7. МАКСИМАЛЬНЫЕ МОНОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Мы по-прежнему считаем, что X — гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным.

Определение 1. Монотонное многозначное отображение A называется *максимальным*, если не существует другого монотонного многозначного отображения $\tilde{A}$, график которого строго содержит график A.

Мы начнем со следующего замечания: многозначное монотонное отображение A максимально тогда и только тогда, когда максимальным является отображение A^{-1}.

Далее, график любого монотонного многозначного отображения содержится в графике максимального монотонного многозначного отображения в силу леммы Цорна, поскольку объединение возрастающего семейства графиков монотонных многозначных отображений есть график монотонного многозначного отображения. Мы будем пользоваться следующим эквивалентным аналитическим определением максимальной монотонности.

Предложение 2. *Для того чтобы многозначное отображение A было максимальным монотонным, необходимо и достаточно, чтобы свойство*

$$\forall (y, v) \in \operatorname{graph}(A) \quad \langle u - v,\ x - y \rangle \geqslant 0 \tag{1}$$

было эквивалентно

$$u \in A(x). \tag{2}$$

На этом свойстве основан полезный и удобный способ определения принадлежности элемента u множеству $A(x)$.

Предложение 3. *Пусть A — максимальное монотонное отображение. Тогда:*

(a) *значения $A(x)$ замкнуты и выпуклы,*

(b) *график A слабо-сильно замкнут в том смысле, что если x_n сходится к x и $u_n \in A(x_n)$ слабо сходится к u, то $u \in A(x)$.*

Доказательство. (a) В силу предыдущего предложения, $A(x)$ есть пересечение замкнутых полупространств $\{u \in X \mid \langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0\}$, когда (y, v) пробегает график A. Следовательно, $A(x)$ замкнуто и выпукло.

(b) Пусть x_n сходится к x и $u_n \in A(x_n)$ слабо сходится к u. Выберем пару (y, v) в графике A. Из неравенства

$$\langle u_n - v,\ x_n - y \rangle \geqslant 0,$$

переходя к пределу, получаем

$$\langle u - v,\ x - y \rangle \geqslant 0.$$

Следовательно, $u \in A(x)$ по предложению 2. ■

Предложение 4. *Всякое конечно непрерывное монотонное однозначное отображение A из X в X является максимальным монотонным.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $u \in X$ таковы, что

$$\langle u - A(y),\ x - y \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } y \in X. \tag{3}$$

Для того чтобы доказать, что A — максимальное монотонное отображение, нам, в силу предложения 2, надо проверить, что $u = A(x)$. С этой целью положим $y = x - \lambda(z - x)$, где $\lambda \in (0, 1)$ и $z \in X$. Из (3) получаем

$$\langle u - A(x - \lambda(z - x)),\ z - x \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } z \in X. \tag{4}$$

Устремляя λ к нулю, в силу непрерывности A в конечной топологии получаем, что $\langle u - A(x), z - x \rangle \geqslant 0$ для всех $z \in X$, т. е. $u = A(x)$. ■

Следующая теорема является очень важной характеризацией максимальных монотонных отображений.

Теорема 5 (Минти). *Монотонное отображение A максимально тогда и только тогда, когда $1 + A$ сюръективно.*

Прежде чем доказывать теорему Минти, мы воспользуемся ею, чтобы дать примеры максимальных монотонных отображений.

Предложение 6. (a) *Пусть V — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция из гильбертова пространства X в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Тогда субдифференциальное отображение ∂V: $x (\in X) \mapsto \partial V(x) \subset X$ является максимальным монотонным.*

(b) *Пусть U — собственная функция из $X \times Y$ в $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, такая, что*

$$\begin{array}{ll} \text{(i) } \forall y \in Y & \text{функция } x \mapsto U(x, y) \text{ вогнута и полунепрерывна сверху,} \\ \text{(ii) } \forall x \in X & \text{функция } y \mapsto U(x, y) \text{ выпукла и полунепрерывна снизу.} \end{array} \tag{5}$$

Тогда многозначное отображение $(x, y) (\in X \times Y) \mapsto \partial_x (-U)(x, y) \times \partial_y U(x, y)$ является максимальным монотонным.

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 4.3.11, где устанавливается, что отображение $1 + \partial V$ сюръективно, а второе утверждение получается из теоремы 4.4.14, где доказывается, что с точностью до канонического изоморфизма график ∂U является графиком субдифференциала выпуклой функции, определенной на $X \times Y^*$ формулой

$$V(x, q) = \sup_{y \in Y} [\langle q, y \rangle - U(x, y)]. \ ■$$

Предложение 7. *Пусть A — монотонное (соответственно максимальное монотонное) многозначное отображение из X в X. Пусть $\mathscr{A}$ — многозначное отображение из $L^2(0, T; X)$ в $L^2(0, T; X)$, определенное формулой $(\mathscr{A}x)(t) := A(x(t))$ почти всюду.*

Тогда $\mathscr{A}$ — монотонное (соответственно максимальное монотонное) многозначное отображение.

Доказательство. Мы знаем, что $\mathscr{A}$ монотонно. Если A — максимальное монотонное отображение, то $J_1 = (1 + A)^{-1}$ является липшицевым отображением из X в X. Следовательно, если $y(\cdot)$ принадлежит $L^2(0, T; X)$, то функция $x(\cdot)$, заданная формулой

$$x(t) = J_1 y(t) \text{ п. в.},$$

очевидно, измерима. Кроме того,

$$\| x(t) - J_1(0) \| \leqslant \| y(t) \|,$$

и поэтому $x(\cdot)$ принадлежит $L^2(0, T; X)$ и, очевидно, является решением включения $y(\cdot) \in (1 + A)(x(\cdot))$. ■

Из следствия 6.15 вытекает, что сумма $A + \partial V$ монотонного конечно полунепрерывного сверху отображения со слабо компактными значениями и субдифференциала полунепрерывной снизу выпуклой функции является максимальным монотонным отображением, если $\operatorname{Dom} V \subset \operatorname{Dom} A$.

Доказательство теоремы Минти. (a) Пусть отображение $1 + A$ сюръективно. Пусть $x \in X$ и $u \in X$ удовлетворяют условию

$$(6) \qquad \forall (y, v) \in \operatorname{graph}(A) \quad \langle u - v,\ x - y \rangle \geqslant 0.$$

В силу предложения 2 нам нужно доказать, что $u \in A(x)$. Так как $1 + A$ сюръективно, то в (6) в качестве y можно взять решение y_0 включения $u + x \in y_0 + A(y_0)$. Пусть $v_0 \in A(y_0)$, так что $u + x = y_0 + v_0$. Тогда

$$\| x - y_0 \|^2 = \langle x - y_0,\ x - y_0 \rangle = -\langle u - v_0,\ x - y_0 \rangle \leqslant 0,$$

поскольку A монотонно. Следовательно, $x = y_0$ и, таким образом, $u = v_0 \in A(y_0) = A(x)$.

(b) Пусть A — максимальное монотонное отображение. Пусть $y \in X$. Нам нужно доказать, что существует x, такой, что $y \in x + A(x)$. Можно ограничиться случаем $y = 0$, так как в общем случае достаточно вместо A рассмотреть отображение $x \mapsto -y + A(x)$, которое также является максимальным монотонным. В силу предложения 2 мы должны доказать, что существует $\bar{x}$, удовлетворяющий условию

$$(7) \qquad \forall (y, v) \in \operatorname{graph}(A) \quad \langle -\bar{x} - v,\ \bar{x} - y \rangle \geqslant 0.$$

Введем функцию

$$\varphi(x;\ (y,\ v)) := \|x\|^2 + \langle x,\ v - y\rangle - \langle v,\ y\rangle.$$

Тогда требуется доказать, что существует $\bar{x}$, такой, что

$$(8)\qquad \forall (y,\ v) \in \operatorname{graph}(A) \quad \varphi(\bar{x};\ (y,\ v)) \leqslant 0.$$

Зафиксируем произвольную точку (y_0, v_0) графика A. Если решение (8) существует, то оно должно принадлежать множеству

$$(9)\qquad L := \{x \in \operatorname{Dom}(A) \mid \varphi(x;\ (y_0,\ v_0)) \leqslant 0\}.$$

Отображение $x \mapsto \varphi(x;\ (y_0, v_0))$ квадратично. Следовательно, множество $\{x \mid \varphi(x;\ (y_0, v_0)) \leqslant 0\}$ выпукло, замкнуто и ограничено, а поэтому слабо компактно. Пересечение его с $\operatorname{Dom} A$ уже может не быть слабым компактом, но $\overline{\operatorname{co}}(L)$ им является. Кроме того, отображения $x \mapsto \varphi(x;\ (y, v))$ выпуклы и непрерывны (в сильной топологии). Следовательно, их лебеговские множества выпуклы и замкнуты, а значит, и слабо замкнуты. Отсюда следует, что эти отображения слабо полунепрерывны снизу.

Мы воспользуемся теоремой 2.7. Пусть $\mathscr{S}$ — семейство всех конечных подмножеств графика A вида $K := \{(y_1, v_1),\ \ldots,\ (y_n, v_n)\}$. Тогда существует $x \in \overline{\operatorname{co}}(L)$, такой, что

$$(10)\qquad \sup_{(y,\ v) \in \operatorname{graph}(A)} \varphi(x;\ (y,\ v)) \leqslant \sup_{K \in \mathscr{S}} \inf_{x \in \overline{\operatorname{co}}(L)} \max_{i=1,\ \ldots,\ n} \varphi(x;\ (y_i,\ v_i)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{K \in \mathscr{S}} \inf_{x \in \operatorname{co}(y_1,\ \ldots,\ y_n)} \max_{i=1,\ \ldots,\ n} \varphi(x;\ (y_i,\ v_i)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{K \in \mathscr{S}} \inf_{x \in \operatorname{co}(y_1,\ \ldots,\ y_n)} \sup_{\mu \in \Sigma^n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(x;\ (y_j,\ v_j)) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{K \in \mathscr{S}} \inf_{\lambda \in \Sigma^n} \sup_{\mu \in \Sigma^n} \varphi_K(\lambda,\ \mu),$$

где

$$(11)\qquad \varphi_K(\lambda,\ \mu) := \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(\beta(\lambda);\ (y_j,\ v_j)), \quad \beta(\lambda) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i.$$

Эта функция непрерывна по λ и

$$\varphi_K(\mu,\ \mu) = \sum_{i,\ k=1}^{n} \mu^i \mu^k \langle \beta(\mu) + v_i,\ y_k - y_i \rangle =$$
$$= \sum_{i,\ k=1}^{n} \mu^i \mu^k \langle \beta(\mu),\ y_k - y_i \rangle + \sum_{i,\ k=1}^{n} \mu^i \mu^k \langle v_i,\ y_k - y_i \rangle.$$