && Q^+(x,0)\neq 0,\\ &P^0(x)=P^+(x,0), && \text{если} && Q^+(x,0)=0, && Q^-(x,0)\neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Эти условия выполнены, в частности, при доопределении а) § 4. В этом случае

$$P^0(x)=\frac{f(x)}{Q^-(x,0)-Q^+(x,0)},\qquad f(x)=P^+(x,0)Q^-(x,0)-P^-(x,0)Q^+(x,0). \tag{5}$$

2. Исследуем случаи, когда функции $Q^-(x,0)$, $Q^+(x,0)$ и $P^0(x)$ могут обращаться в нуль только в изолированных точках. Согласно п. 1 § 18 только эти точки и будут особыми. Имеются 6 типов таких точек [187], характеризуемых следующими условиями (значения всех функций берутся в рассматриваемой точке $(c,0)$ оси Ox):

1. $Q^-Q^+<0$, $P^0(c)=0$.
2. $Q^+=0$, $Q^-\neq 0$, $P^+\neq 0$ или $Q^-=0$, $Q^+\neq 0$, $P^-\neq 0$.
3. $Q^-=Q^+=0$, $P^-\neq 0$, $P^+\neq 0$.
4. $P^+=Q^+=0$, $Q^-\neq 0$ или $P^-=Q^-=0$, $Q^+\neq 0$.
5. $Q^-=Q^+=0$ и только одна из функций P^-, P^+ равна 0.
6. $P^-=Q^-=P^+=Q^+=0$.

Для каждого из этих типов исследуем возможные расположения траекторий вблизи рассматриваемой точки $(c,0)$.

Т и п 1. Пусть в точке $(c,0)$

$$Q^->0,\qquad Q^+<0,\qquad P^0=0 \tag{6}$$

(случай $Q^-<0$, $Q^+>0$, $P^0=0$ сводится к рассматриваемому заменой t на $-t$ в системе (1)). В окрестности точки $(c,0)$ имеем $|\dot{y}|>\mathrm{const}>0$, $|\dot{x}|<\mathrm{const}$ (при $y\neq 0$), поэтому из некоторой меньшей окрестности этой точки все решения за конечное время попадают на ось Ox. После этого они остаются там и удовлетворяют системе (2). Так

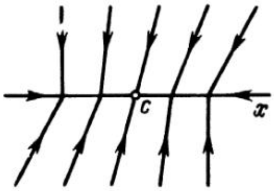


Рис. 52.

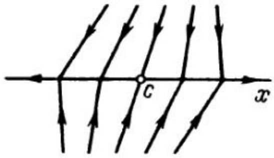


Рис. 53.

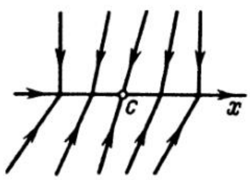


Рис. 54.

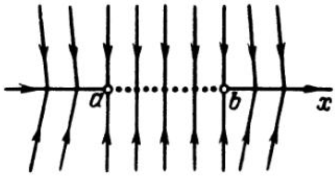


Рис. 55.

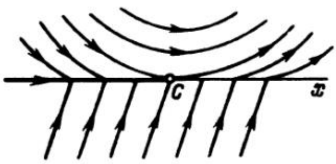


Рис. 56.

как $x = c$ — изолированный корень функции $P^0(x)$, то при малых $|x - c|$ возможны 3 случая (при условии (6)).

1a. В случае $(x - c)P^0(x) < 0$ $(x \neq c)$ решения по оси Ox с обеих сторон приближаются к точке $x = c$. Эта точка — устойчивый узел (рис. 52). Пример: $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -\operatorname{sgn} y$.

1b. В случае $(x - c)P^0(x) > 0$ $(x \neq c)$ решения по оси Ox с обеих сторон удаляются от точки $x = c$. Эта точка — седло (рис. 53). Пример: $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -\operatorname{sgn} y$.

1c. В случае, когда $P^0(x)$ имеет один и тот же знак при $x < c$ и при $x > c$, решения по оси Ox с одной стороны приближаются к точке $x = c$, а с другой — удаляются от нее. Эта точка — седлоузел (рис. 54). Пример: $\dot{x} = x^2$, $\dot{y} = -\operatorname{sgn} y$.

Итак, тип 1 содержит 3 топологических класса:

класс 1a — узел, состоящий из секторов $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$ (обозначения те же, что в п. 3 § 17);

класс 1b — седло из секторов $\bar{K}K\bar{K}K$;

класс 1c — седлоузел из секторов $\bar{K}Q\bar{Q}K$.

Топологическая эквивалентность особых точек, принадлежащих одному и тому же классу, следует из теоремы 2 § 17.

Если требование изолированности особых точек заменить требованием конечности числа линейных и точечных особенностей, то функция $P^0(x)$ сможет обращаться в нуль в отдельных точках и на целых отрезках. Эти отрезки будут линейными особенностями класса AA_2, а их концы — точечными особенностями. На рис. 55 точка a — полуузел, точка b — полуседло.

Тип 2. Пусть в точке $(c, 0)$

$$Q^- > 0, \quad Q^+ = 0, \quad P^+ > 0 \tag{7}$$

(другие случаи сводятся к этому заменами переменных). В некоторой окрестности этой точки

$$\dot{y} > \text{const} > 0 \quad \text{при } y < 0, \qquad \dot{x} > \text{const} > 0 \quad \text{при } y > 0.$$

Из той части окрестности, где $y < 0$, решения попадают на ось Ox. При $y > 0$ возможны следующие случаи:

2a. Если $(x - c)Q^+(x, 0) > 0$, то в каждую точку $(x, 0)$, где $c - \delta < x < c$, приходит одна траектория из области $y > 0$, а из каждой точки $(x, 0)$, $c < x < c + \delta$, уходит в эту область одна траектория. Пределом этих траекторий является траектория, проходящая через точку $(c, 0)$ и лежащая в области $y > 0$ (рис. 56). По участку $c - \delta \leqslant x \leqslant c$ оси Ox проходит траектория, для нее $\dot{x} = P^0(x) > 0$ в силу (4). Пример:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 1 \quad (y < 0); \qquad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = x \quad (y > 0).$$

2b. Если $(x - c)Q^+(x, 0) < 0$, то из точек $(x, 0)$, $c - \delta < x < c$ уходят траектории в область $y > 0$, а в точки $(x, 0)$, $c < x < c + \delta$ приходят траектории из этой области. Так

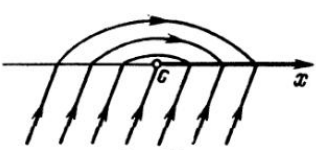


Рис. 57.

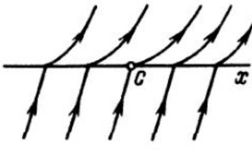


Рис. 58.

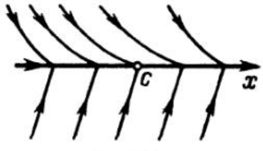


Рис. 59.

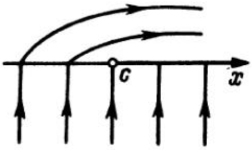


Рис. 60.

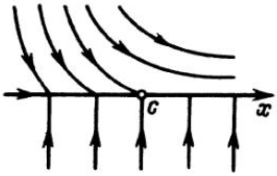


Рис. 61.

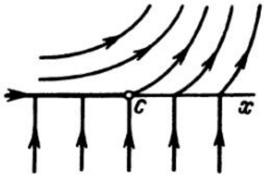


Рис. 62.

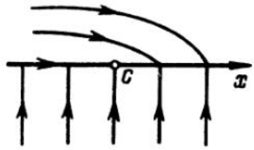


Рис. 63.

как вблизи точки $(c, 0)$ при $y > 0$ имеем $\dot{x} > \text{const} > 0$, $|\dot{y}| < \text{const}$, то названные выше траектории пересекают некоторый отрезок $x = c$, $0 \leqslant y \leqslant y_1$. Через точки этого отрезка, достаточно близкие к $(c, 0)$, проходят траектории, выходящие обоими концами на ось Ox (рис. 57). По участку $c \leqslant x \leqslant c + \delta$ оси Ox проходит траектория, для нее $\dot{x} = P^0(x) > 0$ в силу (4). Пример: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ $(y < 0)$; $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = -x$ $(y > 0)$.

2c. Если $Q^+(x, 0) > 0$ при $0 < |x - c| < \delta$, то все траектории в окрестности точки $(c, 0)$ переходят из области $y < 0$ в область $y > 0$ (рис. 58). Пример:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 1 \quad (y < 0); \qquad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = x^2 \quad (y > 0).$$

2d. Если $Q^+(x, 0) < 0$ при $0 < |x - c| < \delta$, то все траектории в окрестности точки $(c, 0)$ вливаются в траекторию, лежащую на оси Ox (рис. 59). Ось Ox — линейная особенность класса AA_1. Пример:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 1 \quad (y < 0); \qquad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -x^2 \quad (y > 0).$$

Таким образом, тип 2 состоит из 4 топологических классов: 2a (окрестность особой точки состоит из секторов $HQ\bar{Q}H$), 2b (секторы $\bar{K}K$), 2c (секторы HH), 2d (секторы $\bar{K}Q\bar{Q}K$). Во всех этих случаях точка $(c, 0)$ не является стационарной точкой, так как из (7) и (4) следует, что в тех случаях, когда имеются решения, лежащие на оси Ox, для них $\dot{x} = P^0(x) > 0$. Этим отличается, в частности, класс 2d от класса 1c.

Если требование изолированности особой точки заменить требованием конечности числа точечных и линейных особенностей, то функция $Q^+(x, 0)$ сможет обращаться в нуль на целых отрезках. Они будут линейными особенностями класса AB, а их концы — точечными особенностями (рис. 60–63, классы HK, $HQ\bar{Q}K$, $H\bar{Q}H$, $\bar{K}\bar{Q}K$).

Тип 3. В точке $(c, 0)$

$$Q^- = 0, \quad P^- \neq 0, \quad Q^+ = 0, \quad P^+ \neq 0. \tag{8}$$

Поэтому в каждой из полуокрестностей этой точки траектории могут быть расположены так же, как в верхней полуокрестности точки $(c, 0)$ на любом из рис. 56–59. Таким образом, имеются следующие возможности (рис. 64 — 71).

Каждому рисунку соответствует несколько топологических классов расположения траекторий в зависимости от того, имеют ли P^- и P^+ одинаковые или разные знаки, и в некоторых случаях в зависимости от знаков $P^0(x)$ с обеих сторон от рассматриваемой

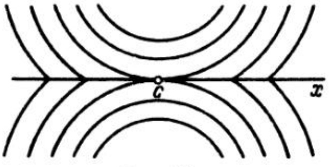


Рис. 64.

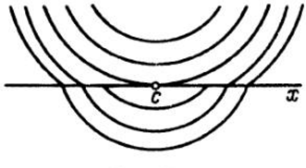


Рис. 65.

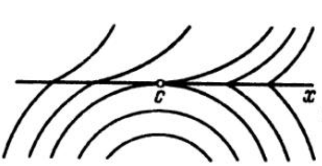


Рис. 66.

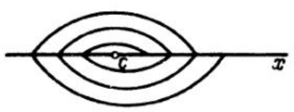


Рис. 67.

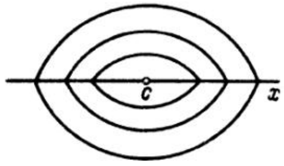


Рис. 68.

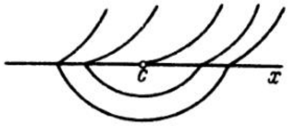


Рис. 69.

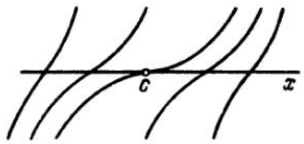


Рис. 70.

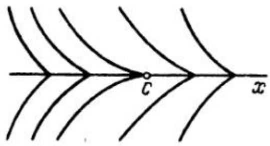


Рис. 71.

точки $(c, 0)$. При доопределении а) § 4 в случае $P^-P^+ > 0$ точка $(c, 0)$ – нестационарная, а в случае $P^-P^+ < 0$ – стационарная.

На рис. 64 в случае $P^-P^+ < 0$ – седло (класс $HHHH$), а в случае $P^-P^+ > 0$ – квазиседло (класс $\bar{Q}HQ\bar{Q}HQ$) с траекторией, идущей по оси Ox. На рис. 65 и 70 в случае $P^-P^+ > 0$ точки топологически не отличаются от обыкновенных (класс HH), а в случае $P^-P^+ < 0$ имеются по три класса ($G\bar{Q}HQ$, $L\bar{K}HK$, $S\bar{Q}HK$ для рис. 65, $\bar{Q}Q\bar{Q}Q$, $\bar{K}K\bar{K}K$, $\bar{K}Q\bar{Q}K$ для рис. 70) в зависимости от направления движения по оси Ox с обеих сторон от особой точки. На рис. 66 в случае $P^-P^+ > 0$ – один топологический класс $\bar{Q}HHQ$, а в случае $P^-P^+ < 0$ – два класса: $HK\bar{K}H$ и $HQ\bar{Q}H$. На рис. 67 и 68 в случае $P^-P^+ < 0$ – классы P_0 (фокус) и O_0 (центр), а в случае $P^-P^+ > 0$ – классы $LL(\psi)$ с $\psi(s) \neq s$ (квазифокус) и с $\psi(s) \equiv s$ (квазицентр); случаи центрофокуса здесь не рассматриваются. На рис. 69 в случае $P^-P^+ > 0$ – класс $K\bar{K}$, а в случае $P^-P^+ < 0$ – классы $\bar{Q}Q$ и $K\bar{K}$. На рис. 71 в случае $P^-P^+ < 0$ – класс HH, а в случае $P^-P^+ > 0$ точечной особенности нет – класс $\bar{K}Q\bar{Q}K$.

Каждый из этих классов состоит из одного или нескольких топологических классов в зависимости от того, входят ли траектории по оси Ox в особую точку за конечное или бесконечное время. Всего получается 39 топологических классов (в случае аналитических функций P^-, Q^-, P^+, Q^+ – 24 класса).

Т и п 4. Из одной полуплоскости траектории достигают оси Ox, не касаясь ее, а в другой полуплоскости на ее границе имеется стационарная точка. Она может быть любой стационарной точкой, которая возможна у системы класса C^1. Поэтому тип 4 содержит бесконечно много топологических классов. Простейшие из них будут перечислены в п. 5.

Т и п 5. В одной полуплоскости вектор (P, Q) касается оси Ox в рассматриваемой точке, и траектории расположены как в области $y > 0$ на любом из рис. 56 – 59. Для системы в другой полуплоскости рассматриваемая точка – стационарная, любого вида.

Т и п 6. Рассматриваемая точка является стационарной как для системы $\dot{x} = P^-$, $\dot{y} = Q^-$, так и для системы $\dot{x} = P^+$, $\dot{y} = Q^+$. Картина расположения траекторий вблизи этой точки склеена из двух картин полуокрестностей любых стационарных точек.

Каждый из типов 5 и 6 содержит бесконечно много топологических классов.

Покажем, что грубые особые точки содержатся только в типах 1 и 2, а особые точки 1-й степени негрубости — только в типах 1 — 4.

Лемма 1 [188]. *Изолированные особые точки типов 3 и 4 — негрубые.*

Доказательство. Пусть $(c, 0)$ — изолированная особая точка типа 3 системы A вида (1), т.е. в этой точке выполнены условия (8). Для любого c_1, близкого к c, рассмотрим систему $\widetilde{A}$, получаемую из A заменой $Q^+(x, y)$ на функцию $Q^+(x, y) - Q^+(c_1, 0)$. Система A имеет в некоторой 2ϵ-окрестности H точки $(c, 0)$ только одну особую точку — точку $(c, 0)$, а при $|c_1 - c| < \epsilon$ система $\widetilde{A}$, сколь угодно близкая к A, если $|c_1 - c|$ достаточно мало, имеет в ϵ-окрестности точки $(c, 0)$ две особые точки: $(c, 0)$ и $(c_1, 0)$. Поэтому $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\not\equiv} (H, A)$ для любой области $\widetilde{H}$. Значит, точка $(c, 0)$ — негрубая.

Пусть $(c, 0)$ — особая точка типа 4 системы A и в этой точке $P^+ = Q^+ = 0$, $Q^- \neq 0$, а в ее 2ϵ-окрестности H нет других особых точек. Возьмем сколь угодно малое $y_1 > 0$. Система $\widetilde{A}$, получаемая из A заменой $P^+(x, y)$ и $Q^+(x, y)$ на функции $P^+(x, y) - P^+(c, y_1)$ и $Q^+(x, y) - Q^+(c, y_1)$, сколь угодно близка к A и имеет особую точку (c, y_1). При $y > 0$ система $\widetilde{A}$ класса C^1, поэтому нет траекторий, входящих в эту особую точку за конечное время. У системы A в особую точку $(c, 0)$ из области $y < 0$ входит за конечное время траектория, т.е. особая точка лежит на этой траектории. Поэтому для любой области $\widetilde{H}$ имеем $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\not\equiv} (H, A)$, и точка $(c, 0)$ — негрубая.

Лемма 2 [188]. *Изолированная особая точка типа 5 не может иметь степень негрубости ниже 2, а типа 6 — ниже 3.*

Доказательство. Пусть у системы A точка $(c, 0)$ типа 5 и в ней $Q^- = Q^+ = P^+ = 0$, $P^- \neq 0$. При c_1, достаточно близком к c, система $\widetilde{A}$, получаемая из A заменой функций $P^+(x, y)$, $Q^+(x, y)$ на

$$\widetilde{P}^+(x, y) = P^+(x, y) - P^+(c_1, 0), \qquad \widetilde{Q}^+(x, y) = Q^+(x, y) - Q^+(c_1, 0), \tag{9}$$

имеет в окрестности точки $(c_1, 0)$ две особые точки: $(c, 0)$ типа 2 и $(c_1, 0)$ типа 4. Поэтому система $\widetilde{A}$ не ϵ-тождественна системе A. По лемме 1 система $\widetilde{A}$ — негрубая, значит, система A не может иметь степень негрубости ниже 2.

Пусть $(c, 0)$ — точка типа 6 системы A. Система $\widetilde{A}$, полученная заменой (9), имеет две особые точки типа 4: $(c, 0)$ и $(c_1, 0)$. Поэтому она не ϵ-тождественна системе A. Сдвинув особую точку $(c_1, 0)$ в область $y > 0$, как в доказательстве леммы 1, получим систему A^*, не ϵ-тождественную системе $\widetilde{A}$ и имеющую особую точку (c_1, y_1) и негрубую особую точку $(c, 0)$. Поэтому система A^* — негрубая, система $\widetilde{A}$ не может иметь степень негрубости ниже 2, а A — ниже 3.

3. Укажем все грубые и негрубые изолированные особые точки типов 1 и 2, а также некоторые их бифуркации. Предполагается, что система (1) в области G удовлетворяет условиям п. 1. На линии разрыва используется доопределение а) § 4.

Лемма 3 [187]. *Если $(c, 0)$ — особая точка типа 1 (или 2) системы (1), то в некоторой окрестности этой точки любая достаточно близкая (в метрике C^1_*) система может иметь особые точки только того же типа.*

Доказательство следует из того, что неравенства $Q^-(x, 0)\, Q^+(x, 0) < 0$ для типа 1 и $Q^-(x, 0) \neq 0$, $P^+(x, 0) \neq 0$ для типа 2 справедливы и в окрестности точки $(c, 0)$; они сохраняются и для всех достаточно близких систем.

Пусть на отрезке T $(a \leqslant x \leqslant b)$ оси Ox имеется только конечное число особых точек $(c_i, 0)$, $i = 1, \ldots, m$ $(m \geqslant 0)$ системы A вида (1), все они типа 1, точки $x = a$ и $x = b$ — неособые. Тогда функции Q^- и Q^+ на этом отрезке сохраняют знаки, и в некоторой его окрестности V имеем $|Q(x, y)| > \text{const} > 0$ при $y \neq 0$. Содержащуюся в V замкнутую область, ограниченную 4 дугами траекторий, выходящими из концов отрезка, и двумя отрезками прямых $y = \pm h$ (рис. 72), назовем областью типа 1.

Лемма 4 [187]. *Рассмотрим систему A в области H типа 1. Для любого $\epsilon > 0$ найдутся числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, обладающие следующим свойством. Пусть система $\widetilde{A}$ δ-близка к A в метрике C^1_* и для системы $\widetilde{A}$ функция $\widetilde{P}^0(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ корни только в точках $\widetilde{c}_i$, $|\widetilde{c}_i - c_i| < \eta$, $i = 1, \ldots, m$.*

Тогда найдется такая область $\widetilde{H}$, что $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$.

Доказательство. Пусть

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m < c_{m+1} = b; \quad 2\eta < \min_i (c_{i+1} - c_i).$$

Каждый из отрезков $[c_i, c_{i+1}]$ отобразим в отрезок $[\widetilde{c}_i, \widetilde{c}_{i+1}]$ линейно. Получим топологическое отображение $\widetilde{\xi} = \psi(\xi)$ отрезка $[a, b]$ в себя, $|\widetilde{\xi} - \xi| < \eta$. При достаточно малых δ и η функция $\widetilde{P}^0$ имеет на каждом интервале $(\widetilde{c}_i, \widetilde{c}_{i+1})$ тот же знак, что функция P^0 на интервале (c_i, c_{i+1}).

Траектории системы А удовлетворяют уравнению $dx/dy = P/Q$. Пусть $x = \varphi(y, \xi)$ — его решение с начальным условием $\varphi(0, \xi) = \xi$, а $x = \widetilde{\varphi}(y, \xi)$ — аналогичное решение для

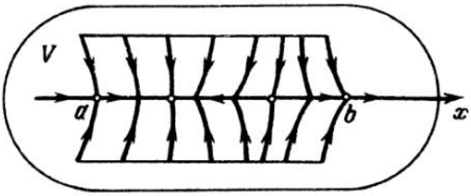


Рис. 72.

$\widetilde{A}$. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке $(\varphi(y, \xi), y) \in H$ точку $(\widetilde{\varphi}(y, \psi(\xi)), y)$, — топологическое. Оно переводит траектории системы А в траектории системы $\widetilde{A}$ и при достаточно малых δ и η сдвигает каждую точку меньше, чем на ϵ.

Теорема 1 [187]. *Пусть для системы* $A \in C^p_*$ *вида* (1)

$$Q^-(x, 0)\, Q^+(x, 0) < 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b), \qquad P^0(a) \neq 0, \qquad P^0(b) \neq 0. \tag{10}$$

Для того чтобы эта система имела степень негрубости s $(0 \leqslant s \leqslant p-1)$ в области H_0 типа 1, пересечение которой с осью Ox есть отрезок $a \leqslant x \leqslant b$, необходимо и достаточно, чтобы функция $P^0(x)$ на этом отрезке имела только конечное число корней $c_1, \ldots, c_m$ $(m \geqslant 0)$ и чтобы их кратности $r_1, \ldots, r_m$ удовлетворяли условию $S = s$, где

$$S = (r_1 - 1) + \ldots + (r_m - 1). \tag{11}$$

Доказательство достаточности проводится индукцией по числу S, а необходимости — индукцией по числу s. Пусть $n \geqslant 0$. Если $n > 0$, то предполагаем, что достаточность доказана для всех $S < n$, а необходимость — для всех $s < n$; и то, и другое — для всех областей типа 1.

Достаточность. Пусть функция $P^0(x)$ имеет на $[a, b]$ только корни $c_1, \ldots, c_m$ кратностей $r_1, \ldots, r_m$ и в (11) $S = n$. В силу предположения индукции система А в окрестности отрезка $[a, b]$ оси Ox не может иметь степень негрубости $s < n$. Для системы А в области H такой, как в лемме 4, $H \supset H_0$ и любого $\epsilon > 0$ подберем числа δ и η по лемме 4. В силу (5) при достаточно малом δ для любой системы $\widetilde{A}$, δ-близкой к А в метрике C^{n+1}_*, функция $\widetilde{P}^0$ будет столь близка к P^0, что не сможет иметь корней вне η-окрестности V_i точек c_i. При достаточно малом δ функция $\widetilde{P}^0$ в V_i имеет корни c_{ik} кратностей q_{ik}, $k = 1, \ldots, l_i$, и по лемме 5 § 18

$$\sum_{k=1}^{l_i} q_{ik} \leqslant r_i, \quad \sum_{k=1}^{l_i} (q_{ik} - 1) \leqslant r_i - l_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Если $m = 0$ или $l_i = 1$ для всех i, то по лемме 4 найдется такая область $\widetilde{H}$, что $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$. В частности, при $n = 0$ возможен только этот случай, значит, система А — грубая.

Если же $l_i \geqslant 2$ для некоторого i, то из (12) имеем

$$\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l_i} (q_{ik} - 1) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (r_i - 1) - 1 = S - 1. \tag{13}$$

При достаточно малом $\delta > 0$ для системы $\widetilde{A}$ можно так построить область $\widetilde{H}$ типа 1, чтобы $H \subset \widetilde{H}$ и чтобы замыкание области $\widetilde{H}$ не содержало особых точек системы $\widetilde{A}$, не лежащих в H. Так как $\widetilde{S} \leqslant n - 1$ (см. (13)), то в силу предположения индукции система $\widetilde{A}$ имеет в $\widetilde{H}$ степень негрубости не больше $n - 1$.

Следовательно, в области H система А имеет степень негрубости $s \leqslant n$. Так как случай $s < n$ невозможен (см. выше), то $s = n$.

Необходимость. Пусть система А имеет степень негрубости n в области H.

Допустим, что существуют такие точки $c_i \in (a, b)$ и числа $r_i \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, что $P^0(x) \neq 0$ при $x \neq c_i$,

$$\frac{d^k P^0(c_i)}{dx^k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, r_i - 1), \qquad \sum_{i=1}^{m} (r_i - 1) \geqslant n + 1. \tag{14}$$

Тогда $r_j > 2$ для некоторого j. Пусть замкнутая окрестность V точки c_j лежит в (a, b) и не содержит точек $c_i, i \neq j$. По лемме 6 § 18 для любых $\delta' > 0$ и $q \geqslant p$ найдется функция $P_1(x)$, имеющая в V корень c_j кратности $r_j - 1$ и корень $\tilde{c}_j \neq c_j$, совпадающая с $P^0(x)$ вне V и такая, что $\| P_1 - P^0 \|_{C^q} < \delta'$. В силу (5) найдется система $\tilde{A}$, δ-близкая в C^q_* к системе А и такая, что для нее функция $\tilde{P}^0(x)$ совпадает с $P_1(x)$. Система $\tilde{A}$ имеет особые точки $(c_i, 0)$, $i = 1, \ldots, m$, и $(\tilde{c}_j, 0)$. Их больше, чем у системы А, поэтому она не ϵ-тождественна системе А. В случае $n = 0$ это противоречит предположению о грубости системы А.

В случае $n > 0$ степень негрубости системы А равна n, значит, для системы $\tilde{A}$ она не больше $n - 1$. По предположению индукции, для системы $\tilde{A}$ сумма $\tilde{S}$, аналогичная (11), не больше $n - 1$. Но для системы $\tilde{A}$ функция $\tilde{P}^0$ имеет корни $c_i, i = 1, \ldots, m$, кратностей $\tilde{r}_i \geqslant r_i$ $(i \neq j)$, $\tilde{r}_j = r_j - 1$, и корень $\tilde{c}_j$. Поэтому для системы $\tilde{A}$

$$\tilde{S} \geqslant \sum_{i=1}^{m} (\tilde{r}_i - 1) \geqslant \sum_{i=1}^{m} (r_i - 1) - 1 \geqslant n$$

в силу (14). Противоречие показывает, что неравенство (14) невозможно.

Допустим, что $P^0(x)$ имеет бесконечно много корней на (a, b). По лемме 8 § 18 найдется функция $P_1(x)$, сколь угодно близкая к $P^0(x)$ и имеющая на $[a, b]$ только конечное число корней, хотя бы один из которых x_0 имеет кратность $r_0 = n + 1$. Найдется система $\tilde{A}$, близкая к А, для которой $\tilde{P}^0(x) = P_1(x)$. Тогда она не ϵ-тождественна системе А, степень негрубости системы $\tilde{A}$ не больше $n - 1$ и, по предположению индукции, $\tilde{S} \leqslant n - 1$. Это противоречит тому, что $r_0 = n + 1$.

Итак, для системы А n-й степени негрубости функция $P^0(x)$ имеет только конечное число корней и не может обладать свойствами (14). Значит, эти корни имеют кратности r_i и

$$S = (r_1 - 1) + \ldots + (r_m - 1) \leqslant n.$$

В случае $S < n$, по предположению индукции, система имеет степень негрубости меньше n. Поэтому $S = n$.

Следствие 1. *Для системы* (1) *класса* C^k_* $(k \geqslant s + 1)$ *особая точка типа* 1 *имеет степень негрубости* s *тогда и только тогда, когда в этой точке функция* $P^0(x)$ *имеет корень кратности* $s + 1$.

Следствие 2. *Если для системы* (1) *класса* C^∞_* *на некотором отрезке оси* Ox

$$Q^-(x, 0)\, Q^+(x, 0) < 0, \qquad P^0(x) \equiv 0,$$

то этот отрезок — часть линейной особенности класса $\mathbf{AA}_2$ (п. 2 § 16) *и система в любой окрестности этого отрезка* (*или любой его точки*) *имеет степень негрубости* ∞.

Замечание. Отсюда не следует, что всякая физическая система, имеющая целый отрезок, состоящий из положений равновесия, может потерять его при сколь угодно малых возмущениях. Рассмотрим колебательную систему, описываемую уравнением второго порядка,

$$\ddot{x} + b \operatorname{sgn} \dot{x} + g(x) = f(x, \dot{x}), \tag{15}$$

где функции $f, g \in C^1$. Любые возмущения этих функций приводят к возмущениям лишь второго уравнения системы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = f(x, y) - g(x) - b \operatorname{sgn} y, \tag{16}$$

к которой сводится уравнение (15). Если имеется отрезок оси Ox, на котором $| f(x, 0) - g(x) | \leqslant b$, то он целиком состоит из положений равновесия. Та его часть, где $| f(x, 0) - g(x) | \leqslant b - \epsilon$, сохраняется при любых возмущениях функции $f - g$, не превосходящих ϵ. Такой отрезок является грубой особенностью по отношению к возмущениям второго уравнения в (16) или уравнения (15), т.е. по отношению к возмущениям физической системы.

По отношению к возмущениям обоих уравнений (16) эта особенность имеет степень негрубости ∞ в силу следствия 2 (если $f, g \in C^\infty$). Но такие возмущения не имеют физического смысла. Таким образом, в ряде случаев надо рассматривать грубость системы по отношению к возмущениям лишь некоторых уравнений системы.

В [5] (§§ 3.1, 3.2) рассматривается много примеров физических систем, имеющих бесконечное множество состояний равновесия, заполняющее целый отрезок в фазовом пространстве. Исследуется устойчивость этих состояний равновесия.

В [189] указывается, что для неголономных механических систем типичным является случай, когда множество состояний равновесия — многообразие, размерность которого равна числу неголономных связей.

Бифуркации особых точек типа 1 полностью определяются бифуркациями корней функции $P^0(x)$ с учетом знаков этой функции с каждой стороны от каждого корня.

Если $x = c$ — корень кратности 1 функции $P^0(x)$, то при переходе через этот корень функция $P^0(x)$ меняет знак, поэтому точка $(c, 0)$ класса 1a или 1b (рис. 52, 53). В силу

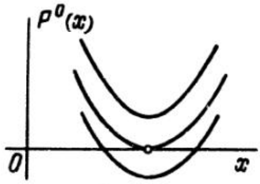


Рис. 73.

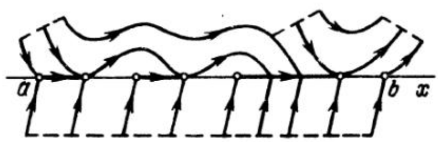


Рис. 74.

следствия 1 теоремы 1 эта точка — грубая, т.е. не испытывает бифуркаций при малых (в C^1) изменениях системы.

Если $x = c$ — корень кратности 2 функции $P^0(x)$, то функция $P^0(x)$ не меняет знака при переходе через этот корень. Поэтому особая точка $(c, 0)$ класса 1c. При малых (в C^2) изменениях функции $P^0(x)$ возможны 3 случая: корень кратности 2 сохраняется (возможно, сдвигается по оси Ox); корень исчезает; корень распадается на два корня кратности 1 (рис. 73). Поэтому особая точка класса 1c 1-й степени негрубости (рис. 54) при малом изменении системы или сохраняет свой топологический класс, или исчезает (при этом остается линейная особенность класса AA_1, рис. 30), или распадается на 2 грубые особые точки классов 1a и 1b (рис. 72).

Рассмотрев бифуркации трехкратного корня функции $P^0(x)$, можно получить все возможные бифуркации особых точек типа 1 2-й степени негрубости.

Рассмотрим теперь систему A вида (1) с особыми точками типа 2. Пусть, например, на рассматриваемом отрезке T оси Ox

$$Q^-(x, 0) > 0, \quad P^+(x, 0) > 0, \quad P^0(x) \neq 0. \tag{17}$$

Здесь и далее неравенства для $P^0(x)$ относятся к тем точкам и отрезкам, где определена функция $P^0(x)$. На концах каждого такого отрезка в случае (17) имеем $Q^+(x, 0) = 0$, поэтому в силу (4) там, а значит и на всем отрезке, $P^0(x) > 0$. Все дальнейшее относится к такой окрестности V отрезка T, в которой при некотором $\mu > 0$

$$|Q^-(x, y)| > \mu, \quad |P^+(x, y)| > \mu, \quad |P^0(x)| > \mu. \tag{18}$$

Пусть $H \subset V$, в H имеется конечное число особых точек (в силу (17) они типа 2), H — замкнутая область, граница которой — простая замкнутая кривая, состоящая из конечного числа дуг траекторий и дуг без контакта, не проходящая через особые точки, имеющая только две общие точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ с осью Ox и пересекающая ее в этих точках (рис. 74). Концы этих дуг траекторий назовем *угловыми точками*. Точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ не должны лежать на выбранных дугах без контакта. Область H не должна содержать сепаратрис, соединяющих особую точку с угловой, и проходящих внутри H (но не по оси Ox) дуг траекторий, соединяющих две угловые точки. Такую область назовем областью типа 2.

Сепаратрису особой точки $(c, 0)$ системы A с условием (17) назовем *левой* (*правой*), если вблизи этой точки на сепаратрисе $x < c$ ($x > c$) и $y > 0$.

Лемма 5 [187]. *Пусть в области H типа 2 для системы A выполнены условия (18) и имеется только конечное число особых точек $(c_i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть система $\widetilde{A}$ δ-близка в C^1 к системе A, имеет только особые точки $(d_i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, причем*

1) *$|d_i - c_i| < \eta$ и точка $(d_i, 0)$ того же класса, что $(c_i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$;*

2) из точки $(d_i, 0)$ выходит содержащаяся в H двойная сепаратриса системы $\widetilde{A}$, левая или правая для точки $(d_i, 0)$, тогда и только тогда, когда из точки $(c_i, 0)$ выходит содержащаяся в H двойная сепаратриса системы A, соответственно левая или правая для этой точки.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0, \eta > 0$, что $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$ в некоторой области $\widetilde{H}$.

Доказательство. Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ и η так мало, что $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$. Если двойная сепаратриса S_{im} системы A идет из точки $(c_i, 0)$ в точку $(c_m, 0)$, $m > i$, то по условию из точки $(d_i, 0)$ идет правая двойная сепаратриса $\widetilde{S}_{il}$ системы $\widetilde{A}$ в некоторую точку $(d_l, 0)$, $l > i$. Покажем, что $l = m$.

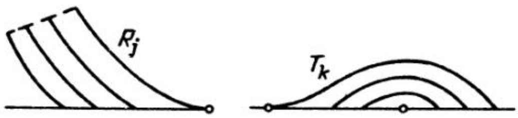


Рис. 75.

Предположим, например, что $l < m$. Из точки $(c_l, 0)$ идет левая сепаратриса S_{jl} системы A в некоторую точку $(c_j, 0)$. Сепаратрисы S_{im} и S_{jl} не могут иметь общих точек при $y \geqslant 0$, поэтому $i < j < l$. Из точки $(d_j, 0)$ идет правая сепаратриса $\widetilde{S}_{jk}$ системы $\widetilde{A}$ в некоторую точку d_k, $i < j < k < l$, так как $\widetilde{S}_{jk}$ и $\widetilde{S}_{il}$ не могут иметь общих точек. Из точки $(c_k, 0)$ идет левая сепаратриса системы A и т.д. Получаем последовательность вложенных отрезков $[c_i, c_m] \supset [c_j, c_l] \supset \ldots$ оси Ox; концы каждого отрезка соединены сепаратрисой системы A. Особых точек конечное число, поэтому процесс должен оборваться. Это приводит к противоречию с условием 2) леммы.

Построим область $\widetilde{H}$. Проведем траектории системы $\widetilde{A}$ из точек $(a, 0)$, $(b, 0)$ и из одного из концов каждой из остальных дуг L_l траекторий системы A, идущих по границе области H (или из точек, достаточно близких к этим точкам), до пересечения с теми же дугами без контакта (или близкими к ним), на которых кончаются дуги L_l. При достаточно малом δ точки пересечения существуют и близки к концам дуг L_l. Эти точки и точки пересечения сепаратрис и граничных траекторий с граничными дугами без контакта (и с осью Ox) расположены на этих дугах в одном и том же порядке для систем A и $\widetilde{A}$, если δ и η достаточно малы. Построенные дуги траекторий системы $\widetilde{A}$ и дуги без контакта ограничивают область $\widetilde{H}$ типа 2 для системы $\widetilde{A}$.

Траектории системы A (соответственно $\widetilde{A}$), проходящие через особые и угловые точки, и ось Ox разбивают область H (соответственно $\widetilde{H}$) на элементарные четырехугольники ([157], стр. 86), обобщенные элементарные четырехугольники R_j и элементарные сегменты T_k (соответственно $\widetilde{R}_j$ и $\widetilde{T}_k$) (рис. 75). При достаточно малых δ и η из сказанного о порядке точек пересечения траекторий с дугами без контакта следует, что эти элементарные области в H и в $\widetilde{H}$ расположены одинаково. Для каждой области $\widetilde{R}_j$ или $\widetilde{T}_k$ можно построить ϵ-отображение (п. 2 § 18) на соответствующую область R_j или T_k (как для элементарных четырехугольников в [185], стр. 51–53, и как для секторов классов K, Q, L в леммах 3 и 4 § 17). Отображения соседних элементарных областей можно сделать совпадающими на их общей границе. Для этого сначала отображаются отрезки линии разрыва, являющиеся дугами траекторий, затем области $\widetilde{R}_j$ и $\widetilde{T}_k$, примыкающие к этим отрезкам, а после этого — остальные. Получаем ϵ-отображение области $\widetilde{H}$ на H.

Теорема 2 [187]. *Пусть для системы $A \in C^p_*$ вида (1)*

$$Q^-(x, 0) \neq 0, \quad P^+(x, 0) \neq 0, \quad P^0(x) \neq 0; \quad Q^+(a, 0) \neq 0, \quad Q^+(b, 0) \neq 0;$$

W — область типа 2, пересекаемая осью Ox по отрезку $a \leqslant x \leqslant b$. Для того чтобы система A в области W имела степень негрубости h $(0 \leqslant h \leqslant p-1)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $Q^+(x, 0)$ на $[a, b]$ имела только конечное число корней $c_1, \ldots, c_n$ $(n \geqslant 0)$ и их кратности $r_1, \ldots, r_n$ удовлетворяли условию $S = h$, где

$$S = (r_1 - 1) + \ldots + (r_n - 1) + s, \tag{19}$$

s — число двойных сепаратрис, содержащихся в области W.

Доказательство. Достаточность доказывается индукцией по S, а необходимость — индукцией по h. Пусть целое число $q \geqslant 0$. При $q > 0$ предполагаем, что для всех областей типа 2 достаточность доказана для всех $S < q$, а необходимость — для всех $h < q$.

Достаточность. Пусть $S = q$. Тогда, по предположению индукции, система A не может иметь степень негрубости меньше q. Возьмем область $H \supset W$, обладающую теми же свойствами, что W, и не содержащую других особых точек и сепаратрис. Возьмем любое $\epsilon > 0$ и столь малое $\eta > 0$, чтобы в 3η-окрестности каждого корня c_i не было ни других корней, ни точек a и b. Пусть система $\widetilde{A}$ $(\dot{x} = \widetilde{P}(x, y)$, $\dot{y} = \widetilde{Q}(x, y))$ δ-близка в C_*^{q+1} к системе A; число $\delta < \mu$ (см. (18)) так мало, что $\operatorname{sgn} \widetilde{Q}^+(x, 0) = \operatorname{sgn} Q^+(x, 0)$ вне η-окрестностей всех точек c_i.

Случай 1. Функция $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ имеет ровно по одному корню d_i в η-окрестности каждой точки c_i. Тогда для системы $\widetilde{A}$ выполнены неравенства, подобные (18), но с $\mu - \delta$ вместо μ, и знаки $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ слева и справа каждого корня те же, что у $Q^+(x, 0)$. Тогда выполнено условие 1) леммы 5.

Если из точки $(c_i, 0)$ не выходит левая (или правая) двойная сепаратриса системы A, содержащаяся в H, то при малых δ это же справедливо и для точки $(d_i, 0)$ и системы $\widetilde{A}$ (в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий и правых частей системы).

а) Если выполнено также условие 2) леммы 5, то по этой лемме $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$.

В частности, если $S = 0$, то все $r_i = 1$, $s = 0$, значит, имеет место случай 1 и у систем A нет двойных сепаратрис. Тогда $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$ и система A — грубая.

б) Если условие 2) леммы 5 не выполнено, то в силу сказанного система $\widetilde{A}$ при малых δ имеет меньше двойных сепаратрис, чем A. По лемме 5 § 18 кратность каждого корня d_i не больше, чем кратности корня c_i. Поэтому для системы $\widetilde{A}$ сумма $\widetilde{S}$ вида (19) меньше q.

Случай 2. В окрестности каждой точки c_i имеется не более одного корня функции $\widetilde{Q}^+(x, 0)$, причем в окрестности некоторой точки c_j нет ни одного корня этой функции. В силу леммы 5 § 18 корень c_j имеет кратность $r_j \geqslant 2$. Поэтому при переходе от системы A к $\widetilde{A}$ из (19) исключается слагаемое $r_j - 1 \geqslant 1$, а остальные не увеличиваются, как в случае 1. Число двойных сепаратрис не увеличивается, так как они могут перестать быть двойными или две (левая и правая сепаратрисы точки c_j) слиться в одну. Тогда для системы $\widetilde{A}$ имеем $\widetilde{S} < S = q$.

Случай 3. В окрестности точки c_i имеется $n_i \geqslant 0$ корней d_{ij} $(j = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, n)$ функции $\widetilde{Q}^+(x, 0)$, причем $n_i \geqslant 2$ хотя бы для одного i.

Если для какого-нибудь i из точки $(c_i, 0)$ не выходит левая (правая) двойная сепаратриса системы A, то при достаточно малом δ из точек $(d_{ij}, 0)$, $j = 1, \ldots, n_i$, не выходит ни одной левой (соответственно правой) "внешней" двойной сепаратрисы системы $\widetilde{A}$, т.е. идущей в какую-либо особую точку $(d_{kl}, 0)$, $k \neq i$. В самом деле, внешние левые сепаратрисы точек $(d_{ij}, 0)$, если такие существуют, при малом δ должны содержаться в малой окрестности левой сепаратрисы точки $(c_i, 0)$ системы A, а эта сепаратриса, по предположению, проходит на положительном расстоянии от других особых точек.

Функция $Q^+(x, 0)$ на интервале I_i $(c_i - \eta, c_i + \eta)$ меняет знак один раз в точке c_i или не меняет знака. Число перемен знака с "$-$" на "$+$" функции $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ на этом интервале больше, чем у $Q^+(x, 0)$, на число $p_i \geqslant 0$, с "$+$" на "$-$" тоже больше на p_i; число корней, при переходе через которые $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ не меняет знака, больше на $n_i - 1 - 2p_i$. Согласно п. 1 при условии (17) точка перемены знака с "$-$" на "$+$" (или с "$+$" на "$-$") есть особая точка класса 2a (класса 2b), к ней подходят из области $y > 0$ две сепаратрисы (соответственно ни одной). Корень, при переходе через который $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ не меняет знака, есть точка класса 2c или 2d, к ней подходит одна сепаратриса. Может быть, не все эти сепаратрисы двойные.

Таким образом, когда $n_i \geqslant 2$, число концов двойных сепаратрис в интервале I_i может увеличиться не больше, чем на $2p_i + (n_i - 1 - 2p_i) = n_i - 1$. Когда же $n_i = 1$ и $n_i = 0$, число таких концов не увеличивается, как в случаях 1 и 2. Каждая двойная сепаратриса имеет два конца в особых точках, поэтому число всех двойных сепаратрис при переходе от системы A к $\widetilde{A}$ может увеличиться не больше, чем на число $B_1 = \dfrac{1}{2} \Sigma^*(n_i - 1)$; суммирование производится только по тем i, для которых $n_i \geqslant 2$.

Сумма кратностей корней функции $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ в интервале I_i равна $\widetilde{r}_i < r_i$ (лемма 5 § 18). При переходе от системы A к $\widetilde{A}$ сумма $\Sigma(r_i - 1)$ в (19) заменяется суммой

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} (\widetilde{r}_{ij} - 1) = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{r}_i - n_i),$$

которая меньше суммы $\Sigma(r_i - 1)$ по крайней мере на число $B_2 = \Sigma^*(n_i - 1)$. Поэтому при переходе от A к $\widetilde{A}$ сумма (19) получает приращение

$$\widetilde{S} - S \leqslant B_1 - B_2 = -\frac{1}{2} \Sigma^*(n_i - 1).$$

Последняя сумма положительна, так как в случае 3 хоть одно $n_i \geqslant 2$. Числа $\widetilde{S}$ и S — целые, поэтому $\widetilde{S} - S \leqslant -1$, т.е. для системы $\widetilde{A}$ имеем $\widetilde{S} \leqslant q - 1$.

Таким образом, для системы $\widetilde{A}$ в случаях 1б, 2, 3 имеем $\widetilde{S} < q$. Для $\widetilde{A}$ построим область $\widetilde{H}$ типа 2, не содержащую других особых точек и двойных сепаратрис, кроме имеющихся в H, так, чтобы $H \subset \widetilde{H}$. По предположению индукции, степень негрубости системы $\widetilde{A}$ в $\widetilde{H}$, а значит и в H, не больше $q - 1$. Учитывая также случай 1а, получаем, что система A в области W имеет степень негрубости q.

Необходимость. Пусть система А имеет степень негрубости q в области W. Тогда существует такая область H типа 2, что W лежит строго внутри H, система А имеет в H степень негрубости q, и H содержит только те особые точки и двойные сепаратрисы, которые содержатся в W. Предположим, что существуют такие числа $c_i \in (a, b)$ и $p_i \geqslant 1$, что для функции $R(x) \equiv Q^+(x, 0)$ имеем

$$R^{(j)}(c_i) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, p_i - 1; \; i = 1, \ldots, n), \tag{20}$$

$$(p_1 - 1) + \ldots + (p_n - 1) + s \geqslant q + 1, \tag{21}$$

где s — число двойных сепаратрис в области W.

Для некоторого $\epsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ построим такую систему $\widetilde{A}$, что

1° система $\widetilde{A}$ δ-близка к А в метрике C_*^{q+1};

2° $(\widetilde{H}, \widetilde{A}) \overset{e}{\not\equiv} (H, A)$ для любой области $\widetilde{H}$, если $W \subset H$;

3° существуют такие числа $d_i \in (a, b)$ и $\widetilde{p}_i \geqslant 1$, что для функции $\widetilde{R}(x) \equiv \widetilde{Q}^+(x, 0)$ имееем

$$\widetilde{R}^{(j)}(d_i) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, \widetilde{p}_i - 1; \; i = 1, \ldots, k), \tag{22}$$

$$(\widetilde{p}_1 - 1) + \ldots + (\widetilde{p}_k - 1) + \widetilde{s} \geqslant q, \tag{23}$$

где $\widetilde{s}$ — число двойных сепаратрис системы $\widetilde{A}$ в области W.

Пусть $s > 0$. Пусть $\varphi \in C^p$, $\varphi(x, y) > 0$ в малой окрестности V_1 точки (x_1, y_1), $y_1 > 0$, лежащей на одной из двойных сепаратрис, $\varphi = 0$ вне V_1. Система $\widetilde{A}$, полученная из А заменой функции Q на $\widetilde{Q} = Q + \lambda\varphi$, при достаточно малых $\lambda > 0$ близка к А, имеет те же особые точки $(d_i = c_i)$ и числа $\widetilde{p}_i = p_i$, но на одну двойную сепаратрису меньше, как в лемме 10 § 18. Такая система $\widetilde{A}$ обладает свойствами 1° — 3°.

Пусть $s = 0$. Тогда в силу (21) $p_j \geqslant 2$ для некоторого j. Пусть отрезок $I^* = [c_j - \nu, c_j + \nu] \subset (a, b)$ не содержит особых точек $c_i, i \neq j$. По лемме 6 § 18 для любого $\delta > 0$ найдется функция $\widetilde{R}(x)$, имеющая в I^* корень c_j кратности $\widetilde{p}_j = p_j - 1$ и корень $c_j^* \neq c_j$, совпадающая с $R(x)$ вне I^* и такая, что

$$\| \widetilde{R}(x) - R(x) \|_{C^{q+1}} < \delta. \tag{24}$$

Тогда при достаточно малом δ система $\widetilde{A}$, полученная из А заменой $Q(x, y)$ на

$$\widetilde{Q}(x, y) = Q(x, y) + \widetilde{R}(x) - R(x), \tag{25}$$

обладает свойствами 1° и 3° при $\widetilde{c}_i = c_i$ (так как $\widetilde{p}_i = p_i, i \neq j$, $\widetilde{p}_j = p_j - 1$). Если система А имела конечное число особых точек, то $\widetilde{A}$ имеет еще особую точку $(c_j^*, 0)$ и обладает свойством 2°.

Если же система А имела бесконечно много особых точек, т.е. функция $R(x)$ имела бесконечно много корней на $[a, b]$, то по лемме 8 § 18 существует функция $\widetilde{R}(x)$, удовлетворяющая (24) и имеющая на $[a, b]$ только конечное число корней, из которых один корень $\widetilde{c}_1$ кратности p. Тогда система $\widetilde{A}$, полученная подобно (25), имеет конечное число особых точек и обладает свойствами 1° и 2°. Беря в (22) $i = k = 1$, $\widetilde{p}_1 = p$ и замечая, что по условию $p - 1 \geqslant q$, получаем (23). Следовательно, система $\widetilde{A}$ обладает свойством 3°.

Итак, во всех случаях существует система $\widetilde{A}$ со свойствами 1° — 3°.

В случае $q = 0$ это противоречит грубости системы А.

В случае $q \geqslant 1$ для достаточно близкой к А системы $\widetilde{A}$ строим область $\widetilde{H}$ типа 2, как в лемме 5. При этом можно сделать, чтобы $W \subset \widetilde{H} \subset H$. Из 1° и 2° следует, что система $\widetilde{A}$ в области H, а значит и в $\widetilde{H}$, имеет степень негрубости меньше q. Тогда в силу предположения индукции корни d_i функции $\widetilde{R}(x) = \widetilde{Q}^+(x, 0)$ имеют конечные кратности $\widetilde{r}_i$, причем

$$(\widetilde{r}_1 - 1) + \ldots + (\widetilde{r}_k - 1) + \widetilde{s} < q. \tag{26}$$

Так как $\widetilde{r}_i \geqslant \widetilde{p}_i$ в силу (22), то неравенство (26) противоречит (23).

Во всех случаях существование системы $\widetilde{A}$ со свойствами 1° — 3° приводит к противоречию. Значит, предположение (20), (21) неверно, т.е. корни c_i имеют конечные кратности r_i, и сумма (19) равна q (в случае $S < q$ степень негрубости системы А была бы меньше q).

С л е д с т в и е 1. *Для системы (1) класса C_*^p $(p \geqslant q + 1)$ точка $(c, 0)$ является особой точкой типа 2 и имеет степень негрубости q тогда и только тогда, когда в этой точке $Q^- \neq 0, P^+ \neq 0$, а $Q^+(x, 0)$ имеет корень $x = c$ кратности $q + 1$ (или $Q^+ \neq 0$, $P^- \neq 0$, а $Q^-(x, 0)$ имеет корень $x = c$ кратности $q + 1$).*

С л е д с т в и е 2. *Если для системы (1) класса C_*^∞ на некотором отрезке оси Ox*

$$Q^- \neq 0, \quad P^+ \neq 0, \quad Q^+(x, 0) \equiv 0 \quad (\text{или } Q^+ \neq 0, \quad P^- \neq 0, \quad Q^-(x, 0) \equiv 0),$$

то этот отрезок — часть линейной особенности класса AB и система в сколь угодно малой окрестности этого отрезка имеет степень негрубости бесконечность.

Доказательство. Система, полученная из (1) заменой $Q(x, y)$ на функцию $\tilde{Q}(x, y) = Q(x, y) + \lambda(x - c)^p$ ($\lambda > 0$ сколь угодно мало), в силу следствия 1 имеет в окрестности точки $(c, 0)$ степень негрубости $p - 1$; число p — сколь угодно большое.

Бифуркации особых точек типа 2 определяются бифуркациями корней функции $Q^+(x, 0)$ (или $Q^-(x, 0)$), знаками этой функции с каждой стороны от каждого корня и расположением сепаратрис. Пусть $Q^- > 0$, $P^+ > 0$.

Если $x = c$ — корень кратности 1 функции $R(x) \equiv Q^+(x, 0)$, то особая точка $(c, 0)$ класса 2а (если $R'(c) > 0$) или 2b (если $R'(c) < 0$) (рис. 56 и 57); она является грубой и не испытывает бифуркаций.

Если $x = c$ — корень кратности 2, то функция $R(x)$ не меняет знака и особая точка $(c, 0)$ класса 2c (если $R''(c) > 0$) и класса 2d (если $R''(c) < 0$) (рис. 58 и 59); она имеет первую степень негрубости. При малых (в C^2) изменениях функции $R(x)$ корень кратности 2 может сохраниться, исчезнуть или распасться на два простых корня, как на рис. 73.

Поэтому особая точка класса 2c при малых (в C^2) изменениях системы может или сохраниться, или исчезнуть (при этом остается такая особенность на линии $y = 0$, как в случае AA_0 п. 2 § 16, рис. 29), или распасться на две грубые особые точки классов 2a и 2b (рис. 76), соединенные линией слияния траекторий — линейной особенностью класса AA_1. Особая точка класса 2d также может или сохраниться, или превратиться в ничем не выделяющуюся точку линейной особенности класса AA_1 (рис. 30), или распасться на две особые точки классов 2a и 2b; линия слияния траекторий при этом разрывается (рис. 77).

Если $x = c$ — корень кратности 3 функции $R(x)$, то особая точка $(c, 0)$ второй степени негрубости и класса 2a (если $R'''(c) > 0$) или класса 2b (если $R'''(c) < 0$). Рассматривая бифуркации корня кратности 3, получаем все возможные бифуркации такой особой точки. При $R'''(c) > 0$ для близких (в C^3) систем возможны следующие случаи наличия особых точек: 1) одна точка класса 2a; 2) две точки классов 2d и 2a; 3) две точки классов 2a и 2c; 4) три точки классов 2a, 2b, 2a, расположенные в указанном порядке

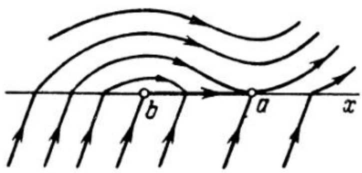


Рис. 76.

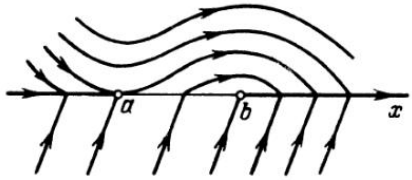


Рис. 77.

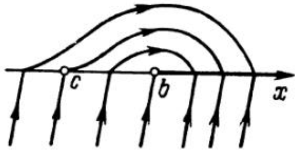


Рис. 78.

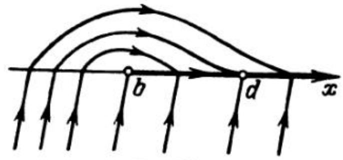


Рис. 79.

(здесь возможны три топологически различных расположения сепаратрис). При $R'''(c) < < 0$ возможны случаи: 1) одна точка класса 2b; 2) две точки классов 2c и 2b (рис. 78); 3) две точки классов 2b и 2d (рис. 79); 4) три последовательно расположенные точки классов 2b, 2a, 2b.

Замечание. Введенное в п. 2 § 18 понятие степени негрубости существенно изменится, если в определении ϵ-тождественности систем A и $\tilde{A}$ не требовать, чтобы особые точки переходили в особые точки (или если не считать особыми те точки, в окрестности которых траектории расположены топологически так же, как в окрестности обыкновенных точек или как в окрестности неконцевых точек линейной особенности, рис. 58, 59).

Например, при бифуркации последней из рассмотренных особых точек (когда $R'''(c) < 0$) в случаях 1), 2), 3) полученная система топологически эквивалентна исходной, так как особые точки классов 2с и 2d топологически эквивалентны неособым (сравнить рис. 57, 78, 79), а в случае 4) полученная система — грубая. Поэтому при измененном, как указано выше, определении ϵ-тождественности (или изменении определения особой точки) такой особой точке с $R(c) = R'(c) = R''(c) = 0$, $R'''(c) < 0$ пришлось бы приписать первую степень негрубости. Эти усложнило бы формулировку и доказательство теоремы 2.

4. Среди особых точек типа 3 наиболее детально изучен ([4], стр. 393; [190]) "сшитый фокус" (рис. 67).

Пусть для системы (1) класса C_*^m, $m \geqslant 2$, в точке (0,0)

$$Q^- = Q^+ = 0, \quad P^- < 0, \qquad P^+ > 0, \tag{27}$$

а в ее окрестности

$$xQ^-(x, 0) < 0, \quad xQ^+(x, 0) < 0 \quad (0 < |x| < \rho_0). \tag{28}$$

При этих условиях для достаточно малого $x_0 > 0$ траектория из точки $(x_0, 0)$ проходит в области $y < 0$, пересекает ось Ox в точке $(x_1, 0)$, $x_1 < 0$, проходит в области $y > 0$ и

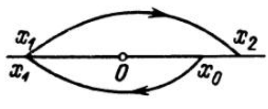


Рис. 80.

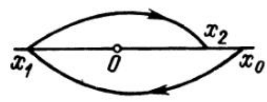


Рис. 81.

возвращается на ось Ox в точке $(x_2, 0)$, $x_2 > 0$. Вместо функции последования $x_2 = f(x_0)$ удобнее рассматривать ([4], стр. 396) функции

$$x_0 = \sigma^-(x_1), \qquad x_2 = \sigma^+(x_1), \qquad \chi(x_1) = x_2 - x_0 = \sigma^+(x_1) - \sigma^-(x_1). \tag{29}$$

Если $\chi(x_1) > 0$ на некотором интервале $-\delta_1 < x_1 < 0$, то фокус неустойчивый (рис. 80); если $\chi(x_1) < 0$, то устойчивый (рис. 81), а если $\chi(x_1) \equiv 0$, то особая точка — сшитый центр (рис. 68). Если на каждом интервале вида $-\delta_1 < x_1 < 0$ функция χ принимает и нулевые, и ненулевые значения, то особая точка — сшитый центрофокус.

Для изучения свойств функций $\sigma^+(x)$ и $\sigma^-(x)$ удобно их доопределить при $x \geqslant 0$, положив $\sigma^\pm(0) = 0$, $\sigma^+(x_2) = x_1$, $\sigma^-(x_0) = x_1$, где $x_2 > 0, x_1 < 0, x_0 > 0$ те же, что выше. Тогда функции $\sigma^\pm(x)$ определены при $-\rho_1 < x < \rho_2$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, и

$$\sigma^+(\sigma^+(x)) \equiv x, \quad \sigma^-(\sigma^-(x)) \equiv x. \tag{30}$$

Л е м м а 6. *Если $P^-, P^+, Q^-, Q^+ \in C^m$, $m \geqslant 1$, в точке* (0, 0) *выполнены условия* (27) *и производные $Q_x^- < 0$, $Q_x^+ < 0$, то $\sigma^-, \sigma^+, \chi(x) \in C^m$ при $|x| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1) при $y > 0$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \qquad F = \frac{Q^+}{P^+} \in C^m \quad (y \geqslant 0), \qquad F_x(0, 0) = -2\beta^2 < 0.$$

Полагая $y = \beta^2 z^2$, получаем уравнение $2\beta^2 z dz/dx = F(x, z^2)$, от которого переходим к системе

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{2\beta^2} F(x, z^2) \equiv H(x, z), \qquad \frac{dx}{d\tau} = z. \tag{31}$$

Так как $H \in C^m$ $(x^2 + z^2 < \delta_0^2)$, $H(x, z) = -x + o(|x| + |z|)$, то доказываемое утверждение следует из [185] (стр. 252).

Л е м м а 7. *Если $\sigma(x) \in C^1$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(\sigma(x)) \equiv x$, $x\sigma(x) < 0$ $(0 < |x| < \delta)$, то $\sigma'(0) = -1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя равенство $\sigma(\sigma(x)) \equiv x$ в точке $x = 0$, имеем $(\sigma'(0))^2 = 1$. Так как $x\sigma(x) < 0$ $(0 < |x| < \delta)$, то $\sigma'(0) = -1$.

Л е м м а 8. *Если функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 7 и $\sigma_1(x) < \sigma_2(x)$ при $0 < x < \delta$, то $\sigma_1(x) < \sigma_2(x)$ и на некотором интервале $-\delta_1 < x < 0$.*

Доказательство. Если $\sigma_1(x) = y$, то $\sigma_1(y) = x$, т.е. график функции $\sigma_1(x)$ симметричен относительно прямой $y = x$; то же верно и для $\sigma_2(x)$. Из симметрии графиков и убывания функций σ_1, σ_2 следует утверждение леммы (рис. 82).

Лемма 9 ([4], стр. 397). *Функции σ^-, σ^+, χ обладают свойствами:*

$$1^\circ\ \sigma^-(0) = \sigma^+(0) = \chi(0) = 0, \quad (\sigma^-)'\big|_{x=0} = (\sigma^+)'\big|_{x=0} = -1, \quad \chi'(0) = 0. \tag{32}$$

2° *Если для некоторого $k \geqslant 2$ существуют $\chi^{(i)}(0)$, $i = 1, \ldots, k$, и*

$$\chi^{(i)}(0) = 0, \quad (i \leqslant k-1), \qquad \chi^{(k)}(0) \neq 0, \tag{33}$$

то k — четное число.

3° *Каждая из функций σ^- и σ^+ также обладает свойством 2°.*

Доказательство. Свойство 1° вытекает из (29), (30) и леммы 7.

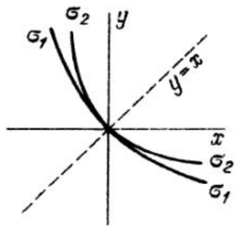


Рис. 82.

2° Если бы в (33) число k было нечетным, то разность

$$\sigma^+(x) - \sigma^-(x) = \chi(x) = \frac{\chi^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^k)$$

меняла бы знак при переходе через точку $x = 0$. Это противоречило бы лемме 8.

Свойство 3° доказывается подобно 2°, если одну из функций σ^+ или σ^- заменить функцией $\sigma_2(x) \equiv -x$.

У обычного фокуса, в отличие от "сшитого", первая из отличных от нуля при $\rho = 0$ производных функции $d(\rho) = f(\rho) - \rho$ ($f(\rho)$ — функция последования) имеет нечетный порядок ([185], стр. 253).

Найдем несколько первых коэффициентов разложения функции $\chi(x)$ по степеням x. При условиях (27) траектории системы (1) вблизи точки (0,0) при $y > 0$ и $y < 0$ удовлетворяют уравнению (его коэффициенты различны при $y > 0$ и при $y < 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \varphi(x,y), \tag{34}$$

$\varphi(x,y) \in C^2$, $\varphi(x,y) = o(x^2 + y^2)$. Если $P, Q \in C^4_*$, то можно написать

$$\varphi(x,y) = fx^3 + gx^2y + hx^4 + \psi(x,y), \qquad \psi(x,y) = o(x^4 + y^2). \tag{35}$$

Ищем решение, выходящее из точки $(-\rho, 0)$. Для него $x = O(\rho)$, $y = O(\rho^2)$. Делая в (34) замену $2y = -ay_1$, а затем $-2x + by_1 = -2x_1$, получаем

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -2x_1 + 3Ax_1^2 + o(x_1^2 + |y_1|), \qquad A = \frac{2}{3}\left(b - \frac{c}{a}\right). \tag{36}$$

Интегрируя от $-\rho$ до x_1 и учитывая, что $y_1(-\rho) = 0$, получаем (вместо x_1 пишем x)

$$y_1(x) = \rho^2 - x^2 + A(x^3 + \rho^3) + o((x+\rho)\rho^2). \tag{37}$$

Функция (37) равна нулю при $x = -\rho$ и при $x = \sigma(-\rho)$. Приравнивая (37) к нулю и сокращая на $x + \rho$, получаем

$$x - \rho = A\rho^2 + Ax(x - \rho) + o(\rho^2). \tag{38}$$

Так как ищется корень $x = \sigma(-\rho) = O(\rho)$, то из (38) имеем $x - \rho = O(\rho^2)$. Подставляя это снова в (38), получаем

$$\sigma(-\rho) = \rho + A\rho^2 + o(\rho^2), \qquad A = \frac{2}{3}\left(b - \frac{c}{a}\right). \tag{39}$$

В случае, когда функция φ в (34) имеет вид (35), тем же способом получаем

$$\sigma(-\rho) = \rho + A\rho^2 + A^2\rho^3 + K\rho^4 + o(\rho^4), \tag{40}$$

$$K = \frac{10}{11}A^3 + \frac{Ad}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{bc^2}{a^2} - \frac{2c^3}{a^3} - 2ae - \frac{2bf}{a} + \frac{5cf}{a^2} + g - \frac{3h}{a}\right).$$

Теперь из (29) и (39) имеем для систем класса C^2_*

$$\chi(-\rho) = a_2\rho^2 + o(\rho^2), \quad a_2 = A^+ - A^-, \tag{41}$$

а для систем класса C^4_*

$$\chi(-\rho) = a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + o(\rho^4),$$
$$a_3 = (A^+)^2 - (A^-)^2, \quad a_4 = K^+ - K^-. \tag{42}$$

Здесь A^+, K^+ (A^-, K^-) выражаются формулами (39) и (40) через значения коэффициентов $a = a^+ < 0, b = b^+, \ldots$ уравнения (34) в области $y > 0$ (соответственно $a = a^- > 0$, $b = b^-, \ldots$ в области $y < 0$). Их можно выразить и непосредственно через значения функций P, Q и их производных в точке (0,0), например,

$$a = \frac{Q_x}{P}, \quad b = \frac{Q_y}{P}, \quad c = \frac{Q_{xx}}{2P} - \frac{P_xQ_x}{P^2}, \quad A = \frac{2}{3}\left(b - \frac{c}{a}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{P_x + Q_y}{P} - \frac{Q_{xx}}{2Q_x}\right). \tag{43}$$

Знание коэффициентов $a_2, a_4, \ldots$ функции $\chi(-\rho)$ дает возможность исследовать устойчивость сшитого фокуса и его бифуркации.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (27) *и*

$$Q_x^-(0,0) < 0, \quad Q_x^+(0,0) < 0. \tag{44}$$

Если $a_2 < 0$, или $a_2 = 0$, $a_4 < 0$, или $\chi^{(k)}(0) < 0$ в (33), *то нулевое решение асимптотически устойчиво. Если $a_2 > 0$, или $a_2 = 0$, $a_4 > 0$, или $\chi^{(k)}(0) > 0$ в* (33), *то нулевое решение неустойчиво. В случае устойчивости траектория достигает точки* (0, 0) *только за бесконечное время и решения стремятся к нулю с характеристическим показателем*

$$\gamma = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{a_2}{2\tau}, \quad \tau = \frac{1}{P^-(0,0)} + \frac{1}{P^+(0,0)}. \tag{45}$$

Доказательство. Траектория, проходящая через точку $(-\rho, 0)$ пересекает полуось Ox, $x > 0$, в точках $x_0 = \sigma^-(-\rho)$ и $x_2 = \sigma^+(-\rho)$. Если $\chi(-\rho) < 0$ $(0 < \rho < \rho_0)$, то $x_2 < x_0$ (рис. 81) и далее траектория пересекает эту полуось в точках $x_4 > x_6 > \ldots$ $\ldots > 0$. Существует $\lim\limits_{i\to\infty} x_{2i} \geqslant 0$. Так как, подобно (29),

$$x_{2i+2} = x_{2i} + \chi(x_{2i+1}), \tag{46}$$

то при $i \to \infty$ имеем $\chi(x_{2i+1}) \to 0$, $x_{2i+1} \to 0$. Значит, $x_{2i} = \sigma^-(x_{2i+1}) \to 0$, и на траектории имеем $x(t) \to 0$ при возрастании t, а так как $|dy/dx| <$ const, то и $y(t) \to 0$. Асимптотическая устойчивость доказана.

Если $\chi(-\rho) > 0$ $(0 < \rho < \rho_0)$, то аналогично получаем, что $x(t)$, $y(t) \to 0$ при убывании t, и нулевое решение неустойчиво.

Оценим скорость приближения решения к нулю в случае $\chi < 0$. В силу (32) $x_{2i+1}/x_{2i} \to -1$ при $i \to \infty$, поэтому для любого $\epsilon > 0$ из (41) и (46) имеем для всех $i \geqslant i_1(\epsilon)$

$$(a_2 - \epsilon)x_{2i}x_{2i+2} \leqslant x_{2i+2} - x_{2i} \leqslant (a_2 + \epsilon)x_{2i}^2.$$

Так как $\ln x \leqslant x - 1$ $(0 < x < \infty)$, то

$$(a_2 - \epsilon)x_{2i} \leqslant \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{x_{2i+2}} \leqslant \ln\frac{x_{2i+2}}{x_{2i}} \leqslant \frac{x_{2i+2} - x_{2i}}{x_{2i}} \leqslant (a_2 + \epsilon)x_{2i}. \tag{47}$$

Время движения по траектории от точки $(x_{2i}, 0)$ до точки $(x_{2i+2}, 0)$ равно $t_i = 2\tau x_{2i}(1 + o(1))$, где τ то же, что в (45). Суммируя (47) по i от некоторого $j = j(\epsilon)$ до любого k, получаем

$$\frac{a_2 - 2\epsilon}{2\tau} T_k \leqslant \ln \frac{x_{2k+2}}{x_{2j}} \leqslant \frac{a_2 + 2\epsilon}{2\tau} T_k, \quad T_k = \sum_{i=j}^{k} t_i.$$

Отсюда с учетом ограниченности dy/dx следует (45).

Рассмотрим бифуркации сшитого фокуса при условиях (27), (44). При переходе от функций P, Q к близким в C^1_* функциям $\tilde{P}, \tilde{Q}$ особая точка или остается изолированной

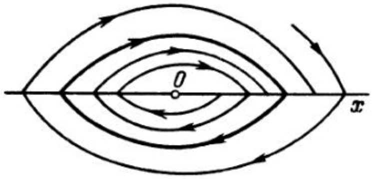


Рис. 83.

(когда функции $\tilde{Q}^-(x, 0)$ и $\tilde{Q}^+(x, 0)$ имеют общий корень), или распадается на несколько особых точек (когда корни этих функций различны). Первый случай рассматривается в [4] (стр. 398) и [190], а второй — ниже, в п. 5.

В первом случае после переноса начала координат в особую точку условия (28) сохраняются. Если $a_2 \neq 0$ в (41), то в силу (43) при малых (в C^2_*) изменениях функций P, Q знак a_2 сохраняется, и по теореме 3 особая точка остается устойчивым (если $a_2 < 0$) или неустойчивым (если $a_2 > 0$) фокусом.

Пусть $P, Q \in C^4_*$ и $a_2 = 0, a_4 < 0$. Тогда особая точка — устойчивый фокус. При малых (в C^4_*) изменениях функций P, Q знак a_4 сохраняется. Возможны два случая. Если при этом окажется $a_2 \leqslant 0$, то фокус останется устойчивым. Если же станет $a_2 > 0$, то фокус станет неустойчивым и вокруг него появится устойчивый предельный цикл (рис. 83).

В самом деле, при малых ρ функция (42) отрицательна в случае $a_2 = 0$, $a_4 < 0$ и имеет 4-кратный корень $\rho = 0$. При $a_4 < 0$ и достаточно малых $a_2 > 0$ она остается отрицательной при некоторых $\rho^* < 0$ и $\rho^{**} > 0$, но становится положительной при малых $|\rho|$. Следовательно, она обращается в нуль при некоторых $\rho_1 < 0$ и $\rho_2 > 0$, и через точки $(-\rho_1, 0)$ и $(-\rho_2, 0)$ проходит замкнутая траектория. По лемме 5 § 18 сумма кратностей корней функции (42) (с $a_4 \neq 0$) в окрестности точки $\rho = 0$ не больше 4. Так как $\rho = 0$ — двукратный корень, то ρ_1 и ρ_2 — простые. Значит, замкнутая траектория — предельный цикл. Он устойчив, так как при возрастании $|\rho|$ функция χ меняет знак с "+" на "−".

5. По лемме 1 особые точки типов 3 и 4 негрубые. Выделим среди них точки 1-й степени негрубости. Предполагаем, что $P, Q \in C^2_*$ и что скорость движения по тем участкам оси Ox, где $Q^-(x, 0)\, Q^+(x, 0) \leqslant 0$, определяется формулой (5). Доказательства излагаются кратко.

Пусть $(0, 0)$ — особая точка типа 3, т.е. в этой точке

$$Q^- = Q^+ = 0, \quad P^- \neq 0, \quad P^+ \neq 0. \tag{48}$$

Л е м м а 10. *Если* $(0, 0)$ *— особая точка типа* 3 *1-й степени негрубости, то она изолирована и в этой точке*

$$Q^-_x(0, 0) \neq 0, \quad Q^+_x(0, 0) \neq 0. \tag{49}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $(0, 0)$ — предельная для особых точек $(x_i, 0)$, т.е. точек, в которых или $P^0(x_i) = 0$, или $Q^-(x_i, 0) = 0$, или $Q^+(x_i, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Функции P^0 и $f(x)$ определены в (5).

Рассмотрим систему $\tilde{A}$, полученную из системы A вида (1) заменой функции $Q^+(x, y)$ на функцию

$$\tilde{Q}^+(x, y) = Q^+(x, y) - \alpha x. \tag{50}$$

Для системы $\tilde{A}$ имеем $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha x P^-(x, 0)$. Так как $P^- \neq 0$, то, как в лемме 8 § 18, при почти всех α функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{Q}^+(x, 0)$ имеют только конечное число корней в окрестности U точки $x = 0$. Берем достаточно малое из таких α и заменой $Q^-(x, y)$ на $\tilde{Q}^-(x, y) = Q^-(x, y) - \beta x$ добиваемся, чтобы функции $\tilde{f}^* = P^+\tilde{Q}^- - P^-\tilde{Q}^+$ и $\tilde{Q}^-(x, 0)$ имели каждая конечное число корней в U. Полученная система имеет изолированную особую точку (0, 0) типа 3, т.е. негрубую, и не ϵ-тождественна системе А. Значит, система А с неизолированной особой точкой не может иметь 1-ю степень негрубости.

Пусть изолированная особая точка (0, 0) типа 3 и в ней, например, $Q_x^+ = 0$. Рассмотрим систему А с функцией (50), взяв $\alpha = c^{-1}Q^+(c, 0)$. В 3ϵ-окрестности точки (0, 0) нет других особых точек, поэтому $\alpha \neq 0$ при $c = \epsilon$. Система $\tilde{A}$ имеет в V особые точки (0, 0) типа 3 и $(\epsilon, 0)$. Значит, она негрубая и не ϵ-тождественна системе А. Поэтому система А и точка (0, 0) не могут иметь 1-ю степень негрубости. Это противоречит условию. Значит, предположение $Q_x^+ = 0$ неверно.

Следствие. *Особые точки типа 3, изображенные на рис.* 66, 69, 70, 71, *не могут иметь 1-ю степень негрубости.* (*Функция* $Q^+(x, 0)$ *или* $Q^-(x, 0)$ *не меняет знака, и условие* (49) *не выполнено.*)

Лемма 11. *Вблизи точки* (0, 0) *траектории систем*

$$A^-: \dot{x} = P^-(x, y), \quad \dot{y} = Q^-(x, y); \qquad A^+: \dot{x} = P^+(x, y), \quad \dot{y} = Q^+(x, y) \tag{51}$$

записываются в виде $y = \varphi_-(x)$, $y = \varphi_+(x)$, *причем, если* $\varphi_\mp(0) = 0$, *то*

$$\varphi''_-(0) = Q_x^-(0, 0)/P^-(0, 0), \qquad \varphi''_+(0) = Q_x^+(0, 0)/P^+(0, 0). \tag{52}$$

Доказательство следует с учетом (48) из формул

$$y'_x = Q/P \quad y''_{xx} = [(Q_x + Q_y y'_x)P - (P_x + P_y y'_x)Q]/P^2.$$

Следствие 1. *Если в точке* (0, 0) $Q_x^- P^- < 0$, $Q_x^+ P^+ > 0$, *то особая точка* (*рис.* 64) — *седло* (*при* $P^-P^+ < 0$) *или квазиседло с траекторией, идущей по оси* Ox (*при* $P^-P^+ > 0$).

Следствие 2. *Если в точке* (0, 0) $Q_x^- P^- > 0$, $Q_x^+ P^+ < 0$, *то вблизи этой точки все траектории обоими концами выходят на ось* Ox. *Если нет замкнутых кривых, составленных из дуг траекторий, то особая точка* (*рис.* 67) — *фокус* (*при* $P^-P^+ < 0$) *или квазифокус с траекторией по оси* Ox (*при* $P^-P^+ > 0$).

Следствие 3. *Если в точке* (0, 0) $Q_x^- Q_x^+ P^- P^+ > 0$, *то траектории при* $y < 0$ *и* $y > 0$ *выпуклы в одну и ту же сторону* (*рис.* 65). *В случае* $P^-P^+ < 0$ *имеется траектория, идущая по оси* Ox.

Во всех трех случаях (следствия 1–3) вблизи точки (0, 0) имеется траектория, идущая по оси Ox, только если

$$Q_x^-(0, 0)\, Q_x^+(0, 0) < 0. \tag{53}$$

В точке (0, 0) из (5) и (48) следует, что

$$f'(0) = P^+(0, 0)\, Q_x^-(0, 0) - P^-(0, 0)\, Q_x^+(0, 0). \tag{54}$$

В случаях 1 и 2 при условии (53) имеем $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $Q_x^- \neq Q_x^+$, поэтому $P^0(x)$ в (5) не меняет знака вблизи точки $x = 0$, т.е. движение по оси Ox с обеих сторон от особой точки происходит в одном направлении. В случае 3 это имеет место, если

$$Q_x^-(0, 0)\, P^+(0, 0) \neq Q_x^+(0, 0)\, P^-(0, 0),$$

т.е. если в точке (0, 0) кривизны траекторий двух систем (51) различны (следует из (52)).

Теорема 4 [188]. *Если система* А *класса* C_*^2 *и в точке* (0, 0) *выполнены условия* (48), *то эта точка имеет* 1-*ю степень негрубости тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1° $Q_x^+(0,0) \neq 0$, $Q_x^-(0, 0) \neq 0$.

2° *Если в точке* (0,0) $Q_x^- P^- > 0$, $Q_x^+ P^+ < 0$, *то в этой точке*

$$\frac{P_x^+ + Q_y^+}{P^+} - \frac{Q_{xx}^+}{2Q_x^+} - \frac{P_x^- + Q_y^-}{P^-} + \frac{Q_{xx}^-}{2Q_x^-} = a_2 \neq 0.$$

3° *Если в точке* $(0,0)$ $P^-P^+ < 0,\ Q_x^- Q_x^+ < 0$, *то в этой точке*

$$\text{а)}\ \frac{Q_x^-}{P^-} \neq \frac{Q_x^+}{P^+}, \qquad \text{б)}\ \frac{Q_x^-}{P^-} \neq \theta\,\frac{Q_x^+}{P^+},$$

$$\theta = 2 \quad \text{при}\ Q_x^- P^+ > 0, \qquad \theta = 1/2 \quad \text{при}\ Q_x^+ P^+ < 0. \tag{55}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнены условия (48) и $1^\circ - 3^\circ$. Тогда в некоторой окрестности U точки $(0,0)$ функции P^-, P^+, Q_x^-, Q_x^+ (а в случае $P^-P^+ < 0$ также $f'(x)$) сохраняют знаки и по модулю превосходят постоянную $\mu > 0$. Для $f'(x)$ это следует в случае 3° из (55), а в случае $P^-P^+ < 0$, $Q_x^- Q_x^+ > 0$ — из (54). Для любой системы $\widetilde{A}$, достаточно близкой в C_*^2 к системе A, функции $\widetilde{P}^-$, $\widetilde{P}^+$, $\widetilde{Q}_x^-$, $\widetilde{Q}_x^+$ (и $\widetilde{f}'$, если $P^-P^+ < 0$) в U имеют те же знаки, что P^-, P^+, Q_x^-, Q_x^+ (и f'). Поэтому система $\widetilde{A}$ может иметь в U особые точки только типов 1, 2 и 3 (только типов 2 и 3, если $P^-P^+ > 0$). Так как $\widetilde{Q}_x^- \neq 0$, $\widetilde{Q}_x^+ \neq 0$ (и $\widetilde{f}' \neq 0$), то функции $\widetilde{Q}^-(x,0)$, $\widetilde{Q}^+(x,0)$ (и $\widetilde{f}(x)$, если $P^-P^+ < 0$) в U имеют по одному, притом простому корню (x_1, x_2, x_0 соответственно).

Если $x_1 = x_2$, то $\widetilde{f}(x_1) = 0$, поэтому $x_1 = x_2 = x_0$ и в U существует только одна особая точка $\widetilde{O}$ системы $\widetilde{A}$. В ней функции $\widetilde{P}^\pm$, $\widetilde{Q}_x^\pm$ (и $\widetilde{f}'$) удовлетворяют тем же неравенствам, что $P^\pm$, $Q_x^\pm$ (и f'). Поэтому особые точки $(0,0)$ и $\widetilde{O}$ принадлежат одному и тому же топологическому классу. В их окрестностях можно доказать ϵ-тождественность систем A и $\widetilde{A}$.

В случае $x_1 \neq x_2$ имеем $\widetilde{f}(x_1) \neq 0$, $\widetilde{f}(x_2) \neq 0$, поэтому $x_1 \neq x_0 \neq x_2$. Система $\widetilde{A}$ имеет в U две особые точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ типа 2 (и одну точку x_0 типа 1, если $P^-P^+ < 0$). Эти точки — грубые (теоремы 1 и 2), так как корни x_1, x_2, x_0 — простые.

а) Если $P^-Q_x^- < 0$, $P^+Q_x^+ > 0$ в точке $(0,0)$, то такие же неравенства имеют место для системы $\widetilde{A}$ в U. Траектории выпуклы в сторону оси Ox (рис. 84). Особые точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ класса 2a, $(x_0, 0)$ класса 1b. Грубость системы $\widetilde{A}$ доказывается как в лемме 5.

б) Если $P^-Q_x^- > 0$, $P^+Q_x^+ < 0$, то траектории систем A и $\widetilde{A}$ вогнуты в сторону оси Ox. Особые точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ класса 2b, $(x_0, 0)$ класса 1a. В силу условия 2° $a_2 \neq 0$ в (41). Значит, $(\sigma^+)'' - (\sigma^-)'' \equiv \chi'' \neq 0$, и графики функций σ^+ и σ^- расположены как на рис. 82. При малых (в C_*^2) изменениях системы A функции σ^+ и σ^- мало меняются в C^2 (это можно получить, применив к системе (31) результаты из [185], стр. 252). Тогда для системы $\widetilde{A}$, близкой к A, графики или тоже касаются, или не имеют общих точек, или пересекаются в двух точках, т.е. уравнение $\chi(x) = 0$ или имеет двукратный корень, или не имеет корней, или имеет два простых (лемма 5 § 18) корня. В первом случае система $\widetilde{A}$ ϵ-тождественна системе A. Во втором и третьем случаях траектории системы $\widetilde{A}$ изображены на рис. 85 и 86, если $P^- < 0$, $P^+ > 0$, $a_2 < 0$ (при других знаках будет другим направление движения по траекториям в одной или двух полуплоскостях; при $P^-P^+ > 0$ траектории по оси Ox идут лишь вне интервала (x_1, x_2)) Простые корни функции χ соответствуют грубому предельному циклу. Двойных сепаратрис нет. Это позволяет доказать грубость системы $\widetilde{A}$.

в) Если в точке $(0,0)$ $P^-P^+ > 0$, $Q_x^- Q_x^+ > 0$, то в U все траектории систем A и $\widetilde{A}$ выпуклы в одну сторону. Система $\widetilde{A}$ имеет только две особые точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ классов 2b и 2a (рис. 87). Грубость системы $\widetilde{A}$ доказывается как в случае а).

г) Если в точке $(0,0)$ $P^-P^+ < 0$, $Q_x^- Q_x^+ < 0$, то в U все траектории систем A и $\widetilde{A}$ выпуклы в одну сторону. Для системы A ось Ox является траекторией, движение по ней с обеих сторон от точки

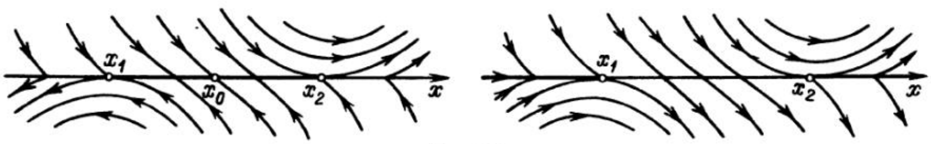


Рис. 84.

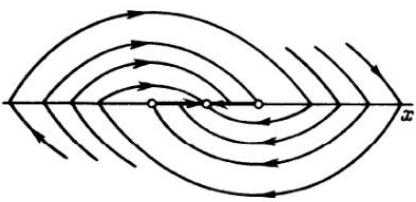


Рис. 85.

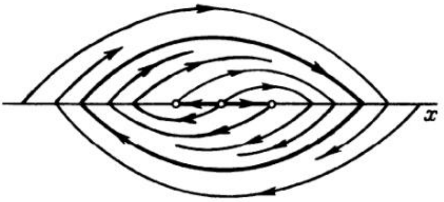


Рис. 86.

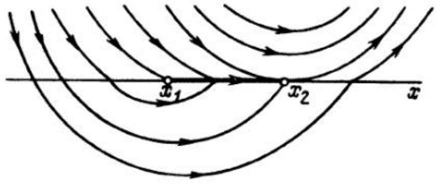


Рис. 87.

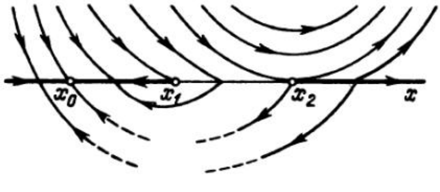


Рис. 88.

$x = 0$ направлено в одну сторону в силу условия 3° а). Система $\tilde{A}$ имеет две особые точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ типа 2 классов 2a и 2b и одну особую точку $(x_0, 0)$ типа 1 (рис. 88). Замкнутых траекторий нет. Сепаратриса особой точки класса 2a может идти в особую точку типа 1. Покажем, что при условии 3° б) это невозможно для систем $\tilde{A}$, достаточно близких к A.

В силу (48) для траекторий системы A имеем

$$\frac{dy}{dx} = h^{\pm}x + \varphi^{\pm}(x, y), \quad h^{\pm} = \frac{Q_x^{\pm}(0,0)}{P^{\pm}(0,0)} \neq 0,$$

значок $^+$ $(^-)$ берется при $y > 0$ $(y < 0)$; $\varphi^{\pm} \in C^2$, $\varphi^{\pm} = O(x^2 + |y|)$. Пусть, например, $Q_x^+P^+ > 0$, тогда $h^+ > 0$, $h^- > 0$. Для системы $\tilde{A}$ после переноса начала координат в точку $(x_2, 0)$, где $Q^+(x_2, 0) = 0$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tilde{Q}^{\pm}}{\tilde{P}^{\pm}} = \alpha^{\pm} + (h^{\pm} + \beta^{\pm})x + \tilde{\varphi}^{\pm}(x, y), \tag{56}$$

где $\alpha^+ = 0, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$ малы, $\tilde{\varphi}^{\pm} \in C^2_*$, $\tilde{\varphi}^+ = O(x^2 + |y|)$. Сепаратриса особой точки (0,0) системы $\tilde{A}$ в области $y < 0$ имеет вид

$$y = \alpha^- x + (h^- + \beta^-)x^2/2 + O(|x|^3 + |\alpha^-|x^2).$$

Она еще раз пересекает ось Ox в точке $x_3 = -\dfrac{2\alpha^-}{h^- + \beta^-} + O((\alpha^-)^2)$.

С другой стороны, в точке x_0 имеем $\tilde{f}(x_0) = 0$, т.е. $\tilde{Q}^-/\tilde{P}^- = \tilde{Q}^+/\tilde{P}^+$. Отсюда и из (56) получаем

$$x_0 = \frac{\alpha^-}{h^+ + \beta^+ - h^- - \beta^-} + O((\alpha^-)^2);$$

$$x_3 - x_0 = \frac{\alpha^-(2h^+ - h^- + 2\beta^+ - \beta^-)}{(h^- + \beta^-)(h^- + \beta^- - h^+ - \beta^+)} + R, \quad R = O((\alpha^-)^2). \tag{57}$$

Если существуют системы $\tilde{A}$ с двойной сепаратрисой, сколь угодно близкие к A, то $x_3 - x_0 = 0$ для некоторой последовательности значений $\alpha^- = \alpha_i^- \to 0$, $\beta^- = \beta_i^- \to 0$, $\beta^+ = \beta_i^+ \to 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Приравнивая (57) к нулю, деля на α^- и переходя к пределу по такой последовательности, получаем $2h^+ - h^- = 0$, т.е. $2Q_x^+/P^+ = Q_x^-/P^-$ в точке (0,0). Это противоречит условию 3° б). Следовательно, система $\tilde{A}$ не имеет двойных сепаратрис. Ее грубость доказывается как в случае а).

Итак, в случае $x_1 = x_2$ имеем $(\tilde{H}, \tilde{A}) \overset{\varepsilon}{\equiv} (H, A)$, а в случае $x_1 \neq x_2$ система $\tilde{A}$ — грубая. Поэтому система A и ее особая точка (0,0) имеют 1-ю степень негрубости.

Необходимость условия 1° доказана в лемме 10. Докажем ее для условий 2° и 3°.

2° Пусть $Q_x^-P^- > 0$, $Q_x^+P^+ < 0$ и, например, $P^- < 0$, $P^+ > 0$. Пусть $a_2 = 0$. Тогда для системы A имеем $\chi(x) = o(x^2)$ в силу (41) и (43). Для системы $\tilde{A}$, получаемой из A заменой $P^+(x, y)$ на $\tilde{P}^+(x, y) = P^+(x, y) + \mu x$, функция χ в силу (43) равна

$$\chi(x; \mu) = \frac{2\mu}{3P^+(0,0)}x^2 + o(x^2). \tag{58}$$

Если (0,0) — центр или центрофокус для системы A, то при любом $\mu \neq 0$ в силу (58) эта точка — фокус для системы $\tilde{A}$.

Если в некоторой окрестности точки (0,0) нет замкнутых траекторий системы A, то $\chi(x_1) \neq 0$ для сколь угодно малого $x_1 > 0$, например, $\chi(x_1) > 0$. Найдется такое малое $\mu \neq 0$, что $\tilde{\chi}(x_1; \mu) > 0$ и для некоторого $x_2 \in (0, x_1)$ в силу (58) $\tilde{\chi}(x_2; \mu) < 0$. Тогда $\tilde{\chi}(x_3; \mu) = 0$ для некоторого $x_3 \in (x_2, x_1)$. Через точку $(x_3, 0)$ проходит замкнутая траектория системы $\tilde{A}$.

В обоих случаях системы А и $\tilde{A}$ не ϵ-тождественны при малых ϵ. Для системы $\tilde{A}$ точка (0,0) типа 3, поэтому система $\tilde{A}$ — негрубая. Значит, система А и ее особая точка (0,0) не могут иметь 1-ю степень негрубости.

3° Пусть $P^-P^+ < 0$, $Q_x^- Q_x^+ < 0$ в точке (0,0). Если не выполняется условие 3° а), то $f'(0) = 0$ (см. (54)). Пусть система $\tilde{A}$ получается из А заменой функций $Q^\pm(x, y)$ на функцию

$$Q^\pm(x, y) = Q^\pm(x, y) - \alpha P^\pm(x, y) - \alpha x P_x^\pm(0,0).$$

Система $\tilde{A}$ близка к А, если α мало, и для нее

$$\tilde{Q}^+(0,0)\tilde{Q}^-(0,0) = \alpha^2 P^+(0,0)P^-(0,0) < 0, \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{f}'(0) = 0.$$

Значит, для системы $\tilde{A}$ особая точка (0,0) — негрубая типа 1 (теорема 1). Она топологически отлична от особой точки типа 3 при условиях $P^-P^+ < 0$, $Q_x^- Q_x^+ < 0$ (ее окрестность состоит из других секторов, см. п. 2).

Пусть не выполнено условие 3° б) и, например, $Q_x^+ P^+ > 0$. Построим систему $\tilde{A}$ с двойной сепаратрисой, сколь угодно близкую к А. Для этого в (56) возьмем $\alpha^+ = \beta^+ = 0$, $\tilde{\varphi}^\pm = \varphi^\pm$, и для сколь угодно малого $\alpha^- \neq 0$ так подберем β^-, чтобы $x_3 - x_0 = 0$ в (57). Так как $h^- = 2h^+$, то из уравнения $x_3 - x_0 = 0$ имеем

$$\beta^- = (2h^+ + \beta^-)(h^+ + \beta^-)R/\alpha^- \tag{59}$$

Так как $|R| \leqslant k(\alpha^-)^2$, то уравнение (59) имеет рашение $\beta^- = O(\alpha^-)$.

Итак, при невыполнении условия 3° а) или 3° б) существуют сколь угодно близкие к А негрубые системы, топологически отличные от А. Значит, система А в окрастности точки (0,0) не может иметь 1-ю степень негрубости.

6. Пусть (0,0) — особая точка типа 4 и

$$P^+(0,0) = Q^+(0,0) = 0, \quad Q^-(0,0) \neq 0. \tag{60}$$

Будем считать, что система A^+ (см. (51)) класса C^1 определена в полной окрестности точки (0,0), а не только при $y \geqslant 0$. В силу (60) точка (0,0) — стационарная точка систе-

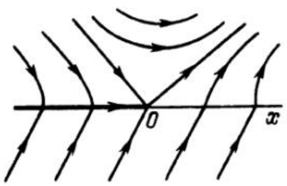


Рис. 89.

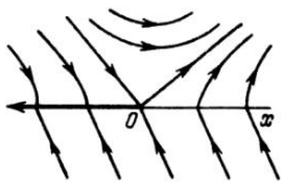


Рис. 90.

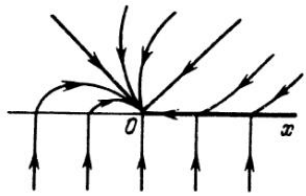


Рис. 91.

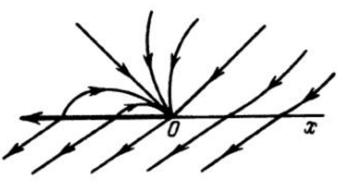


Рис. 92.

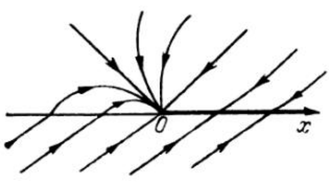


Рис. 93.

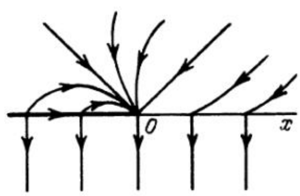


Рис. 94.

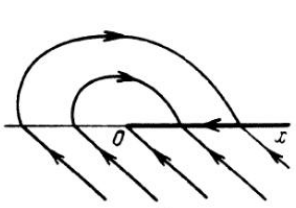


Рис. 95.

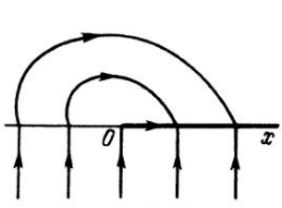


Рис. 96.

мы A^+. Положим

$$a = P_x^+(0,0), \quad b = P_y^+(0,0), \quad c = Q_x^+(0,0), \quad d = Q_y^+(0,0),$$

$$\sigma = a + d, \quad \Delta = ad - bc.$$

При линейных преобразованиях плоскости и заменах t на $-t$ и x на $-x$ не меняются знаки величин Δ, $\sigma^2 - 4\Delta$, $\sigma Q^-(0,0)$ и $f'(0)$, где $f(x)$ та же, что в (5).

Из (60) следует, что в случае $Q_x^+(0,0) \neq 0$ функция $Q_x^-(x,0)Q_x^+(x,0)$ меняет знак при переходе от значений $x < 0$ к $x > 0$. Поэтому движение по оси Ox имеется только в одной полуокрестности ($x < 0$ или $x > 0$) точки $x = 0$. Это движение и движение по проходящей при $y \leqslant 0$ через точку (0,0) траектории системы A^- (см. (51)) согласно (5) направлены оба к точке (0,0) или оба от этой точки, если $f'(0) < 0$, и направлены одно к этой точке, другое от нее, если $f'(0) > 0$. В случае $\Delta < 0$ особая точка (0,0) системы A^+ — седло, в случае $0 < 4\Delta < \sigma^2$ — узел, в случае $0 < \sigma^2 < 4\Delta$ — фокус. Эти рассуждения дают следующие 8 топологических классов особых точек.

1) Если $\Delta < 0$, $Q_x^+(0,0) \neq 0$, то в случае $f'(0) < 0$ имеем класс $HQ\bar{Q}H$ (рис. 89), а в случае $f'(0) > 0$ — класс $HK\bar{K}H$ (рис. 90).

2) Если $0 < 4\Delta < \sigma^2$, $Q_x^+(0,0) \neq 0$, то в случае $f'(0) < 0$ имеем классы $\bar{Q}PQ$, если $\sigma Q^-(0,0) < 0$ (рис. 91), и $HPF\bar{Q}$, если $\sigma Q^-(0,0) > 0$ (рис. 92), а в случае $f'(0) > 0$ — классы $\bar{K}PK$, если $\sigma Q^-(0,0) < 0$ (рис. 93), и $HP\bar{R}\bar{K}$, если $\sigma Q^-(0,0) > 0$ (рис. 94).

3) Если $\sigma^2 < 4\Delta$, то в случае $f'(0) < 0$ имеем класс $\bar{Q}Q$ (рис. 95), а в случае $f'(0) > 0$ — класс $\bar{K}K$ (рис. 96).

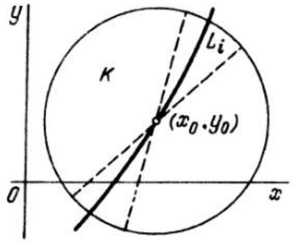


Рис. 97.

Если особая точка — узел или седло, то ([157], стр. 186) траектории, входящие в эту точку, касаются в ней собственных векторов матрицы

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x^+ & P_y^+ \\ Q_x^+ & Q_y^+ \end{pmatrix}_{x = y = 0} \tag{61}$$

Ненулевой вектор (u, v) тогда является собственным, когда

$$au + bv = \lambda u, \quad cu + dv = \lambda v, \tag{62}$$

т.е. когда

$$(au + bv)v = (cu + dv)u. \tag{63}$$

Если $c \neq 0$, то собственные векторы имеют вид $(\kappa_1, 1)$ и $(\kappa_2, 1)$, где κ_1, κ_2 — корни уравнения

$$\varphi(\kappa) \equiv c\kappa^2 + (d - a)\kappa - b = 0. \tag{64}$$

Л е м м а 12 ([185], § 9). *Пусть* (0,0) — *особая точка системы* $A^+ \in C^1$, *причем* $\Delta \neq 0$. *Тогда*

а) *существуют такие* $\rho > 0$, $\delta_0 > 0$, *что при* $0 < \delta < \delta_0$ *всякая система* A^*, δ-*близкая в* C^1 *к системе* A^+, *имеет в круге* $K_1(x^2 + y^2 \leqslant \rho^2)$ *ровно одну особую точку* (x_0, y_0); *при этом* $x_0 = O(\delta)$, $y_0 = O(\delta)$;

б) если $\Delta < 0$ или $0 < \sigma^2 \neq 4\Delta > 0$, то для некоторого $\delta_1 > 0$ при $0 < \delta < \delta_1$ особая точка (x_0, y_0) того же типа (узел, седло или фокус), что точка $(0,0)$ системы A^*;

в) если $\Delta < 0$ или $0 < 4\Delta < \sigma^2$, то для любого $\epsilon > 0$ найдутся такие $\rho_1(\epsilon)$, $\delta_2(\epsilon)$, что при $0 < \rho < \rho_1(\epsilon)$, $0 < \delta < \delta_2(\epsilon)$ существуют гладкие линии L_1, L_2, каждая из которых состоит из двух полутраекторий системы A^*, входящих в особую точку (x_0, y_0), и делит круг $K((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant \rho^2)$ на две части (рис. 97); *касательная к L_i, $i = 1,2$, в любой точке образует с собственным вектором (u_i, v_i) матрицы* (61) *угол, меньший ϵ.*

З а м е ч а н и е. Если $Q_x^+ \neq 0$, то утверждение об угле можно заменить следующим: на L_i

$$\left|\frac{dx}{dy} - \kappa_i\right| < \epsilon, \quad i = 1, 2. \tag{65}$$

Л е м м а 13. *Пусть система*

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy \tag{66}$$

имеет особую точку типа "фокус". Тогда траектория системы, касающаяся прямой $y = -1$, имеет в первой точке $(\xi_1, 0)$ своего пересечения с этой прямой производную $dx/dy = \kappa_0$; при этом $\sigma(a - c\kappa_0) > 0$,

$$\frac{r}{2\sigma}\ln\frac{c[c\kappa_0^2 + (d-a)\kappa_0 - b]}{(a - c\kappa_0)^2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\Delta}{a - c\kappa_0} - \sigma\right) = 2\pi\operatorname{sgn}\sigma - \operatorname{arctg}\frac{\sigma}{r},$$

$$r = \sqrt{-4bc - (d-a)^2} > 0. \tag{67}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Деля первое уравнение (66) на второе, получаем однородное уравнение. Решаем его подстановкой $x = uy$. Проходящая через точку касания $y = -1$, $u = -d/c$ интегральная кривая разбивается на куски, на каждом из которых постоянная интегрирования определяется отдельно. В точке пересечения с прямой $y = -1$ получаем уравнение для u; выражая u через $dx/dy = \kappa_0$, получаем (67).

Т е о р е м а 5 [188]. *Пусть система $A \in C^2_*$ и в особой точке $(0,0)$ выполнены условия* (60). *Для того чтобы эта точка имела 1-ю степень негрубости, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1° *Или $\Delta < 0$, или $\Delta > 0$, $\sigma \neq 0$, $\sigma^2 \neq 4\Delta$.*

2° $Q_x^+(0,0) \neq 0$.

3° $P_x^+(0,0)\,Q^-(0,0) \neq P^-(0,0)\,Q_x^+(0,0)$.

4° *Если $\Delta < 0$ и выполнено* (63) *с $u = P^-(0,0)$, $v = Q^-(0,0)$, то должно выполняться условие*

$$Q_x^+(0,0)P^-(0,0) + Q_y^+(0,0)Q^-(0,0) < 0. \tag{68}$$

5° *Если $4\Delta > \sigma^2$ и для $\kappa_0 = P^-(0,0)/Q^-(0,0)$ выполнено* (67), *где a, b, c, d те же, что в* (61), *то должно выполняться условие $\sigma Q^-(0,0) < 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Для условия 2° она доказывается подобно лемме 10.

Пусть условие 2° выполнено, а 1° — нет. Если $\Delta = 0$ или $\Delta > 0$, $\sigma = 0$, то точка $(0,0)$ для системы A^+ — негрубая ([185], теоремы 11 и 15). Сдвинем ее в точку $(0, \eta)$, т.е. заменим функции $P^+(x,y)$ и $Q^+(x,y)$ на $\tilde{P}^+(x,y) = P^+(x, y-\eta)$ и $\tilde{Q}^+(x,y) = Q^+(x, y-\eta)$. Полученная система негрубая и, как в конце доказательства леммы 1, не ϵ-тождественна системе A. Значит, система A не может иметь 1-ю степень негрубости. (Здесь и далее не указывается, как выбирать область H, для которой $(\tilde{H}, \tilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (H, A)$, из-за очевидности этого выбора.)

Если $\sigma^2 = 4\Delta > 0$, то для системы A^+ точка $(0,0)$ — узел. В силу 2° вектор $(1,0)$ не удовлетворяет (64), значит, из области $y > 0$ в точку $(0,0)$ входит бесконечно много траекторий. Сколь угодно мало изменим систему, чтобы было $4\Delta > \sigma^2$. Точка $(0,0)$ станет фокусом системы A^+, и из области $y > 0$ в эту точку не будет входить ни одна траектория. Одна траектория будет входить из области $y < 0$ и одна — по оси Ox (см. рис. 95 и 96). Полученная система не ϵ-тождественна исходной системе A и негрубая по лемме 1. Значит, система A не может иметь 1-ю степень негрубости.

Пусть не выполнено условие 3 . Тогда для функции $f(x)$ из (5) имеем $f'(0) = 0$. Для системы $\widetilde{A}$, полученной из A заменой функций P^+, Q^+ на

$$\widetilde{P}^+(x, y) = P^+(x, y) - \alpha P^-(0,0) - \alpha x P_x^-(0,0),$$

$$\widetilde{Q}^+(x, y) = Q^+(x, y) - \alpha Q^-(0,0) - \alpha^2 x Q_x^-(0,0),$$

при сколь угодно малом $\alpha > 0$ имеем

$$\widetilde{Q}^-(0,0)\widetilde{Q}^+(0,0) = -\alpha(Q^-(0,0))^2 < 0, \qquad \widetilde{f}(0) = \widetilde{f}'(0) = 0.$$

Для системы $\widetilde{A}$ (0, 0) — особая точка типа 1, негрубая по теореме 1. Вблизи нее $\widetilde{Q}^- \widetilde{Q}^+ < 0$, поэтому на обоих интервалах $-\rho < x < 0$ и $0 < x < \rho$ оси Ox сливаются траектории, а для системы A — только на одном, так как $Q^-(x, 0)\, Q^+(x, 0)$ меняет знак в силу 2° и (60). Тогда особая точка (0,0) системы A и особая точка (0,0) системы $\widetilde{A}$ топологически различны. Значит, система A не может иметь 1-ю степень негрубости.

Пусть, как в 4°, $\Delta < 0$. Тогда для системы A^+ точка (0,0) — седло и его сепаратрисы касаются векторов $(\kappa_i, 1)$, κ_i $(i = 1, 2)$ — корни уравнения (64). Для системы $\widetilde{A}^+$:

$$\dot{x} = \widetilde{P}^+(x, y) = P^+(x, y) - P^+(0, \eta), \quad \dot{y} = \widetilde{Q}^+(x, y) = Q^+(x, y) - Q^+(0, \eta) \tag{69}$$

по лемме 12 при малых $\eta > 0$ точка $(0, \eta)$ — седло.

Пусть выполнено (63) с $u = P^-(0,0)$, $v = Q^-(0,0)$. Тогда (u, v) — собственный вектор матрицы (61). Он коллинеарен одному из векторов $(\kappa_i, 1)$, например, вектору $(\kappa_1, 1)$. По лемме 12 одна сепаратриса T системы $\widetilde{A}^+$ пересекает ось Ox в точке $(x_1, 0)$, и в этой точке

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\widetilde{P}^+(x_1, 0)}{\widetilde{Q}^+(x_1, 0)} = \kappa_1 + \mu(\eta) = \frac{P^-(0,0)}{Q^-(0,0)} + \mu(\eta); \tag{70}$$

при этом $x_1 \to 0$, $\mu(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Пусть система $\widetilde{A}$ при $y > 0$ совпадает с $\widetilde{A}^+$, а при $y < 0$ получается из A заменой функции $P^-(x, y)$ на функцию $\widetilde{P}^-(x, y) = P^-(x, y) + \nu$, где ν определяется из равенства

$$\frac{P^-(x_1, 0) + \nu}{Q^-(x_1, 0)} = \frac{P^-(0,0)}{Q^-(0,0)} + \mu(\eta); \qquad \nu \to 0 \quad (\eta \to 0),$$

а $\widetilde{Q}^- = Q^-$. Тогда для системы $\widetilde{A}$ в точке $(x_1, 0)$ векторы $(\widetilde{P}^+, \widetilde{Q}^+)$ и $(\widetilde{P}^-, \widetilde{Q}^-)$ коллинеарны и $\widetilde{f}(x_1) = \widetilde{P}^+ \widetilde{Q}^- - \widetilde{P}^- \widetilde{Q}^+ = 0$.

Если λ — собственное значение матрицы (61), соответствующее вектору $(u, v) = (P^-(0,0), Q^-(0,0))$, то в силу (62) левая часть (68) равна $\lambda Q^-(0,0)$. Если условие (68) не выполнено, то $\lambda Q^-(0,0) > 0$. Если $\lambda > 0$, то $Q^-(0,0) > 0$ и движение по сепаратрисе T направлено от седла $(0, \eta)$ к точке $(x_1, 0)$, поэтому $\widetilde{Q}^+(x_1, 0) < 0$. Тогда при малых η и x_1 имеем $\widetilde{Q}^+(x_1, 0)\widetilde{Q}^-(x_1, 0) < 0$. Так как $\widetilde{f}(x_1) = 0$, то $(x_1, 0)$ — особая точка типа 1 системы $\widetilde{A}$, а T — двойная сепаратриса. Это же справедливо в случае $\lambda < 0$.

Поэтому система $\widetilde{A}$ — негрубая, а система A не может иметь 1-ю степень негрубости.

Пусть, как в 5°, $4\Delta > \sigma^2$. Тогда (0,0) — фокус как для системы A^+, так и для ее линейной части — системы (66). Теперь при малых η точка $(0, \eta)$ — фокус для системы (69). После замены $x = \eta X$, $y = \eta(Y + 1)$ точка $(0, \eta)$ переходит в точку $X = Y = 0$, а прямая $y = 0$ — в прямую $Y = -1$. Система (69) переходит в систему, сколь угодно близкую к (66) в области $|X| < m$, $|Y| < m$, если η достаточно мало. Полученная система имеет траекторию, касающуюся прямой $Y = -1$ и затем пересекающую ее в точке X_1, близкой к ξ_1, с производной $dX/dY = \kappa_0 + \mu(\eta)$, где $\mu(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$, а ξ_1 и κ_0 те же, что в лемме 13. Возвращаясь к x, y, получаем, что траектория T системы (69), касающаяся оси Ox в некоторой точке $(x^*, 0)$, затем пересекает ее в точке $(x_1, 0)$, $x_1 = \eta X_1$, с производной $dx/dy = \kappa_0 + \mu(\eta)$. Далее, как в доказательстве необходимости условия 4°, показывается, что при невыполнении условия 5° существует сколь угодно близкая к A система $\widetilde{A}$, для которой точка $(x_1, 0)$ — особая типа 1, а T — двойная сепаратриса. Следовательно, система A не может иметь 1-ю степень негрубости.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1°–5° и V — достаточно малая окрестность точки (0,0). Согласно 1° точка (0,0) для системы A^+ — седло, фокус или обычный узел. При малом $\delta > 0$ для любой системы $\widetilde{A}$, δ-близкой в C_*^2 к системе A, функция $\widetilde{Q}^-(x, y) \neq 0$ в V. Поэтому система $\widetilde{A}$ может иметь в V особые точки только типов 1, 2 и 4 и не более одной стационарной точки (x_0, y_0) при $y > 0$. Если δ мало, то в силу 2°, 3° и (60) для системы $\widetilde{A}$ функции $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ и

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{P}^+(x, 0)\widetilde{Q}^-(x, 0) - \widetilde{P}^-(x, 0)\widetilde{Q}^+(x, 0)$$

имеют на отрезке оси Ox в V только по одному корню x^* и x_1 соответственно (так как для функции f из (5) имеем $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$); эти корни простые; $x^*, x_1, x_0, y_0 = O(\delta)$, точка (x_0, y_0) того же типа, что точка (0,0) для A^+.

А° Если $y_0 = 0$, то $\widetilde{P}^+(x_0, 0) = \widetilde{Q}^+(x_0, 0) = 0$, $\widetilde{f}(x_0) = 0$, поэтому $x^* = x_1 = x_0$. Тогда в V имеется только одна особая точка $(x_0, 0)$ системы $\widetilde{A}$. Эта точка типа 4. При малых δ в ней выполняются условия, аналогичные условиям 1°–3° для системы А, и функции $\widetilde{Q}^-$, $\widetilde{Q}^+_x$, $\widetilde{f}'$, Δ, $\sigma^2 - 4\Delta$, σ (при $\Delta = 0$) имеют те же знаки, что соответствующие функции для системы А. Тогда окрестности этих особых точек состоят из одних и тех же секторов (см. случаи 1)–3), рис. 89–96) и топологически эквивалентны. Имеем $(\widetilde{V}, \widetilde{A}) \overset{\epsilon}{\equiv} (V, A)$ при малом $\delta > 0$ для некоторой окрестности $\widetilde{V}$ точки $(x_0, 0)$.

Б° Если $y_0 > 0$ или если в части $y \geq 0$ окрестности V нет стационарных точек системы $\widetilde{A}^+$ ($\dot{x} = \widetilde{P}^+(x, y)$, $\dot{y} = \widetilde{Q}^+(x, y)$), то в V имеется ровно одна особая точка $(x^*, 0)$ типа 2, не более одной особой точки $(x_1, 0)$ типа 1 и не более одной стационарной точки (x_0, y_σ) в области $y > 0$. Так как $\widetilde{Q}^+_x(x^*, 0) \neq 0$, $\widetilde{f}'(x_1) \neq 0$, то в силу теорем 1 и 2 и условия 1° эти точки — грубые. Покажем, что в $\widetilde{V}$ нет двойных сепаратрис и негрубых замкнутых политраекторий.

Функция $\widetilde{Q}^-$ сохраняет знак в V, поэтому замкнутая траектория не может хотя бы частично лежать в области $y < 0$. Если бы она целиком лежала в области $y > 0$, то внутри нее имелась бы особая точка (x_0, y_σ) индекса 1, т.е. с $\Delta > 0$. Но тогда $\sigma \neq 0$ для системы А, значит, при малых V и δ для системы $\widetilde{A}$ сумма $\widetilde{P}^+_x + \widetilde{Q}^+_y$, близкая в V к числу σ, сохраняет знак в V. Тогда в V при $y > 0$ нет замкнутых траекторий ([157], стр. 228). Поэтому замкнутая траектория может только частично лежать в области $y > 0$, а частично — на оси Ox (рис. 98). Но тогда она содержит кусок оси Ox, на котором $\widetilde{Q}^- \neq 0$, т.е. кусок линейной особенности, и не является политраекторией.

Покажем, что в V нет двойных сепаратрис.

1) Предположим, что сепаратриса T особой точки $(x^*, 0)$ типа 2 идет в точку $(x_1, 0)$ типа 1. В точке $(x_1, 0)$ функция $h(x) = \widetilde{Q}^-(x, 0)\widetilde{Q}^+(x, 0) < 0$, она меняет знак только в точке $(x^*, 0)$. Следовательно, $h(x) < 0$ на участке оси Ox между этими точками, и по указанному участку идет траектория L. Траектории T и L ограничивают область W. Вторая сепаратриса точки $(x^*, 0)$ входит внутрь W, так как в противном случае функция $\widetilde{Q}^+(x, 0)$ на указанном участке еще раз меняла бы знак (рис. 99), что невозможно. Тогда внутри W есть особая точка (x_0, y_0). При малых δ она может быть только фокусом, так как в случае узла и седла в силу леммы 12 в) через точку (x_0, y_0) проходит делящая W на две части линия, которую не может пересечь траектория T. Значит, для системы A^+ точка $(0, 0)$ — тоже фокус. А тогда из рассуждений, подобных проведенным при доказательстве необходимости условия 5°, следует, что при выполнении условия 5° нет двойных сепаратрис.

2) Пусть сепаратриса выходит из точки (x_0, y_0), $y_0 > 0$. Тогда эта точка — седло системы $\widetilde{A}$. Так как $Q^+_x(0, 0) \neq 0$, то сепаратрисы особой точки $(0, 0)$ системы A^+ не касаются оси Ox в этой точке. По лемме 12 при малых δ сепаратрисы точки (x_0, y_0) системы $\widetilde{A}$ тоже не касаются оси Ox в окрестности V. Значит, они не попадают в точку $(x^*, 0)$ в которой траектория касается оси Ox. При выполнении условия 4° они не попадают и в особую точку $(x_1, 0)$. Это доказывается с помощью рассуждений, подобных использованным при доказательстве необходимости условия 4°. Значит, и в этом случае в V нет двойных сепаратрис.

Таким образом, в случае Б° система $\widetilde{A}$ при малых δ не имеет негрубых особых точек, негрубых замкнутых политраекторий и двойных сепаратрис. Тогда в силу теоремы 1 § 18 система $\widetilde{A}$ — грубая в V.

Из А° и Б° следует, что система А в области V и особая точка $(0, 0)$ имеют 1-ю степень негрубости.

В силу доказанной теоремы существуют 8 топологических классов особых точек типа 4 1-й степени негрубости (рис. 89 – 96). Рассмотрим бифуркации этих точек.

В случае $\Delta < 0$, $f'(0) < 0$ (рис. 89) возможны следующие бифуркации. Для системы $\widetilde{A}$, близкой к А, при $y_0 > 0$ вблизи начала координат имеются (рис. 100) особая точка $(x^*, 0)$ класса 2b, особая точка $(x_1, 0)$ класса 1a и седло (x_0, y_0). Точка $(x^*, 0)$ лежит на интервале между точками пересечения сепаратрис седла с осью Ox, а точка $(x_1, 0)$ или на этом же интервале, или вне его.

Если $y_0 < 0$, т.е. система $\widetilde{A}^+$ не имеет стационарных точек при $y_0 \geq 0$, то система $\widetilde{A}$ имеет только особую точку класса 2a (рис. 56).

В случае $\Delta < 0$, $f'(0) > 0$ (рис. 90 для системы А) расположение траекторий системы $\widetilde{A}$ сходно с предыдущим случаем, но при $y_0 > 0$ нет особой точки типа 1, а при $y_0 < 0$ имеются особая точка $(x_1, 0)$ класса 1b и особая точка $(x^*, 0)$ класса 2a.

В случае $0 < 4\Delta < \sigma^2$, $f'(0) < 0$ (рис. 91 и 92 для системы А) система $\widetilde{A}$, если $y_0 > 0$, имеет особую точку $(x^*, 0)$ класса 2a и узел (x_0, y_0), а если $y_0 < 0$ — особые точки классов 2b и 1a. Бифуркации особой точки, изображенной на рис. 91, представлены на рис. 101. (Бифуркации особой точки рис. 92 рассматриваются аналогично.)

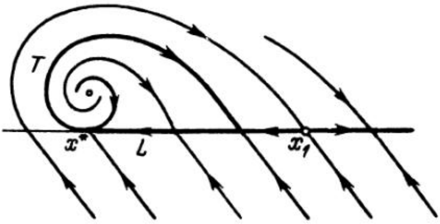
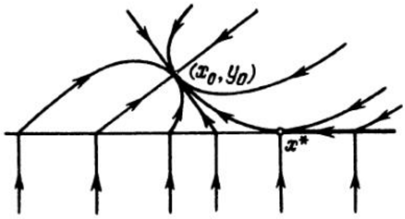


Рис. 98.



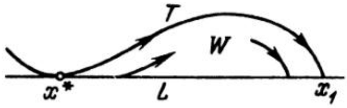


Рис. 99.

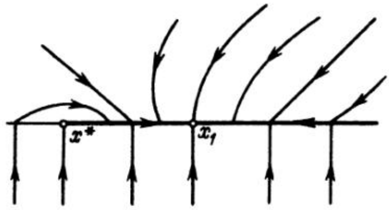


Рис. 101.

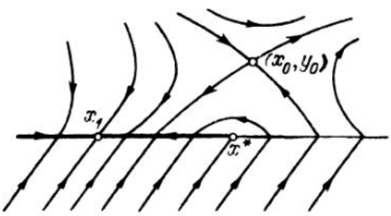


Рис. 100.

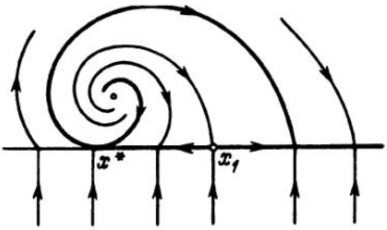


Рис. 102.

Бифуркации особых точек в случае $0 < 4\Delta < \sigma^2$, $f'(0) > 0$ (рис. 93 и 94) отличаются от рассмотренных тем, что у системы $\tilde{A}$ особая точка типа 1 имеется лишь в случае $y_0 > 0$, она принадлежит классу 1b.

В случае $0 < \sigma^2 < 4\Delta$, $f'(0) > 0$ траектории системы A изображены на рис. 96. Если $y_0 > 0$, система $\tilde{A}$ имеет особую точку $(x^*, 0)$ класса 2a, особую точку $(x_1, 0)$ класса 1b и фокус (x_0, y_0). При выполнении условия 5° система $\tilde{A}$ может иметь грубый предельный цикл (рис. 98) или не иметь его (рис. 102). В случае $\sigma Q^-(0, 0) < 0$ предельного цикла нет. Если $y_0 < 0$, система $\tilde{A}$ имеет только особую точку класса 2b (рис. 57).

В случае $0 < \sigma^2 < 4\Delta$, $f'(0) < 0$ (рис. 95 для системы A) бифуркации особой точки отличаются тем, что у системы $\tilde{A}$ особая точка типа 1 имеется лишь при $y_0 < 0$, она принадлежит классу 1a.

Число топологических классов изолированных особых точек каждого типа (не считая центрофокусов, которых бесконечно много) указано в следующей таблице [188]:

Тип	1	2	3	4	5	6
Всего топологических классов	3	4	39	∞	∞	∞
Из них грубых	2	2	0	0	0	0
1-й степени негрубости	1	2	7	8	0	0

Примечание. Для типа 3 используется доопределение a) § 4.

Бифуркации векторных полей с особенностями на границе полуплоскости рассматривались в [191], [192].

§ 20. Особые точки на пересечении линий разрыва

Проводится качественное исследование особой точки, лежащей на пересечении любого конечного числа линий разрыва. Даются достаточные условия устойчивости и неустойчивости такой точки и достаточные условия ее грубости. Более полные результаты приводятся для особой точки на пересечении двух линий разрыва.

1. Пусть круг K $(x_1^2 + x_2^2 < r_0^2)$ с центром O разделен гладкими линиями (простыми дугами класса C^1) $L_1, \ldots, L_m$ на m областей S_i $(i = 1, \ldots, m;\ m \geqslant 2)$, называемых секторами. Сектор S_i лежит между линиями L_i и L_{i+1}; $L_{m+1} = L_1$. Только концы a_i линий L_i лежат на окружности круга K. Направление обхода $a_1 a_2 \ldots a_m a_1$ — положительное. Каждые две линии L_i и L_j не имеют общих точек, кроме точки O, являющейся их общим концом.

В круге K рассмотрим систему в векторной записи

$$\dot{x} = f(x), \qquad x = (x_1, x_2). \tag{1}$$

Предполагается, что в каждом секторе S_i вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Она может быть разрывной только на линиях $L_1, \ldots, L_m$. Пусть $f_i(x)$ — непрерывное продолжение функции f из сектора S_i на его замыкание $\bar{S}_i$. Для $x \in L_i$ пусть $f_N^-(x)$ и $f_N^+(x)$ — проекции векторов $f_{i-1}(x)$ и $f_i(x)$ на нормаль к L_i, направленную от S_{i-1} к S_i. На тех участках линии L_i, где $f_N^-(x) f_N^+(x) \leqslant 0$ (или хотя бы там, где $f_N^-(x) \geqslant 0$, $f_N^+(x) \leqslant 0$), определена непрерывная вектор-функция $f_i^0(x)$, касательная к L_i и определяющая скорость движения $\dot{x} = f_i^0(x)$ по таким участкам.

Лемма 1. *Если $f_i(x) \neq 0$ в $\bar{S}_i \setminus 0$, то траектория, проходящая через произвольную точку сектора S_i, при продолжении в каждую сторону или выходит на границу сектора, или стремится к точке O.*

Доказывается подобно утверждению 3 леммы 5 § 17.

Пусть α_i — отсчитываемый в положительном направлении угол между положительным направлением оси Ox и лучом, касательным к дуге L_i в точке O; при этом

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m < \alpha_1 + 2\pi; \qquad \alpha_{m+1} = \alpha_1 + 2\pi.$$

Если $f_i(0) \neq 0$, то φ_i — угол между Ox и вектором $f_i(0)$. Прибавляя, если надо, к φ_i слагаемое, кратное 2π, всегда считаем, что

$$\alpha_i \leqslant \varphi_i < \alpha_i + 2\pi. \tag{2}$$

Пусть K_ρ — круг $x_1^2 + x_2^2 < \rho^2$.

Лемма 2. *Пусть $f_i(0) \neq 0$ для некоторого i. Тогда:*

а) если $\alpha_i < \varphi_i < \alpha_{i+1}$ (или $\alpha_i < \varphi_i - \pi < \alpha_{i+1}$), то найдется такое $\rho > 0$, что каждая траектория, проходящая в $S_i \cap K_\rho$, при возрастании t (соответственно при убывании t) выходит из $S_i \cap K_\rho$ через дугу окружности $|x| = \rho$; в S_i имеется только одна траектория, входящая в точку O при убывании t (соответственно при возрастании t); в этой точке она касается вектора $f_i(0)$;

б) если $\alpha_{i+1} < \varphi_i < \alpha_i + \pi$ (или $\alpha_{i+1} < \varphi_i - \pi < \alpha_i + \pi$), то найдутся такие k и ρ, что каждая траектория, проходящая через какую-нибудь точку $b \in S_i \cap K_\rho$, при убывании t выходит из S_i на линию L_i (соответственно L_{i+1}), а при возрастании t — на линию L_{i+1} (соответственно L_i), и дуга этой траектории от входа в S_i до выхода содержится в области $k^{-1}|b| < |x| < k|b|$.

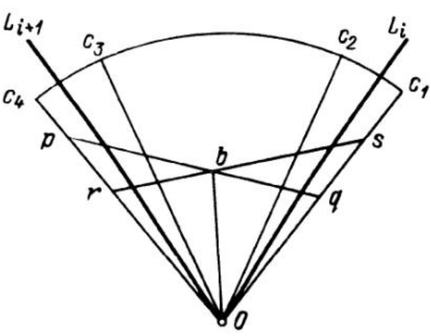


Рис. 103.

Доказательство. Пусть $\alpha_i < \varphi_i < \alpha_{i+1}$. Тогда вектор $f_i(0)$ из точки O направлен внутрь сектора S_i. Вследствие непрерывности $f_i(x)$ в $\bar{S}_i$ и гладкости линий L_i и L_{i+1} найдется такое $\rho > 0$, что в каждой точке x этих линий, в которой $|x| < \rho$, вектор $f_i(x)$ тоже направлен внутрь сектора. Через каждую такую точку в сектор входит по одной (в силу условия Липшица) траектории. Из сектора $S_i \cap K_\rho$ они выходят только через дугу $|x| = \rho$.

Пусть $\alpha_{i+1} < \varphi_i < \alpha_i + \pi$. Возьмем такое $\eta > 0$, чтобы было $\alpha_{i+1} + \eta < \varphi_i < \alpha_i + \pi - \eta$, и такое $\rho_i > 0$, чтобы в области $|x| < \rho_i$, $x \in \bar{S}_i$, направления вектора $f_i(x)$ и касательных к линиям L_i и L_{i+1} отличались от направлений лучей $\varphi = \varphi_i$, соответственно $\varphi = \alpha_i$, $\varphi = \alpha_{i+1}$, меньше, чем на ϵ $(0 < \epsilon < \eta/4)$. Тогда при $|x| < \rho_i$ линия L_i лежит между лучами Oc_1 и Oc_2 $(\varphi = \alpha_i \mp \epsilon)$, линия L_{i+1} – между лучами Oc_3 и Oc_4 $(\varphi = \alpha_{i+1} \mp \epsilon)$ (рис. 103). Возьмем $\rho = \rho_i \sin \eta_1$, $\eta_1 = \eta - 2\epsilon$, и проведем через любую точку $b \in \bar{S}_i \cap K_\rho$, $b \neq 0$, прямые pq и rs по направлениям с полярными углами $\varphi = \varphi_i \mp \epsilon$. Они пересекут лучи $Oc_1, \ldots, Oc_4$ в области $|x| < \rho_i$, так как, например, разность полярных углов лучей bp и Oc_4 равна

$$(\varphi_i - \epsilon) - (\alpha_{i+1} + \epsilon) = \varphi_i - \alpha_{i+1} - 2\epsilon \geqslant \eta_1,$$

$\angle opb > \eta_1$, и по теореме синусов для треугольника obp имеем

$$|op| = |ob| \cdot \frac{\sin obp}{\sin opb} \leqslant |ob| \frac{1}{\sin \eta_1} \leqslant \rho \frac{1}{\sin \eta_1} = \rho_i. \tag{3}$$

Аналогично получаем, что расстояние от точки O до ближайшей точки прямых pq и rs не меньше, чем $|Ob| \sin \eta_1$. Проходящая через точку b траектория заключена между этими прямыми. Отсюда следует утверждение б) леммы в рассматриваемом случае. Остальные случаи сводятся к рассмотренным заменой t на $-t$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f_i(0) \neq 0$ для всех i, а числа φ_i те же, что в (2). Для асимптотической устойчивости точки $x = 0$ достаточно, чтобы*

1) *при каждом i были выполнены неравенства*

$$\alpha_{i+1} < \varphi_i < \alpha_i + 2\pi; \tag{4}$$

2) *при $0 < |x| < \rho_0$ векторы $f_i^0(x)$ там, где они определены, были направлены по касательным к линиям L_i в сторону точки O, и $f_i^0(x) \neq 0$;*

3) *если*

$$\alpha_{i+1} < \varphi_i < \alpha_i + \pi, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

то требуется, чтобы

$$q < 1, \qquad q = \prod_{i=1}^{m} \frac{\sin(\alpha_i + \pi - \varphi_i)}{\sin(\varphi_i - \alpha_{i+1})}, \tag{6}$$

а если

$$\alpha_{i+1} + \pi < \varphi_i < \alpha_i + 2\pi, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

то $q > 1$.

Если же границы секторов – прямые, а направление вектора $f(x)$ в каждом секторе постоянно, то условия 1) – 3) являются и необходимыми.

З а м е ч а н и е. Если скорость движения по линиям L_i определяется согласно а) § 4 и выполнено условие 1), то для выполнения условия 2) достаточно, чтобы $|\varphi_i - \varphi_{i+1}| < \pi$ для тех i, при которых

$$(\varphi_{i+1} - \alpha_{i+1} - \pi)(\varphi_i - \alpha_{i+1} - \pi) < 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда

$$\varphi_i \neq \alpha_i + \pi, \quad \varphi_i \neq \alpha_{i+1} + \pi, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{8}$$

Тогда при достаточно малом $\epsilon > 0$

$$|\varphi_i - \alpha_i - \pi| > 2\epsilon, \quad |\varphi_i - \alpha_{i+1} - \pi| > 2\epsilon, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

В силу (4) и (9) для $|x| < \rho_0$ вектор $f_i(x)$ при $x \in L_i$ не касается L_i, а при $x \in L_{i+1}$ не касается L_{i+1}. Тогда для каждого i в зависимости от знака разности $\varphi_i - \alpha_i - \pi$ или на всем участке $|x| < \rho_0$ линии L_i траектории только выходят из сектора S_i на линию L_i, или на всем этом участке сходят с линии L_i в сектор S_i. То же справедливо при $|x| < \rho_0$ на границе L_{i+1} сектора S_i. В частности, в случае (5) выполнено (8), и все траектории при малых $|x|$ последовательно переходят из S_1 в $S_2, \ldots, S_m$, затем снова в S_1 и т.д. Для точек x_i пересечения траектории с L_i, $i = 1, 2, \ldots$, из (3) следует

$$|x_{i+1}| = |x_i| \frac{\sin(Ox_i x_{i+1})}{\sin(Ox_{i+1}\dot{x}_i)}.$$

В достаточно малой окрестности точки O это отношение синусов сколь угодно близко к отношению синусов в (6). Значит, при достаточно малом $|x_1|$ траектория из точки x_1 сделает оборот вокруг точки O и вернется на L_1 в точке x_{m+1}, где $|x_{m+1}| \leqslant q_1 |x_1|$. Так как $q < 1$, то $q_1 < 1$ если $|x_1| < \rho^*$. Но тогда траектория сделает еще оборот вокруг точки O и т.д. После n оборотов $|x_{nm+1}| \leqslant q_1^n |x_1| \to 0$ при $n \to \infty$. На дуге траектории между точками x_{nm+1} и $x_{(n+1)m+1}$ имеем $|x(t)| \leqslant c|x_{nm+1}|$ в силу (3). Из этих оценок следует асимптотическая устойчивость точки $x = 0$.

В случае (7) рассуждения аналогичны, но обороты совершаются в отрицательном направлении.

Если выполнено (8), но не выполнено ни (5), ни (7), то траектория не может вернуться в тот сектор, в котором уже побывала. В силу (3) в каждом секторе $|x(t)|$ может возрасти не более чем в $(\sin\eta_1)^{-1}$ раз, значит, $|x(t)| \leqslant (\sin\eta_1)^{-m}|x(t_0)|$ при $t_0 \leqslant t < \infty$. Начиная с некоторого момента t_1, траектория остается в одном из секторов S_i (и тогда входит в точку O по лемме 1) или на одной из линий L_i (и тогда стремится к точке O в силу условия 2) теоремы). Итак, в случае (8) асимптотическая устойчивость доказана.

Пусть для некоторого i вектор $f_i(x)$ касается линии L_i в некоторых точках $x \in L_i$, сколь угодно близких к O. Тогда $\varphi_i = \alpha_i + \pi$ и при $|x| < \rho$ направления векторов $f_i(x)$ и $f_i^0(x)$ отличаются от направления с полярным углом φ_i меньше, чем на ϵ. Поэтому в тех частях сектора S_i и линии L_i, которые находятся в секторе $|\varphi - \alpha_i| < \pi/8$ круга K_ρ, функция $|x(t)|$ убывает вдоль траектории даже в том случае, когда траектория бесконечно много раз попадает на линию L_i и сходит с нее в сектор S_i или в сектор S_{i-1}, если и там $\varphi_{i-1} = \alpha_i + \pi$. Если же $\varphi_{i-1} \neq \alpha_i + \pi$, то при достаточно малых $|x|$ траектории или сходят с L_i в S_{i-1}, не возвращаясь на L_i, или не могут сойти.

Если совпадают значения φ_i для группы соседних секторов S_i, а для разделяющих их линий L_j значения $\alpha_j + \pi$ совпадают с этими φ_i, то траектория может в течение некоторого промежутка времени оставаться в этих секторах, переходя любое число раз (даже бесконечно много раз) из одного сектора S_i в другой и, возможно, проходя по линиям L_j. Из сказанного выше следует, что на таком промежутке времени $|x(t)|$ убывает вдоль траектории. На остальных промежутках времени справедливы те же оценки, что и в случае (8). Следовательно, во всех случаях при выполнении условий теоремы имеет место асимптотическая устойчивость.

2. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1 и лемм, позволяют провести качественное исследование окрестности точки O в случае, когда все векторы $f_i(0)$ не равны нулю и каждый из них не касается границ L_i и L_{i+1} сектора S_i в точке O, т.е. для $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\varphi_i \neq \alpha_i, \quad \varphi_i \neq \alpha_i + \pi, \quad \varphi_i \neq \alpha_{i+1}, \quad \varphi_i \neq \alpha_{i+1} \pm \pi, \tag{10}$$

и $f_i^0(x) \neq 0$ на линиях L_i. В этом случае в некоторой окрестности точки O нет особых точек, отличных от O, а сама точка O может быть особой или неособой (определение особой точки см. в п. 1 § 18).

В случаях (5) и (7) особая точка O — фокус, центр или центрофокус и вблизи нее нет линейных особенностей. В случае (5) движение по траекториям вокруг точки O происходит в положительном направлении, при $q < 1$ имеем устойчивый фокус, при $q > 1$ — неустойчивый. В случае (7) движение происходит в отрицательном направлении, при $q < 1$ — неустойчивый фокус, при $q > 1$ — устойчивый. Случай $q = 1$ — критический, точка O может быть фокусом, центром или центрофокусом. Если все линии L_i — прямые и направления векторов $f_i(x)$ постоянны в каждом секторе S_i, и $q = 1$, то особая точка — центр.

Если же при некоторых (не всех) значениях i выполнено двойное неравенство (5), а при всех остальных — (7), то найдется такая линия L_j, для которой $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, и другая линия, для которой $f_N^- < 0$, $f_N^+ > 0$. Таких линий четное число. Они являются линейными особенностями класса AA_1 и делят окрестность точки O на топологические секторы классов G, L, S (в отличие от секторов S_i, топологическими здесь называются секторы, рассмотренные в § 17). Устойчивость особой точки и принадлежность топологических секторов классу G, L или S зависят от направления движения по линиям L_i, являющимся линейными особенностями.

Если для некоторого i имеем $\alpha_i < \varphi_i < \alpha_{i+1}$ (или $\alpha_i < \varphi_i - \pi < \alpha_{i+1}$), то по лемме 2 в секторе S_i имеется траектория, входящая в точку O при убывании (возрастании) t. Пусть хотя бы в одном секторе S_i выполнено неравенство $\alpha_i < \varphi_i - \pi < \alpha_{i+1}$, ни в одном из остальных не выполнено неравенство $\alpha_j \leqslant \varphi_j \leqslant \alpha_{j+1}$ и ни на одной из линий L_i вблизи точки O нет ни точек, где $f^0(x) = 0$, ни движений, направленных от точки O. Тогда точка O асимптотически устойчива. В ее окрестности могут иметься только топологические секторы классов Q и S. Если $\alpha_i < \varphi_i < \alpha_{i+1}$ хотя бы для одного i, то точка O не может быть устойчивой.

Если $\alpha_i < \varphi_i < \alpha_{i+1}$ хотя бы для одного i и $\alpha_j < \varphi_j - \pi < \alpha_{j+1}$ хотя бы для одного j, то при отсутствии секторов S_i с неравенствами (5) и (7) точка O седлового типа; ее окрестность может состоять только из топологических секторов классов H, K, Q. При наличии также секторов S_i с неравенствами (5) или (7) могут иметься и топологические секторы классов G, L, S. Точка O может быть особой или неособой (класса HH или $\bar{K}Q\bar{Q}K$).

Л е м м а 3. *Если для $i = 1, \ldots, m$ выполнены условия* (10), $f_i(0) \neq 0$ *и* $f_i^0(0) \neq 0$ *на линиях L_i, на которых определена функция f_i^0, и если $q \neq 1$ в случаях, когда для каждого i выполняется или* (5), *или* (7) *(может быть, для некоторых i —* (5), *а для других —* (7)), *то точка O — грубая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При достаточно малых (в C^1) изменениях правой части дифференциального уравнения для каждого i сохраняется то из четырех условий пунктов а) и б) леммы 2, которое было выполнено для этого i. Тогда поведение траекторий в каждом секторе и на каждой линии L_i остается прежним. Условие $q \neq 1$ обеспечивает отсутствие замкнутых политраекторий (п. 4 § 18) вблизи точки O. Для каждого сектора S_i его ϵ-отображение на соответствующий сектор фазовой плоскости другого, δ-близкого уравнения строится методами, рассмотренными в § 17. Это доказывает грубость точки O.

Условия леммы 3 лишь достаточны для грубости. Необходимые и достаточные условия получены в [186].

Рассмотрим теперь уравнение (1) с доопределением а) § 4. Все предыдущие результаты справедливы и в этом случае, но их формулировки теперь упрощаются.

Наряду с фазовой плоскостью x_1, x_2, разделенной линиями L_i на секторы S_i, рассмотрим "плоскость скоростей" v_1, v_2, разделенную лучами l_i ($\varphi = \alpha_i$) на углы s_i ($\alpha_i < \varphi < \alpha_{i+1}$). Точка O считается принадлежащей всем лучам l_i. Пусть u_i — конец вектора $f_i(0)$, построенного на плоскости v_1, v_2. Пусть P — замкнутая ломаная линия с вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1} = u_1$. Если отрезок $u_i u_{i+1}$ пересекает луч l_{i+1} (или его продолжение за точку O) в точке w, то согласно а) § 4 на линии L_{i+1} определен вектор $f_{i+1}^0(0) = w$. Выпуклое замыкание множества точек $u_1, \ldots, u_m$ обозначаем M.

Справедливы следующие утверждения.

1) *Точка $x = 0$ — стационарная тогда и только тогда, когда $O \in M$* (п. 2 § 12).

2) *Если $O \in M$, $O \notin P$, то точка $x = 0$ — изолированная стационарная* (так как тогда в силу непрерывности функций f_i при $|x| < \rho$ имеем $f_i(x) \neq 0$, $f_i^0(x) \neq 0$).

3) *Если для $i = 1, \ldots, m$ точка u_i не лежит ни на лучах l_i, l_{i+1}, ни на их продолжениях, $O \notin P$ и если $q \neq 1$ в случаях, когда для каждого i выполнено или* (5), *или* (7), *то точка $x = 0$ — грубая* (лемма 3).

4) *Если хотя бы для одного i не выполнено ни* (5), *ни* (7), *точки $u_i \notin \bar{s}_i$ и отрезки $u_i u_{i+1}$ не имеют общих точек с лучами l_{i+1}, $i = 1, \ldots, m$, то точка $x = 0$ асимптотически устойчива* (следует из теоремы 1).

5) *Если ломаная $u_1 u_2 \ldots u_m u_1$ не проходит через точку O, то индекс точки $x = 0$ равен числу оборотов вокруг точки O, которые делает эта ломаная* (п. 2 § 14).

6) *Если линии L_i — прямые и в каждом секторе S_i функции $f_i(x)$ постоянны, то условия, сформулированные в* 2) *и* 3), *являются не только достаточными, но и необходимыми.*

Качественное исследование системы с правой частью, разрывной на линиях L_i, выходящих из точки O, проводилось в работах [104], [193]– [196] и др.

3. Рассмотрим случай, когда правые части системы являются суммами двух слагаемых, одно из которых разрывно на одной гладкой линии, другое — на другой, и эти линии пересекаются под ненулевым углом. Если сделать замену переменных так, чтобы эти две линии стали осями координат, то система примет вид

$$\dot{x} = f_1(x, y) + g_1(x, y), \qquad \dot{y} = f_2(x, y) + g_2(x, y);$$

функции f_i разрывны только на оси Oy, g_i — только на Ox. Чтобы исследовать поведение траекторий вблизи точки пересечения линий разрыва в грубых случаях, можно в каждой из координатных четвертей заменить функции f_i, g_i их предельными значениями при $x \to 0$, $y \to 0$. Получится система [197]

$$\dot{x} = a + b \operatorname{sgn} x + c \operatorname{sgn} y, \qquad \dot{y} = d + e \operatorname{sgn} x + f \operatorname{sgn} y. \tag{13}$$

На линиях разрыва используется доопределение а) § 4. Перечислим ряд свойств решений этой системы, часть из которых непосредственно следует из результатов п. 2, а часть получена в [197].

Если $|f| \geqslant |d + e \operatorname{sgn} x|$, $x > 0$ или $x < 0$, то имеется решение, идущее по рассматриваемой полуоси Ox; при этом

$$\dot{x} = \frac{1}{f}(D_1 + D \operatorname{sgn} x), \qquad \dot{y} = 0,$$

$$D = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b & a \\ e & d \end{vmatrix}.$$

Если $|b| \geqslant |a + c \operatorname{sgn} y|$, $y > 0$ или $y < 0$, то существует решение, идущее по рассматриваемой полуоси Oy; при этом

$$\dot{x} = 0, \qquad \dot{y} = \frac{1}{b}(D_2 + D \operatorname{sgn} y).$$

Точка (0, 0) — стационарная тогда и только тогда, когда или

$$|D_1| \leqslant |D|, \qquad |D_2| \leqslant |D|, \qquad D \neq 0,$$

или

$$D = D_1 = D_2 = 0, \qquad |a| \leqslant |b| + |c|, \qquad |d| \leqslant |e| + |f|;$$

точка (0, 0) — изолированная стационарная только в том случае, когда

$$|D_1| < |D|, \qquad |D_2| < |D|. \tag{14}$$

В случае (14) индекс I особой точки (0, 0) равен $\operatorname{sgn} D$; если точка (0, 0) — нестационарная, то $I = 0$.

Точка (0, 0) — седло, если $D < -|D_1|$, $D < -|D_2|$.

Точка (0, 0) — фокус или центр, если

$$|c| > |a| + |b|, \qquad |e| > |d| + |f|, \qquad ce < 0. \tag{15}$$

При этом в случае

$$f(b^2 + c^2 - a^2) < \frac{bc}{e}(e^2 + f^2 - d^2) \tag{16}$$

точка (0, 0) — устойчивый фокус, при выполнении противоположного неравенства — неустойчивый фокус, а в случае равенства в (16) — центр.

Для того чтобы $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ было асимптотически устойчивым решением системы (13), необходимо и достаточно, чтобы в случае (15) выполнялось неравенство (16), а в случае невыполнения хотя бы одного из неравенств (15) было выполнено

$$D > |D_1|, \quad D > |D_2|; \qquad b < \big||a| - |c|\big|, \quad f < \big||d| - |e|\big|. \tag{17}$$

Точка (0, 0) — устойчивый узел, если выполнены неравенства (17) и не выполнено хотя бы одно из неравенств (15). Если выполнены те же условия, но с заменой b и f на $-b$ и $-f$ в последних двух неравенствах (15), то (0, 0) — неустойчивый узел.

Точка (0, 0) — стационарная с эллиптической областью (рис. 51), если $D > |D_1|$, $D > |D_2|$, и, кроме того, или

$$|c + a| < b < a - c, \qquad -e - d < f < -|e - d|,$$

или

$$-c - a < b < -|c - a|, \qquad |e + d| < f < d - e.$$

Условия грубости: $a \pm b \pm c \neq 0$, $d \pm e \pm f \neq 0$ (8 условий со всевозможными сочетаниями знаков), $|D| \neq \max\{|D_1|, |D_2|\}$, и если во всех четвертях плоскости имеем $xy\dot{x}\dot{y} < 0$ в силу системы (13), то

$$ef(b^2 + c^2 - a^2) \neq bc(e^2 + f^2 - d^2)$$

(тогда нет замкнутых ломаных, состоящих из кусков траекторий).

ЛОКАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

В гл. 5 исследуются локальные особенности трехмерных автономных систем с кусочно непрерывными и кусочно гладкими правыми частями. Рассматриваются особенности, лежащие на поверхности разрыва правых частей системы или на пересечении поверхностей разрыва. Указываются основные топологические классы особенностей. Выделяются грубые особенности. Часть результатов переносится на многомерные системы.

§ 21. Основные типы особенностей. Двумерные особенности

Здесь указываются основные признаки, по которым проводится классификация особенностей трехмерных систем. Изучаются особенности расположения траекторий вблизи гладкой поверхности разрыва правых частей системы. Рассматриваются двумерные особенности, выделяются их топологические классы и указываются условия грубости.

1. В области G рассматривается автономная система

$$\dot{x} = f(x), \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in G. \tag{1}$$

Область G состоит из конечного числа конечных областей G_j $(j = 1, \ldots, l)$, в каждой из которых вектор-функция $f(x)$ принадлежит C^1 вплоть до границы, и множества M, содержащего те граничные точки всех областей G_j, которые принадлежат G, и состоящего из конечного числа кусков гладких поверхностей конечной площади, гладких линий конечной длины и точек. Каждая из этих линий и точек лежит на крае одного или нескольких таких кусков поверхностей.

Граница (край) каждого куска поверхности или линии считается не принадлежащей ему. Различные куски не имеют общих точек, а их границы — могут иметь. Например, если функция f разрывна на трех координатных плоскостях, то области G_j — координатные октанты, а множество M содержит 12 четвертей координатных плоскостей, 6 координатных полуосей и одну точку $x = 0$.

На той части множества M, откуда решение не может сойти ни в одну из областей G_j, система должна быть доопределена. Допускается доопределение а) § 4 или любое доопределение, удовлетворяющее условиям, которые будут указаны ниже, в п. 2.

Будем говорить, что окрестности двух точек x^* и y^*, заполненные траекториями системы (1) (или двух разных систем), *имеют одну и ту же структуру,* если существует отображение одной окрестности на другую, которое переводит точку x^* в точку y^* и которое, как и обратное отображение, однозначно, непрерывно и переводит траектории в траектории (т.е. каждую дугу траектории – в дугу траектории, а стационарную точку — в стационарную точку).

Точку $x^* \in G$ назовем *топологичес. і обыкновенной точкой* системы (1), если у нее есть не содержащая стационарных точек окрестность V, которую можно так топологически отобразить на некоторую область, что все содержащиеся в V дуги траекторий переходят в отрезки параллельных прямых. Остальные точки области G назовем *топологически особыми* для системы (1). Из теоремы 3 § 12 следует, что все внутренние точки области, в которой $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица и не обращается в нуль, являются топологически обыкновенными. Таким образом, все топологически обыкновенные точки имеют окрестности одной и той же структуры. Топологически особые точки системы (1) могут иметь окрестности разной структуры.

Рассмотрим в области G связное множество, все точки которого топологически особые и имеют окрестности одной и той же структуры. Пусть оно не содержится ни в каком другом множестве с этими же свойствами. Если это множество — поверхность, то оно называется *двумерной особенностью* системы (1); если — линия, то *линейной особенностью*; если — точка, то *точечной особенностью*.

Все топологически особые точки и, следовательно, двумерные, линейные и точечные особенности системы (1) могут лежать только на множестве, где $f(x) = 0$, и на множестве M, т.е. на поверхностях разрыва функции f и на их краях.

Это приводит к следующей предварительной классификации особенностей:

1) Особенности в области гладкости функции f (все они состоят из стационарных точек, т.е. из точек, где $f(x) = 0$).

а) Изолированные стационарные точки (их изучение составляет одно из направлений качественной теории дифференциальных уравнений).

б) Линии, состоящие из стационарных точек.

в) Поверхности, состоящие из стационарных точек.

Такие особенности изучались с более общей точки зрения: в n-мерном фазовом пространстве рассматривалось m-мерное многообразие, все точки которого — стационарные. С точки зрения теории дифференциальных уравнений этот случай может показаться исключительным, редко встречающимся. Однако он является типичным для механических систем с неголономными связями [189], [198]. В [198] изучались достаточные условия устойчивости стационарных точек, лежащих на таком многообразии, в форме теоремы об устойчивости по первому приближению, в [199] рассматривались простейшие критические случаи устойчивости и некоторые бифуркации.

2) Особенности на гладкой поверхности разрыва.

а) Двумерные особенности.

б) Линейные особенности.

в) Точечные особенности.

3) Особенности на гладкой линии пересечения поверхностей разрыва или на гладком крае поверхности разрыва.

а) Линейные особенности.

б) Точечные особенности.

4) Точечные особенности в точках пересечения нескольких поверхностей разрыва, а также в точках негладкости края поверхности разрыва или линии пересечения поверхностей разрыва.

Для дальнейшей классификации всех этих особенностей учитываются следующие обстоятельства: состоит ли особенность из стационарных точек или из дуг траекторий или не состоит; имеются ли траектории, стремящиеся к ее точкам за конечное или бесконечное время; какие особенности большей размерности примыкают к данной линейной или точечной особенности; касается ли поверхности разрыва векторное поле $f(x)$ в точках особенности (с одной или с двух сторон этой поверхности)?

Выясним, какие особенности являются типичными и какие встречаются редко, в исключительных случаях. Для гладкой функции $\psi(x_1)$ одного переменного типичным является случай, когда она обращается в нуль лишь в изолированных точках и имеет лишь простые корни или всюду отлична от нуля. Это значит, что указанное свойство сохраняется при любом достаточно малом изменении функции (в данном случае — в метрике C^1).

Для одной гладкой функции $\varphi(x_1, x_2)$ двух переменных типичным является случай ее обращения в нуль на гладких линиях (с $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$ на этих линиях), а для двух таких функций — в изолированных точках. Случаи кратных корней для $\psi(x_1)$ или одновременного обращения в нуль $\varphi(x_1, x_2)$ и $\operatorname{grad}\dot{\varphi}$ — более редкие. Случаи, когда $\psi(x_1)$ (или одновременно $\varphi_1(x_1, x_2)$ и $\varphi_2(x_1, x_2)$) обращаются в нуль на линии или $\varphi(x_1, x_2)$ — в области, являются исключительными.

Поэтому типичными являются, например, случаи, когда векторное поле $f(x)$ касается поверхности разрыва только в точках некоторой линии (или не касается вовсе), а случай касания во всех точках какой-либо области на поверхности — исключительный. Однако в некоторых классах механических систем (система с сухим трением (15) § 19; неголономные системы) встречаются и нетипичные особенности.

2. Говорят, что поверхность P класса C^k, если в окрестности каждой ее точки уравнение поверхности P можно записать в форме, разрешенной относительно одной из координат, например, $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, причем $\varphi \in C^k$.

Пусть поверхность P класса C^{m+1} $(m \geqslant 1)$ делит область $G \subset R^3$ на подобласти G^- и G^+. Обозначим C_*^m класс вектор-функций $f(x)$, непрерывных в каждой из областей G^- и G^+ вплоть до границы вместе со своими частными производными до порядка m включительно. Пусть $f^-(x)$ и $f^+(x)$ – предельные значения вектор-функции f при приближении к точке $x \in P$ из областей G^- и G^+ соответственно, а $f_N^-(x)$ и f_N^+ – проекции векторов $f^-(x)$ и $f^+(x)$ на нормаль к P в точке x, направленную в сторону области G^+.

Рассмотрим систему в векторной записи (1) при следующих условиях:

1° Функция $f \in C_*^m$ в области $G \subset R^3$ и разрывна только на поверхности $P \in \in C^{m+1}$, $m \geqslant 1$.

2° В тех точках $x \in P$, где $f_N^-(x) f_N^+(x) \leqslant 0$, задан вектор $f^0(x)$, касательный к P и определяющий скорость движения $\dot{x} = f^0(x)$ по поверхности P; $f^0 \in C^m$ там, где $|f_N^-(x)| + |f_N^+(x)| \neq 0$; если $f_N^-(x) = 0$, то $f^0(x) = f^-(x)$; если $f_N^+(x) = 0$, то $f^0(x) = f^+(x)$, может быть, кроме случая

$$f_N^-(x) = f_N^+(x) = 0, \qquad f^-(x) \neq f^+(x). \tag{2}$$

Если выполнено условие 1° и на поверхности P используется доопределение а) § 4, то условие 2° тоже выполнено.

3° Случай (2) допускается только в конечном числе точек.

4° Если $f^-(x) = 0$ (или $f^+(x) = 0$) на поверхности P, то пусть вблизи каждой точки поверхности P, может быть, кроме точек, лежащих на конечном числе гладких линий, в G^- (соответственно в G^+) или $f(x) \neq 0$ и функция

$$g(x) \equiv f(x)/|f(x)| \tag{3}$$

удовлетворяет условию Липшица, или $f(x) \equiv 0$.

Л е м м а 1. *Если P – поверхность $x_3 = \psi(x_1, x_2)$, $\psi \in C^1$, и $f^+(x) = 0$ на P, то для выполнения условия 4° в G^+ достаточно, чтобы существовало такое $q \geqslant 1$, что на P односторонние (в сторону области G^+) производные удовлетворяют требованиям*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_3^k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1; \qquad \frac{\partial^q f}{\partial x_3^q} \neq 0, \tag{4}$$

и чтобы вблизи P в G^+ производная $\partial^q f/\partial x_3^q$ удовлетворяла условию Липшица. Аналогичное утверждение справедливо и для G^-, если $f^-(x) = 0$ на P.

Д о к а з а т е л ь с т в о подобно доказательству леммы 1 § 16.

Из леммы 1 следует, что условие 4° выполняется, в частности, для кусочно аналитических функций $f(x)$.

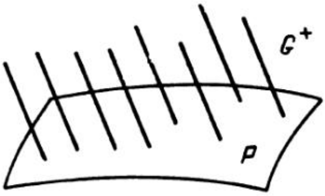


Рис. 104.

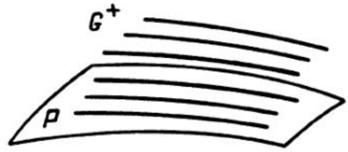


Рис. 105.

Рассмотрим возможные расположения траекторий в области G^+ вблизи поверхности P при условиях 1° – 4°.

А. Если $f_N^+ \neq 0$ на P, то в каждую точку поверхности P из области G^+ приходит (притом при конечном t) только одна траектория (рис. 104). Для каждого компакта $K \subset P$ существует такое $\tau > 0$, что все такие траектории, приходящие в точки компакта K при $t = 0$, содержатся в G^+ при $-\tau \leqslant t < 0$ или при $0 < t \leqslant \tau$ (вследствие равномерной непрерывности функции $f(x)$ в содержащейся в G^+ окрестности компакта K) и не пересекаются (так как $f \in C^1$ в этой окрестности). Из теоремы 3 § 12 следует, что такие траектории заполняют некоторую одностороннюю окрестность поверхности P. Пример: $\dot{u}=\dot{v}=0$, $\dot{w}=1$ $(w>0)$.

Замечание. Условие $f_N^+\neq 0$ является лишь достаточным для только что описанного расположения траекторий. В случае $f\in C^1$ $(G^+\cup P)$ необходимым и достаточным является условие: $f_N^+\geqslant 0$ на P (или $f_N^+\leqslant 0$ на P) и ни одна лежащая на P дуга не является дугой траектории системы $\dot{x}=f^+(x)$.

В. Если $f_N^+\equiv 0$, $f^+\neq 0$ на P, то в каждой точке $x\in P$ вектор $f^+(x)$ касается поверхности P и она заполнена траекториями системы $\dot{x}=f^+(x)$. Проходящие в G^+ траектории системы (1) не могут выйти на P по теореме единственности (рис. 105). Пример: $\dot{u}=1$, $\dot{v}=\dot{w}=0$ $(w\geqslant 0)$.

В случаях, когда $f^+(x)=0$ на P, но $f(x)\not\equiv 0$ в G^+ вблизи P, все точки поверхности P — стационарные для системы (1), доопределенной значениями $f(x)=f^+(x)$ на P. По теореме единственности проходящие в G^+ траектории не могут достичь поверхности P за конечное время. В силу условия 4° система (1) в G^+ имеет те же траектории, что система

$$\dot{x}=g(x). \tag{5}$$

Вследствие выполнения условия Липшица функция $g(x)$ непрерывно продолжается из G^+ на P; везде $|g(x)|=1\neq 0$. Для функции $g(x)$ определяются $g^+(x)$, $g_N^+(x)$ и т.п., подобно f^+, $f_N^+,\ldots$

a) Если $g_N^+\neq 0$ на P, то для системы (5) имеет место случай А. Поэтому в каждую точку на P приходит из области G^+ ровно одна траектория (за конечное время для системы (5) и за бесконечное время для системы (1)). Пример: $\dot{u}=\dot{v}=0$, $\dot{w}=w$ $(w\geqslant 0)$.

b) Пусть $g_N^+\equiv 0$ на P, $g\in\mathrm{Lip}(\mathrm{loc}\,\bar{G}^+)$. Последняя запись означает, что у каждой точки $x\in P$ есть полуокрестность (в $\bar{G}^+$), в которой функция g удовлетворяет условию Липшица. Для системы (5) вблизи P имеет место случай В, поэтому ее траектории, а значит и траектории системы (1), проходящие в односторонней (в G^+) окрестности поверхности P, не выходят на P. Все точки поверхности P — стационарные для системы (1), но не для (5). Пример: $\dot{u}=w$, $\dot{v}=\dot{w}=0$ $(w\geqslant 0)$.

c) Если $f(x)\equiv 0$ в G^+ вблизи поверхности P, то односторонняя (в G^+) окрестность поверхности P заполнена стационарными точками системы (1). Пример: $\dot{u}=\dot{v}=\dot{w}=0$ $(w\geqslant 0)$.

При невыполнении условия 4° возможен также нерегулярный случай, представление о котором дает пример 14) п. 1 § 16, если к нему дописать уравнение $\dot{z}=0$.

Сочетая каждый из случаев А, В, a), b), c) в G^+ с каждым из таких же случаев в G^-, получаем следующие возможные случаи расположения траекторий системы (1) вблизи поверхности P при условиях 1° — 4°: AA_0, AA_1, AA_2, AB, Aa, Ab, Ac, aa, ab, ac, bb_1, bb_2, bc. Описание этих случаев аналогично описанию одноименных случаев расположения траекторий на плоскости вблизи линейной особенности в п. 2 § 16, поэтому нет необходимости его приводить. Только случай bb распадается на случай bb_1, когда векторы $g^-(x)$ и $g^+(x)$ коллинеарны при каждом $x\in P$, и случай bb_2, когда они неколлинеарны при каждом $x\in P$.

При невыполнении условия 3° возможны также случаи BB_1, BB_2, Ba, Bb_1, Bc, аналогичные соответствующим случаям в п. 2 § 16, а также случаи BB_3, Bb_2, отличающиеся тем, что векторы $f^+(x)$ и $f^-(x)$ или $g^+(x)$ и $g^-(x)$ неколлинеарны при каждом $x\in P$.

Теорема 1. *При условиях* 1° — 4° *существуют только* 12 *локальных топологических классов двумерных особенностей*: AA_1, AA_2, AB, Aa, Ab, Ac, aa, ab, ac, bb_1, bb_2, bc.

Доказательство проводится тем же путем, что и для теоремы 2 § 16, и поэтому излагается кратко.

Если для системы (1) в G^+ имеет место один из случаев А, В, a), b), c), то для произвольной точки x_0 поверхности P тем же методом, что в теореме 2 § 16, строится топологическое отображение некоторой полуокрестности $U^+(x_0)\subset G^+$ на полуокрестность точки $u=v=w=0$, при котором траектории системы (1) переходят в траектории соответствующего из приведенных примеров. Если с одной стороны от P имеет место случай В или b), то сначала строится отображение этой полуокрестности, а потом —

отображение другой, совпадающее с первым на P. В случае bb_2 на P имеются траектории системы $\dot{x} = g^-(x)$, пересекающиеся с траекториями системы $\dot{x} = g^+(x)$. Сначала эти два семейства траекторий отображаются в семейства линий u = const и v = const плоскости $w = 0$, а затем строится отображение полуокрестностей, совпадающее на P с построенным отображением. В каждом случае получается топологическое отображение полной окрестности точки x_0 на окрестность точки $u = v = w = 0$, при котором траектории системы (1) переходят в траектории соответствующей стандартной системы. Поэтому у любых двух систем, для которых имеет место один и тот же из случаев AA_1, AA_2, ..., окрестности двух любых точек поверхности P имеют одинаковую структуру.

Различие структуры таких окрестностей для систем, относящихся к разным случаям, доказывается как в теореме 2 § 16; различие структур в случаях bb_1 и bb_2 следует из того, что в случае bb_1 на поверхности P имеется лишь одно семейство линий, являющихся пределами сходящихся последовательностей траекторий системы (1), а в случае bb_2 — два семейства (траектории систем $\dot{x} = g^-(x)$ и $\dot{x} = g^+(x)$).

Докажем, что при условии $1^\circ - 4^\circ$ каждая двумерная особенность P принадлежит одному из этих 12 классов. В силу $1^\circ - 4^\circ$ на P найдется точка y, в окрестности $U^+(y) \subset G^+$ которой имеет место один из случаев: (A) $f_N^+ \neq 0$; (B) $f_N^+ \equiv 0$, $f^+ \neq 0$; (a) $f^+ = 0$ на P, $g_N^+ \neq 0$; (b) $f^+ = 0$, $g_N^+ = 0$ на P, $g \in \mathrm{Lip}(\mathrm{loc}\, U^+(y))$; (c) $f \equiv 0$ в $U^+(y)$.

Вблизи точки y на P найдется точка z, для которой со стороны области G^+ имеет место тот же из этих случаев, а со стороны области G^- — один из таких же пяти случаев, но с функциями f^- и g^-, и которая отлична от точек, упомянутых в условии 3°. Случай AA разбивается на подслучаи $f^-(x)f^+(x) > 0$ (AA_0, топологической особенности нет), $f^-(x)f^+(x) < 0$ и $f^0(x) \equiv 0$ (случай AA_2) или $f^0(x) \not\equiv 0$ (тогда вблизи z берем точку $q \in P$, в которой $f^0(q) \neq 0$, случай AA_1). Аналогично разбивается случай bb.

Тогда окрестность точки z (или точки q) принадлежит одному из указанных 12 топологических классов. По определению двумерной особенности, у любой ее точки x имеется окрестность той же структуры, что окрестность точки z (или q), т.е. принадлежащая одному из этих 12 классов.

Покажем, что грубыми являются только особенности класса AA_1 в случае $f_N^- f_N^+ < 0$. Предполагается, что выполнено следующее условие.

Если $f_N^- f_N^+ < 0$ на P в замкнутой окрестности V точки $x_0 \in P$, то при достаточно малых изменениях (в C_*^1) функции f функция f^0 меняется сколь угодно мало в метрике $C^1(V)$; если $f^0(x) \equiv 0$ в V, то можно так изменить функцию f (сколь угодно мало в C_*^1), чтобы было $f^0(x) \not\equiv 0$ в каждой окрестности любой точки $x_1 \in V$.

При доопределении а) § 4 это условие выполнено.

Л е м м а 2. *Если в некоторой окрестности точки $x_0 \in P$ имеет место случай AA_0 ($f_N^- f_N^+ > 0$) или AA_1 ($f_N^- f_N^+ < 0$, $f^0 \neq 0$), то в некоторой окрестности точки x_0 система (1) является грубой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При достаточно малых изменениях функции f написанные неравенства сохраняются, и двумерная особенность сохраняет свой класс. Сначала построим ϵ_1-отображение $\tilde{x} = \psi(x)$, $x \in P$, которое переводит лежащие на P вблизи точки x_0 траектории системы (1) в траектории δ-близкой системы.

Пусть $x = \varphi(t, x^*)$ и $\tilde{x} = \tilde{\varphi}(t, \tilde{x}^*)$ — лежащие в G^+ решения этих систем с начальными условиями $x^* \in P$ и $\tilde{x}^* \in P$ при $t = 0$. Отображение, ставящее в соответствие точке $x = \varphi(t, x^*)$ точку $\tilde{x} = \tilde{\varphi}(t, \psi(x^*))$, при $|x^* - x_0| \leqslant \rho$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$ (или $-\tau \leqslant t \leqslant 0$) — топологическое, если ρ и τ малы. Это следует из теоремы 3 § 12. При достаточно малых δ оно сдвигает каждую точку меньше, чем на ϵ, в силу непрерывной зависимости решений и компактности окрестности $|x - x_0| \leqslant \rho$. То же справедливо для траекторий в G^-. Значит, в окрестности точки x_0 система (1) — грубая.

Л е м м а 3. *Если на двумерной особенности P в некоторой точке x_0 имеем $f_N^-(x_0) = 0$ (или $f_N^+(x_0) = 0$, или $f^0(x_0) = 0$), то система (1) в любой окрестности этой точки — негрубая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f^0(x_0) = 0$, $f_N^-(x_0) f_N^+(x_0) < 0$, то x_0 — стационарная точка. Так как P — двумерная особенность, то на P все точки — стационарные. Изменим сколь угодно мало систему так, чтобы иметь $f^0(x) \not\equiv 0$ вблизи точки x_0. Тогда там не все точки будут стационарными. Значит, система (1) — негрубая.

Пусть $f_N^-(x_0) = 0$, h — вектор нормали к P в точке x_0.

Уравнения $\dot{x} = f^i(x)$, $i = 1, 2$, где

$$f^i(x) = f(x) + \mu h \qquad (x \in G^+), \quad f^i(x) = f(x) + (-1)^i \mu h \qquad (x \in G^-),$$

при малых μ сколь угодно мало отличаются от уравнения (1). При достаточно малых $\mu > 0$ для одного из них в окрестности точки x_0 имеет место случай AA_0, для другого — AA_1. Хотя бы в одном из этих случаев структура окрестности точки x_0 отлична от структуры этой окрестности для уравнения (1). Негрубость доказана.

3. Рассмотрим преобразования траекторий системы (1) с помощью диффеоморфизмов, т.е. таких взаимно однозначных отображений $y = \psi(x) \in C^1$, у которых обратное отображение $\psi^{-1}(y)$ принадлежит C^1. Предполагается, что на поверхности разрыва применяется доопределение а) §4.

Пусть правые части систем (1) и

$$\dot{y} = g(y) \tag{6}$$

класса C^1_* разрывны только на поверхностях S и $\widetilde{S}$ класса C^2 соответственно, и пусть

$$f_N^- > 0, \quad f_N^+ < 0 \text{ на } S, \quad g_N^- > 0, \quad g_N^+ < 0 \text{ на } \widetilde{S}. \tag{7}$$

Т е о р е м а 2 [200]. *Пусть выполнено условие* (7) *и существует диффеоморфизм* $y = \chi(x)$, $x \in S$, $y \in \widetilde{S}$, *удовлетворяющий условию*

$$\chi'(x) f^0(x) = k(x) g^0(y) \big|_{y = \chi(x)}, \quad k(x) > 0, \quad k(x) \in C^1, \tag{8}$$

следовательно, преобразующий лежащие на поверхности S *траектории* ($\dot{x} = f^0(x)$) *системы* (1) *в лежащие на* $\widetilde{S}$ *траектории* ($\dot{y} = g^0(y)$) *системы* (6) *с сохранением направления движения по траекториям. Тогда и в окрестности поверхности* S *существует диффеоморфизм, преобразующий траектории системы* (1) *в траектории системы* (6) *с сохранением направления движения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как гладкие (класса C^2) поверхности S и $\widetilde{S}$ можно гладким преобразованием перевести в плоскости, то будем считать, что S и $\widetilde{S}$ — конечные области на плоскостях $x_3 = 0$ и $y_3 = 0$ (здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ и т.п.). Пусть

$$p(x) = \frac{f(x)}{|f_3(x)|}, \qquad q(y) = \frac{g(y)}{|g_3(y)|}.$$

Тогда

$$p_N^- = p_3^- = 1, \quad p_N^+ = p_3^+ = -1, \quad q_3^- = 1, \quad q_3^+ = -1,$$

$$p^0 = \frac{p^- + p^+}{2}, \quad q^0 = \frac{q^- + q^+}{2} \tag{9}$$

и системы $\dot{x} = p(x)$, $\dot{y} = p(y)$ по теореме 6 § 9 имеют те же траектории, что системы (1) и (6) соответственно. Выражая в (8) f^0 и g^0 по формуле (5) § 4, получаем

$$\chi'(x)(p^- + p^+) \frac{(-f_3^+) f_3^-}{f_3^- - f_3^+} = k(x) \frac{(q^- + q^+)(-g_3^+) g_3^-}{(g_3^- - g_3^+)} \Bigg|_{y = \chi(x)}$$

Функции $f_3^-, f_3^+, g_3^-, g_3^+, k(x)$ принадлежат C^1 и не обращаются в нуль, поэтому функцию $m(y) > 0$ можно подобрать так, чтобы выполнялось

$$\chi'(x) p^0(x) = m(y) q^0(y) \big|_{y = \chi(x)}. \tag{10}$$

Пусть $x = \xi^-(a, t)$ и $x = \xi^+(a, t)$ — решения системы $\dot{x} = p(x)$ с начальными условиями $\xi^-(a, 0) = \xi^+(a, 0) = a \in S$, проходящие при $-\delta \leqslant t < 0$ в областях $x_3 < 0$ и $x_3 > 0$ соответственно. Для системы $\dot{y} = q(y)$ аналогично определяются решения $y = \eta^-(b, t)$ и $y = \eta^+(b, t)$, $b = \chi(a) \in \widetilde{S}$. Каждой точке $x = \xi^-(a, t)$ на траектории такого решения (или $x = \xi^+(a, t)$) поставим в соответствие точку

$$y = \eta^-(b, m(b)t) \quad (\text{соответственно } y = \eta^+(b, m(b)t)).$$

Полученное отображение $y = \psi(x)$ совпадает на S с отображением $y = \chi(x)$ и переводит траектории системы $\dot{x} = p(x)$ в траектории системы $\dot{y} = q(y)$ с сохранением направления движения. При $x_3 \neq 0$ $\psi(x) \in C^1$, а при $x_3 = 0$ непрерывны $\partial\psi/\partial x_i$, $i = 1, 2$. Для непрерывности $\partial\psi/\partial x_3$ достаточно непрерывности производной от ψ по направлению вектора $n = p^0 - p^+ = p^- - p^0$, т.е. достаточно непрерывности $\psi'(x)n$ ($\psi'(x)$ — матрица Якоби).

Так как $\psi(x) = \chi(x)$ на плоскости $x_3 = 0$, а вектор p^0 лежит в этой плоскости, то в силу (10) при $x_3 = 0$

$$\psi'(x) p^0 = \chi'(x) p^0(x) = m(y) q^0(y) \big|_{y = \chi(x)}. \tag{11}$$

Далее,

$$\psi'_{\pm}(x)p^{\pm}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dt}\,\psi(\xi^{\pm}(a,t)) = \frac{d}{dt}\,\eta^{\pm}(b, m(b)t) \tag{12}$$

при $t = 0$, $b = \chi(a)$, $\psi'_{\pm}(x) = \lim\limits_{x_3\to\pm 0} \psi'(x_1, x_2, x_3)$. Так как $y = \eta^{\pm}(b, t)$ — решение системы $\dot y = q(y)$, то правая часть (12) равна $m(y)q^{\pm}(y)$, где $y = \chi(a)$. Значит, при $y = \chi(x)$

$$\psi'_{\pm}(x)p^{\pm} = m(y)q^{\pm}(y).$$

Отсюда и из (11) следует при $y = \chi(a)$, $a\in S$,

$$\begin{aligned} &\psi'_{+}(a)(p^0(a) - p^{+}(a)) = m(y)(q^0(y) - q^{+}(y)),\\ &\psi'_{-}(a)(p^{-}(a) - p^0(a)) = m(y)(q^{-}(y) - q^0(y)). \end{aligned} \tag{13}$$

Правые части совпадают в силу (9). Тогда предельные значения вектор-функции $\psi'(x)n$ с одной и с другой стороны поверхности S совпадают, т.е. эта функция непрерывна на S. Следовательно, $\psi(x)\in C^1$.

Так как $y = \chi(x)$ — диффеоморфизм на S, то векторы $\psi'(x)e_1$, $\psi'(x) = e_2$ $(x\in S; e_1, e_2$ — векторы, параллельные осям Ox_1, Ox_2) линейно независимы и лежат в плоскости $x_3 = 0$. В силу (7) и (13) вектор $\psi'(x)(p^0 - p^{+})$ не лежит в этой плоскости. Область значений линейного преобразования $\psi'(x)$ содержит три линейно независимых вектора, поэтому $\det\psi'(x) \neq 0$ $(x\in S)$. Следовательно, $y = \psi(x)$ — диффеоморфизм в окрестности поверхности S.

Следствие. *При доопределении* а) § 4 *в окрестности любой точки двумерной особенности, где $f_N^-(x)f_N^+(x) < 0$, $f^0(x)\neq 0$, существует диффеоморфизм, при котором траектории системы* (1) *переходят в траектории системы*

$$\dot y_1 = 1, \quad \dot y_2 = 0, \quad \dot y_3 = -\operatorname{sgn} y_3.$$

4. Большая часть результатов п. 2 сохраняется и для автономных систем дифференциальных уравнений в n-мерном пространстве с правыми частями, разрывными на гладкой $(n-1)$-мерной поверхности. Однако случаи bb_2, Bb_2, BB_3 (когда векторы $g^{-}(x)$ и $g^{+}(x)$ касаются поверхности P, но не коллинеарны) распадаются на более мелкие топологические классы.

Пример. Для системы

$$\dot x_1 = 1,\ \ \dot x_2 = \dot x_3 = \dot x_4 = 0 \quad (x_4 < 0); \qquad \dot x_2 = 1, \quad \dot x_1 = \dot x_3 = \dot x_4 = 0 \quad (x_4 > 0)$$

имеются лежащие на трехмерной гиперплоскости P $(x_4 = 0)$ двумерные поверхности $x_3 = c$, $x_4 = 0$, заполненные двумя семействами траекторий — траекториями систем $\dot x = f^{-}(x)$ и $\dot x = f^{+}(x)$. Для системы, получаемой из написанной заменой лишь одного уравнения $\dot x_3 = 0$ уравнением $\dot x_3 = x_1$ при $x_4 > 0$, таких двумерных поверхностей нет.

§ 22. Линейные и точечные особенности на поверхности разрыва

Выделяются топологические классы линейных и точечных особенностей, лежащих на гладкой поверхности разрыва правой части системы. Указываются грубые особенности и некоторые негрубые.

1. Пусть поверхность $S\in C^2$ делит конечную область $G\subset R^3$ на части G^{-} и G^{+}, а вектор-функция $f\in C^1_{*}$ разрывна только на S. Пусть выполнены условия 1° – 4° п. 2 § 21. Обозначения f^{+}, f_N^{+} и т.д. те же, что в § 21. Рассмотрим систему

$$\dot x = f(x), \qquad x = (x_1, x_2, x_3)\in G. \tag{1}$$

Случаи $f_N^- f_N^+ > 0$ (топологической особенности нет) и $f_N^- f_N^+ < 0$, $f^0 \neq 0$ (двумерная особенность класса AA_1) рассмотрены в § 21. Поэтому другие особенности могут появляться только на тех подмножествах поверхности S, где или $f^0 = 0$, или $f_N^- = 0$, или $f_N^+ = 0$. Можно выделить 6 типов особенностей, лежащих на поверхности S и характеризуемых выполнением следующих условий в точках рассматриваемой особенности:

1. $f_N^- f_N^+ < 0$, $f^0 = 0$.
2. $f_N^+ = 0$, $f^{+}\neq 0$, $f_N^- \neq 0$ (или $f_N^- = 0$, $f^{-}\neq 0$, $f_N^+\neq 0$).
3. $f_N^- = f_N^+ = 0$, $f^{-}\neq 0$, $f^{+}\neq 0$.
4. $f^{+} = 0$, $f_N^-\neq 0$ (или $f^{-} = 0$, $f_N^+\neq 0$).
5. $f^{+} = 0$, $f_N^- = 0$, $f^{-}\neq 0$ (или $f^{-} = 0$, $f_N^+ = 0$, $f^{+}\neq 0$).
6. $f^{-} = f^{+} = 0$.

Условия, характеризующие типы 4–6, могут нарушаться при сколь угодно малых изменениях функции f. Поэтому далее рассматриваются только особенности типов 1–3. В n-мерном случае особенности типов 1–3 рассматривались в [3], гл. 2, § 1, и в [100], [199]–[202].

Будем предполагать, что функции $f^-, f^+, f^0, f_N^-, f_N^+$ могут обращаться в нуль только в изолированных точках, на конечном числе кусочно гладких линий и в конечном числе областей с кусочно гладкими границами. Это предположение выполняется, в частности, когда функция $f(x)$ и поверхность S – кусочно аналитические.

Рассмотрим случай $f_N^- f_N^+ < 0$. Пусть, например,

$$f_N^- > 0, \qquad f_N^+ < 0. \tag{2}$$

Области на поверхности S, где $f^0 \neq 0$, являются двумерными особенностями класса AA_1, а области, где $f^0 \equiv 0$, – класса AA_2 (п. 2 § 21). Остается рассмотреть границы областей, в которых $f^0 = 0$, и отдельные линии и точки, где $f^0 = 0$. Для системы

$$\dot{x} = f^0(x), \qquad x \in S, \tag{3}$$

описывающей движения по поверхности S, эти линии (или их куски) и точки являются линейными и точечными особенностями, состоящими из стационарных точек.

Так как $f^0 \in C^1$, то из теоремы 2 § 16 следует, что такие линейные особенности могут принадлежать только классам aa, ab, ac, bb, bc (если функция f^0 удовлетворяет условию 4° п. 2 § 16). Рассматривая различные направления движения по траекториям системы (3) с одной и с другой стороны исследуемой линии L и учитывая (2), получаем 10 различных случаев поведения траекторий в трехмерной окрестности линии L. Класс aa дает 3 случая, классы ab, ac и bb – по два, класс bc – один случай. Покажем, что эти 10 случаев дают 10 топологических классов линейных особенностей.

Если $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$ в замкнутой ограниченной области K, лежащей на поверхности S, то в каждую точку $a \in K$ приходит при $t = 0$ одна траектория из области G^- и одна из G^+. Для некоторого $\tau > 0$ все эти траектории при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ существуют, не имеют общих точек, кроме общих концов $a \in K$ (см. случай А, п. 2 § 21), и заполняют замкнутую область $Z(K, \tau)$.

Рассмотрим систему (1) и систему $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ с функцией $\tilde{f} \in C^1_*$, разрывной на поверхности $\tilde{S}$; подобно (2) и (3), на $\tilde{S}$

$$\tilde{f}_N^- > 0, \qquad \tilde{f}_N^+ < 0, \quad \dot{x} = \tilde{f}^0(x).$$

Л е м м а 1 [200]. *Если существует топологическое отображение T замкнутой ограниченной области $K \subset S$ на замкнутую область $\tilde{K} \subset \tilde{S}$, при котором траектории системы* (3) *переходят в траектории системы $\dot{x} = \tilde{f}^0(x)$ (и обратно) с сохранением направления движения по траекториям, то отображение T можно продолжить на $Z(K, \tau)$ с сохранением указанных свойств по отношению к траекториям систем* (1) *и $\dot{x} = \tilde{f}(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$

$$x = \varphi^{\pm}(t, a) \qquad (\varphi^{\pm}(0, a) = a \in K)$$

– решения системы (1), φ^+ проходит в G^+, φ^- – в G^-. Аналогично, $x = \psi^{\pm}(t, b)$ – решения системы $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, $b \in \tilde{K}$, $-\tau_1 \leqslant t \leqslant 0$. Точке $x = \varphi^+(t, a)$ поставим в соответствие точку $\tilde{x} = \psi^+(\tau_1 \tau^{-1} t, Ta)$, аналогично для φ^-. Так как решения непрерывно зависят от начальных условий, а в силу (2) точка a и время движения t непрерывно зависят от точки $x = \varphi^+(t, a)$, то построенное отображение удовлетворяет требованиям леммы.

З а м е ч а н и е Для данной системы (1), области K и любого $\epsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ со следующими свойствами. Для каждой системы $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ такой, что $\tilde{f} \in C^1_*$, $|\tilde{f} - f| < \delta$ и $|Tx - x| < \delta (x \in K)$, отображение T, продолженное в силу леммы 1, сдвигает каждую точку области $Z(K, \tau)$ меньше, чем на ϵ. Для всех δ из некоторого промежутка $(0, \delta_0)$ число $\tau > 0$ можно взять не зависящим от δ и от выбора функции $\tilde{f}$.

Доказательство. Возможность выбора τ вытекает из (2) и равномерной непрерывности функции f в обеих полуокрестностях компакта K. Утверждение о сдвиге, меньшем ϵ, следует из теоремы о непрерывной зависимости решения. Непрерывность равномерна на компакте K.

Из леммы 1 следует, что при условии (2) и условии 4° п. 2 § 16 для f^0 все системы, для которых имеет место один и тот же (любой) из указанных выше 10 случаев, составляют один локальный топологический класс. Таким образом, при этих условиях имеются 10 локальных топологических классов линейных особенностей.

Чтобы исследовать грубость особенности, предположим, что выполнено следующее условие:

5° Для некоторого $m \geqslant 1$ имеем $S \in C^{m+1}$, $f \in C_*^m$, и на каждом компакте, где $|f_N^-(x)| + |f_N^+(x)| \neq 0$, при достаточно малых изменениях (в C_*^m) функции f функция f^0 тоже мало меняется (в C^m), и любое малое изменение (в C^m) функции f^0 можно получить, мало меняя функцию f (в C_*^m).

Это условие выполняется, в частности, при доопределении а) § 4.

Лемма 2 [200]. *Пусть система (1) удовлетворяет условию 5° с $m = 1$ и условию (2). Тогда грубость системы (3) в замкнутой ограниченной области $W \subset S$ является необходимым и достаточным условием грубости системы (1) в области $Z(W, \tau)$.*

Доказательство проводится путем применения стандартных рассуждений о грубых системах с использованием замечания к лемме 1.

Замечание. Подобное лемме 2 утверждение, но уже с $m = 3$, справедливо для систем 1-й степени негрубости.

Следствие 1. *Линейные особенности указанных выше 10 локальных топологических классов являются локально негрубыми, т.е. система (1) — негрубая в каждой окрестности любой точки такой линейной особенности.*

Можно показать, что в этом случае степень негрубости бесконечна.

Следствие 2. *При условии (2) существуют только 3 топологических класса грубых точечных особенностей системы (1). При этом система (3) на поверхности S имеет соответственно: 1) грубый устойчивый узел или фокус; 2) грубый неустойчивый узел или фокус; 3) грубое седло.*

Следствие 3. *При условии (2) существуют только 4 топологических класса точечных особенностей 1-й степени негрубости для системы (1). При этом система (3) на поверхности S имеет или седлоузел кратности 2* ([185], стр. 236), *или сложный фокус кратности* 1 ([185], стр. 253). *Каждому из этих случаев для системы (3) соответствуют по два топологических класса точечных особенностей для системы (1), различающихся направлением движения по траекториям на поверхности S.*

Это утверждение следует из замечания к лемме 2 и из того, что только указанные два типа особых точек системы (3) имеют 1-ю степень негрубости ([185], стр. 382).

Рассмотрим теперь уравнение (1) в n-мерном пространстве в окрестности гладкой $(n-1)$-мерной поверхности S, на которой вектор-функция $f(x)$ разрывна. Как в случае $n = 3$, при условии (2) топологическая классификация особенностей системы (3) (с сохранением направления движения по траекториям) полностью определяет топологическую классификацию особенностей системы (1), лежащих на поверхности S, и все такие особенности состоят из стационарных точек. Леммы 1 и 2 остаются справедливыми и в n-мерном случае. Подобно следствию 2 леммы 2 справедливо следующее утверждение:

Для уравнения (1), где $x \in R^n$, при условии (2) существует только n топологических классов грубых точек, лежащих на поверхности S. Если S — плоскость $x_n = 0$, то для особых точек k-го топологического класса матрица $(n-1)$-го порядка

$$\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n-1}$$

(значения производных берутся в особой точке) имеет $n-k$ отрицательных и $k-1$ положительных $\operatorname{Re}\lambda_i$. При выполнении условий (2) и $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, особая точка асимптотически устойчива.

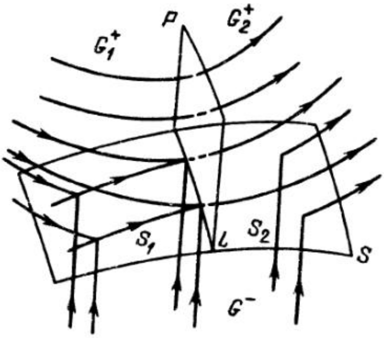


Рис. 106.

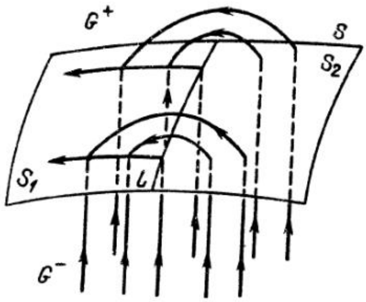


Рис. 107.

2. Рассмотрим случай, когда на гладкой линии $L \subset S$ только одна из функций f_N^- и f_N^+ равна нулю. Пусть, например,

$$f_N^- > 0, \quad f^+ \neq 0, \quad f_N^+ = 0 \text{ на } L. \tag{4}$$

Часть поверхности S, лежащая вблизи рассматриваемой линии L, делится этой линией на две области: S_1 и S_2. В силу (4) можно считать, что $f_N^- > 0$ в S_1 и S_2.

Пусть функция f_N^+ в каждой из областей S_1 и S_2 или сохраняет знак, или равна нулю, а вектор $f^+(x)$ в точках $x \in L$ направлен или от S_1 к S_2, или от S_2 к S_1, или по касательной к L. Рассматривая различные комбинации этих возможностей, получаем основные классы линейных особенностей, лежащих на поверхности S, при условии (4). Случаи, когда в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки $a \in L$ функция f_N^+ либо в S_1, либо в S_2 меняет знак или вектор f^+ меняет направление, приводят к точечным особенностям. Ввиду большого числа возможностей далее рассматриваются лишь основные из них, в том числе все грубые особенности.

а) Пусть выполнено условие (4) и функция f_N^+ имеет разные знаки в S_1 и в S_2, например,

$$f_N^+ < 0 \text{ в } S_1, \quad f_N^+ > 0 \text{ в } S_2. \tag{5}$$

Тогда к линии L в области S_1 примыкает двумерная особенность класса AA_1, а в области S_2 траектории пересекают поверхность S и идут из G^- в G^+.

Для $x \in L$ пусть $n(x)$ — ненулевой вектор, касательный к S, нормальный к L и направленный от S_1 к S_2. Рассмотрим случаи

$$n \cdot f^+ > 0 \text{ на } L, \tag{6}$$

$$n \cdot f^+ < 0 \text{ на } L, \tag{7}$$

$$n \cdot f^+ \equiv 0 \text{ на } L. \tag{8}$$

Лемма 3 [200]. *Все системы, удовлетворяющие условиям* (4) — (6), *в окрестности каждой точки линии* L *имеют такую же топологическую структуру* (рис. 106), *как система*

$$\dot y_1 = 1, \quad \dot y_2 = 0, \quad \dot y_3 = y_1, \quad (y_3 > 0),$$

$$\dot y_1 = \dot y_2 = 0, \quad \dot y_3 = 1 \quad (y_3 < 0), \tag{9}$$

доопределенная согласно а) § 4, *в окрестности точки* $O = (0, 0, 0)$.

Доказательство. Построим топологическое отображение, переводящее траектории данной системы (1) в окрестности точки $a \in L$ в траектории системы (9). Пусть P — гладкая поверхность, проходящая через линию L, ни в какой точке $x \in L$ не касающаяся вектора $f(x)$ и расположенная в G^+ вблизи линии L. Пусть $y = \psi(x)$ — топологическое отображение, переводящее точку a в точку O, содержащий точку a кусок l линии L — в отрезок $|y_2| \leqslant \rho$ оси Oy_2, а примыкающие к l куски поверхностей S_2 и P, пересекаемые траекториями системы (1) только в одном направлении, — в куски полуплоскостей $y_3 = 0$, $y_1 > 0$ и $y_1 = 0$, $y_3 > 0$, примыкающие к отрезку оси Oy_2.

Продолжим это отображение по траекториям на S_1. Если $x = \varphi^0(t, b)$ — решение системы (3) на S_1 с начальным условием $\varphi^0(0, b) = b \in l$, а $y = \tilde{\varphi}^0(t, \tilde{b})$ — лежащее на полуплоскости $y_3 = 0$, $y_1 < 0$ решение системы (9), доопределенной согласно а) § 4, $\tilde{\varphi}^0(0, \tilde{b}) = \tilde{b} = \psi(b)$, то каждой точке $x = \varphi^0(t, b)$ поставим в соответствие точку $y = \tilde{\varphi}^0(t, \psi(b))$.

Затем таким же образом продолжим это отображение по траекториям системы (1), выходящим из точек поверхностей S и P в области G^- и G^+. Построенное отображение взаимно однозначно и непрерывно в некоторой окрестности точки a в силу непрерывной зависимости решения от начального условия и непрерывной зависимости точки $x_0 \in S$ и числа t от точки $x = \varphi(t, x_0)$. По лемме 1 § 9 это отображение — топологическое.

Л е м м а 4 [200]. *Все системы, удовлетворяющие условиям* (4), (5), (7), *в окрестности каждой точки линии* L *имеют такую же топологическую структуру* (рис. 107), *как система*

$$\dot{y}_1 = -1, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = y_1, \quad (y_3 > 0);$$
$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = 1 \quad (y_3 < 0), \tag{10}$$

доопределенная согласно а) § 4, *в окрестности точки* $O = (0, 0, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала построим отображение $y = \psi(x)$ на линии L. Как в лемме 3, продолжим его по траекториям на S_1.

Траектория $x = \varphi^+(t, b)$ системы (1) с начальным условием $\varphi^+(0, b) = b \in S_1$, проходящая в области G^+, пересечет S_2 в точке $c = c(b)$, если точка b достаточно близка к линии L. (В самом деле, если функцию $f(x)$ в (1) гладко продолжить из области G^+ в G^-, то в силу (5) через точки линии L будут проходить траектории, обоими концами уходящие в G^-. Поэтому через все достаточно близкие к L точки $b \in S_1 \cup G^+$ проходят траектории, идущие сначала в G^+, а затем пересекающие S_2 вблизи L и уходящие в G^-.)

Отображение $c(b)$ непрерывно в окрестности линии L. Если $c = \varphi^+(t_1(b), b)$, $\tilde{b} = \psi(b)$ и для системы (10) точка $\tilde{c} = \tilde{\varphi}^+(t_2(\tilde{b}), \tilde{b})$ траектории $x = \tilde{\varphi}^+(t, \tilde{b})$ лежит в полуплоскости $y_3 = 0$, $y_1 \geqslant 0$, то при $0 \geqslant t \geqslant t_1(b)$ точка $x = \varphi^+(t, b)$ траектории системы (1) отображается в точку $y = \tilde{\varphi}^+(tt_2(\tilde{b})/t_1(b), \tilde{b})$ траектории системы (10). Таким образом, отображение $y = \psi(x)$ продолжается на лежащую в G^+ полуокрестность линии L. Продолжение в G^- производится как в лемме 3.

Будем говорить, что линейная особенность принадлежит классу L_1 (или L_2), если окрестности ее точек имеют ту же топологическую структуру, что окрестности точек линии L для системы (9), (рис. 106) (соответственно для системы (10), рис. 107).

Л е м м а 5. *При условиях леммы* 3 (*или леммы* 4) *и условии* 5° *п.* 1 *система* (1) — *грубая в достаточно малой окрестности любой точки линии* L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Топологическое отображение окрестности точки $a \in L$, переводящее траектории системы (1) в траектории δ-близкой системы $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, строится так же, как в леммах 3 и 4. При достаточно малом δ это отображение можно сделать ϵ-отображением, как в замечании к лемме 1.

Для исследования негрубых случаев нужна следующая лемма.

Л е м м а 6. *Пусть в цилиндре* $Z(|x_1| \leqslant \eta,\ x_2^2 + x_3^2 \leqslant \rho^2)$

$$f = (f_1, f_2, f_3) \in C^1, \quad f_1 \geqslant h > 0, \quad f_2(x_1, 0, 0) \geqslant 0, \quad f_3(x_1, 0, 0) = 0. \tag{11}$$

Если $\eta > 0$ *достаточно мало, то существует поверхность* $P(x_2 = g(x_1, x_3) \in C)$, *проходящая через ось* Ox_1, *делящая* Z *на две части* Z^- $(x_2 < g(x_1, x_3))$, Z^+ $(x_2 > g(x_1, x_3))$ *и пересекаемая траекториями системы* $\dot{x} = f(x)$ *только в одном направлении — из* Z^- *в* Z^+. *Каждая траектория пересекает* P *в одной точке, кроме случая, когда траектория содержит отрезок оси* Ox_1, *на котором* $f_2 = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть l — постоянная Липшица для функции f в Z и $0 < \eta < h/4l$, $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Возьмем $k = 4l/h$. Функция $v = x_2 + kx_1 r$ равна нулю только на поверхности P,

$$x_2 = -kx_1|x_3|(1-k^2x_1^2)^{-1/2}.$$

При $|x_1| \leqslant \eta$, $r \neq 0$ в силу системы $\dot{x} = f(x)$ имеем

$$v'_t = krf_1 + \left(1 + kx_1 \frac{x_2}{r}\right) f_2 + kx_1 \frac{x_3}{r} f_3.$$

В силу условия Липшица и соотношений (11) $f_2 \geqslant -lr$, $|f_3| \leqslant lr$. Так как $|kx_1| \leqslant 1$, $|x_i/r| \leqslant 1$, $i = 2, 3$, то при $r > 0$

$$v'_t \geqslant krh - 2lr - lr = r(kh - 3l) > 0.$$

Значит, решения не могут попасть из области Z^+, где $v > 0$, на поверхность P, где $v = 0$, а с P не могут сойти в Z^-.

Л е м м а 7. *Все системы, удовлетворяющие условиям* (4), (5), (8), *в окрестности любой точки линии* $L \in C^2$ *имеют такую же топологическую структуру, как система*

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = y_2 \quad (y_3 > 0);$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = 1 \quad (y_3 < 0) \tag{12}$$

в окрестности точки (0, 0, 0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью гладкой (класса C^2) замены переменных переведем поверхность S в плоскость S_0, а линию L, являющуюся траекторией в силу (8), — в прямую L_0. Тогда будут выполнены условия, подобные (4), (5), (8). Из леммы 6 следует, что у каждой точки $a \in L_0$ имеется окрестность, в которой нет дуг траекторий, выходящих обоими концами на плоскость S_0. В такой окрестности можно построить топологическое отображение, переводящее траектории данной системы в траектории системы (12), тем же способом, что в лемме 3.

Л е м м а 8. *При условиях* (4), (5) *и* $L \in C^2$ *имеются только* 3 *локальных топологических класса линейных особенностей, указанных в леммах* 3, 4 *и* 7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На каждой линейной особенности L имеется дуга, на которой выполнено одно из условий (6) — (8). В окрестности любой точки такой дуги линейная особенность принадлежит одному из этих трех классов. Из определения линейной особенности следует, что то же справедливо для окрестности любой точки линии L.

Таким образом, в случае а), когда выполнены условия (4) и (5), рассмотрены все линейные особенности.

б) Пусть выполнено условие (4) и $f_N^+ > 0$ в S_1 и S_2. Тогда с обеих сторон от линии L траектории пересекают поверхность S. В каждую точку линии L входит одна траектория из области G^-. Если на L (или на какой-либо дуге $l \subset L$) выполнено условие (8), то L (или дуга l) является траекторией, а в силу сказанного выше — линейной особенностью. Если же ни на какой дуге линии L не выполнено условие (8), то никакая дуга линии L не является траекторией. Тогда через каждую точку линии L проходит единственная траектория и в этой окрестности нет никаких топологических особенностей по теореме 3 § 12.

Случай, когда выполнено условие (4) и $f_N^+ < 0$ в S_1 и S_2, сводится к предыдущему заменой t на $-t$ в уравнении (1) в области G^+. Следовательно, если условие (8) выполнено на дуге $l \subset L$, то эта дуга — траектория, в каждую точку которой вливается только одна траектория — траектория из области G^-. В каждую точку областей S_1 и S_2 вливаются две траектории — одна из G^-, другая из G^+. Дуга l — линейная особенность. Если же никакая дуга линии L не является траекторией, то поверхность S (вблизи линии L) является двумерной особенностью класса AA_1.

в) Случаи, когда выполнено условие (4) и $f_N^+ \equiv 0$ в S_1, а в S_2 или $f_N^+ > 0$, или $f_N^+ < 0$, рассматриваются аналогично. В каждом из этих случаев имеется по 3 класса линейных особенностей, выделяемых соответственно условиями (6), (7) и (8).

Итак, при условии (4) и $L \in C^2$ имеется 11 локальных топологических классов линейных особенностей. Из них только 2 грубых (указанных в леммах 3 и 4).

г) Рассмотрим случаи, когда выполняются условия (4) и (5) и на дуге ab линии L выполняется одно из условий (6) — (8), а на дуге bc — другое. Тогда эти дуги — линейные особенности разных классов, а их общий конец b — точечная особенность.

Пусть $x = \varphi(s)$ — уравнение линии L, $\varphi \in C^2$, $\varphi'(s) \neq 0$, $\alpha < s < \beta$. Функция $f_N^+(x) \in C^1$ определена для $x \in S$, и ∇f_N^+ — ее градиент, т.е. вектор, касательный к S. Он направлен в сторону быстрейшего роста функции f_N^+ на S, а его длина равна производной от f_N^+ по этому направлению. Для $x \in L$ вектор $n(x) \in C^1$ касается S и направлен по нормали к L от S_1 к S_2, $n(x) \neq 0$. Рассмотрим скалярное произведение

$$p(s) = n(x) \cdot f^+(x) \Big|_{x=\varphi(s)}. \tag{13}$$

Пусть параметр s выбран так, что $s < 0$ на ab, $s > 0$ на bc, $\varphi(0) = b$. Вектор $f^+(b)$ касается L. Пусть вектор $\varphi'(0)$ направлен в ту же сторону, что $f^+(b)$. Исследуем расположе-

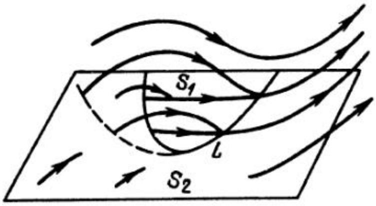


Рис. 108.

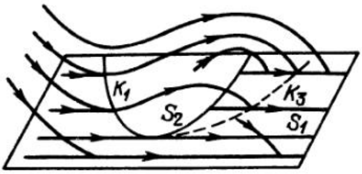


Рис. 109.

ние траекторий в общем случае, т.е. при условиях

$$\nabla f_N^+ \neq 0 \qquad \text{на } L, \qquad p'(0) \neq 0. \tag{14}$$

Согласно [203] векторное поле $f(x) \in C^\infty$ общего положения, не имеющее особых точек (т.е. $f(x) \neq 0$), в области $G^+ \subset R^3$ с гладкой (класса C^∞) границей S в окрестности любой точки границы гладкой заменой переменных приводится к одному из трех видов:

$$\dot\xi_1 = 1, \qquad \dot\xi_2 = 0, \qquad \dot\xi_3 = 0;$$
$$\dot\xi_1 = \xi_2, \qquad \dot\xi_2 = 1, \qquad \dot\xi_3 = 0;$$
$$\dot\xi_1 = \xi_2, \qquad \dot\xi_2 = \xi_3, \qquad \dot\xi_3 = 1.$$

В каждом из этих случаев имеются две возможности: область G^+ переходит в область $\xi_1 > 0$ или в область $\xi_1 < 0$. Первый случай рассматривался в п. 2 § 21 (случай А), а второй — в леммах 3 и 4 § 22. В третьем случае замена $2\xi_1 = y_3$, $\xi_3^2 - 2\xi_2 = y_2$, $\xi_3 = y_1$ приводит систему к виду (рис. 108)

$$\dot y_1 = 1, \quad \dot y_2 = 0, \quad \dot y_3 = y_1^2 - y_2 \qquad (y_3 > 0); \tag{15}$$

если же система рассматривается в области $\xi_1 < 0$, то, заменяя y_3 на $-y_3$, имеем (рис. 109)

$$\dot y_1 = 1, \quad \dot y_2 = 0, \quad \dot y_3 = y_2 - y_1^2 \qquad (y_3 > 0). \tag{16}$$

На обоих рисунках траектории в области $y_3 > 0$ расположены топологически одинаково.

Пусть система (15) или (16) получена из системы (1), где функция f определена в G^+ и в G^-, причем $f_N^- > 0$. Траектории из области G^- достигают поверхности S при возрастании t, а поверхность S переходит в плоскость $y_3 = 0$. Поэтому на плоскости $y_3 = 0$ имеются траектории в области $y_2 > y_1^2$ (рис. 108) или в области $y_2 < y_1^2$ (рис. 109). Эта область есть область S_1 (см. (5)). На линии L ($y_2 = y_1^2$, $y_3 = 0$) вектор $f^+(y) = (1, 0, 0)$ касается плоскости $y_3 = 0$, а точке $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ касается линии L. В силу условия 2° п. 2 § 21 на L имеем $f^0(y) = f^+(y) = (1, 0, 0)$. Пользуясь тем, что $f^0(y) \in C^1$ вблизи точки $y = 0$, можно показать, что там у системы (15) существуют лежащие на плоскости $y_3 = 0$ траектории, обоими концами выходящие на линию L, а у системы (16) их нет. Значит, эти два случая топологически различны.

Беря $s = y_1$ и учитывая, что вектор $n(y)$ направлен от S_1 к S_2, получаем, что при $n(y) = (2y_1, -1, 0)$ функция (13) для системы (15) равна $p(y_1) = 2y_1$. Для системы (16) $n(y) = (-2y_1, 1, 0)$, $p(y) = -2y_1$.

Т е о р е м а 1 [200]. *Если $f \in C^\infty$ в $G^+ \cup S$, $f \in C^1$ в G^-, $S \in C^\infty$ и на S используется доопределение* а) § 4, *то при условиях* (4), (5) *и* (14) *существуют только 2 топологических класса точечных особенностей на линии L. Они выделяются условиями $p'(0) > 0$* (рис. 108) *и $p'(0) < 0$* (рис. 109).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть системы A и $\widetilde{\text{A}}$ удовлетворяют условиям теоремы и, например, $p'(0) < 0, \tilde{p}'(0) < 0$. С помощью сформулированного выше утверждения из [203] приводим обе системы к виду (16) в области $y_3 > 0$. Оба преобразования гладко продолжаются в область G^-, и полученные системы B и $\widetilde{\text{B}}$, вообще говоря, различны при $y_3 < 0$, значит, их траектории в плоскости $y_3 = 0$ тоже различны.

Траектории системы (16), касающиеся плоскости $y_3 = 0$ в точках дуги K_1 ($y_2 = y_1^2, y_1 \leqslant 0$), возвращаются на плоскость $y_3 = 0$ в точках дуги K_3 ($4y_2 = y_1^2, y_1 \geqslant 0$), изображенной пунктиром на рис. 109. Вблизи точки $O = (0, 0, 0)$ для дуги K_3 $dy_2/dx_1 = y_1/2$, а для лежащей на плоскости $y_3 = 0$ траектории в силу доопределения а) § 4 получаем на K_3

$$|dy_2/dy_1| \leqslant ky_1^2, \quad k = \text{const}. \tag{17}$$

В окрестности точки O на K_3 наклон (17) траекторий меньше наклона дуги K_3, и эти траектории пересекают там дугу K_3, по одному разу каждая.

В окрестности точки O построим топологическое отображение $\tilde{y} = \psi(y)$, при котором траектории системы B переходят в траектории системы $\widetilde{\text{B}}$. На дугах K_1, K_3, на полупрямой $y_1 = y_3 = 0$, $y_2 \leqslant 0$ и на проходящих через них траекториях, лежащих в области $y_3 > 0$, пусть $\psi(y) = y$. Далее, на часть $y_2 \leqslant y_1^2$ плоскости $y_3 = 0$ отображение распространяется по траекториям, лежащим в плоскости $y_3 = 0$. На остальную часть пространственной окрестности точки O отображение распространяется по траекториям, проходящим в областях $y_3 > 0$ и $y_3 < 0$, как в леммах 3 и 4.

Случай $p'(0) > 0$ рассматривается аналогично.

З а м е ч а н и е. Условия $f \in C^\infty$, $S \in C^\infty$ в теореме 1 не являются необходимыми. Их можно ослабить, исключив ссылку на [203] и изменив доказательство. При этом усложняется вывод оценки (17). Получение оценки (17) (хотя бы с $o(y_1)$ в правой части), равномерной для всех систем, достаточно близких к данной, позволяет доказать грубость точечной особенности при условиях (4), (5) и (14).

Рассмотрим теперь случай, когда в (11) условие $p'(0) \neq 0$ заменяется условием

$$p^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, k), \quad p^{(k+1)}(0) \neq 0. \tag{18}$$

При этом во всех условиях гладкости порядок гладкости надо повысить на k единиц.

Если k нечетно, функция $p(s)$ не меняет знака и обращается в нуль только при $s = 0$. Тогда никакой точечной особенности нет в силу следующей леммы.

Л е м м а 9. *Пусть выполнено условие* (4), $L \in C^2$,

$$f_N^+ \leqslant 0 \quad в \ S_1, \qquad f_N^+ \geqslant 0 \ в \ S_2$$

и ни одна дуга, лежащая на S, не является дугой траектории уравнения $\dot{x} = f^+(x)$. Тогда L — линейная особенность класса L_1, если $n \cdot f^+ \geqslant 0$ на L, и класса L_2, если $n \cdot f^+ \leqslant 0$ на L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы в силу замечания к случаю А п. 2 § 21 следует, что в S_1 имеется двумерная особенность класса AA_1, а в S_2 траектории пересекают поверхность S. Пусть $f^* = f$ в G^+, $f^* \in C^1$ в полной окрестности точки $b \in L$. Сделав замену переменных, можем считать, что S — плоскость, а L — прямая. При надлежащем выборе координат функция f^* удовлетворяет условию (11). По лемме 6 в окрестности точки a существует поверхность P, проходящая через линию L, пересекаемая траекториями системы $\dot{x} = f^*(x)$ только в одном направлении и имеющая лишь одну общую точку с каждой из них. С помощью этой поверхности сечения можно построить, как в леммах 3 и4, топологическое отображение, переводящее траектории данной системы в траектории системы (9), если $n \cdot f^+ \geqslant 0$, и в траектории системы (10), если $n \cdot f^+ \leqslant 0$.

При четном $k \geqslant 2$ функция $p(s)$ меняет знак, и точка $b \in L$ является концом линейных особенностей классов L_1 и L_2, как в теореме 1.

При $k \geqslant 1$ случай (18) — негрубый, так как при сколь угодно малом изменении функции f в (1) у функции $p(s)$ кратный корень может распасться на несколько простых. Тогда точечная особенность распадается на несколько других точечных особенностей.

Аналогичными методами можно рассмотреть также такие точки линии L, с одной стороны от которых $p(s) \equiv 0$ на L, а с другой $p(s) \neq 0$, а также случай, когда f_N^+ имеет один и тот же знак в S_1 и S_2 при различных предположениях о функции $p(s)$.

д) Пусть выполнено условие (4) и в некоторой точке поверхности S

$$f_N^+ = 0, \qquad \nabla f_N^+ = 0. \tag{19}$$

Будем считать, что поверхность S — плоскость $x_3 = 0$, а эта точка — начало координат O, и что $f_N^+ \in C^2$. Тогда в окрестности точки O

$$f_N^+ = f_3^+ = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + \varphi(x_1, x_2), \qquad \varphi = o(x_1^2 + x_2^2). \tag{20}$$

Если $a > 0, ac > b^2$ (или $a < 0, ac > b^2$), то квадратичная форма положительно (отрицательно) определенная и $f_3^+ > 0$ ($f_3^+ < 0$) всюду, кроме точки O. Тогда в окрестности точки O нет топологических особенностей (соответственно на S имеется только двумерная особенность класса AA_1). Это следует из замечания к случаю А п.2 § 21.

В обоих этих случаях система в любой окрестности точки O — негрубая, так как добавление в (20) сколь угодно малого линейного члена приводит к появлению линейной особенности.

Если $ac < b^2$, то квадратичная форма знакопеременная и $f_3^+ = 0$ на двух гладких линиях, пересекающихся в точке O. Два сектора плоскости $x_3 = 0$ между этими линиями пересекаются траекториями, а два других — двумерные особенности класса AA_1. Части указанных двух линий — линейные особенности классов L_1 и L_2, точка O — точечная особенность, негрубая, как в предыдущем случае.

Аналогично можно рассмотреть случай $ac = b^2$ и другие случаи.

В общем случае множество, на котором $f_N^+ = 0$, может иметь и более сложную структуру. При предположениях п. 1 оно состоит из конечного числа гладких кривых K_i, входящих одним концом в рассматриваемую точку $p \in S$, и, может быть, конечного числа областей между некоторыми из этих кривых. При топологической классификации таких случаев надо учитывать, в сторону какой из областей между кривыми K_i направлен вектор $f^+(p)$. Если в окрестности точки p имеются дуги траекторий с обоими концами на S, то надо также рассматривать расположение линий, которые описывают один конец такой дуги, когда другой движется по кривой K_i или по траектории, лежащей на S.

3. Пусть на поверхности S в некоторой точке p

$$f_N^- = f_N^+ = 0, \qquad f^- \neq 0, \qquad f^+ \neq 0, \tag{21}$$

т.е. в этой точке векторы f^- и f^+ касаются S. С каждой стороны от S траектории могут быть расположены так, как в области G^+ в п.2. Сочетая каждое из расположений, рассмотренных в п.2 для области G^+, с каждым в G^-, получаем большое число случаев, которые в свою очередь распадаются на топологические классы. Поэтому рассмотрим только случай общего положения, когда каждая из функций f_N^- и f_N^+ обращается в нуль на некоторой линии. Эти две линии пересекаются в точке p под ненулевым углом, векторы f^- и f^+ не касаются этих линий, и градиенты $\nabla f_N^-(p) \neq 0, \nabla f_N^+(p) \neq 0$. Тогда с каждой стороны от S траектории расположены так же, как в леммах 3 и 4 в области G^+ (рис. 106 и 107). На поверхности S пусть используется доопределение а) § 4.

Точка p — стационарная только тогда, когда векторы $f^-(p)$ и $f^+(p)$ противоположно направлены. В других случаях в ее окрестности нет стационарных точек.

Перейдем к новым координатам, в которых поверхность S — плоскость $z = 0$, а указанные выше линии — оси Ox и Oy. Выбирая подходящим образом направление и масштаб на осях, получаем систему

$$\dot{x} = \theta^- + \ldots, \qquad \dot{y} = b + \ldots, \qquad \dot{z} = x + mz + \ldots \qquad (z < 0), \tag{22}$$

$$\dot{x} = a + \ldots, \qquad \dot{y} = \theta^+ + \ldots, \qquad \dot{z} = -y + nz + \ldots \qquad (z > 0), \tag{23}$$

где $|\theta^-| = |\theta^+| = 1$, а ненаписанные члены вблизи точки O бесконечно малы по сравнению с написанными. На плоскости S $(z = 0)$ во 2-й и 4-й четвертях траектории пересекают плоскость S, а в 1-й и 3-й четвертях на ней имеются траектории, для которых

$$\dot{x} = \frac{ax + \theta^- y + \ldots}{x + y + \ldots}, \quad \dot{y} = \frac{\theta^+ x + by + \ldots}{x + y + \ldots}, \qquad \dot{z} = 0. \tag{24}$$

Всегда, кроме случая $ab = \theta^- \theta^+$, $a\theta^- \leqslant 0$, точка $x = y = 0$ не является стационарной.

После отбрасывания знаменателей в (24) (при этом меняется направление движения в 3-й четверти) матрица M линейной части системы имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + (ab - \theta^- \theta^+) = 0. \tag{25}$$

Угловые коэффициенты k_1 и k_2 направлений, по которым траектории входят в точку O, — корни уравнения

$$\theta^- k^2 + (a - b)k - \theta^+ = 0. \tag{26}$$

Если корни вещественны, то считаем $k_1 \leqslant k_2$. Так как $(1, k_1)$ и $(1, k_2)$ — собственные векторы матрицы M, то

$$\lambda_i = a + \theta^- k_i, \quad i = 1, 2. \tag{27}$$

а) Рассмотрим случай $\theta^- = \theta^+ = -1$. Тогда координатные полуоси — линейные особенности класса L_1 (п.2) (рис. 110). В силу (26) $k_1 k_2 = -1$, поэтому в 1-й и 3-й четвертях траектории входят в точку O с угловым коэффициентом $k_2 > 0$. Если отбросить особый случай, когда векторы $f^-(0)$ и $f^+(0)$ противоположно направлены, то в 1-й и 3-й четвертях возможны два топологически различных расположения траекторий.

1) В случае $ab > 1$, $a + b > 0$ имеем $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ (рис. 111).

2) В случаях $ab < 1$ и $ab \geqslant 1$, $a + b < 0$ имеем соответственно $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ и $\lambda_2 < \lambda_1 \leqslant \leqslant 0$ (рис. 112). Допускается, чтобы $a = 0$ или $b = 0$.

б) Рассмотрим случай $\theta^- = -1$, $\theta^+ = 1$ (рис. 113). (Случай $\theta^- = 1$, $\theta^+ = -1$ сводится к этому заменой z, x, y на $-z, y, x$.) Обе полуоси Oy — линейные особенности класса L_1

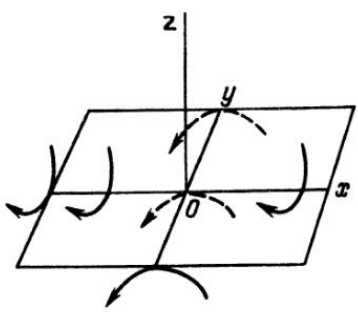


Рис. 110.

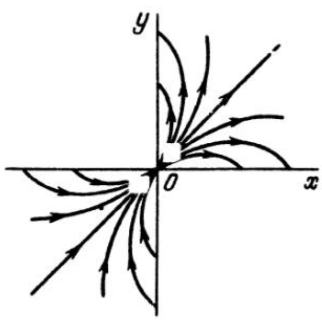


Рис. 111.

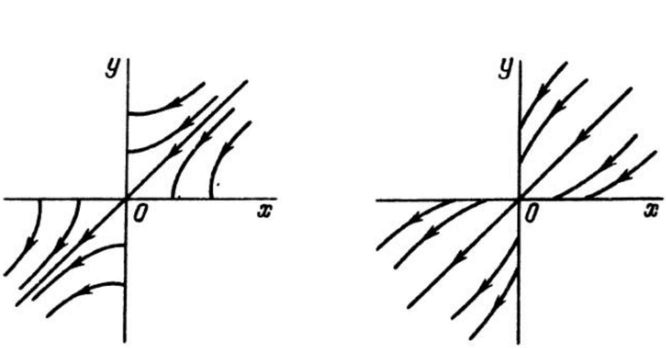


Рис. 112.

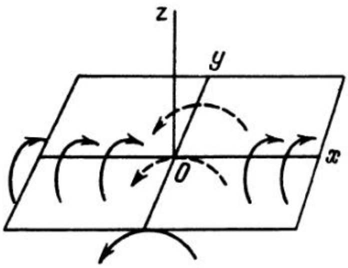


Рис. 113.

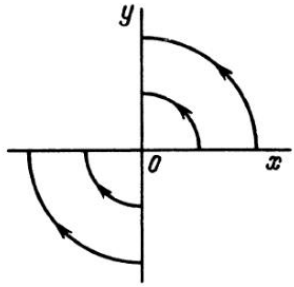


Рис. 114.

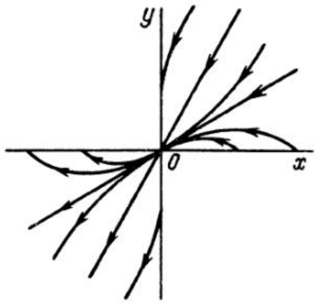


Рис. 115.

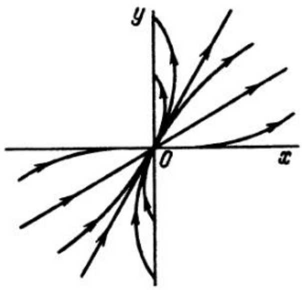


Рис. 116.

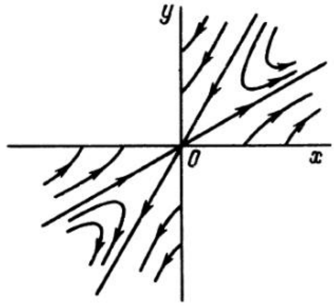


Рис. 117.

обе полуоси Ox — класса L_2. В силу (26) в 1-й четверти или нет направлений, по которым траектории могут входить в точку O (в случае $b > a - 2$, рис. 114), или два таких направления (в случае $b < a - 2$; при $b = a - 2$ они совпадают). Если $b \leqslant a - 2$, то в случае $ab > -1$ имеем $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $0 < k_1 < 1 < k_2$, и точка O — узел, в 1-й четверти устойчивый при $a + b < 0$ (рис. 115), неустойчивый при $a + b > 0$ (рис. 116). В случае $b < a - 2$, $ab < -1$, точка O — седло (рис. 117).

Как в лемме 4, вблизи точки O траектории из области $z > 0$ обоими концами $(x_0, y_0, 0)$ и $(x_1, y_1, 0)$ выходят на плоскость $z = 0$. С помощью (23) получаем

$$\begin{gathered}
x_1 = x_0 - 2ay_0 + \varphi_1(x_0, y_0), \qquad y_1 = -y_0 + \varphi_2 \qquad (x_0, y_0), \\
\varphi_i = o(|x_0| + |y_0|), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_0} = o(1) \quad (x_0 \to 0, \quad y_0 \to 0).
\end{gathered} \tag{28}$$

Отображение (28) обозначаем T^+; при этом $(T^+)^{-1} = T^+$.

Топологический класс расположения траекторий в области $x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2$ зависит не только от расположения траекторий в плоскости $z = 0$, но и от взаимного расположения их и их образов при отображении T^+. В малой окрестности точки O T^+ отображает линию $y = \psi(x)$ с $dy/dx = k$ в линию $y = \psi_1(x)$ с

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2ak - 1} + o(1), \tag{29}$$

если $2ak \neq 1$, и в линию $x = \psi_0(y)$ с $dx/dy = o(1)$, если $2ak = 1$. Образы оси Oy и траекторий, входящих в точку O с угловыми коэффициентами k_1 и k_2, являются кривыми, входящими в точку O с угловыми коэффициентами

$$k^* = \frac{1}{2a}, \qquad k_1^+ = \frac{k_1}{2ak_1 - 1} = \frac{1}{2a - k_2}, \qquad k_2^+ = \frac{1}{2a - k_1}.$$

Следовательно, топологический класс зависит от порядка расположения на числовой оси тех из чисел $k_1, k_2, k^*, k_1^+, k_2^+$, которые являются положительными. Приравнивая их попарно, найдем бифуркационные значения параметров a, b.

Полагая $k^* = k_1 > 0$, имеем $2a = 1/k_1 = k_2 > 0$, и в силу (26)

$$2a(a+b) = -1, \quad a > 0.$$

Полагая $k_1 = k_2 > 0$, имеем $a - b = 2$. Полагая $k_1 = k_1^+ > 0$, имеем $k_2 = a > 0$ и из (26) $ab = -1$. Полагая $k_1 = k_2^+ > 0$, имеем $k_2 = 1/k_1 = 2a - k_1 > 0$ и из (26) $a + b = 0, a > 0$. Полученные соотношения определяют линии, делящие плоскость параметров a, b на 11 областей (рис. 118).

Теорема 2 [200]. *В случае $\theta^- = \theta^+ = -1$ существуют только 2 топологических класса грубых точечных особенностей в точке O для системы* (22), (23), *выделяемых неравенствами:* 1) $b > a^{-1} > 0$, 2) $b \leq 0$ или $ab < 1$. *В случае $\theta^+ = -\theta^- = 1$ — только* 11 *классов, области значений a и b для каждого класса указаны на* рис. 118.

Доказательство. В случае $\theta^- = \theta^+ = -1$ топологические классы расположения траекторий на плоскости $z = 0$ указаны в пункте а). Они полностью определяют топологический характер расположения траекторий в пространственной окрестности точки O, как в лемме 3. Грубость доказывается как в лемме 5. Для систем с $b = a^{-1} > 0$ имеются сколь угодно близкие системы, как принадлежащие одному из этих классов, так и принадлежащие другому. Поэтому системы с $b = a^{-1} > 0$ — негрубые.

В случае $\theta^+ = -\theta^- = 1$ возьмем любые две системы А и В, для которых значения параметров a и b принадлежат одной и той же области на бифуркационной диаграмме рис. 118, например, области 8, для которой $a > 0$, $ab < -1$, $2a(a+b) < -1$. В этом случае

$$k_1^+ < 0 < k_1 < k^* < k_2^+ < k_2, \qquad \lambda_2 < 0 < \lambda_1, \tag{30}$$

и траектории расположены так, как сплошные линии на рис. 119, а их образы при отображении T^+ — как прерывистые. Линии $Ok_1, Ok^*, \ldots$ имеют в точке O касательные с угловыми коэффициентами $k_1, k^*, \ldots$ соответственно. В области между линиями Ok^* и Oy имеются два семейства линий. Эта область делится линиями Ok_2^+ и Ok_2 на три сектора, расположенные для систем А и В одинаково в силу (30). Сплошные и прерывистые линии вблизи точки O касаются друг друга только на оси Ox (из формул (24), (28), (29) следует, что касание возможно только при $(a+b)(ab+1)y = 0, a > 0$, но в случаях 1—11 рис. 118 эти условия выполняются только при $y = 0$).

Построим сначала топологическое отображение на плоскости $z = 0$. Если на границах Ok_2 и Oy сектора k_2Oy отображение уже выбрано и точкам $p \in Ok_2$ и $q \in Oy$ соответствуют точки p' и q' для системы В, то линии qr и pr (рис. 119) должны перейти в траекторию $q'r'$ и образ $p'r'$ траектории системы В, значит, точка r должна перейти в пересечение r'. Таким образом, отображение в секторе определяется отображением его границ (или части uv границы в случае рис. 120). Строим отображения секторов

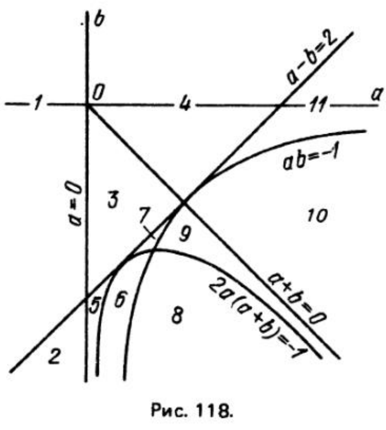


Рис. 118.

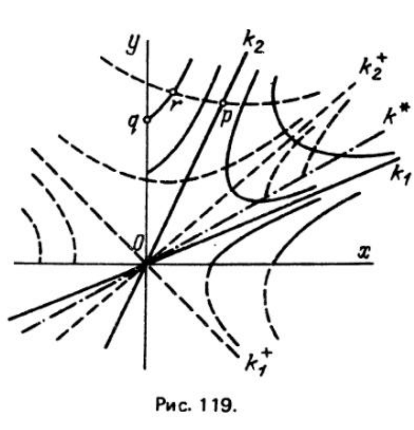


Рис. 119.

с двумя семействами линий, затем (с большей степенью произвола) — с одним семейством. Для каждого из 11 случаев легко проверить, что, последовательно отображая секторы, можно получить топологическое отображение 1-й и 3-й четвертей плоскости $z = 0$, переводящее траектории системы А и их T^+-образы в траектории и их образы для системы В. Если системы А и В принадлежат разным классам, то такого отображения не существует.

Построенное в 1-й и 3-й четвертях плоскости $z = 0$ отображение распространяется на пространственную окрестность точки O при $z > 0$, как в лемме 4, а при $z < 0$, как в лемме 3. Грубость систем этих 11 классов и отсутствие других грубых систем доказываются как в случае $\theta^- = \theta^+ = -1$.

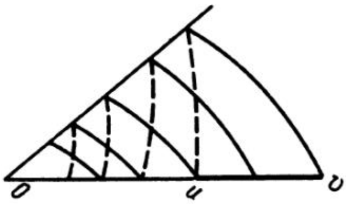


Рис. 120.

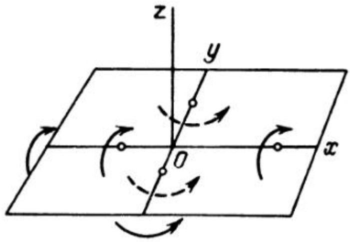


Рис. 121.

в) Рассмотрим случай $\theta^- = \theta^+ = 1$. Тогда через каждую точку окрестности точки O проходит траектория, обоими концами выходящая на плоскость $z = 0$ (рис. 121). Четыре координатные полуоси — линейные особенности класса L_2. Этот случай (и аналогичный случай в R^n) исследовался в [202] методом точечных отображений.

В области $z > 0$ траектории расположены как в случае б), поэтому на плоскости $z = 0$ вблизи точки O определено отображение T^+ вида (28) — переход из одной точки плоскости $z = 0$ в другую по траектории системы (23). Аналогично определяется отображение T^-,

$$x_1 = -x_0 + \psi_1(x_0, y_0), \qquad y_1 = y_0 - 2bx_0 + \psi_2(x_0, y_0) \tag{31}$$

— переход по траектории системы (22).

Траектория идет из точки $p = (x_0, y_0)$, если $y_0 < 0$, в точку T^+p, затем, если в этой точке $x < 0$, в точку $T^- T^+ p$, затем, если там $y < 0$, в точку $T^+ T^- T^+ p$ и т.д.

Согласно (28) и (31) отображение $T = T^- T^+$ имеет вид

$$x = -x_0 + 2ay_0 + \ldots, \qquad y = -2bx_0 + (4ab - 1)\,y_0 + \ldots \tag{32}$$

Ненаписанные слагаемые имеют такие же оценки, как в (28). Так как $(T^-)^{-1} = T^-$, $(T^+)^{-1} = T^+$, то $(T^- T^+)^{-1} = T^+ T^-$. Линейная часть отображения (32) имеет собственные значения

$$\mu_{1,2} = 2ab - 1 \pm 2\sqrt{ab(ab-1)}; \qquad \mu_1 \mu_2 = 1. \tag{33}$$

Проведем качественное исследование системы (22), (23). Пусть R_i — i-я координатная четверть плоскости $z = 0$. Если $a > 0$, то вблизи точки O в силу каждой из систем (22) — (24) имеем $\dot{x} > \text{const} > 0$, а если $b > 0$, то $\dot{y} > \text{const} > 0$. Если же $a < 0$, $b < 0$, $ab < 1$, то

$$\frac{d}{dt}\,[(1-b)\,x + (1-a)\,y] = 1 - ab + \ldots > \text{const} > 0. \tag{34}$$

В этих трех случаях вблизи точки O каждая траектория после конечного числа пересечений с плоскостью $z = 0$ попадает в R_1 (в третьем случае надо учесть, что в силу (33)

$$\mu_{1,2} = \cos\nu \pm i\sin\nu, \qquad 0 < \nu < \pi, \tag{35}$$

поэтому линейная часть T_0 отображаения T при некотором выборе базиса на плоскости x, y приводится к повороту на угол ν). В R_1 в силу (24) и тех же оценок все решения уходят из окрестности точки O. Устойчивости нет. (При других способах доопределения системы в R_1 и R_3 наличие устойчивости зависит от поведения траекторий в R_1.)

В случае $a<0, b<0, ab>1$ в (34) имеем $1-ab+\ldots<\text{const}<0$, поэтому те траектории, которые не попали в R_1, пересекают плоскости $z=0$ поочередно в R_2 и R_4, удаляясь в конечном счете от точки O. Устойчивости нет (при любых доопределениях системы в R_1 и R_3).

Случай $a<0, b<0, ab=1$ — критический. Точка O — стационарная, она может быть устойчивой или нет в зависимости от членов высших порядков в (22) и (23). Например, для системы

$$\dot{x}=1-x-y, \qquad \dot{y}=-1-x-y, \qquad \dot{z}=x-z \qquad (z<0),$$

$$\dot{x}=-1-x-y, \qquad \dot{y}=1-x-y, \qquad \dot{z}=-y-z \qquad (z>0),$$

доопределенной при $z=0$ согласно а) § 4, точка O асимптотически устойчива. Это доказывается с помощью функции Ляпунова

$$v=(x-y)^2+4|x+y|+8|z|.$$

Можно показать, что в случае $\theta^-=\theta^+=1$ система (22), (23) класса C^1, доопределяемая согласно а) § 4 при любых значениях a и b, — негрубая в любой окрестности точки O и что существует бесконечно много топологических классов таких систем.

Рассмотрим случай, когда, в отличие от (22), (23), оба равенства $f_N^-=0$ и $f_N^+=0$ выполняются не на разных линиях, а на одной и той же линии L. Эта линия или ее части могут быть линейными особенностями. Они исследуются теми же методами, как в случаях а) — в) п. 2, в зависимости от знаков f_N^- и f_N^+ в областях S_1 и S_2 и от направлений векторов $f^-(x)$ и $f^+(x)$ при $x\in L$.

Наиболее сложный случай — когда в G^+ траектории идут от S_1 к S_2, а в G^- от S_2 к S_1 — рассматривался в [201], [202] с помощью метода точечных отображений. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости стационарной точки, лежащей на L. При этом данная система рассматривается в n-мерном пространстве, а ее правая часть разрывна на $(n-1)$-мерной поверхности S, $f_N^-=f_N^+=0$ на $(n-2)$-мерной гиперповерхности L.

4. Особенности типов 4 — 6 (п. 1) состоят из стационарных точек, лежащих на поверхности разрыва. Если такая точка изолирована, то ее негрубость доказывается так же, как в двумерном случае (леммы 1 и 2 § 19).

§ 23. Особенности на пересечении поверхностей разрыва

Здесь рассматриваются линейные и точечные особенности на линиях пересечения конечного числа поверхностей разрыва и точечные особенности в точках пересечения поверхностей разрыва. В некоторых случаях выясняется топологическая структура расположения траекторий вблизи особенности. Указываются методы исследования устойчивости.

1. Пусть к линии $L\in C^2$ примыкает конечное число поверхностей $S_i\in C^2$, $i=1,\ldots,p$, не имеющих общих и граничных точек, не лежащих на L (рис. 122). Эти поверхности делят окрестность линии L на области G_i, $i=1,\ldots,p$, в каждой из которых $f(x)\in C^1$ вплоть до границы. Линия L может быть также краем гладкой поверхности разрыва; в этом случае $p=1$. Исследуем лежащие на L линейные и точечные особенности системы (в векторной записи)

$$\dot{x}=f(x). \tag{1}$$

На поверхностях и линиях разрыва применяется или доопределение а) § 4, или любое доопределение, удовлетворяющее условиям 1° и 2° п. 2 § 21 (с $m=1$).

Предполагается, что никакие две поверхности S_i и S_j не касаются друг друга в точках линии L. Допускается, чтобы одна из них была продолжением другой, как S_1 и S_3 на рис. 122.

Устойчивость стационарной точки, лежащей на линии L, можно исследовать с помощью теоремы 9 § 15. Пусть линия L проходит по оси Ox_3. Тогда, как в теореме 9 § 15, полагаем $x=(y,z)$, где $y=(x_1,x_2)$, $z=x_3$,

$$f(x)=(g(y,z),\ h(y,z)), \qquad g=(g_1,g_2).$$

Система (1) записывается так:

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} = g^i(y, z), \quad \dot{z} = h^i(y, z), \quad (y, z) \in G_i, \quad i = 1, \ldots, p,\\
&\dot{y} = g^{0i}(y, z), \quad \dot{z} = h^{0i}(y, z), \quad (y, z) \in S_i, \quad i \in I,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где I — множество тех значений i, для которых на поверхностях S_i лежат куски траекторий. Для решений, лежащих на линии L, имеем

$$\dot{z} = h^0(z), \tag{3}$$

функция $h^0(z)$ предполагается непрерывной.

Точка $y = 0$, $z = z_0$ линии L — стационарная, если $h^0(z_0) = 0$. Для исследования ее устойчивости в ее окрестности рассмотрим первое приближение к системе (2). При

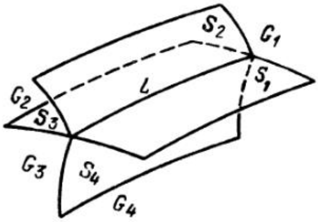


Рис. 122.

этом поверхности S_i заменяются полуплоскостями S_i^0, касательными к S_i в точке $(0, z_0)$, области G_j — двугранными углами G_j^0 с гранями S_i^0, а функции $g^i(y, z)$ и $g^{0i}(y, z)$ — постоянными $g^i(0, z_0)$ и $g^{0i}(0, z_0)$. Пусть V_j и L_i — сечения области G_j^0 и грани S_i^0 плоскостью $z = z_0$.

Теорема 1. *Пусть решение $y = 0$ двумерной системы*

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} = g^i(0, z_0), \quad y \in V_i, \quad i = 1, \ldots, p,\\
&\dot{y} = g^{0i}(0, z_0), \quad y \in L_i, \quad i \in I,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

асимптотически устойчиво, решение $z = z_0$ уравнения (3) *устойчиво* (*или асимптотически устойчиво*) *и*

$$g^i(0, z_0) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, p, \quad g^{0i}(0, z_0) \neq 0, \quad i \in I. \tag{5}$$

Тогда решение $y = 0$, $z = z_0$ системы (2), (3) *устойчиво* (*соответственно асимптотически устойчиво*).

Теорема доказывается подобно теореме 9 § 15.

Теорема 1 сводит исследование устойчивости стационарной точки $(0, z_0) \in L$ к исследованию одномерного уравнения (3) и двумерной кусочно постоянной системы (4). Система (4) исследуется методами, рассмотренными в § 20. Наиболее существенное ограничение в теореме 1 — это требование (5). Если оно не выполнено, то система (4) имеет стационарные точки, сколь угодно близкие к точке $y = 0$, поэтому ее решение $y = 0$ не может быть асимптотически устойчивым.

Случай невыполнения условия (5) — критический, подобно случаю наличия нулевых корней в обычной теореме об устойчивости по первому приближению. Он должен исследоваться другими методами, уже с учетом значений $g^i(y, z)$ при $y \neq 0$, $z \neq z_0$.

2. Укажем один класс линейных особенностей, лежащих на линии L, и опишем их структуру. Простейшие примеры линейных особенностей получаются в тех случаях, когда поверхности S_i — плоскости или цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Oz, а функции g^i, h^i, g^{0i}, h^{0i}, h^0 не зависят от z. Тогда любой сдвиг, параллельный оси Oz, переводит траектории системы (2) в траектории. Поэтому структура окрестностей любых двух точек оси Oz одна и та же и эта ось является линейной особенностью (конечно, если она не проходит по поверхности или в области, все точки которой имеют окрестности одной и той же структуры).

Выделим случаи, когда окрестность каждой точки линии L расслаивается на поверхности $z = z(y;\ \lambda)$ (λ — параметр семейства), заполненные дугами траекторий системы (2). Естественно требовать, чтобы функция $z(y;\ \lambda)$ была непрерывной и чтобы расслоение сохранялось при малых изменениях правых частей системы (2). Для этого необходимо, чтобы вблизи линии L не было таких линий, состоящих из дуг траекторий системы (2), которые проектировались бы на плоскость $z = 0$ в замкнутые кривые (если такая линия не замкнута, то ее концы (y, z_1) и (y, z_2), $z_1 \neq z_2$, не лежат на одной поверхности $z = z(y, \lambda)$, а если она замкнута, то она разрушается при малых изменениях функций h^i в (2)). Следовательно, на такой поверхности траектории вблизи особой точки $y = 0$ не должны образовывать секторов классов E, F, G, L, R, S (п. 2 § 17). Условие (5) также необходимо по аналогичным причинам. Эти соображения объясняют происхождение налагаемых ниже условий.

Л е м м а 1. *Пусть поверхности S_i — полуплоскости, примыкающие к оси Oz, в системе* (2), (3) *каждая из функций $g^i, h^i, g^{0i}, h^{0i}, h^0$ постоянна, каждый вектор g^i не коллинеарен сторонам того угла V_i, где он задан, и окрестность особой точки $y = 0$ системы* (4) *состоит только из секторов классов H, K, P, Q. Тогда ось Oz — линейная особенность. Ее окрестность заполнена семейством поверхностей*

$$z = \varphi(y) + c \qquad (-\infty < c < \infty), \qquad\qquad \varphi \in C, \tag{6}$$

каждая из которых заполнена дугами траекторий системы (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M_0 — множество, состоящее из точки $y = z = 0$ и точек (y, z), которые лежат на траекториях системы (2), идущих по поверхностям S_i и входящих в точку $y = z = 0$ при возрастании или убывании t. В каждом секторе класса H на плоскости $z = 0$ построим луч, выходящий из точки O и пересекающий под ненулевым углом траектории этого сектора. Присоединяя к M_0 точки, лежащие на дугах траекторий с одним концом в точках множества M_0, и на траекториях, пересекающих построенные в плоскости $z = 0$ лучи, получаем множество M. Его проекция на плоскость $z = 0$ заполняет все секторы классов H, K, P, Q. Из предположений о функциях g^i, $h^i, \ldots$ и наличия только этих секторов следует, что в каждую точку плоскости $z = 0$ проектируется лишь одна точка множества M, т.е. множество M задается уравнением $z = \varphi(y)$. В каждой области G_j, заключенной между плоскостями S_j и S_{j+1}, точки множества M заполняют кусок плоскости. Поэтому функция $\varphi(y)$ непрерывна и даже удовлетворяет условию Липшица.

Так как любой сдвиг, параллельный оси Oz, переводит траектории в траектории, то при любом c поверхность $z = \varphi(y) + c$ тоже заполнена дугами траекторий и, как в начале п. 2, ось Oz — линейная особенность. Лемма доказана.

В следующей теореме поверхности S_i и система (2) удовлетворяют условиям, указанным в начале п. 1, линия L — ось Oz.

Т е о р е м а 2. *Пусть для каждого $z_0 \in (\alpha, \beta)$ вектор $g^i(0, z_0)$ не коллинеарен сторонам угла V_i $(i = 1, \ldots, p)$, окрестность особой точки $y = 0$ системы* (4) *состоит только из секторов классов H, K, Q и $h^0(z_0) \neq 0$. Тогда интервал $\alpha < z < \beta$ оси Oz является линейной особенностью* (*или ее частью*) *для системы* (2). *Окрестность любой точки этого интервала заполнена семейством поверхностей, каждая из которых заполнена* (*топологически одинаково*) *дугами траекторий системы* (2). *В некоторой окрестности произвольной точки этого интервала система* (2) *является грубой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $z_0 \in (\alpha, \beta)$ построим систему A_0 первого приближения, как в п. 1, заменив также $h^0(z)$ на $h^0(z_0)$. Затем будем строить топологическое отображение окрестности точки $y = 0$, $z = z_0$, при котором точки оси Oz переходят в себя, а траектории системы A_0 переходят в траектории системы (2).

Пусть $x = \xi^i(t; b)$ и $x = \xi_0^i(t; b)$ — решения системы (2) и системы A_0, идущие по поверхности S_i и плоскости S_i^0 соответственно и проходящие через точку $x = b$ при $t = 0$. При достаточно малых t (того знака, при котором эти решения идут по указанным поверхностям) каждой точке $a = \xi_0^i(t;\ b_1)$, где $b_1 = (0, z_1)$, поставим в соответствие точку $\psi(a) = \xi^i(t;\ b_1)$. Аналогично поступаем на траекториях, идущих из точки $(0, z_1)$ непосредственно в области G_j. На лучах l_h, лежащих в плоскости $z = z_1$ и проектирующихся на плоскость $z = 0$ в лучи, построенные при доказательстве леммы 1 в секторах класса H, положим $\psi(a) = a$.

Через каждую внутреннюю точку сектора K или Q проходит траектория системы (4), выходящая на боковую границу сектора только одним концом, а в секторе H проходит траектория, имеющая только одну общую точку с построенным лучом. В такую траекторию проектируется траектория $x = \xi_0(t;\ a)$ системы A_0, проходящая по построенной в лемме 1 поверхности M_1 $(z = \varphi(y) + z_1)$. Точка a лежит на поверхности S_i^0 или на луче l_h, и в ней отображение $\psi(a)$ уже определено. Точке $x = \xi_0(t;\ a)$ поставим в соответствие точку $\psi(x) = \xi(t;\ \psi(a))$ на траектории системы (2).

Полученное отображение $\psi(x)$ в некоторой окрестности точки $(0, z_0)$ взаимно однозначно и переводит траектории системы A_0 в траектории системы (2). Точка a, в которой траектория выходит на границу сектора или пересекается с лучом l_h, непрерывно зависит от точки $x = \xi_0(t;\ a)$ вследствие условия неколлинеарности, а точка $b_1 = (0, z_1)$ — от точки a. Отсюда и из теорем о непрерывной зависимости решения следует, что отображение $\psi(x)$ непрерывно и на поверхности M_1, и в полной окрестности точки $(0, z_0)$ (точка z_1 пробегает некоторую окрестность точки z_0). В силу леммы 1 § 9 отображение $\psi(x)$ — топологическое в замкнутой окрестности точки $(0, z_0)$. Оно переводит семейство поверхностей $z = \varphi(y) + c$ в семейство поверхностей, заполняющих некоторую окрестность точки $(0, z_0)$ и состоящих из дуг траекторий системы (2).

Для системы A_0 все точки оси Oz в силу леммы 1 имеют окрестности одинаковой структуры. Отображение $\psi(x)$ — топологическое, поэтому для системы (2) все точки оси Oz, лежащие в рассматриваемой окрестности точки z_0, тоже имеют окрестности одинаковой структуры для системы (2). Любую компактную часть данного интервала $\alpha < z < \beta$ оси Oz можно покрыть конечным числом таких окрестностей. Поэтому любые две точки этого интервала имеют окрестности одинаковой структуры и для системы (2) этот интервал — линейная особенность (или ее часть).

Если система (2) мало меняется в C^1_* (п. 1 § 18), то системы A_0 и (4) тоже мало меняются. Вследствие условия неколлинеарности все секторы для системы (4) сохраняют свои топологические классы. В силу теоремы 2 § 17 топологическая структура окрестности точки $y = 0$ для системы (4) не меняется. То же справедливо и для системы A_0 из-за наличия расслоения (6), а значит, и для системы (2) в некоторой окрестности любой точки рассматриваемого интервала оси Oz, так как топологическое отображение, аналогичное $\psi(x)$, существует и для измененной системы.

Чтобы построить ϵ-отображение, переводящее траектории системы (2) в траектории измененной системы, надо, как в первой части доказательства, сначала построить это отображение для траекторий, идущих по поверхностям S_i, а затем для остальных траекторий. Для достаточно близких систем это отображение сдвигает каждую точку меньше, чем на ϵ, в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий и от правых частей системы. Поэтому система груба в рассматриваемой окрестности.

Из доказанной теоремы и теоремы 2 § 17 следует, что топологическая классификация тех линейных особенностей, которые могут существовать при выполнении условий теоремы, полностью определяется числом и циклическим порядком секторов классов H, K, Q для двумерной системы (4).

Пусть топологическая структура окрестности особой точки $y = 0$ для системы (4) при $z_0 \in (\alpha, \beta)$ одна, а при $z_0 \in (\beta, \gamma)$ другая (или та же самая, но функция $h^0(z)$ в (3) на интервалах (α, β) и (β, γ) имеет разные знаки). Тогда интервалы (α, β) и (β, γ) оси Oz принадлежат разным линейным особенностям, а их общий конец $z = \beta$ есть точечная особенность.

Более детально расположение траекторий вблизи линии пересечения поверхностей разрыва не изучалось. Рассматривались отдельные системы такого рода, встречающиеся в приложениях (например, в [204]), а также системы автоматического управления с двумя и более релейными функциями (например, в [5], стр. 197 и 249).

3. Точечная особенность в точке пересечения нескольких поверхностей разрыва изучалась в основном с точки зрения ее устойчивости [182], [178], [205]. При естественном предположении, что поверхности разрыва (возможно, искривленные) расположены как грани многогранных углов, автономная система в окрестности такой точки близка к однородной. Некоторые методы исследования устойчивости таких систем указаны в § 15. В [182] для получения необходимых и достаточных условий устойчивости системы с тремя разрывными функциями $(\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y, \operatorname{sgn} z)$ проводится качественное исследование расположения траекторий в различных случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. РЖМат, 1960, 12816 К.
2. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. РЖМат, 1968, 5 Б 241 К.
3. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972. РЖМат, 1972, 11 Б 291 К.
4. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976. РЖМат, 1977, 5 Б 125 К.
5. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. РЖМат, 1979, 1 Б 138 К.
6. Теория систем с переменной структурой / Под ред. Емельянова С.В. — М.: Наука, 1970.
7. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981, РЖМат, 1982, 1 Б 883 К.
8. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1954. — Т. 2. РЖМат, 1955, 2676 К.
9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958. РЖМат, 1960, 3002 К.
10. *Бокштейн М.Ф.* Теоремы существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Учен. записки МГУ, матем., 1939, вып. 15, 3—72.
11. *Красносельский М.А., Крейн С.Г.* Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — ДАН СССР, 1955, **102**, № 1, 13—16. РЖМат, 1956, 3815.
12. *Kamke E.* Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. — Acta Math., 1932, **58**, № 1, 57—85.
13. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. РЖМат, 1971, 3 Б 141 К.
14. *Красносельский М.А., Крейн С.Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике.—УМН, 1955, **10**, № 3, 147—152. РЖМат, 1956, 4493.
15. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. — Чехосл. матем. журн., 1957, **7**, № 3, 418—449. РЖМат, 1958, 8823.
16. *Курцвейль Я.* Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями. — ПММ, 1958, **22**, № 1, 27—45. РЖМат, 1959, 2601.
17. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. — Чехосл. матем. журн., 1957, **7**, № 4, 568—583. РЖМат, 1959, 316.
18. *Doležal V., Kurzweil J.* O některých vlastnostech lineárnich diferenciálnich rovnic. — Aplikace mat., 1959, **4**, № 3, 163—176. РЖМат, 1960, 10265.
19. *Jarník J.* On a certain modification on the theorem on the continuous dependence on a parameter. — Časopis pro pěstov. mat., 1961, **86**, № 4, 415—424. РЖМат, 1962, 10 Б 142.
20. *Петров Н.Н.* Некоторые достаточные условия непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра. — Вестник ЛГУ, 1962, № 19, сер. матем., вып. 4, 26—40. РЖМат, 1963, 10 Б 194.
21. *Arnese G.* Sulla dipendenza dal parametro degli integrali di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine. — Rend. semin. mat. Univ. Padova, 1963, **33**, 140—162. РЖМат, 1964, 3 Б 222.
22. *Karták K.* A theorem on continuous dependence on a parameter. — Časop. pro pěstov. mat., 1966, **91**, № 2, 178—194. РЖМат, 1967, 3 Б 217.
23. *Karták K.* Continuous dependence on parameters and generalised solutions of ordinary differential equations. — Beitr. Anal., 1976, **9**, 39—41. РЖМат, 1978, 6 Б 146.
24. *Artstein Z.* Continuous dependence on parameters: on the best possible results.— Journ. of Dif. Equat., 1975, **19**, № 2, 214—225, РЖМат, 1977, 2 Б 179.
25. *Artstein Z.* Topological dynamics of ordinary differential equations and Kurzweil equations. — Jounr. of Dif. Equat., 1977, **23**, № 2, 224—243. РЖМат, 1977, 12 Б 381.
26. *Vorel Z.* Continuous dependence on parameters. — Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl., 1981, **5**, № 4, 373—380. РЖМат, 1981, 9 Б 172.
27. *Матвеев Н.М., Носов С.Л., Покровский А.Н.* К вопросу о принципе усреднения. — Диф. уравн., 1978, **14**, № 2, 371—373. РЖМат, 1978, 6 Б 147.

28. *Volpato M.* Sulla derivabilità, rispetto a valori iniziali ed a parametri delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. — Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1958, **28**, № 1, 71—106. РЖМат, 1959, 6868.
29. *Ursescu C.* A differentiable dependence on the right—hand side of solutions of ordinary differential equations. — Ann. polon. math., 1975, **31**, № 2, 191—195. РЖМат, 1976, 8 Б 214.
30. *Reimann H.M.* Ordinary differential equations and quasiconformal mappings. — Invent. math., 1976, **33**, № 3, 247—270. РЖМат, 1977, 2 Б 178.
31. *Благодатских В.И.* О дифференцируемости решений по начальным условиям. — Диф. уравн., 1973, **9**, № 12, 2136—2140.
32. *Андреев А.Ф., Богданов Ю.С.* О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных. — УМН, 1958, **13**, № 3, 165—166. РЖМат, 1959, 6862.
33. *Zaremba S.C.* Sur les équations au paratingent. — Bull. des Scienc. Math., 1936, 2 Ser., **60**, № 5, 139—160.
34. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. РЖМат, 1971, 12 Б 396.
35. *Karták K.* A generalization of the Caratheodory theory of differential equations. — Czechosl. Math. Journ., 1967, **17**, № 3, 482—514. РЖМат, 1968, 8 Б 171.
36. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
37. *Мышкис А.Д., Самойленко А.М.* Системы с толчками в заданные моменты времени. — Матем. сборн., 1967, **74**, № 2, 202—208. РЖМат, 1968, 5 Б 254.
38. *Schwabik Š.* Verallgemeinerte gewöhnliche Differentialgleichungen; Systeme mit Impulsen auf Flächen I, II. — Czechosl. Math. Journ., 1970, **20**, № 3, 468—490; 1971, **21**, № 2, 172—197. РЖМат, 1971, 5 Б 194; 1972, 1 Б 247.
39. *Schwabik Š.* Stetige Abhängigkeit von einem Parameter für ein Differentialgleichungssystem mit Impulsen. — Czechosl. Math. Journ., 1971, **21**, № 2, 198—212. РЖМат, 1972, 1 Б 248.
40. *Pandit S.G.* Systems described by differential equations containing impulses: existence and uniqueness. — Rev. roum. math. pures et appl., 1981, **26**, № 6, 879—887. РЖМат, 1982, 1 Б 310.
41. *Мильман В.Д., Мышкис А.Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков. — Сибирск. матем. журн., 1960, **1**, № 2, 233—237. РЖМат, 1961, 9 Б 145.
42. *Рожко В.Ф.* Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах. — Диф. уравн., 1975, **11**, № 6, 1005—1012. РЖМат, 1975, 11 Б 362.
43. *Schwabik Š.* Bemerkungen zu Stabilitätsfragen für verallgemeinerte Differentialgleichungen. — Časop. pro pěstov. mat., 1971, **96**, № 1, 55—66. РЖМат, 1971, 7 Б 255.
44. *Rao M.R.M., Rao V.S.H.* Stability of impulsively perturbed systems. — Bull. Austral. Math. Soc., 1977, 16, № 1, 99—110. РЖМат, 1978, 1 Б 114.
45. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Диф. уравн., 1977, **13**, № 11, 1981—1992. РЖМат, 1978, 5 Б 157.
46. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Об устойчивости решений системы с импульсным воздействием. — Диф. уравн., 1981, **17**, № 11, 1995—2001. РЖМат, 1982, 3 Б 259.
47. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В., Цыгановский Н.С.* О поведении решений квазилинейной системы дифференциальных уравнений с импульсами в окрестности инвариантного тора. — Диф. уравн., 1982, **18**, № 5, 833—839. РЖМат, 1982, 10 Б 182.
48. *Розенвассер Е.Н.* К теории кусочно-линейных систем с периодически изменяющимися параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1962, **23**, № 1, 122—126. РЖМат, 1963, 1 Б 200.
49. *Аматов М.А.* Об устойчивости движения импульсных систем. — Диф. уравн., Рязань: 1977, вып. 9, 21— 28. РЖМат, 1978, 4 Б 138.
50. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием. — Диф. уравн., 1978, **14**, № 6, . 1034—1045. РЖМат, 1978, 11 Б 237.
51. *Перестюк Н.А., Шовкопляс В.Н.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Украинск. матем. журн., 1979, **31**, № 5, 517—524. РЖМат, 1980, 2 Б 193.
52. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Украинск. матем. журн., 1982, **34**, № 1, 66—73. РЖМат, 1982, 6 Б 231.
53. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием. — Украинск. матем. журн., 1977, **29**, № 6, 750—762. РЖМат, 1978, 9 Б 178.
54. *Цыгановский Н.С.* К вопросу обоснования метода усреднения для систем с импульсным воздействием. — Украинск. матем. журн., 1979, **31**, № 4, 469—473. РЖМат, 1979, 11 Б 234.
55. *Schwabik Š.* Über ein Differentialgleichungssystem mit unstetigen Lösungen endlicher Variation. — Zeitschr. angew. Math. und Mech., 1968, **48**, Sonderheft, № 8, 30—32. РЖМат, 1969, 11 Б 300.
56. *Каркинбаев И.* К вопросу обоснования метода усреднения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Матем. физика. Республ. межвед. сборн. Киев: 1979, № 26, 40—48. РЖМат, 1980, 1 Б 244.
57. *Завалищин С.Т.* Об одном способе оптимального синтеза при неизвестных возмущениях. — Труды ин-та матем. и механ. Уральск. науч. центр АН СССР, 1979, вып. 32, 45—70. РЖМат, 1980, 3 Б 529.
58. *Beneš K.* On modelling dynamic systems excited by the Dirac function. — Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. rerum nat., 1978, **57** [**56**], 123—129. РЖМат, 1980, 6 Б 281.
59. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Об определении периодических режимов в нелинейной динамической системе с кусочно-линейными характеристиками. — ПММ, 1956, **20**, № 5, 639—654. РЖМат, 1957, 3978.

60. *Kurzweil J.* Linear differential equations with distributions as coefficients. — Bull. Acad. Polon. Sci., ser math., 1959, **7**, № 9, 557–560. РЖМат, 1961, 1Б 410.
61. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959. РЖМат, 1960, 6755 К.
62. *Завалищин С.Т.* Определение реакции линейной нестационарной системы передачи на локально суммируемые воздействия. — Диф. уравн., 1968, **4**, № 8, 1404–1412. РЖМат, 1969, 1 Б 320.
63. *Завалищин С.Т.* Устойчивость обобщенных процессов. I, II. — Диф. уравн., 1966, **2**, № 7, 872–881; 1967, **3**, № 2, 171–179. РЖМат, 1967, 2 Б 239; 9 Б 234.
64. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Гостехиздат, 1957. РЖМат, 1958, 9700 К.
65. *Завалищин С.Т.* Формула Коши для линейного уравнения общего вида в обобщенных функциях. — Диф. уравн., 1973, **9**, № 6, 1138–1140. РЖМат, 1973, 10 Б 591.
66. *Барбашин Е.А.* Об устойчивости по отношению к импульсным воздействиям. — Диф. уравн., 1966, **2**, № 7, 863–871. РЖМат, 1967, 6 Б 217.
67. *Завалищин С.Т.* Периодические обобщенные орбиты. — Диф. уравн., 1967, **3**, № 8, 1231–1239. РЖМат, 1968, 3 Б 230.
68. *Завалищин С.Т.* О локально интегрируемых периодических движениях нелинейной системы передачи. — Диф. уравн., 1969, **5**, № 9, 1575–1582. РЖМат, 1970, 1 Б 344.
69. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. —М.: Наука, 1966. РЖМат, 1966, 11 А 126 К.
70. *Doetsch G.* Das Anfangswertproblem für Systeme linearer Differentialgleichungen unter unzulässigen Anfangsbedingungen. — Annali di mat. pura ed appl., 1955, **39**, 25–37. РЖМат, 1956, 8015.
71. *Focke J.* Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Sprungfunktionen. — Wiss. Zeitschr. Univ. Leipzig. Math. — Nat. Reihe, 1958/59, **8**, № 5, 867–870. РЖМат, 1960, 13796.
72. *Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J.* Application of the Drazin inverse matrix to linear systems of differential equations with singular constant coefficients. — SIAM Journ. Appl. Math., 1976, **31**, № 3, 421–425. РЖМат, 1977, 5 Б 649.
73. *Campbell S.L.* Linear systems of differential equations with singular coefficients. — SIAM Journ. Math. Anal., 1977, **8**, № 6, 1057–1066. РЖМат, 1978, 6 Б 189.
74. *Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М.* Структура общего непрерывно дифференцируемого решения краевой задачи для сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Вопросы прикл. матем., Иркутск: 1977, 73–93. РЖМат, 1978, 7 Б 314.
75. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. РЖМат, 1980, 8 Б 197 К.
76. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. РЖМат, 1968, 12 Б 410 К.
77. *Pfaff R.* Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Distributionskoeffizient. — Arch. Math., 1979, **32**, № 5, 469–478. РЖМат, 1980, 3 Б 150.
78. *Ligęza J.* On generalized periodic solutions of linear differential equations of order *n*. - Ann. polon. math., 1977, **33**, № 3, 209–218. РЖМат, 1977, 11 Б 185.
79. *Uno T., Hong I.* Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$. — Japan. Journ. Math., 1959, **29**, 152–164. РЖМат, 1962, 7 Б 196.
80. *Guggenheimer H.* Stability theory for Hill equations with generalized coefficient. — Proc. Amer. Math. Soc., 1975, **53**, № 1, 155–158. РЖМат, 1976, 8 Б 262.
81. *Ligęza J.* On generalized solutions of some differential nonlinear equations of order *n*. — Ann. polon. math., 1975, **31**, № 2, 115–120. РЖМат, 1976, 8 Б 216.
82. *Ligęza J.* Cauchy's problem for systems of linear differential equations with distributional coefficients. — Colloq. math., 1975, **33**, № 2, 295–303. РЖМат, 1976, 8 Б 215.
83. *Wall H.S.* Concerning harmonic matrices. — Archiv Math., 1954, **5**, № 3, 160–167. РЖМат, 1955, 3796.
84. *MacNerney J.S.* Stilties integrals in linear spaces. — Annals of Math., (2), 1955, **61**, № 2, 354–367. РЖМат, 1956, 4660.
85. *Hildebrandt T.H.* On systems of linear differentio–Stiltjes–integral equations. — Illinois Journ. Math., 1959, **3**, № 3, 352–373. РЖМат, 1960, 9040.
86. *Reid W.T.* Generalised linear differential systems. — Journ. of Math. and Phys., 1959, **8**, № 5, 705–726. РЖМат, 1961, 9 Б 318.
87. *Schwabik Š.* Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme. — Časop. pro pěstov. mat., 1971, **96**, № 2, 183–211. РЖМат, 1971, 12 Б 290.
88. *Ligęza J.* On distributional solution of some systems of linear differential equations. — Časop. pro pěstov. mat., 1977, **102**, № 1, 37–41. РЖМат, 1977, 8 Б 212.
89. *Schwabik Š., Tvrdý M.* Boundary value problems for generalized linear differential equations. — Czechosl. Math. Journ., 1979, **29**, № 3, 451–477. РЖМат, 1980, 3 Б 200.
90. *Pandit S.G.* Differential systems with impulsive perturbations. — Pacific Journ. Math., 1980, **86**, № 2, 553–560. РЖМат, 1981, 3 Б 194.
91. *Ligęza J.* The existence and the uniqueness of distributional solutions of some systems of non-linear differential equations. Časop. pro pěstov. mat., 1977, **102**, № 1, 30–36. РЖМат, 1977, 8 Б 203.
92. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations. — Czechosl. Math. Journ., 1958, **8**, № 3, 360–388. РЖМат, 1960, 317.
93. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Матем. сборн., 1960, 51, № 1, 99–128. РЖМат, 1960, 13788.
94. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. РЖМат, 1975, 5 Б 608 К.
95. *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем. I, II — Автоматика и телемех., 1974, № 7, 33–47; № 8, 39–61. РЖМат, 1974, 11 Б 215, 216.

96. *Якубович В.А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями. ДАН, 1966, **171**, № 3, 533–536. РЖМат, 1967, 4 Б 216.
97. *Алимов Ю.И.* О применении прямого метода Ляпунова к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями. – Автоматика и телемех., 1961, **22**, № 7, 817–830. РЖМат, 1962, 3 В 296.
98. *Malgarini G.* Su un particolare sistema differenziale ordinario, con secondi membri discontinui. – Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Sci. mat., fiz., chim. e geol., 1960, **A94**, № 3, 612–631. РЖМат, 1963, 4 Б 162.
99. *Malgarini G.* Sull'integrazione di un sistema differenziale ordinario, discontinuo rispetto alle incognite. – Rend. Ist. lombardo sci e lettere. Sci. mat., fiz., chim. e geol., 1961, **A95**, № 1, 3–21. РЖМат, 1964, 10 Б 121.
100. *André J., Seibert P.* Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungsproblemen auftreten. I, II. – Arch. der Math., 1956, **7**, № 2, 148–156; № 3, 157–164. РЖМат, 1957, 403; 1958, 9810.
101. *Тонкова В.С., Тонков Е.Л.* Некоторые свойства усредненных решений системы регулирования с разрывной нелинейностью. – Диф. уравн., 1973, **9**, № 2, 278–289. РЖМат, 1973, 6 Б 289.
102. *Hermes H.* Discontinuous vector fields and feedback control. – Different. Equat. and Dynam. Syst., 155–165. New York, Acad. Press, 1967. РЖМат, 1968, 10 Б 489.
103. *Sentis R.* Equations differentielles à second membre measurable. – Boll. Unione mat. ital., 1978, **B15**, № 3, 724–742. РЖМат, 1979, 7 Б 158.
104. *Солнцев Ю.К.* Об устойчивости по Ляпунову положений равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей. – Учен. записки МГУ, сер. матем. 1951, вып. 148, **4**, 144–180.
105. *Солнцев Ю.К.* О непрерывной зависимости от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями. – Учен. записки МГУ, сер. матем. 1959, вып. 186, **9**, 191–203. РЖМат, 1961, 8 Б 134.
106. *Nagumo M.* Über das System der gewöhnlicher Differentialgleichungen. – Japanese Journ. of Math., 1927, **4**, № 4. 215–230.
107. *Rosenthal A.* Über die Existenz der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. – Sitzungsberichte der Heidelberger Akad., Math. Naturw. Klasse, **1929**, 19 Abhandl., 3–10.
108. *Викторовский Е.Е.* Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений. – Матем. сборн., 1954, **34**, № 2, 213–248. РЖМат, 1955, 714.
109. *Персидский К.П.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений. – Известия АН Казах. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1965, вып. 3, сер. матем. и мех., вып. 18, 17–24. РЖМат, 1966, 8 Б 173.
110. *Coletti G., Regoli G.* Criteri di existenza e di limitatezza di soluzioni di equazioni differenziali non lineari. – Rend. mat., 1978, **11**, № 3, 393–403. РЖМат, 1979, 9 Б 97.
111. *Guintini S., Pianigiani G.* Equazioni differentiali ordinarie con secondo membro discontinuo. – Atti semin. mat. e fiz. Univ. Modena, 1974(1975), **23**, № 2, 233–240. РЖМат, 1976, 7 Б 163.
112. *Матросов В.М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями. I, II. – Диф. уравн., 1967, **3**, № 3, 395–409; № 5, 869–878. РЖМат, 1967, 12 Б 241; 1968 4 Б 197.
113. *Козлов Р.И.* К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. – Диф. уравн., 1974, **10**, № 7, 1264–1275. РЖМат, 1974, 11 Б 218.
114. *Pelant J.* Vztahy mezi různými typy zobecněných řešení obyčejnných differenciálnich rovnic. – Knižn. odbor a věd. spisů VUT Brně, 1975, sec. 1, **B–56**, 181–187. РЖМат, 1976, 6 Б 198.
115. *Reid W.T.* Anatomy of the ordinary differential equation. – Amer. Math. monthly, 1975, **82**, № 10, 971–984. РЖМат, 1976, 9 Б 160.
116. *Binding P.* The differential equation $\dot{x} = f \circ x$. – Journ. of Dif. Equat., 1979, **31**, № 2, 183–199. РЖМат, 1980, 1 Б 234.
117. *Hájek O.* Discontinuous differential equations. I, II. – Journ. of Dif. Equat., 1979, **32**, № 2, 149–170; 171–185. РЖМат, 1980, 3 Б 148, 149.
118. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях. – Диф. уравн., 1979, **15**, № 10, 1814–1823. РЖМат, 1980, 1 Б 233.
119. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. РЖМат, 1980, 10 Б 557 К.
120. *Барбашин Е.А., Алимов Ю.И.* К теории релейных дифференциальных уравнений. – Известия вузов, сер. матем., 1962, № 1, 3–13. РЖМат, 1963, 2 Б 157.
121. *Ważewski T.* Sur une condition équivalente à l'équation au contingent. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math. astr., phys., 1961, **9**, № 12, 865–867. РЖМат, 1963, 2 Б 158.
122. *Marchaud A.* Sur les champs des demi–cônes et les équations differéntielles du premier ordre. – Bull. Soc. Math. France, 1934, **62**, 1, 1–38.
123. *Marchaud A.* Sur les champs de demi–cones convexes. – Bull. Sci. Math., 2 ser., 1938, **62**, № 8, 229–240.
124. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с многозначной разрывной правой частью. – ДАН СССР, 1963, **151**, № 1, 65–68. РЖМат, 1963, 12 Б 248.
125. *Kowalski Z.* Measurability conditions for set–valued functions. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1964, **12**, № 8, 449–453. РЖМат, 1965, 8 Б 48.
126. *Kowalski Z.* Measurability conditions and scalar coordinates for orientor fields. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1964, **12**, № 8, 455–459. РЖМат, 1965, 8 Б 49.
127. *Pliś A.* Remark on measurable set–valued functions. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1961, **9**, № 12, 857–859. РЖМат, 1962, 10 Б 58.

128. *Kikuchi N.* Control problem of contingent equation. – Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., ser. A, 1967, **3**, № 1, 85–99. РЖМат, 1969, 2 Б 507.
129. *Scorza Dragoni G.* Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. – Rend. Semin. Mat. Padova, **1948**, **17**, 102–106.
130. *Scorza Dragoni G.* Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue ad un'altra variabile. – Atti Acad. Naz. Lincei, 1952, Ser. 8. Classe fis., mat., **12**, № 1, 55–61.
131. *Opial Z.* Sur l'équation différentielle ordinaire du premier ordre dont le second membre satisfait aux conditions de Caratheodory.- Annales polon. math., 1960, **8**, № 1, 23–28. РЖМат, 1961, 2 Б 113.
132. *Ważewski T.* Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1961, **9**, № 12, 861–863. РЖМат, 1962, 11 Б 53.
133. *Ważewski T.* Systèmes de commande et équations au contingent. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., **1961**, **9**, № 3, 151–155. РЖМат, 1962, 6 В 252.
134. *Филиппов А.Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. – Вестник МГУ, сер. матем., мех., 1959, № 2, 25–32. РЖМат, 1961, 6 Б 315.
135. *Ważewski T.* Sur une généralisation de la notion des solutions d'une équation au contingent. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr. phys., 1962, **10**, № 1, 11–15. РЖМат, 1963, 2 Б 159.
136. *Turowicz A.* Sur les trajectoires et quasitrajectoires des systèmes de commande nonlineaires. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1962, **10**, № 10, 529–531. РЖМат, 1963, 8 Б 191.
137. *Pliś A.* Trajectories and quasitrajectories of an orientor field. – Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1963, **11**, № 6, 369–370. РЖМат, 1964, 4 Б 204.
138. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. – Вестник МГУ, сер. матем., мех., 1967, № 3, 16–26. РЖМат, 1968, 2 Б 260.
139. *Hermes H.* The generalised differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$. – Advances Math.,1970, **4**, № 2, 149–169. РЖМат, 1970, 11 Б 189.
140. *Толстоногов А.А., Чугунов П.И.* О множестве решений дифференциального включения в банаховом пространстве. I.Сибирск. матем. журн., 1983, **24**, № 6, 144–159. РЖМат, 1984, 6 Б 1220.
141. *Turowicz A.* Remarque sur la définition des quasitrajectoires d'un systèm de commande nonlinéaire. – Bull. Acad. Polon. sci., ser. math., astr., phys., **1963**, **11**, № 6, 367–368. РЖМат, 1964, 4 Б 203.
142. *Pliś A.* Measurable orientor fields. – Bull. Acad. Polon. sci., ser. math., astr., phys., 1965, **13**, № 8, 565–569. РЖМат, 1966, 7 Б 206.
143. *Davy J.L.* Properties of the solution set of a generalised differential equation. – Bull. Austral. Math. Soc., 1972, **6**, № 3, 379–398. РЖМат, 1972, 12 Б 195.
144. *Филиппов А.Ф.* Устойчивость для дифференциальных уравнений с разрывными и многозначными правыми частями. – Диф. уравн., 1979, 15, № 6, 1018–1027. РЖМат, 1979, 10 Б 305.
145. *Kaczyński H., Olech C.* Existence of solutions of orientor fields with non-convex right-hand side. – Annales polon. math., 1974, **29**, № 1, 61–66. РЖМат, 1974, 11 Б 208.
146. *Olech C.* Existence of solutions of non-convex orientor fields. – Boll. Unione mat. ital., 1975, **11**, № 3, 189–197. РЖМат, 1976, 8 Б 217.
147. *Brunovský P.* Every normal linear system has a regular time-optimal synthesis. – Mat. slovaca, 1978, **28**, № 1, 81–100. РЖМат, 1978, 7 Б 634.
148. *Железцов Н.А.* Метод точечного преобразования и задача о вынужденных колебаниях осциллятора с "комбинированным" трением. – ПММ, 1949, **13**, № 1, 3–40.
149. *Ressig R.* Über die Stabilität gedämpfter erzwungener Bewegungen mit linearer Rückstellkraft. – Math. Nachr., 1955, **13**, № 3–4, 231–245. РЖМат, 1956, 2995.
150. *Забрейко П.П., Красносельский М.А., Лифшиц Е.Л.* Осциллятор на упруго-пластическом элементе. – ДАН СССР, 1970, **190**, № 2, 266–268. РЖМат, 1970, 6 Б 291.
151. *Buhite J.L., Owen D.R.* An ordinary differential equation from the theory of plasticity. – Arch. Ration. Mech. and Anal., 1979, **71**, № 4, 357–383. РЖМат, 1980, 3 Б 159.
152. *Плотников В.А.* Метод усреднения для дифференциальных включений. – Диф. уравн., 1979, **15**, № 8, 1427–1433. РЖМат, 1979, 12 Б 612.
153. *Плотников В.А., Зверкова Т.С.* Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями. – Диф. уравн., 1982, **18**, № 6, 1091–1093. РЖМат, 1982, 11 Б 288.
154. *Козлов Р.И.* К обоснованию метода усреднения для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. – Устойчивость и управление. Казань, 1981, 33–42. РЖМат, 1982, 3 Б 310.
155. *Александров П.С.* Введение в общую теорию множеств и функций. – М. – Л.; Гостехиздат, 1948.
156. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. – ПММ, 1957, **21**, № 5, 658–669. РЖМат, 1959, 363.
157. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966.
158. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М. – Л.; Гостехиздат, 1949.
159. *Барбашин Е.А.* К теории обобщенных динамических систем. – Учен. записки МГУ, матем., 1949, **2**, вып. 135, 110–133.
160. *Петров Н.Н.* Аналог теории Биркгофа для инвариантных множеств систем управления. – Диф. уравн., 1979, **15**, № 12, 2155–2160. РЖМат, 1980, 4 Б 353.
161. *Bendixson I.* Sur les courbes définiés par les équations différentielles. – Acta Math., **1901**, **24**, 1–88. Перевод первой главы: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – УМН, 1941, вып. 9, 191–211.

162. *Brouwer L.E.J.* On continuous vector distributions. I, II, III. — Verhandl. Nederl. Akad. Wetersch. Afd. Natuurk., Sec. 1, 1909, **11**, 850—858; 1910, **12**, 716—734; 1910, **13**, 171—186.
163. *Мышкис А.Д.* Обобщения теоремы о точке покоя внутри замкнутой траектории. — Матем. сборник, 1954, **34**, № 3, 525—540. РЖМат, 1955, 732.
164. *Hautus M.L., Heymann M., Stern R.J.* Rest point theorems for autonomous control systems. — Journ. Math. Anal. and Appl., 1977, **58**, № 1, 98—112. РЖМат, 1977, 11 Б 186.
165. *Байтман М.М.* Об областях управляемости на плоскости. — Диф. уравн. 1978, **14**, № 4, 579—593. РЖМат, 1978. 10 Б 287.
166. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мухамадиев Э.М., Обуховский В.В.* О вращении многозначных векторных полей. — Труды семин. по функц. ан., Воронежск. ун-т, 1969, вып. 12, 69—84. РЖМат, 1970, 2 Б 816.
167. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. РЖМат, 1967, 4 Б 218 К.
168. *Поволоцкий А.И., Ганго Е.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. — Учен. записки. Ленингр. пед. ин-т им. Герцена, 1970, **464**, 235—242. РЖМат, 1971, 7 Б 230.
169. *Поволоцкий А.И., Ганго Е.А.* О периодических решениях дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. — Учен. записки. Ленингр. пед. ин-т им. Герцена, 1972, **541**, 145—154. РЖМат, 1972, 5 Б 181.
170. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.—Л.: Наука, 1964. РЖМат, 1965, 1 Б 214 К.
171. *Неймарк Ю.И.* О периодических движениях релейных систем. В кн.: Памяти А.А. Андронова. — М.: Изд-во АН, 1955. РЖМат, 1957, 2367.
172. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1969. РЖМат, 1970, 4 Б 336 К.
173. *Долголенко Ю.В.* Приближенное определение частично скользящих периодических режимов в релейных системах регулирования. Автоматика и телемех., 1957, **18**, № 1, 3—26.
174. *Неймарк Ю.И., Киняпин С.Д.* О рождении периодического движения из состояния равновесия, расположенного на поверхности разрыва. — Известия ВУЗов, Радиофиз., 1962, **5**, № 6, 1196—1205. РЖМат, 1963, 9 Б 235.
175. *Брусин В.А., Неймарк Ю.И., Фейгин М.И.* О некоторых случаях зависимости периодических движений релейной системы от параметров. — Известия ВУЗов, Радиофиз., 1963, **6**, № 4, 785—800. РЖМат, 1964, 6 Б 248.
176. *Roxin E.* Stability in general control systems. — Journ. of Dif. Equat., 1965, **1**, № 2, 115—150. РЖМат, 1966, 6 Б 283.
177. *Krbec P.* Weak stability of multivalued differential equations. — Czechosl. Math. Journ., 1976, **26**, № 3, 470—476. РЖМат, 1977, 5 Б 118.
178. *Филиппов А.Ф.* Система дифференциальных уравнений с несколькими разрывными функциями. — Матем. заметки, 1980, **27**, № 2, 255—266. РЖМат, 1980, 6 Б 181.
179. *Foti J.P.* Asymptotically autonomous multivalued differential equations. — Trans. Amer. Math. Soc., 1976, **221**, № 2, 449—452. РЖМат, 1977, 5 Б 119.
180. *Цалюк В.З.* Об устойчивости по первому приближению дифференциальных включений. — Диф. уравн. 1980, **16**, № 2, 258—263. РЖМат, 1980, 6 Б 183.
181. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости. — ДАН СССР, 1977, **233**, № 3, 293—296. РЖМат, 1977, 8 Б 195.
182. *Худов В.Ф.* Об устойчивости трехкоординатной нелинейной системы углового сопровождения. Автореф. канд. дисс. — М.: МГУ, 1970.
183. *Воронов А.А.* Современное состояние и проблемы теории устойчивости. — Автоматика и телемех., 1982, № 5, 5—28. РЖМат, 1982, 9 Б 250.
184. *Цалюк В.З.* Возмущения экспоненциально устойчивых дифференциальных включений обобщенными функциями. — Матем. физика. Республ. межвед. сборн., Киев, 1980, вып. 28, 34—40. РЖМат, 1981, 4 Б 226.
185. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967. РЖМат, 1968, 8 Б 249 К.
186. *Козлова В.С.* Грубость разрывных систем. — Вестник МГУ, сер. матем. и механ., 1984, № 5, 16—20.
187. *Козлова В.С.* Грубые особые точки на линии разрыва правых частей системы дифференциальных уравнений. — Депонир. в ВИНИТИ (Москва) 22.06.84, № 4271—84.
188. *Козлова В.С.* Особые точки первой степени негрубости, лежащие на линии разрыва правых частей системы. — Депонир. в ВИНИТИ (Москва) 22.06.84, № 4284—84.
189. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967. РЖМат, 1968, 7 Б 169 К.
190. *Скрябин Б.Н.* Рождение предельного цикла от "сшитого фокуса". — ПММ, 1978, **42**, № 5, 952—955. РЖМат, 1979, 2 Б 135.
191. *Teixeira M.A.* Generic bifurcation in manifolds with boundary. — Journ. of Dif. Equat., 1977, **25**, № 1, 65—89. РЖМат, 1978, 2 Б 279.
192. *Teixeira M.A.* Generic bifurcation of certain singularities. — Boll. Unione Mat. Ital., 1979, ser. 5, **16—B**, № 1, 238—254.
193. *Мышкис А.Д., Хохряков А.Я.* Бушующие динамические системы. I. Особые точки на плоскости. — Матем. сборн., 1958, **45**, № 3, 401—414. РЖМат, 1962, 3 Б 207.
194. *Потлова Н.И., Потлов В.В.* Некоторые свойства траекторий одного класса систем однородного типа с разрывными правыми частями. — Диф. уравн., Рязань, 1978, вып. 11, 140—143. РЖМат, 1978, 12 Б 361.
195. *Потлов В.В., Потлова Н.И.* Качественное интегрирование систем однородного типа. Диф. уравн., Рязань, 1980, вып. 15, 100—115. РЖМат, 1982, 7 Б 210.

196. *Pachter M., Jacobson D.H.* The stability of planar dynamical systems linear-in-cones. — IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, **26**, № 2, 587—590. РЖМат, 1981, 12 Б 198.
197. *Филиппов А.Ф.* Исследование системы дифференциальных уравнений с двумя пересекающимися линиями разрыва. — Вестник МГУ, сер. матем. и механ., 1979, № 6, 68—75. РЖМат, 1980, 4 Б 179.
198. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Об устойчивости состояний равновесия неголономных систем. — ДАН СССР, 1965, **160**, № 4, 781—784. РЖМат, 1967, 9 Б 162.
199. *Стрыгин В.В.* Системы дифференциальных уравнений, имеющих многообразие стационарных положений и находящиеся вблизи границы области устойчивости. — Диф. уравн. Межвузовский сборник. — Куйбышев, 1976, 72—126. РЖМат, 1977, 9 Б 249.
200. *Шумафов М.М.* Топологическая классификация особенностей на поверхности разрыва правых частей системы трех дифференциальных уравнений. — В сб. Дифференциальные уравнения и их приложения. — М.: МГУ, 1984, 123—130.
201. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Об устойчивости положений равновесия в разрывных системах. ПММ, 1960, **24**, № 2, 283—293. РЖМат, 1960, 13833.
202. *Неймарк Ю.И., Киняпин С.Д.* О состоянии равновесия расположенном на поверхности разрыва. — Известия ВУЗов, Радиофиз., 1960, **3**, № 4, 694—705. РЖМат, 1961, 5 Б 219.
203. *Вишик С.М.* Векторные поля в окрестности края многообразия. — Вестник МГУ, сер. матем. и механ., 1972, № 1, 21—28. РЖМат, 1972, 4 А 673.
204. *Киняпин С.Д.* Об устойчивости состояния равновесия двухкаскадной релейной системы. — Известия ВУЗов, Радиофиз., 1960, **3**, № 3, 511—525. РЖМат, 1961, 12 Б 209.
205. *Лозгачев Г.И.* Достаточные условия устойчивости одного класса разрывных систем. — Сб. трудов ВНИИ систем. исслед., 1980, № 4, 21—24. РЖМат, 1981, 8 Б 241.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ