1. Дифференциальные включения с максимальными монотонными операторами

1.1. Определения и основные понятия.

Будем рассматривать гильбертово пространство H и многозначный оператор $A\colon H \to 2^H$. $D(A) \subseteq H$ – область определения оператора A, $Jm(A) = \bigcup\limits_{x \in D(A)} A(x)$ – область его значений.

Напомним, что гильбертовым называют полное унитарное пространство. Унитарное пространство – линейное нормированное пространство, норма которого задаётся некоторым скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. 2^H – множество всех подмножеств H.

Определение монотонности. Оператор A называют *монотонным*, если

$$\forall (x, \bar{x} \in D(A)) \forall (y \in A(x), \bar{y} \in A(\bar{x})) [\langle x - \bar{x}, y - \bar{y} \rangle \geq 0]. \qquad (1)$$

Примеры. 1. Любая однозначная неубывающая функция является монотонным оператором.

2. Оператор $A\colon \mathrm{R} \to 2^{\mathrm{R}}$ заданный формулой $A(x) = [x-2, x-1]$ не является монотонным, так как $-1.5 \in A(0.5)$, $-1 \in A(0)$ и $\langle 0.5 - 0, -1.5 - (-1) \rangle = -0.25 < 0$.

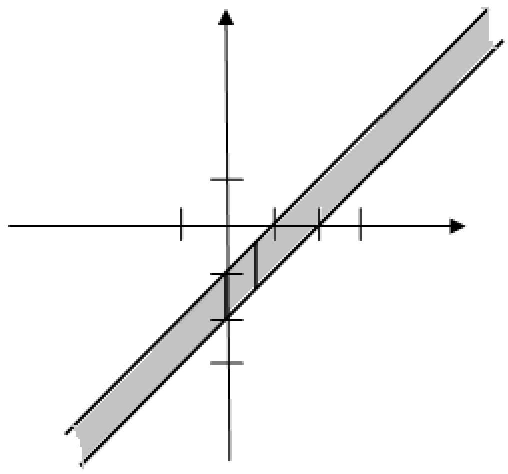

Рис. 1

3. Оператор $A\colon \mathrm{R} \to 2^{\mathrm{R}}$ заданный формулой $A(x) = \begin{cases} [x, x+1] \text{ при } x \in Z \\ [x]+1 \text{ при } x \in \mathrm{R} \setminus Z \end{cases}$ является монотонным оператором.

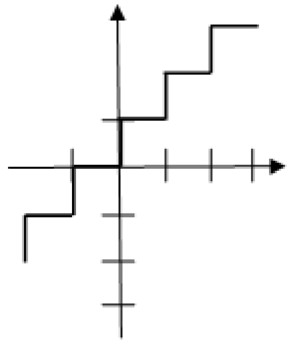

Рис. 2

4. Оператор $A\colon \mathrm{R} \to 2^{\mathrm{R}}$ заданный формулой $A(x) = \operatorname{sign} x$ тоже является монотонным оператором.

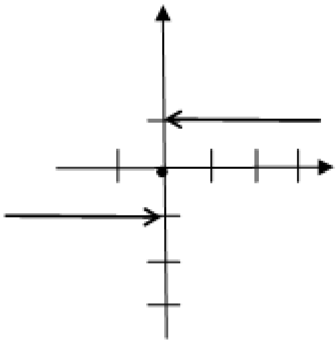

Рис. 3

Определение максимальности. Монотонный оператор A называют *максимальным*, если для произвольной пары элементов $x, y \in H$ из выполнения

$$\forall\big(\bar{x} \in D(A)\big)\forall\big(\,\bar{y} \in A(\bar{x})\big)\big[\langle x-\bar{x},\, y-\bar{y}\rangle \ge 0\big]$$

следует, что $x \in D(A)$, а $y \in A(x)$.

Другими словами, к графику $\Gamma_A = \big\{(x,\, y)\colon\ x \in D(A) \wedge y \in A(x)\big\}$ максимального монотонного оператора A нельзя добавить ни одной новой точки с сохранения свойства монотонности оператора.

Примеры. 1. Монотонный оператор $A(x) = \operatorname{sign} x$ не является максимальным, так как $0.5 \notin A(0)$, а $\forall\big(\bar{x} \in \mathrm{R}\big)\big[\langle 0-\bar{x},\ 0.5-\operatorname{sign}\bar{x}\rangle \ge 0\big]$.

2. Монотонный оператор $A(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x \text{ при } x \ne 0, \\ [-1,\ 1] \text{ при } x = 0. \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ [-1,\ 1] \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$ является максимальным.

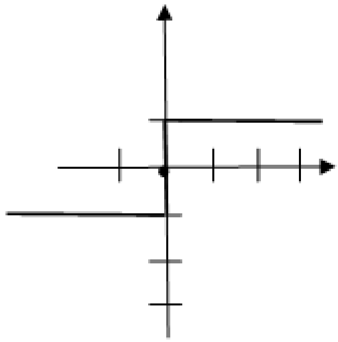

Рис. 4

Задача. Покажите, что если A – ММО и число $\lambda > 0$, то и λA – ММО.

Определение резольвенты. *Резольвентой, отвечающей произвольному вещественному числу* $\lambda > 0$, максимального монотонного оператора A называют оператор $J_\lambda = (\mathrm{I} + \lambda A)^{-1}$, где I - тождественный оператор ($\mathrm{I}(x) = x$).

Примеры. $H = \mathrm{R}$. 1. Для максимального монотонного оператора $A(x) = x$ в и $\lambda = 0.5$ резольвента $J_{0,5}(x) = (\mathrm{I}+0.5\cdot\mathrm{I})^{-1}(x) = \frac{2}{3}x$. Для произвольного положительного значения λ $J_\lambda(x) = (\mathrm{I}+\lambda\cdot\mathrm{I})^{-1}(x) = \frac{1}{1+\lambda}x$. Отметим тот факт, что в этом примере $J_\lambda \to \mathrm{I}$ при $\lambda \to 0$.

Рис. 5

2. $A(x) = \sin x + x$. $J_\lambda(x) = (\mathrm{I}+\lambda\cdot\operatorname{sign})^{-1}(x) = \begin{cases} x+\lambda \text{ при } x < -\lambda, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ x-\lambda \text{ при } x > \lambda. \end{cases}$

3. $A(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x \text{ при } x \neq 0, \\ [-1,\ 1] \text{ при } x = 0. \end{cases}$ $J_\lambda(x) = (\mathrm{I}+\lambda\cdot A)^{-1}(x) = \begin{cases} x+\lambda \text{ при } x < -\lambda, \\ 0 \text{ при -}\lambda \le x \le \lambda, \\ x-\lambda \text{ при } x > \lambda. \end{cases}$ И снова $J_\lambda \to \mathrm{I}$ при $\lambda \to 0$.

Рис. 6

Теорема Минти (эквивалентное определение максимальности). *Монотонный оператор* A *является максимальным тогда и только тогда, когда* $Jm(\mathrm{I}+A) = H$.

Определение аппроксимации Иосиды. Оператор $A_\lambda = \frac{\mathrm{I} - J_\lambda}{\lambda}$, где $\lambda > 0$ и J_λ – резольвента, называется *аппроксимацией Иосиды* максимального монотонного оператора A.

Примеры. $H = \mathrm{R}$. 1. Для $A(x) = x$ в и $\lambda > 0$ $A_\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{I} - J_\lambda}{\lambda}(x) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{1+\lambda}}{\lambda} x = \dfrac{1}{1+\lambda} x$.

Рис. 7

2. $A(x) = \sin x + x$. $A_\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{I} - J_\lambda}{\lambda}(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x < -\lambda, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ 1 \text{ при } x > \lambda. \end{cases}$ Отметим, что $A_\lambda \to A$ при $\lambda \to 0$

.

3. $A(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x \text{ при } x \neq 0, \\ [-1,\ 1] \text{ при } x = 0. \end{cases}$ $A_\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{I} - J_\lambda}{\lambda}(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x < -\lambda, \\ \dfrac{x}{\lambda} \text{ при -} \lambda \le x \le \lambda, \\ 1 \text{ при } x > \lambda. \end{cases}$ И снова $A_\lambda \to A$ при $\lambda \to 0$.

Рис. 8

1.2. Свойства максимального монотонного оператора (ММО).

Свойство 1. $\forall \big(x \in D(A)\big)\big[A(x)$ – *выпуклое замкнутое множество*$\big]$.

<u>Доказательство</u>. 1) Покажем, что $A(x)$ – выпуклое. Пусть $y \in A(x)$ и $z \in A(x)$ и $\alpha \in [0, 1]$. Требуется показать, что $\alpha y + (1-\alpha) z \in A(x)$. Для того, чтоб воспользоваться определением максимальности оператора A, проверим свойство монотонности A в точке $(x, \alpha y + (1-\alpha) z)$. Для этого выберем произвольные $\bar{x} \in D(A)$ и $\bar{y} \in A(\bar{x})$ и рассмотрим скалярное произведение $\langle x - \bar{x},\ \alpha y + (1-\alpha) z - \bar{y} \rangle = \langle x - \bar{x},\ \alpha y - \alpha \bar{y} + (1-\alpha) z - (1-\alpha)\bar{y} \rangle =$

$$\alpha \langle x - \bar{x},\ y - \bar{y} \rangle + (1-\alpha) \langle x - \bar{x},\ z - \bar{y} \rangle \overset{\substack{\text{по опр. монотонности } A \\ \text{и выбору } \alpha}}{\geq} 0$$

2) Покажем, что $A(x)$ – замкнутое. Пусть $y_n \in A(x)$ и $y_n \underset{n \to \infty}{\to} y$. Покажем, что $y \in A(x)$, проверив свойство монотонности A в точке (x, y) в определении максимальности. Возьмём произвольные $\bar{x} \in D(A)$ и $\bar{y} \in A(\bar{x})$, тогда $\langle x - \bar{x}, y_n - \bar{y} \rangle \ge 0$ в силу монотонности A. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $n \to \infty$, получим $\langle x - \bar{x}, y - \bar{y} \rangle \ge 0$, т.к. скалярное произведение – непрерывная функция своих множителей.

Перед формулировкой второго свойства ММО дадим определение слабой сходимости и некоторые факты о слабо сходящихся последовательностях.

Определение слабой сходимости. Последовательность $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства H называется *слабо сходящейся* к элементу x (обозначим $x_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} x$), если $\forall(a \in H)\left[\langle a, x_n\rangle \to \langle a, x\rangle\right]$.

Пример. В пространстве l_2 – квадратично суммируемых бесконечных последовательностей (в l_2 $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$) последовательность $x_n = (0, 0,\ldots,\underset{n}{1}, 0,0,\ldots)$ слабо сходится к нулевому элементу ***(покажите это)***, но по норме к нулю не сходится (даже не является фундаментальной последовательностью)

Лемма о признаке ограниченности последовательности (см. Соболев). *Если для любого $y \in H$ последовательность чисел $\langle y, x_n\rangle$ ограничена, то последовательность элементов $x_n \in H$ ограничена.*

Доказательство. Из ограниченности последовательности $\{\langle x_n, y\rangle\}$ для любого $y \in H$ вытекает прежде всего то, что числовое множество $\{\langle x_n, y\rangle\}$ остается ограниченным, когда y меняется в некотором шаре $\|y - y_0\| \le r_0$. В самом деле, если бы это было не так, т.е. если бы множество $\{\langle x_n, y\rangle\}$ не было ограничено ни в одном таком шаре, то, взяв шар $\|y - y*\| \le 1$, где $y*$ - произвольный элемент в H, мы нашли бы в нем точку y_1 и номер n_1 такие, что

$$\left|\langle x_{n_1}, y_1\rangle\right| > 1.$$

В силу непрерывности скалярного произведения это неравенство выполнялось бы в некоторой шаровой окрестности $\|y - y_1\| \le \rho_1$, $\rho_1 < \frac{1}{2}$, точки y_1, целиком лежащей в шаре $\bar{K}(y*,1)$.

В шаре $\bar{K}(y_1,\rho_1)$ множество чисел $\langle x_n, y\rangle$, $n > n_1$, снова остается неограниченным, и потому найдется точка $y_2 \in \bar{K}(y_1,\rho_1)$ и номер $n_2 > n_1$ такие, что

$$\left|\langle x_{n_2}, y_2\rangle\right| > 2.$$

По непрерывности неравенство сохранится в некоторой шаровой окрестности $\|y - y_2\| < \rho_2$, $\rho_2 < \frac{1}{2^2}$, целиком лежащей в $\bar{K}(y_1,\rho_1)$.

В шаре $\bar{K}(y_2,\rho_2)$ числа $\langle x_n, y\rangle$, $n > n_2$, по-прежнему образуют неограниченное множество, и потому найдутся точка $y_3 \in \bar{K}(y_2,\rho_2)$ и номер $n_3 > n_2$ такие, что $\left|\langle x_{n_3}, y_3\rangle\right| > 3$ и т. д.

Мы получим, таким образом, последовательности точек $\{y_k\}$ и номеров $\{n_k\}$, для которых $\left|\left\langle x_{n_k}, y_k \right\rangle\right| > k$, причем из построения ясно, что $\left|\left\langle x_{n_k}, y_{k+p} \right\rangle\right| > k$ для любого $p > 0$.

Так как $\|y_{k+1} - y_k\| < \dfrac{1}{2^k}$, то последовательность $\{y_k\}$ сходится сильно в себе, а следовательно, и к некоторому пределу $\bar{y} \in H$. Переходя в неравенстве $\left|\left\langle x_{n_k}, y_{k+p} \right\rangle\right| > k$ к пределу при $p \to \infty$, получим, что $\left|\left\langle x_{n_k}, \bar{y} \right\rangle\right| \geq k$, что противоречит предположенной ограниченности последовательности $\{\langle x_n, \bar{y} \rangle\}$.

Итак, числовое множество $\{\langle x_n, y \rangle\}$ будет ограниченным, когда y меняется в некотором шаре $\|y - y_0\| \leq r_0$, т.е. для элементов $y \in H$, удовлетворяющих этому условию, имеем

$$\left|\langle x_n, y \rangle\right| \leq k, \ n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$\|x_n\| = \left\langle x_n, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\rangle = \frac{1}{r_0}\left\{\left\langle x_n, y_0 + r_0 \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\rangle - \langle x_n, y_0 \rangle\right\} \leq \frac{1}{r_0}\left\{\left|\left\langle x_n, y_0 + r_0 \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\rangle\right| + \left|\langle x_n, y_0 \rangle\right|\right\}$$ Но

оба элемента , y_0 и $y_0 + r_0 \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, принадлежат шару $\|y - y_0\| \leq r_0$, и потому оба слагаемых в фигурных скобках не превосходят некоторого числа L. Поэтому

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{r_0} 2L = M,$$

и лемма доказана.

Следствие. *Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится, то она ограничена.*

Свойство 2. *График ММО A является сильно-слабо замкнутым в том смысле, что если $x_n \in D(A)$ и сходятся $x_n \to x$ сильно (т.е. по норме) к некоторому $x \in H$, а $y_n \in A(x_n)$ и слабо сходятся $y_n \Rightarrow y$ к некоторому $y \in H$, то $x \in D(A)$ и $y \in A(x)$.*

Доказательство. ▫ Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ – произвольная точка графика Γ_A ММО A. В силу монотонности A выполнено неравенство $\langle x_n - \bar{x}, y_n - \bar{y} \rangle \geq 0$. Введём для простоты дальнейших рассуждений следующие обозначения $a_n := x_n - \bar{x} \underset{n\to\infty}{\to} x - \bar{x} =: a$ и $b_n := y_n - \bar{y} \underset{n\to\infty}{\to} y - \bar{y} =: b$ и покажем, что $\langle a_n, b_n \rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle a, b \rangle$. Для этого рассмотрим $\left|\langle a_n, b_n \rangle - \langle a, b \rangle\right| =$

$=\left|\langle a_n, b_n\rangle-\langle a, b_n\rangle+\langle a, b_n\rangle-\langle a, b\rangle\right|\le\left|\langle a_n, b_n\rangle-\langle a, b_n\rangle\right|+\left|\langle a, b_n\rangle-\langle a, b\rangle\right|\underset{n\to\infty}{\to}0$, так как $\langle a, b_n\rangle\underset{n\to\infty}{\to}\langle a, b\rangle$ по определению слабой сходимости и условию $y_n\Rightarrow y$. А $\left|\langle a_n, b_n\rangle-\langle a, b_n\rangle\right|\le\|a_n-a\|\cdot\|b_n\|$, где $\|a_n-a\|\underset{n\to\infty}{\to}0$ в силу сходимости по норме a_n к a и $\|b_n\|$ ограничена по следствию из леммы о признаке ограниченности последовательности.

1.3. Свойства резольвенты и аппроксимации Иосиды ММО.

1.3.1. Свойство 1 (свойство резольвенты). *J_λ является всюду определённым на H однозначным, нерастягивающим оператором.*

Доказательство. Покажем сначала, что оператор λA является ММО вместе с A для $\lambda>0$. Монотонность λA очевидна, так как справедливость неравенств $\langle x-\bar{x}, y-\bar{y}\rangle\ge 0$ и $\langle x-\bar{x}, \lambda y-\lambda\bar{y}\rangle\ge 0$ эквивалентна. Для доказательства максимальности предположим, что для пары элементов x, y при произвольных $\bar{x}\in D(A), \bar{y}\in\lambda A(\bar{x})$ выполняется неравенство $\langle x-\bar{x}, y-\bar{y}\rangle\ge 0$. Найдётся $\bar{z}\in A(\bar{x})$ такой, что $\bar{y}=\lambda\bar{z}$, причём, когда $\bar{y}$ пробегает всё множество $\lambda A(\bar{x})$, $\bar{z}$ пробегает всё множество $A(\bar{x})$. Тогда верно $\left\langle x-\bar{x}, \frac{1}{\lambda}y-\bar{z}\right\rangle\ge 0$ для всех $\bar{x}\in D(A), \bar{z}\in A(\bar{x})$, откуда в силу максимальности A следует, что $x\in D(A), \frac{1}{\lambda}y\in A(x)$, а значит $y\in\lambda A(x)$. По теореме Минти максимальность λA эквивалентна тому, что $Jm(I+\lambda A)=H$, другими словами $J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$ определён всюду на H.

Теперь покажем, что резольвента J_λ не растягивает. Пусть $x, \bar{x}\in H$ произвольны и $y\in J_\lambda(x), \bar{y}\in J_\lambda(\bar{x})$ или $x\in y+\lambda A(y), \bar{x}\in\bar{y}+\lambda A(\bar{y})$. Найдутся $v\in A(y), \bar{v}\in A(\bar{y})$ такие, что $x=y+\lambda v,\ \bar{x}=\bar{y}+\lambda\bar{v}$. Оценим норму

$$\|x-\bar{x}\|^2=\|y+\lambda v-\bar{y}-\lambda\bar{v}\|^2=\langle y+\lambda v-\bar{y}-\lambda\bar{v}, y+\lambda v-\bar{y}-\lambda\bar{v}\rangle=$$
$$=\|y-\bar{y}\|^2+\lambda^2\|v-\bar{v}\|^2+2\lambda\langle y-\bar{y}, v-\bar{v}\rangle\ge\|y-\bar{y}\|^2+\lambda^2\|v-\bar{v}\|^2,$$

так как в силу монотонности A $\langle y-\bar{y}, v-\bar{v}\rangle\ge 0$. Итак $\|x-\bar{x}\|^2\ge\|y-\bar{y}\|^2+\lambda^2\|v-\bar{v}\|^2$. Откуда $\|y-\bar{y}\|\le\|x-\bar{x}\|$, что доказывает свойство A не растягивать, а следовательно и его однозначность.

1.3.2. Свойство 2: $\forall(x\in H)\left[A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))\right]$.

Доказательство. Пусть $x\in H$ произволен и $\lambda>0$. $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))\Leftrightarrow$

По определению резольвенты $J_\lambda(x)=(\mathrm{I}+\lambda A)^{-1}(x)$, это равносильно тому, что $x\in(\mathrm{I}+\lambda A)(J_\lambda(x))$, т.е. $x\in J_\lambda x+\lambda A(J_\lambda x)$ или $\frac{x-J_\lambda x}{\lambda}\in A(J_\lambda(x))$. Последнее означает, что $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$.

1.3.3. Свойство 3. *Любой монотонный всюду определенный на H однозначный непрерывный оператор является максимальным.*

Доказательство. Пусть $x,y\in H$ такие, что для всех $\bar{x}\in H$ верно $\left\langle x-\bar{x},y-A(\bar{x})\right\rangle\geq 0$.

Возьмем $\bar{x}=x-\alpha(z-x)$ для некоторого произвольного $z\in H$ и $\alpha\in(0,1)$. Имеем $\left\langle x-x+\alpha(z-x),y-A(x-\alpha(z-x))\right\rangle\geq 0$ или $\left\langle z-x,y-A(x-\alpha(z-x))\right\rangle\geq 0$. Переходя к пределу при $\alpha\to\infty$ в силу непрерывности A и скалярного произведения, получим $\left\langle z-x,y-A(x)\right\rangle\geq 0$ для любого $z\in H$, что возможно, если только $y-A(x)=0$ или $y=A(x)$. Действительно, взяв $z=x-y+A(x)$, получим $-\left\|y-A(x)\right\|\geq 0$.

Теорема. *Аппроксимация Иосиды A_λ является максимальным монотонным всюду определенным на H, удовлетворяющим условию Липшица с константой $\frac{1}{\lambda}$ оператором.*

Доказательство. $A_\lambda=\frac{\mathrm{I}-J_\lambda}{\lambda}$, поэтому вместе с I и J_λ является однозначным и определенным на всем H. Из неравенства $\left\|x-x\right\|^2\geq\left\|y-\bar{y}\right\|^2+\lambda\left\|\upsilon-\bar{\upsilon}\right\|^2$, полученного в 1.3.1 следует $\left\|\upsilon-\bar{\upsilon}\right\|\leq\frac{1}{\lambda}\left\|x-\bar{x}\right\|$, где $\upsilon=\frac{x-J_\lambda x}{\lambda}$, $\bar{\upsilon}=\frac{\bar{x}-J_\lambda\bar{x}}{\lambda}$, т.е. $\upsilon=A_\lambda(x)$, $\bar{\upsilon}=A_\lambda(\bar{x})$. Выполнение условия Липшица доказано и из него следует, что A_λ - непрерывный. Покажем, что A_λ - монотонный. Для произвольных x, $\bar{x}\in H$ имеем

$$\left\langle x-\bar{x},A_\lambda(x)-A_\lambda(\bar{x})\right\rangle=\left|\begin{array}{l}A_\lambda(x)=\dfrac{x-J_\lambda(x)}{\lambda}\\ x=J_\lambda(x)+\lambda A_\lambda(x)\end{array}\right|=$$

$$=\left\langle J_\lambda(x)+\lambda A_\lambda(x)-J_\lambda(\bar{x})-\lambda A_\lambda(\bar{x}),A_\lambda(x)-A_\lambda(\bar{x})\right\rangle=\lambda\left\|A_\lambda(x)-A_\lambda(\bar{x})\right\|^2+$$

$+\left\langle J_\lambda(x)-J_\lambda(\bar{x}),A_\lambda(x)-A_\lambda(\bar{x})\right\rangle\geq 0$, так как по свойству 1.3.2 $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$ и $A_\lambda(\bar{x})\in A(J_\lambda(\bar{x}))$ и в силу монотонности A.

Мы показали, что A_λ удовлетворяет условиям предыдущего утверждения, из которого следует максимальность A_λ.

1.3.4. Определение оператора $\overline{A}(x)$ и свойство 4.

Известно, что в любом непустом замкнутом множестве гильбертова пространства существует минимальный по норме элемент (покажите это). Определим $\overline{A}(x)=$ минимальному по норме элементу в множестве $A(x)$ ММО A.

Свойство 4. *Для любого $x \in D(A)$ ММО A справедливо неравенство*

$$\left\|A_\lambda(x)-\overline{A}(x)\right\|^2 \le \left\|\overline{A}(x)\right\|^2 - \left\|A_\lambda(x)\right\|^2 \text{ *или* }$$

$\left\|A_\lambda(x)-\overline{A}(x)\right\|^2 + \left\|A_\lambda(x)\right\|^2 \le \left\|\overline{A}(x)\right\|^2$ *откуда в частности следует, что* $\left\|A_\lambda(x)\right\| \le \left\|\overline{A}(x)\right\|$.

<u>Доказательство.</u> Распишем норму $\left\|A_\lambda(x)-\overline{A}(x)\right\|^2$ следующим образом:

$$\left\|A_\lambda(x)-\overline{A}(x)\right\|^2 = \left\langle A_\lambda(x)-\overline{A}(x), A_\lambda(x)-\overline{A}(x)\right\rangle = \left\|A_\lambda(x)\right\|^2 - 2\left\langle A_\lambda(x), \overline{A}(x)\right\rangle + \left\|\overline{A}(x)\right\|^2 =$$
$$= \left\|A_\lambda(x)\right\|^2 + \left\|\overline{A}(x)\right\|^2 - 2\left\langle A_\lambda(x), \overline{A}(x) - A_\lambda(x) + A_\lambda(x)\right\rangle = \left\|A_\lambda(x)\right\|^2 + \left\|\overline{A}(x)\right\|^2 - 2\left\|A_\lambda(x)\right\|^2 -$$
$$-2\left\langle A_\lambda(x), \overline{A}(x)-A_\lambda(x)\right\rangle = \left\|\overline{A}(x)\right\|^2 - \left\|A_\lambda(x)\right\|^2 - 2\left\langle A_\lambda(x), \overline{A}(x)-A_\lambda(x)\right\rangle.$$

Покажем, что $\left\langle A_\lambda(x), \overline{A}(x)-A_\lambda(x)\right\rangle \ge 0.$

Так как $A_\lambda(x)=\dfrac{x-J_\lambda(x)}{\lambda}$, то

$$\left\langle A_\lambda(x), \overline{A}(x)-A_\lambda(x)\right\rangle = \left\langle \frac{x-J_\lambda(x)}{\lambda}, \overline{A}(x)-A_\lambda(x)\right\rangle = \frac{1}{\lambda}\left\langle x-J_\lambda(x), \overline{A}(x)-A_\lambda(x)\right\rangle \ge 0$$

в силу монотонности A и того, что $\overline{A}(x)\in A(x)$ по определению $\overline{A}(x)$, а $A_\lambda(x)\in A(J_\lambda(x))$ по доказанному в 1.3.2.

1.3.5. Свойство 5: *Для любого $x \in D(A)$ $J_\lambda(x)$ сходится к x при $\lambda \to 0$.*

Рассмотрим норму разности $\left\|x-J_\lambda(x)\right\| = \lambda\cdot\left\|A_\lambda(x)\right\| \le \lambda\cdot\left\|\overline{A}(x)\right\| \underset{\lambda\to 0}{\to} 0$

1.3.6. Свойство 6: *Для любого $x \in D(A)$ $A_\lambda(x) \underset{\lambda\to 0}{\to} \overline{A}(x)$.*

<u>Доказательство.</u> 1) Сначала покажем справедливость вспомогательного утверждения о равносильности принадлежностей $y \in A_\lambda(x)$ и $y \in A(x-\lambda y)$ следующей цепочкой:

$$y \in A_\lambda(x) \overset{A_\lambda\text{-однозн.}}{\Leftrightarrow} y = A_\lambda x \overset{\text{по опр.}A_\lambda}{\Leftrightarrow} y = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda y = x - J_\lambda x \Leftrightarrow x - \lambda y = J_\lambda x \overset{\text{по опр.}J_\lambda}{\Leftrightarrow} x \in (I + \lambda A)(x - \lambda y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in x - \lambda y + \lambda A(x - \lambda y) \Leftrightarrow x - x + \lambda x \in \lambda A(x - \lambda y) \Leftrightarrow y \in A(x - \lambda y).$$

2)Теперь покажем, что $(A_\lambda)_\mu = (A_\mu)_\lambda = A_{\lambda+\mu}$ $(\lambda > 0, \mu > 0)$.

Действительно,

$$y = (A_\lambda)_\mu(x) \overset{\text{из 1)}}{\Leftrightarrow} y \in A_\lambda(x - \mu y) \overset{\text{из 1)}}{\Leftrightarrow} y \in A(x - \mu y - \lambda y)^{\text{из 1)}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y \in A_{\lambda+\mu}(x), \text{откуда } (\mathrm{A}_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu}.$$

Аналогично, поменяв λ и μ местами, показывается равенство $(A_\mu)_\lambda = A_{\lambda+\mu}$.

3) Докажем сходимость норм $\|A_\lambda(x)\|$ при $\lambda \to 0$.

Покажем сначала, что $\|A_\lambda(x)\|$ не убывает с убыванием λ к нулю.

Из свойства 4 мы знаем об ограниченности норм $\|A_\lambda(x)\| \le \|\overline{A}(x)\|$ для всех $\lambda > 0$.

Из монотонности и ограниченности будет следовать сходимость $\|A_\lambda(x)\|$ при $\lambda \to 0$.

Итак, $\|A_{\lambda+\mu}(x)\|^{\text{из 2)}} = \|(A_\lambda)_\mu(x)\|^{\text{посв-ву 4)}} \le \|\overline{A}_\lambda(x)\|^{\text{из однозн.}A_\lambda)} = \|A_\lambda(x)\|$.

4) Покажем, что семейство $A_\lambda(x)$ удовлетворяет Коши,

Оценим $\|A_\lambda(x) - A_{\lambda+\mu}(x)\|^2 \overset{\text{по св-ву 4}}{\le} \|A_\lambda(x)\|^2 - \|A_{\lambda+\mu}(x)\|^2$. Так как мы в 3) доказали, что $\|A_\lambda(x)\|$ сходится к некоторому пределу, то к этому же пределу сходится и $\|A_{\lambda+\mu}(x)\|$ при $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$. Поэтому их разность стремится к нулю при $\lambda, \mu \to 0$.

5) Из доказанного в 4) следует, что $A_\lambda(x)$ сходится в H к некоторому пределу, который обозначим через υ. Покажем, что $\upsilon = \overline{A}(x)$. В 1.3.5 мы доказали, что $J_\lambda(x) \underset{\lambda \to 0}{\to} x$, в 1.3.2 показали, что $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda(x))$, и только что показали $A_\lambda(x) \underset{\lambda \to 0}{\to} \upsilon$. Тогда по свойству слабо-сильной замкнутости графика ММО A(см. свойство 2 ММО) можем сделать вывод, что $\upsilon \in A(x)$. По свойству 4 (из 1.3.4) $\|A_\lambda(x)\| \le \|\overline{A}(x)\|$, которое сохраняется в пределе $\|\upsilon\| \le \|\overline{A}(x)\|$. Из единственности минимального по норме элемента в выпуклом замкнутом множестве следует, что $\upsilon = \overline{A}(x)$.

Итак, мы показали, что $A_\lambda(x) \underset{\lambda \to 0}{\to} \overline{A}(x)$.

1.4 Сведения о пространстве L_2

Рассмотрим пространство $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$ квадратично суммируемых функций, определенных на отрезке $\left[0,\mathrm{T}\right]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Для $x\in L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$ каждая координата x_κ является измеримой скалярной функцией на $\left[0,\mathrm{T}\right]$ и $\int\limits_0^{\mathrm{T}} x_\kappa\left(t\right)dt<\infty$.

В $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$ определено скалярное произведение $\left\langle x,y\right\rangle_{L_2}=\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left\langle x\left(t\right),y\left(t\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}dt$ и норма $\left\|x\right\|_{L_2}=\sqrt{\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left\|x\left(t\right)\right\|^2dt}$. $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathbb{R}^n\right)$ является гильбертовым пространством.

1.4.1 Пример дифференциального ММО в $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$

В качестве области определения $D\left(A^d\right)$ выберем множество абсолютно непрерывных функций из $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$, принимающих нулевое значение в нуле и таких, что их производная тоже принадлежит $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$.

Напомним определение абсолютно непрерывной функции: $x:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^n$ называется абсолютно непрерывной на промежутке $\mathrm{I}\subset D\left(x\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любой системы непересекающихся интервалов $\left\{\left(a_\kappa,b_\kappa\right)\right\}_{\kappa=1}^{\infty},\left(a_\kappa,b_\kappa\right)\subset\mathrm{I}$ с суммарной длиной меньше δ $\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}\left(b_\kappa-a_\kappa\right)<\delta\right)$ выполнено неравенство $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty}\left|x\left(b_\kappa\right)-x\left(a_\kappa\right)\right|<\varepsilon$.

Верно утверждение: абсолютно непрерывная на промежутке I функция почти всюду на нем имеет производную.

Задача: Установите связь между разными видами непрерывности функций и условием Липшица.

Определим $A^d\left(x\right)=\dot{x}$. Отметим, что A^d однозначный линейный оператор. Покажем, что A^d - ММО.

1) Проверим монотонность оператора A^d.

$$\left\langle A^d x, x\right\rangle_{L_2} = \left\langle \dot{x}, x\right\rangle_{L_2} = \int_0^{\mathrm{T}} \left\langle \dot{x}(t), x(t)\right\rangle_{\mathrm{R}^n} dt = \int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{\left\|x(t)\right\|_{\mathrm{R}^n}^2}{2} \right)' dt = \left(\frac{\left\|x(t)\right\|_{\mathrm{R}^n}^2}{2} \right)\Bigg|_0^{\mathrm{T}} = \frac{\left\|x(\mathrm{T})\right\|_{\mathrm{R}^n}^2}{2} -$$

$$-\frac{\left\|x(0)\right\|_{\mathrm{R}^n}^2}{2} = \frac{\left\|x(\mathrm{T})\right\|_{\mathrm{R}^n}^2}{2} \geq 0,$$ т.к. $x(0)=0$ для $x \in D\left(A^d\right)$.

2) Для доказательства максимальности A^d воспользуемся теоремой Минти и покажем, что $Jm\left(\mathrm{I}+A^d\right) = L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$. Последнее равенство означает, что для произвольного элемента $y \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ найд1ётся $x \in D\left(A^d\right)$, для которого выполнено равенство $x + A^d(x) = y$. Или то же самое можно записать в виде задачи Коши $\begin{cases} \dot{x} + x = y \\ x(0) = 0 \end{cases}$, решением которой является функция $x(t) = \int_0^t e^{s-t} y(s) ds$. Очевидно , $x \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$.

1.4.2 Пример ММО в $L_2\left(\left[0,\mathrm{T}\right],\mathrm{R}^n\right)$, построенного по ММО в R^n

Пусть задан ММО $A: \mathrm{R}^n \to 2^{\mathrm{R}^n}$, построим по нему оператор $\tilde{A}$ в $L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ следующим образом. Для произвольной функции $\varphi \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ положим, что $\psi \in \tilde{A}(\varphi)$ в том и только в том случае, когда $\psi \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ и при почти всех $t \in \left[0,T\right]$ выполнено включение $\psi(t) \in A\left(\varphi(t)\right)$.

Покажем, что $\tilde{A}$ является ММО. Сначала проверим монотонность. Пусть $\varphi, \bar{\varphi} \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ произвольны и $\psi \in \tilde{A}(\varphi), \bar{\psi} \in \tilde{A}(\bar{\varphi})$ тоже выбраны произвольно, тогда $\left\langle \varphi - \bar{\varphi}, \psi - \bar{\psi}\right\rangle_{L_2} = \int_0^T \left\langle \varphi(t) - \bar{\varphi}(t), \psi(t) - \bar{\psi}(t)\right\rangle_{\mathrm{R}_2} dt \geq 0$.

Для доказательства максимальности воспользуемся теоремой Минти. Для произвольной функции $\psi \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ определим функцию $\varphi \in L_2\left(\left[0,T\right], \mathrm{R}^n\right)$ равенством $\varphi(t) = J_1\left(\psi(t)\right)$. Во-первых, так как резольвента является нерастягивающим оператором, то определённая нами функция φ тоже является квадратично суммируемой вместе с функцией ψ. Кроме того

$$\varphi(t) = J_1\left(\psi(t)\right) \Leftrightarrow \psi(t) \underset{п.в.на\left[0,T\right]}{\in} \varphi(t) + A\left(\varphi(t)\right) \Leftrightarrow \psi(t) - \varphi(t) \underset{п.в.на\left[0,T\right]}{\in} A\left(\varphi(t)\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \psi - \varphi \in \tilde{A}(\varphi) \Leftrightarrow \psi \in \varphi + \tilde{A}(\varphi)$, то есть условие теоремы Минти выполнено, что доказывает максимальность $\tilde{A}$.

1.4.3 Замечание слабой сходимости в $L_2\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$ и связи ограниченности и сходимости по норме в $C\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$ и $L_2\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$.

Теорема (доказательство можно посмотреть в книге «Дополнительные главы математического анализа» В.И. Соболева). *В любом гильбертовом пространстве каждое замкнутое ограниченное множество является слабо компактным в том смысле, что из любой последовательности его элементов можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Напомним, что $C\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$ является пространством непрерывных на отрезке $\left[0,T\right]$ вектор-функций со значениями R^n, норма которых определяется равенством $\|x\|_C=\max\limits_{t\in[0,\,T]}\|x(t)\|_{\mathrm{R}^n}$. Очевидно, что $C\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)\subset L_2\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$ и $\|x\|_{L_2}\le\sqrt{T}\,\|x\|_C$, поэтому из ограниченности в $C\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$ следует ограниченность в $L_2\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$, а из сходимости в $C\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$ следует сходимость в $L_2\left(\left[0,T\right],\mathrm{R}^n\right)$.

1.5 Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши с ММО

Для ММО $A:\mathrm{R}^n\to 2^{\mathrm{R}^n}$ рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases}0\in\dot{x}+A(x), & (ДВ)\\ x(0)=x_0. & (НУ)\end{cases}$$

Определение. Решением (ДВ) на промежутке $J\subset\mathrm{R}$ называют абсолютно непрерывную на этом промежутке функцию, удовлетворяющую (ДВ) почти всюду.

Без ограничения общности будем считать, что $x_0=0$. Действительно, решению x задачи $\begin{cases}0\in\dot{x}+B(x)\\ x(0)=0\end{cases}$, где $B(x)=A(x-x_0)$ соответствует решение $y=(x+x_0)$ задачи $\begin{cases}\dot{y}+A(y)=0\\ y(0)=x_0\end{cases}$.

Задача. Покажите, что оператор B является ММО вместе с A.

1.5.1 Формулировка теоремы. Доказательство единственности.

Теорема. *Задача* $\begin{cases}0\in\dot{x}+A(x),\\ x(0)=0\end{cases}$ с ММО $A:\mathrm{R}^n\to 2^{\mathrm{R}^n}$ *имеет на* $[0,\infty)$ *единственное решение.*

Сначала докажем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. *Если* x *и* y *- два решения (ДВ), то* $\|x(t)-y(t)\|$ *не возрастает по* t.

<u>Доказательство.</u> Пусть x и y - два решения (ДВ) на некотором общем промежутке, тогда при почти всех t из этого промежутка $-\dot{x}(t)\in A(x(t))$ и $-\dot{y}(t)\in A(y(t))$, поэтому $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t)-y(t)\|^2=\langle x(t)-y(t),\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\rangle\le 0$. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Из утверждения 1 очевидным образом следует единственность решения задачи (ДВ), (НУ) и устойчивость каждого решения (ДВ) по Ляпунову.

Утверждение 2. *Если* x *и решение (ДВ), то* $\|\dot{x}(t)\|$.

<u>Доказательство.</u> Функция $y(t)=x(t+h)$ является решением (ДВ) вместе с $x(t)$. Поскольку $\|x(t)-y(t)\|$ не возрастает по t в силу утверждения 1, для тех t, в которых существует производная функции x имеем $\|\dot{x}(t)\|=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|x(t+h)-x(t)\|}{h}$ тоже не возрастает по t.

1.5.2 Доказательство существования решения задачи Коши

Доказательство существования решения задачи Коши проведём в несколько этапов.

1) *Аппроксимирующая задача.*

Рассмотрим задачу $\begin{cases}\dot{x}+A_\lambda(x)=0,\\ x(0)=0,\end{cases}$ удовлетворяющую на $[0,\infty)$ условиям классической теоремы Коши, согласно которой имеет на указанном промежутке единственное решение. Обозначим это решение через x_λ и оценим норму её производной. Учитывая, что A_λ является ММО, имеем по утверждению 2 $\|\dot{x}_\lambda(t)\|\le\|\dot{x}_\lambda(0)\|=\|A_\lambda(x_\lambda(0))\|=\|A_\lambda(0)\|\le\|\bar{A}(0)\|$. Итак мы показали, что

$$\|\dot{x}_\lambda(t)\|=\|A_\lambda(x_\lambda(t))\|\le\|\bar{A}(0)\| \qquad (*)$$

2) *Сходимость* x_λ *при* $\lambda\to 0$.

Покажем, что x_λ сходится равномерно на произвольном отрезке $[0,T]$ при $\lambda\to 0$. Для этого проверим, что семейство $\{x_\lambda\}$ удовлетворяет условию Коши, то есть $\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\|\underset{\lambda,\mu\to 0}{\to}0$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Рассмотрим призводную

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\right\|^2=\left\langle \dot{x}_\lambda(t)-\dot{x}_\mu(t),\, x_\lambda(t)-x_\mu(t)\right\rangle=$$

$$=-\left\langle A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)-A_\mu\left(x_\mu(t)\right),\, x_\lambda(t)-x_\mu(t)\right\rangle=\left|\begin{array}{l} A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)=\dfrac{x_\lambda(t)-J_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)}{\lambda}\Rightarrow \\ \Rightarrow x_\lambda(t)=J_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)+\lambda A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right), \\ \textit{аналогично}, \\ x_\mu(t)=J_\mu\left(x_\mu(t)\right)+\mu A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\end{array}\right|=$$

$$=-\left\langle A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)-A_\mu\left(x_\mu(t)\right),\, J_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)+\lambda A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)-J_\mu\left(x_\mu(t)\right)-\mu A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\rangle=$$

$$=-\left\langle A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)-A_\mu\left(x_\mu(t)\right),\, J_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)-J_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\rangle-\lambda\left\|A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)\right\|^2-\mu\left\|A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\|^2+$$

$$+(\lambda+\mu)\left\langle A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right),\, A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\rangle\le$$

$$\le(\lambda+\mu)\left\|A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)\right\|\cdot\left\|A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\|-\lambda\left\|A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)\right\|^2-\mu\left\|A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\|^2\le$$

$$\le\left|\begin{array}{l}\textit{используем очевидное} \\ \textit{неравенство} \\ ab=\left(\sqrt{2a}\right)\left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)\le a^2+\dfrac{b^2}{4}\end{array}\right|\le\lambda\left\|A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)\right\|^2+\frac{\lambda}{4}\left\|A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\|^2+\mu\left\|A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\|^2+$$

$$+\frac{\mu}{4}\left\|A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)\right\|^2-\lambda\left\|A_\lambda\left(x_\lambda(t)\right)\right\|^2-\mu\left\|A_\mu\left(x_\mu(t)\right)\right\|^2\overset{\text{в силу}(*)}{\le}\frac{\lambda+\mu}{4}\left\|\bar{A}(0)\right\|^2.$$

Итак, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\right\|^2\le\frac{\lambda+\mu}{4}\left\|\bar{A}(0)\right\|^2$ и из (НУ) $\left\|x_\lambda(0)-x_\mu(0)\right\|=0$. Проинтегрировав неравенство, получим $\frac{1}{2}\left\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\right\|^2\le\frac{\lambda+\mu}{4}\left\|\bar{A}(0)\right\|^2 t\le\frac{\lambda+\mu}{4}\left\|\bar{A}(0)\right\|^2 T$ или

$$\left\|x_\lambda(t)-x_\mu(t)\right\|\le\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{4}T}\left\|\bar{A}(0)\right\|\underset{\lambda,\mu\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Обозначим через $x(t)$ предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}x_\lambda(t)$, к которому x_λ сходится равномерно на любом отрезке $[0, T]$.

воспользуемся теоремой Минти и покажем, что $\operatorname{Im}(I + A^d) = \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Пусть $y \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$ произволен. Нужно показать существование $x \in D(A^d)$ такого, что $x + A^d x = y$. Это можно записать в виде задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} + x = y, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

решением которой является функция

$$x(t) = \int_0^t e^{s-t} y(s)\,ds.$$

Осталось показать, что эта функция из $D(A^d)$. $\dot{x}(t) = y(t) - \int_0^t e^{s-t} y(s)\,ds = y(t) - x(t)$, поэтому если $x \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$, то и $\dot{x} \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$. $e^{s-t} \le 1$, т.к. $s \le t$, поэтому $e^{s-t} y(s) \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$. Следовательно, $x \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$.

1.4.2. Пример ММО в $\mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$, порождённого ММО в A

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ и A - ММО. ~~Зададим~~ Определим для каждого $\varphi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$

$$\tilde{A}(\varphi) = \{\psi : \psi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n) \text{ и при п.в. } t \in [0,T] \; \psi(t) \in A\varphi(t)\}$$

Утверждение (о ММО $\tilde{A}$) A - ММО в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \tilde{A}$ - ММО в $\mathcal{L}_2$

Доказательство. 1) докажем монотонность $\tilde{A}$.

Пусть $\varphi, \bar{\varphi} \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \tilde{A}(\varphi), \bar{\psi} \in \tilde{A}(\bar{\varphi})$.

$$\langle \varphi - \bar{\varphi}, \psi - \bar{\psi} \rangle_{\mathcal{L}_2} = \int_0^T \langle \varphi(t) - \bar{\varphi}(t), \underset{A(\varphi(t))}{\underset{\cap}{\psi(t)}} - \underset{A(\bar{\varphi}(t))}{\underset{\cap}{\bar{\psi}(t)}} \rangle_{\mathbb{R}^n} dt \overset{A\text{-MM}}{\geq} 0$$

2). Максимальность $\tilde{A}$ покажем с помощью теоремы Минти, т.е. покажем, что $Im(I + \tilde{A}) = \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$. Это означает, что для любого $\psi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$ найдётся $\varphi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$ такое, что $\varphi + \tilde{A}\varphi \ni \psi$. Так как $\varphi \in \mathcal{L}_2$ и $\varphi + \tilde{A}\varphi \ni \psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{L}_2$ и $\psi - \varphi \in \tilde{A}\varphi \overset{\text{опр } \tilde{A}}{\Longleftrightarrow} \varphi \in \mathcal{L}_2$ и п.в. $t \in [0,T]$ $\psi(t) - \varphi(t) \in A\varphi(t) \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{L}_2$ и п.в. $t \in [0,T]$ $\psi(t) \in \varphi(t) + A\varphi(t) \Leftrightarrow$

$\overset{A\text{-MMO в }\mathbb{R}^n}{\Longleftrightarrow} \varphi \in \mathcal{L}_2$ и $\varphi(t) = J_1(\psi(t)) \overset{?}{\Longleftrightarrow} \varphi(t) = J_1(\psi(t))$.

Осталось показать, что для ~~$\psi(t)$~~ $\psi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$ опр. $\varphi(t) := J_1(\psi(t))$ таким образом $\varphi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n)$

J_1 - нерастягивающий и следовательно непрерывный оператор, поэтому измеримую ф-ию ψ переводит в измеримую ф-ию φ. При этом

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|J_1(\psi(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|J_1(\psi(t)) - J_1(0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|J_1(0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq \|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \underset{\|J_1(0)\|_{\mathbb{R}^n}}{\underset{\parallel}{a}} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{L}_2([0,T], \mathbb{R}^n).$$

1.5. Теорема о существовании и единственности решение задачи Коши с ММО

Будем рассматривать ММО $A: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ и задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} + \bar{A}(x) \ni 0, & (О.Д.В) \\ x(0) = x_0, & (Н.У.) \end{cases}$$

где $x_0 \in D(A)$, ~~определено~~ $\bar{A}$ определён как в 1.4.2.

Определение. Решением (ОДВ) будем называть абсолютно непрерывную на $[0, T]$ функцию, при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяющую (ОДВ). Здесь T может $= +\infty$.

Теорема: 1. Задача Коши, состоящая из (ОДВ), (НУ) имеет на $[0, +\infty)$ единственное решение; 2. если x и y – два решения (О.ДВ), то $\|x(t) - y(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ не возрастает по t; 3. если x – решение (ОДВ), то $\|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n}$ не возрастает по t.

Доказательство. 2. Пусть x и y – решения (ОДВ), тогда при п.в. $t \in [0, +\infty)$ $\dot{x}(t) \in -A(x(t))$ и $\dot{y}(t) \in -A(y(t))$. Поэтому $\langle \dot{x}(t) - \dot{y}(t), x(t) - y(t) \rangle \le 0$ или $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x(t) - y(t)\|^2_{\mathbb{R}^n} \le 0$ п.в. на $[0, +\infty)$. Следовательно,

$\|x(t)-y(t)\|_{R^n}$ не возрастает по t. И этого в частности следует единственность решения задачи Коши. Отметим, что каждое решение (ODB) устойчиво по Ляпунову.

3. Для тех $t\in[0,+\infty)$, при которых существует $\dot{x}(t)$ (п.в. на $[0,+\infty)$),

$$\|\dot{x}(t)\| = \lim_{h\to 0}\frac{\|x(t+h)-x(t)\|_{R^n}}{h}.$$

(ODB) – автономно, поэтому сдвиг по t $y(t)=x(t+h)$ является решением ODB вместе с x. В силу 2. $\|y(t)-x(t)\|$ невозрастает по t. Следовательно $\|\dot{x}(t)\|$ не возрастает по t.

Следующие пункты посвящены доказательству существования решения (ODB), (НУ).

1.5.1. Аппроксимирующие уравнение

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}+\bar{A}_\lambda x = 0, & (ODУ\lambda) \\ x(0)=x_0, & (НУ) \end{cases}$$

где $\bar{A}_\lambda$ – аппроксимация Иосиды ММО $\bar{A}$ с $\lambda>0$.