1.1. Теперь расширим это определение для тех случаев, когда $V: X \to \mathbb{R}$ является не непрерывной, а полунепрерывной снизу.

В нарушении непрерывности существует, хотя сразу это и не очевидно, несколько преимуществ. Например, можно выбрать V в качестве функции метрики d.

Рассмотрим нечёткое подмножество $DV(u)$ в X определённое через

$$DV(u) = \lim_{t \to 0_+} t^{-1} \left[V\big(f(u,t)\big) - V(u)\right].$$

.

Исходя из этого можно доказать, что

$$D_\alpha V(u) = \left\{\lim_{t \to 0_+} \frac{V\big(ø_\alpha(u,t)\big) - V(u)}{t} : ø_\alpha \in \Phi_\alpha\right\},$$

т.е., что $D_\alpha V(u)$ – множество правых нижних производных Дини от V на всей α –кривой через u в начале координат.

Отмечаем, что если V является непрерывной, происходит объединение двух определений $DV(u)$.

Как для V- непрерывной, так и для V- полунепрерывной снизу, правая (нижняя) производная от V на всей α-кривой $ø_\alpha$ через u будет так обозначена через $V^{\cdot}(ø_\alpha, u)$, что

$$D_\alpha V\,(u) = \{V^{\cdot}(ø_\alpha, u): ø_\alpha \in \Phi_\alpha\}.$$

2. Принцип инвариантности

2.1. Наиболее важной проблемой является асимптотическое поведение нечётких систем, т.е. существование и расположение нечёткой области S в фазовом пространстве, при котором $f(u,t)$ достигает $t \to \infty$. Может существовать даже меньшее непустое нечёткое подмножество S так же обладающее этим качеством, и в этом случае расположить его будет хорошим решением. В этом отношении, расположение такого нечёткого множества S – лучшая асимптотическая информация, которую возможно получить. Обсуждая вопросы такого типа, понятие предельного множества нечёткой системы, которое обобщает идею предельного множества системы согласно Биркхофу [4], может быть достаточно полезным.

Определение 3.1. *Предельное множество* $\Omega(u)$ нечёткой системы является нечётким множеством, определённым через обстоятельство: $A \subset \Omega(u)$ если существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и такая последовательность $\{A_n\}$, $\mathrm{P}(X) \ni A_n \subset f(u, t_n)$, при которой $\mu_{A_n} \to \mu_A$ при $n \to \infty$. α −срез $\Omega_\alpha(u)$ подмножества $\Omega(u)$ называется α −*предельным множеством*.

α −предельное множество $\Omega_\alpha(u)$ нечеткой системы определяется через $z \in \Omega_\alpha(u)$ если существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и такая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in f_\alpha(u, t)$ при которой $z_n \to z$ при $n \to \infty$.

Более того, так как для всех $z_n \in f_\alpha(u, t_n)$ существует такая α −кривая $\varnothing_\alpha^n$, проходящая через u что $\varnothing_\alpha^n(u, t_n) = z_n$, определение для α −предельного множества можно выразить в виде: $z \in \Omega_\alpha(u)$ если существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и такая последовательность $\{\varnothing_\alpha^n(u, t_n)\}$, что $\varnothing_\alpha^n(u, t_n) \to z$. Однако, такое определение не даёт описания α −предельного множества нечёткой системы в условиях асимптотического поведения α −кривой.

Теорема 3.1. α −*предельное множество* $\Omega_\alpha(u)$ *нечёткой системы дано через обстоятельство:* $z \in \Omega_\alpha(u)$ *если существует последовательность* $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *и такая* α −*кривая* $\varnothing_\alpha$, *проходящая через точку* u, *что* $\varnothing_\alpha(u, t_n) \to z$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $z \in \Omega_\alpha(u)$, и пусть $\{t_n\}$ и $\{z_n\}$ будут соответствующими последовательностями. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует такое N что для всех $n > N$, $d(z_n, z) < \varepsilon/2$. Следовательно, для всех $n > N$,

$$d(z_n, z_{n+1}) < d(z_n, z) + d(z_{n+1}, z) = \varepsilon.$$

Следовательно, существует такая α −кривая $\varnothing_\alpha^1$, проходящая через z_N что для всех $n > N$, $\varnothing_\alpha^1(z_N, t_n - t_N) = z_n$. Таким образом, существует α −кривая $\varnothing_\alpha$ проходящая через u и такая последовательность $\{t_m\}$, $t_m \to \infty$ при $m \to \infty$, что $\varnothing_\alpha(u, t_m) \to z$.

Можно дать для этого алгебраического определения α −предельного множества эквивалентный геометрический вариант.

Теорема 3.2. *Пусть* $\Omega(u)$ *– предельное множество нечёткой системы. Тогда*

$$\Omega_\alpha(u) \;=\; \bigcap_{\tau\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Cl} \bigcup_{t\geq\tau} \; f_\alpha(u,t).$$

Доказательство. Обозначьте через Ω_α^1 и Ω_α^2 α $-$предельное множество данное через определение и по теореме, соответственно. Следует рассмотреть несколько случаев.

(i) Предположим, что $\Omega_\alpha^2(u) = \emptyset$, а $\Omega_\alpha^1(u) \neq \emptyset$. Тогда для всех $z \in \Omega_\alpha^1(u)$,

$$z \notin = \bigcap_{\tau\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Cl} \bigcup_{t\geq\tau} \; f_\alpha(u,t).$$

Таким образом, существует такая переменная $\not f$, что

$$z \notin \mathrm{Cl} \bigcup_{t\geq \not f} f_\alpha(u,t)\;,$$

т.е. такая, что

$$z \notin \bigcup_{t\geq \not f} \; f_\alpha(u,t).$$

Ввиду этого, для любой такой последовательности $\{t_n\}$ где $t_n > \not f$ и $t_n \;\to \infty$, при $n \to \infty$, невозможно найти такую последовательность $\{z_n\}$, что $z_n \in f_\alpha(u,t_n)$ и $z_n \to z$. Таким образом, $\Omega_\alpha^2(u) \neq \emptyset$, что является противоречием. Так, $\Omega_\alpha^2(u) = \emptyset$ предполагает, что $\Omega_\alpha^1(u) = \emptyset$.

(ii) Предположим, что $\Omega_\alpha^1(u) = \emptyset$ и $\Omega_\alpha^2(u) \neq \emptyset$. Тогда, существует такое отношение $z \in X$, что

$$z \in \bigcap_{\tau\in\mathbb{R}_+} \mathrm{Cl} \bigcup_{t\geq\tau} \; f_\alpha(u,t).$$

Таким образом, для всех целых k,

$$z \in \mathrm{Cl} \bigcup_{t\geq k} \; f_\alpha(u,t),$$

т.е. существует такая последовательность $\{t_n\}$, что $t_n \geq k$ и такая последовательность $\{z_n\}$, что $z_n \in f_\alpha(u, t_n)$ и $z_n \to z$. Если $k \to \infty$, $t_n \to \infty$, тогда $z \in \Omega_\alpha^1$, что является противоречием. Так, $\Omega_\alpha^1(u) = \emptyset$ предполагает что $\Omega_\alpha^2(\mathrm{u}) = \emptyset$.

(iii) Допустим, что $\Omega_\alpha^1(u)$ и $\Omega_\alpha^2(u)$ непустые. Рассмотрим $z \in \Omega_\alpha^1(u)$. Тогда существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и такая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in f_\alpha(u, t_n)$, что $z_n \to z$. Предположим, что $z \in \Omega_\alpha^2(u)$, т.е., что

$$z \notin \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Cl} \bigcup_{t \geq \tau} f_\alpha(u, t).$$

Тогда, существует такая $\not{f}$, что

$$z \notin \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Cl} \bigcup_{t \geq \not{f}} f_\alpha(u, t).$$

Продолжая как в (i) можно доказать, что предположение ведёт к противоречию. Т.о. $z \in \Omega_\alpha^2(u)$ и $\Omega_\alpha^1(u) \subset \Omega_\alpha^2(u)$.

С другой стороны, допустим, что $z \in \Omega_\alpha^2(u)$. Тогда, для всех целых k имеем

$$z \in \mathrm{Cl} \bigcup_{t \geq k} f_\alpha(u, t).$$

Следовательно, продолжая как в (ii), можно показать, что $z \in \Omega_\alpha^1(u)$. Т.о. $\Omega_\alpha^2(u) \subset \Omega_\alpha^1(u)$.

Объединение теорем 3.1 и 3.2 образует определение $\Omega_\alpha(u)$ относительно α −кривых:

$$\Omega_\alpha(u) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Cl} \bigcup_{t \geq \tau} \bigcup_{\emptyset_\alpha \in \Phi_\alpha} \emptyset_\alpha(u, t).$$

Теорема 3.3. *α −нечёткое множество $\Omega_\alpha(u)$ является закрытым.*

Доказательство. Допустим, существует такая последовательность $\{z_m\}$, $z_m \in \Omega_\alpha(u)$, что $d(z_m, z) < 1/m$ для некоторых $z \in X$. Для каждой z_m соответствует такая последовательность $\{t_{m,n}\}$, что $t_{m,n} \to \infty$ при $n \to \infty$, и такая последовательность $\{z_{m,n}\}$, что $z_{m,n} \in f_\alpha(u, t_{m,n})$ и $d(z_{m,n}, z_m) < 1/n$. Таким образом,

$$d(z_{m,n}, z) < d(z_{m,n}, z_n) + d(z_n, z) < 2/n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Из этого следует, что $z \in \Omega_\alpha(u)$.

2.2. Как упомянуто в предыдущем разделе, одним из главных аспектов в изучении асимптотического поведения нечёткой системы является вопрос инвариантности.

Определение 3.2. Подмножество M в X определено как α −инвариант нечёткой системы f если, для всех $u \in M$ и для всех $t \in \mathbb{R}_+$, $f_\alpha(u,t) \cap M \neq \emptyset$.

Пометка 3.1. (i) Если M_1 и M_2 являются α −инвариантами, тогда $M_1 \cup M_2$.

(ii) То, что M – α −инвариант, не обязательно означает, что для всех $u \in M$, $f_\alpha(u,t)$ не остаётся M для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Однако, M – α −инвариант тогда и только тогда, когда для всех $u \in X$ существует такая α −кривая $\emptyset_\alpha$, что $\emptyset_\alpha(u,t) \in M$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.4. α *−предельное множество* $\Omega_\alpha(u)$ *нечёткой системы является* α *−инвариантом.*

Доказательство. Пусть $z \in \Omega_\alpha(u)$ и пусть $\{t_n\}$ и $\{z_n\}$ – такие последовательности, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $z_n \in f_\alpha(u, t_n)$ и $z_n \to z$. Для всех n существует такая α −кривая $\emptyset_\alpha^n$, что $z_n = \emptyset_\alpha^n(u, t_n)$. Пусть $\emptyset_\alpha$ – отображение, обозначенное через

$$\emptyset_\alpha\ (\emptyset_\alpha^n(u,t),\cdot): t \longmapsto \emptyset_\alpha^n(u, t_n + t).$$

Тогда, $\emptyset_\alpha$ - α −кривая, проходящая через $\emptyset_\alpha^n(u, t_n)$. Однако,

$$\emptyset_\alpha(\emptyset_\alpha\ (u,t_n),0) = \emptyset_\alpha(u,t_n) \to z \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$,

$$\emptyset_\alpha\ (\emptyset_\alpha^n(u,t_n),\tau) = \emptyset_\alpha^n(u, t_n + \tau) \to \emptyset_\alpha(z,\tau) \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда следует, что существует последовательность $\{t'_n\}$, $t'_n = t_n + \tau \to \infty$ при $n \to \infty$, и такая последовательность $\{\emptyset_\alpha^n(u, t'_n)\}$, что $\emptyset_\alpha^n(u, t'_n) \to \emptyset_\alpha(z,\tau)$. Т.о. имеются $\emptyset_\alpha(z,\tau) \in \Omega_\alpha(u)$ и $f_\alpha(z,\tau) \cap \Omega_\alpha(u) \neq \emptyset$, для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим отображение δ: $\mathrm{P}(X) \times \mathrm{P}(X) \to \mathbb{R}_+$ через

$$\delta(A,B) = \sup\{d(u,B): u \in B\}.$$

отметим, что δ не является метрикой, так как $\delta(A, B) = 0$ тогда и только тогда, если $A \subset B$. Однако,

$$d(A, B) = \max[\delta(A, B), \delta(B, A)].$$

Отметим, что если подмножество $M \subset X$ такое, что $\delta[f_\alpha(u,t), M] \to 0$ при $t \to 0$, тогда $\Omega_\alpha(u) \subset \mathrm{Cl}\, M$. Таким образом, если $\Omega_\alpha(u)$ не пустое и $\delta[f_\alpha(u,t), \Omega_\alpha(u)] \to 0$ при $t \to \infty$, $\Omega_\alpha(u)$ является наименьшим множеством, обладающим этим качеством; и его можно будет расположить. К несчастью, не обязательно является истинной, что $\delta[f_\alpha(u,t), \Omega_\alpha(u)] \to 0$ при $t \to \infty$. На самом деле $\Omega_\alpha(u)$ может быть пустым. Это важное обстоятельство держится на одном дополнительном условии.

Определение 3.3. Дана начёткая система f, нечёткое множество

$$\gamma(u) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} f(u,t)$$

называется *оболочкой*. Её α −срез

$$\gamma_\alpha(u) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} f_\alpha(u,t)$$

называется α −*оболочкой*.

Теорема 3.5. *Пусть $\gamma(u)$ и $\Omega(u)$ – оболочка и предельное множество нечёткой системы. Если существует такая полунепрерывная снизу функция: $V: X \to \mathbb{R}_+$ что*

(i) $V(z) \to \infty$ при $||z|| \to \infty$,
(ii) $\sup D_\alpha V(z) \le 0$, для всех $z \in X - \Omega_\alpha(u)$,

тогда функция $\gamma_\alpha(u)$ - ограниченная.

Доказательство. Предположим, что $\gamma_\alpha(u)$ не является ограниченной. Тогда существует α −кривая $\varnothing_\alpha$ и такая последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что $||\varnothing_\alpha(u, t_n)|| \to \infty$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что если $u_n = \varnothing_\alpha(u, t_n)$, мы имеем $V(u_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, $V^{\cdot}(\varnothing_\alpha, u_n) > 0$ и $\sup D_\alpha V(u) > 0$, что является противоречием.

Теорема 3.6. *Если α −оболочка $\gamma_\alpha(u)$нечёткой системы f ограниченная, тогда α −предельное множество $\Omega_\alpha(u)$ – непустое и компактное. Более* *того,* $\delta[f_\alpha(u,t),\Omega_\alpha(u)] \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $\Omega_\alpha(u)$*– наименьшее множество, обладающее этим качеством.*

Доказательство. (i) Так как система X – полная, а $\gamma_\alpha(u)$ – ограниченная, то $\mathrm{Cl}\,\gamma_\alpha(u)$компактная. Так как $\Omega_\alpha(u)$ закрытая (Теорема 3.4) и располагается в $\mathrm{Cl}\,\gamma_\alpha(u)$, $\Omega_\alpha(u)$ – компактное.

(ii) Дана любая последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$,и любая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in f_\alpha(u,t_n)$, $\gamma_\alpha(u)$ ограниченная и $\{z_n\} \subset \gamma_\alpha(u)$ подразумевает существование такой подпоследовательности $\{t_m\} \subset \{t_n\}$, что $\{z_m\}$ является последовательностью Коши. Таким образом, из-за замкнутости X, $\{z_m\}$стремится к $z \in \Omega_\alpha(u)$. Следовательно, $\Omega_\alpha(u)$ – непустое.

(iii) предположим, что $\delta[f_\alpha(u,t),\Omega_\alpha(u)] \nrightarrow 0$ при $t \to \infty$. Тогда, существует $\varepsilon > 0$ и такая функция g: $\mathbb{R}_+ \to X$, что $g(t) \in f_\alpha(u,t)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$, и $d[g(t),\Omega_\alpha(u)] > \varepsilon$. Т.о. для всей последовательности $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$,, $d[g(t_n),\Omega_\alpha(u)] > \varepsilon$ при $n \to \infty$. Ограниченность $\gamma_\alpha(u)$ подразумевает существование такой подпоследовательности $\{t_m\}$ от $\{t_n\}$, что $\{g(t_m)\}$ – последовательность Коши при $t_m \to \infty$, где $m \to \infty$ и $d[g(t_m),\Omega_\alpha(u)] \to 0$ при $m \to \infty$. Это противоречит предположению.

3.3. Теорема 3.5 и 3.6 предоставляют эффективный способ исследования асимптотического поведения нечеткой системы. Они показывают, что существование вещественнозначной функции V удовлетворяющей условиям Теоремы 3.5. обеспечивает существование непустого компактного и $\alpha -$инвариантного подмножества в X, а именно, такого $\alpha -$предельного множества $\Omega_\alpha(u)$, что

$$\delta[f_\alpha(u,t),\Omega_\alpha(u)] \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Таким образом, нам требуется метод для расположения $\Omega_\alpha(u)$. Такой метод мы получаем посредством обобщения нечёткой системы, описанной в Принципе Инвариантности Лассаля [13].

Теорема 3.7 (Принцип Инвариантности). *Пусть f – нечёткая система, и пусть V – такая полунепрерывная снизу функция $X \to \mathbb{R}_+$, что*

(i) V *определяется через* $N \subset X$,

(ii) $V(u) > -\infty$ *для всех* $u \in \mathrm{Cl}\,N$,

(iii) $\sup D_\alpha V(u) \leq -W(u)$, *для всех* $u \in \mathrm{Cl}\,N$, *где* W *– полунепрерывная снизу функция* $\mathrm{Cl}\,N \to \mathbb{R}_+$.

Если $\Omega_\alpha(u) \subset \mathrm{Cl}\, N$, тогда $\Omega_\alpha(u) \subset M$, где M – наибольшее α −инвариантное подмножество $\{z \in \mathrm{Cl}\, N : W(z) = 0\}$. Если, к этому, $\gamma_\alpha(u)$ – ограниченная, тогда $\delta[f_\alpha(u,t), \mathbf{M}] \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Допустим, что $\gamma_\alpha(u) \subset \mathrm{Cl}\, N$, получаем $\Omega_\alpha(u) \subset \gamma_\alpha(u) \subset \mathrm{Cl}\, N$. Если $\gamma_\alpha(u)$ – не ограниченная, $\Omega_\alpha(u)$ может быть пустой, в случае чего теорема очевидно верна, но бессмысленна. Так, предположим, что $\Omega_\alpha(u) \neq \emptyset$.

Пусть $u \in \mathrm{Cl}\, N$. Так как $\sup D_\alpha V(u) \leq W(u)$, значит, для любой α −кривой $\o_\alpha$,

$$V^{\cdot}(u) = \liminf_{t \to 0_+} \frac{V\left(\o_\alpha(u,t)\right) - V(u)}{t} \leq -W(u)$$

.

Следовательно, V – функция невозрастающая на всей α −кривой.

Так как V – полунепрерывная снизу, а $\o_\alpha$ – непрерывная как стандартный результат по теории интегрирования, из чего следует, что $V(\o_\alpha(u,\cdot)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - дифференциальная функция почти всюду на компактном подмножестве $\mathbb{R}_+$ и, что

$$V(\o_\alpha(u,t)) - V(u) \leq \int_0^t V^{\cdot}\left(\o_\alpha(u,\tau)\right) d\tau \text{ почти всюду } t \in \mathbb{R}_+.$$

Следовательно, для любой последовательности $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$,для любой такой последовательности $\{\o_\alpha(u,t_n)\}$, что $\o_\alpha(u,t_n) \to z \in \Omega_\alpha$ и для всех случаев, где $t \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^t V^{\cdot}\left(\o_\alpha(u,\tau + t_n)\right) d\tau \geq V(\o_\alpha(u,t_n + t)) - V(\o_\alpha(u,t_n)).$$

Определено, что для всей α −кривой $\o_\alpha$ действительная

$$\zeta = \inf_{t \in \mathbb{R}_+} V(\o_\alpha(u,t))$$

приводит к $V(\o_\alpha(u,t)) \to \zeta$ при $t \to \infty$, где $V(\cdot) > -\infty$. Полунепрерывность снизу V подразумевает, что $\zeta > -\infty$. Уникальность предела ζ показывает, что

$$\int_0^t V^{\cdot}\left(\o_\alpha(u,\tau + t_n)\right) d\tau \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть $z \in \Omega_\alpha(u)$ и $\{\o_\alpha^1(u,t_n)\}$ – такая последовательность, что $\o_\alpha^1(u,t_n) \to z$ при $n \to \infty$. Тогда, для всех $\o_\alpha \in \Phi_\alpha$,

$$W(\varnothing_\alpha(z,\tau)) = W(\varnothing_\alpha(\lim_{n\to\infty} \varnothing_\alpha^1(u,t_n)),\tau)$$
.

Так, как W – полунепрерывная снизу функция, мы имеем

$$W(\varnothing_\alpha(z,\tau)) \le \liminf_{n\to\infty} W(\varnothing_\alpha(\varnothing_\alpha^1(u,t_n),\tau))$$
,

что значит

$$W(\varnothing_\alpha(z,\tau)) \le \liminf_{n\to\infty} W(\varnothing_\alpha^2(u,t_n),\tau))$$
,

где $\varnothing_\alpha^2(u,t_n + \tau)) = \varnothing_\alpha(\varnothing_\alpha^1(u,t_n),\tau))$ – α –кривая, проходящая через $\varnothing_\alpha^1(u,t_n)$.

Так как W – неотрицательная и полунепрерывная снизу, мы имеем, применив лемму Фату,

$$0 \le \int_0^t W\big(\varnothing_\alpha(u,\tau)\big)\,d\tau \le \int_0^t \liminf_{n\to\infty} W(\varnothing_\alpha^2(u,t_n + \tau))d\tau$$

$$\le \liminf_{n\to\infty} \int_0^t W(\varnothing_\alpha^2(u,t_n + \tau))d\tau$$

$$\le -\lim_{n\to\infty} \int_0^t V^{\cdot}(\varnothing_\alpha^2(u,t_n + \tau))d\tau = 0,$$

почти всюду $t \in \mathbb{R}_+$.

Отсюда следует, что $W\big(\varnothing_\alpha(u,\tau)\big) = 0$, почти всюду $\tau \in [0,t]$. Полунепрерывность снизу функции W предполагает, что $W(z) = 0$. Таким образом, для всех $z \in \Omega_\alpha(u)$, $W(z) = 0$, из чего следует, что

$$\Omega_\alpha(u) \subset \{z \in X: W(z) = 0\}.$$

Отметим, что, так как $V(\varnothing_\alpha(u,\tau)) \to \zeta$ при $t \to \infty$, если V – продолжительная, $V(z) = \zeta$ для всех $z \in \Omega_\alpha(u)$. Ввиду этого, если V – продолжительная, $\Omega_\alpha(u)$ включено в наибольшее α –инвариантное подмножество $\{z \in X: V^{\cdot}(z) = 0\}$.

4. Устойчивость

4.1. В этом разделе M обозначает закрытое подмножество X. Для начала вспомним, чтобы избежать потери смысла, определение положительной определённости вещественнозначной функции [19].

Определение 4.1. Функция $V: X \to \mathbb{R}$ дана как положительно определённая в отношении к закрытому подмножеству M в X тогда и только тогда, когда:

(i) V определена вблизи N подмножества M.

(ii) $V(u) = 0$ для всех $u \in M$.

(iii) Для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $V(u) < \varepsilon$ во всех случаях, когда $d(u, M) < \delta$.

(iv) Существует функция $\xi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ строго возрастающая, непрерывная и такая, что $\xi(0) = 0$ и $\xi(d(u, M)) < V(u)$, для всех $u \in N - M$.

Отметим, что, так как M – закрытая, $N - M$ никогда не является пустым. Отсюда, существует такая $\eta > 0$, что

$$M \subset B[M, \eta] \subset N.$$

Ввиду этого, если V– положительно определенная функция по отношению к M и, если $K(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, определяет множество

$$K(\alpha) = \{u \in N: V(u) \leq \alpha\},$$

Всегда возможно найти такую $\alpha = \inf\{V(u): u \in S(M, \eta)\}$, что $K(\alpha) \subset N$.

Определение 4.2. Подмножество M в X дано как *устойчивое* для нечёткой системы f, если для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M, \delta)$ предполагает, что $f(u, t) \subset B(M, \varepsilon)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Согласно этому определению, M – стабильная тогда и только тогда, когда $\gamma(u) \subset B(M, \varepsilon)$ всегда, когда $u \in B(M, \delta)$. Однако, как видно из предыдущего раздела, $\gamma_\alpha(u)$ может быть ограниченной для $\alpha \geq \acute{\alpha}$ и неограниченной для $\alpha < \acute{\alpha}$, для некоторых $\acute{\alpha}$. Отсюда, получается, что $\gamma_\alpha(u) \subset B(M, \varepsilon)$ для $\alpha \geq \acute{\alpha}$ и $\gamma_\alpha(u) \not\subset B(M, \varepsilon)$ для $\alpha < \acute{\alpha}$. Таким образом, это определение получается слишком большим и подразумевает устранения явного различия между устойчивостью и неустойчивостью, т.е. введения уровня устойчивости.

Определение 4.3. Подмножество M в X дано как α −*устойчивое* для нечёткой системы f, если для всех $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M, \delta)$ предполагает, что $f_\alpha(u,t) \subset B(M, \varepsilon)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 4.4. Подмножество M в X дано как α −*притягивающее* если существует такая окрестность N от M, что для всех $u \in N$, для всей последовательности $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и всей последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in f_\alpha(u, t_n)$, тогда, $z_n \to z_n \in M$ при $n \to \infty$.

Можно перефразировать эти два определения так:

(i) Подмножество M от X является α −устойчивым тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M, \varepsilon)$ предполагает, что $\mu_{f(u,t)}(z) \leq \alpha$ для всех $z \in B(M, \varepsilon)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Подмножество M в X дано как α −притягивающее если существует такая окрестность N от M, что для всех $u \in N$, для всей последовательности $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и всей последовательности $\{z_n\}$, такой, что $z_n \in \mu_{f(u,t_n)}(z_n) \geq \alpha$, тогда, $z_n \to z \in M$ при $n \to \infty$.

Определение 4.5. Подмножество M в X, которое является α −устойчивым и α −пртягивающим дано как α −*асимптотически устойчивое*.

Отметим, что если M – (асимптотически) устойчивое, тогда M – (асимптотически) β −устойчивое, для всех $\beta > \alpha$.

Критерий α −устойчивости для нечёткой системы можно установить через использование нашего понятия нечёткой производной вещественнозначной функции.

Теорема 4.1. *Пусть f – нечёткая система и пусть M – подмножество X. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V: M \to \mathbb{R}$, что*

(i) V *определяется вблизи* N от M,

(ii) V *– положительно определённая по отношению к* M,

(iii) $\sup D_\alpha V(u) \leq 0$, *для всех* $u \in N$,

тогда M является α −устойчивым.

Доказательство. Пусть $u \in N$. Так как $f_\alpha(u,t) \subset N$, $\sup D_\alpha V(u) \leq 0$. Следовательно, так как $f_\alpha(u,t) \subset N$, $V(z) \leq V(u)$ для всех $z \in f_\alpha(u,t)$.

Пусть $\acute{\eta} = \inf\{d(z, M): z \in \partial N\}$. Тогда, для всех таких η, что $0 < \eta < \acute{\eta}$, $K(\eta) \subset \mathrm{Cl}\, N$ и $K(\eta) \cap \partial N \neq \emptyset$. Пусть, $u \in K(\eta)$. Предположим, что существует такая t, что $f_\alpha(u, t) \not\subset K(\eta)$. Тогда, существует такая τ и $z \in f_\alpha(u, t)$, что $V(z) > \eta$, что является противоречием. Отсюда, для всех $u \in K(\eta)$, $f_\alpha(u, t) \subset K(\eta)$. Таким образом, для всех $u \in K(\eta)$ и для всех $z \in f_\alpha(u, t)$, $V(z) \leq V(u)$.

Так как V – положительно определённая, для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta > 0$, что $d(u, M) < \delta$ предполагает, что $V(u) < \varepsilon$. Тогда, для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta > 0$, что $d(u, M) < \delta$ предполагает $V(z) < \varepsilon$, для всех $z \in f_\alpha(u, t)$.

Более того, согласно Определению 4.1, для всех λ существует такая $\varepsilon > 0$, что $d(u, M) > \lambda$, что предполагает, что $V(u) > \varepsilon = \xi(\lambda)$. Отсюда следует, что $V(u) < \varepsilon$ предполагает, что $d(u, M) < \lambda$.

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta > 0$, что $d(u, M) < \delta$ предполагает, что $d(z, M) < \varepsilon$, для всех $z \in f_\alpha(u, t)$, т.е. такая, что $u \in B(M, \delta)$ предполагает, что $f_\alpha(u, t) \subset B(M, \varepsilon)$.

Теорема 4.2. *пусть f – нечёткая система и пусть M – подмножество X. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V: X \to \mathbb{R}$, что*

(i) *V определяется вблизи N* от M,

(ii) *V – положительно определённая по отношению к M,*

(iii) $\sup D_\alpha V(u) < 0$, *для всех $u \in N - M$*

тогда M является асимптотически α –устойчивым.

Доказательство. Достаточно доказать, что M – α –притягивающее. Если предположить, что M – не α –притягивающее подмножество, это предполагает, что существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$, при $n \to \infty$, и такая последовательность $\{z_n\}$, $z_n \in f_\alpha(u, t_n)$, что $z_n \to z \in M$. Тогда, $z \in \Omega_\alpha(u)$. Применяя Принцип Инвариантности, возможно доказать, что $\sup D_\alpha V(z) = 0$, что является противоречием.

Объединение Теоремы 4.2 и Теоремы 3.7 (Принцип Инвариантности), показывает, что если M является асимптотически α –устойчивым, тогда $u \in \Omega_\alpha(u) \subset M$.

Теоремы 4.1 и 4.2 предполагают наличие предварительных знаний об эволюционном уравнении и даже о α −кривых. Поскольку, так чаще всего и есть на самом деле, крайне необходимо иметь возможность переформулировать критерий α −устойчивости таким образом, что более широкие знания об эволюционном уравнении не потребуются.

Теорема 4.3. *Пусть нечёткая система будет определена через нечёткое отношение R и пусть M – подмножество X. Если существует такая* C^1 *−функция $V: X \to \mathbb{R}$, что*

(i) V *определяется вблизи N* от M,

(ii) V *– положительно определённая по отношению к M*,

(iii) $\sup\{\langle \nabla V, z\rangle : z \in R_\alpha(u)\} \leq 0$ (*и соотв.* < 0), *для всех $u \in N - M$*

тогда M является α −устойчивым (*и соотв. асимптотически α-устойчивым*).

Доказательство. Для всех $u \in N - M$, любая α −кривая $\varnothing_\alpha$, проходящая через u – решение дифференциального отношения

$$\acute{\varnothing}_\alpha(u,t) \in R_\alpha[\varnothing_\alpha(u,t)] \text{ почти всюду } t \in \mathbb{R}_+.$$

Отсюда, предполагается (iii), для всех $u \in N - M$,

$$\langle \nabla V, \acute{\varnothing}_\alpha(u,t)\,|_{t=0_+} \rangle < 0.$$

Пусть, $\Phi_\alpha^d(u)$ – множество всюду дифференцируемой α −кривой, проходящих через u. Тогда, для всех $\varnothing_\alpha \in \Phi_\alpha^d$ и для всех $u \in N - M$, существует такая непрерывная функция h, что $h(u) \in R_\alpha(u)$ и $\acute{\varnothing}_\alpha(u,t) = h(\varnothing_\alpha(u,t))$. Таким образом,

$$0 > \langle \nabla V, \acute{\varnothing}_\alpha(u,t)\,|_{t=0_+} \rangle = \left[\frac{d^+}{dt} V(\varnothing_\alpha(u,t))\right]_{t=0},$$

и таким образом, для всех $\varnothing_\alpha \in \Phi_\alpha^d$, $V^{\cdot}(\varnothing_\alpha, u) < 0$.

Пусть $\varnothing_\alpha$ - такая α −кривая, проходящая через u, что $\varnothing_\alpha \notin \Phi_\alpha^d$, т.е. такая, что $\varnothing_\alpha$ не является дифференциальной в $t \in \{\tau 1, \tau 2, \dots\}$. Тогда, существует такая $\varnothing_\alpha^i \in \Phi_\alpha^d$, $i = 1,2, \dots$, что

$$\varnothing_\alpha(u,t) = \varnothing_\alpha^i(u,t), \tau_{i-1} < t < \tau_1,$$

где, $\tau_0 = 0$. Отсюда следует, что для всех $\varnothing_\alpha \in \Phi_\alpha - \Phi_\alpha^d$,

$$\left[\frac{d^+}{dt}V(\emptyset_\alpha(\mathrm{u},\mathrm{t}))\right]_{t=0} < 0.$$

Таким образом, $\sup D_\alpha V(u) \le 0$, для всех $u \in N$. Применение Теоремы 4.1 и Теоремы 4.2 дополняет доказательство.

Критерий α −устойчивости, предложенный в Теореме 4.3 по существу основывается на взаимоотношении между ∇V и производной от V на всех α −кривых. Однако такой вывод требует непрерывной дифференциальности функции V. Как уже было упомянуто, данное условие является ограничивающим и поэтому предполагает более обобщённое видение этой теоремы.

Теорема 4.4. *Пусть нечёткая система будет определена через нечёткое отношение R и пусть M - подмножество X. Если существует такая полунепрерываня снизу функция $V: X \to \mathbb{R}$, что*

(i) *V определяется вблизи N* от *M,*

(ii) *V – положительно определённая по отношению к M,*

(iii) *существует такая непрерывная функция $W: X \to \mathbb{R}$,* что

$$sup \left\{ \liminf_{\substack{t\to 0_+ \\ \zeta \to z}} \frac{V(u+t\zeta) - V(u)}{t} : z \in R_\alpha(u) \right\} \le -W(u)$$

(соотв. $< -W(u)$), для всех $u \in N - M$,

тогда M – α −устойчивое (и соотв. асимптотически α −устойчивое).

Доказательство. Для всех $u \in N$, любая α −кривая $\emptyset_\alpha$ проходящая через u является решением дифференциального отношения

$$\acute{\emptyset}_\alpha(u,t) \in R_\alpha\,[\emptyset_\alpha(u,t)], \text{ почти всюду } t \in \mathbb{R}_+$$

Пусть Φ_α^d – множество всюду дифференцируемых α −кривых. Тогда, для всех $\emptyset_\alpha \in \Phi_\alpha^d$ и для всех $u \in N$ существует такая непрерывная функция h, что $h(u) \in R_\alpha(u)$ и $\acute{\emptyset}_\alpha = h(\emptyset_\alpha)$. Так, (iii) предполагает, что

$$\liminf_{\substack{t\to 0_+ \\ \zeta \to h(u)}} \frac{V(u+t\zeta) - V(u)}{t} \le -W(u)$$

,

для всех $u \in N$.

Таким образом, применение [29] даёт

$$V(\emptyset_\alpha(u,t)) - V(u) \le -\int_0^t W(\emptyset_\alpha(u,\tau))\,d\tau$$

и, соответственно,

$$\liminf_{t\to 0_+} \frac{V(\emptyset_\alpha(u,t)) - V(u)}{t} \le -W(u).$$

Так, для всех $\emptyset_\alpha \in \Phi_\alpha^d, V^{\cdot}(\emptyset_\alpha, u) \le -W(u)$.

Продолжая как в теореме 4.3, можно показать что, для всех $\emptyset_\alpha \in \Phi_\alpha, V^{\cdot}(\emptyset_\alpha, u) < -W(u)$. Следовательно, $\sup D_\alpha V(u) \le -W(u)$. Применение Теоремы 4.1 и Теоремы 4.2 дополняет доказательство.

4.2. Определение α −устойчивости данное в Определении 4.2 предполагает, что, чтобы нечёткая система быть α −устойчивой, все α −кривые должны иметь чётко одинаковое поведение (по крайней мере вблизи подмножества M от X). Метод, разработанный в Разделе 3 показывает, что так может и не быть на самом деле. Это предполагает менее ограничивающее определение понятии α −устойчивости, которое учитывает возможность иного поведения α −кривой.

Определение 4.6. Подмножество M от X дано как *частично α −устойчивое* для нечёткой системы f если, для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M,\delta)$, что предполагает $f_\alpha(u,t) \cap B(M,\varepsilon) \neq \emptyset$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$

Это определение можно перефразировать: подмножество M от X - частично α −устойчивое тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $u \in B(M,\delta)$, тогда существует такая $z \in B(M,\varepsilon)$, что $\mu_{f(u,t)}(z) > \alpha$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$

Отметим, что в отличие от α −устойчивости, если M частично α −устойчивое, тогда M – частично β−устойчивое для любого $\beta < \alpha$.

Теорема 4.5. *Пусть f – нечёткая система, и пусть M - подмножество X. Если существует такая полунепрерывная снизу функция $V: X \to \mathbb{R}$, что*

(i) *V определяется вблизи N* от *M*,

(ii) *V – положительно определённая по отношению к M*,

(iii) $\inf D_\alpha V(u) \leq 0$, *для всех* $u \in N$,

тогда M является частично α *−стабильным.*

Доказательство. Так как для всех $u \in N$, $\inf D_\alpha V(u) \leq 0$, продолжая как в Теореме 4.1, мы можем показать, что существует некая такая α −кривая $\emptyset_\alpha \in \Phi_\alpha$, что $V(\emptyset_\alpha (u,t)) \leq V(u)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Положительная определённость V предполагает, что для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta > 0$, что $V(u) < \varepsilon$ везде, где $d(u, M) < \delta$. Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$, существует такая δ, что $d(u, M) < \delta$ предполагает, что $V(\emptyset_\alpha (u,t)) < \varepsilon$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Более того, для всех λ существует такая $\varepsilon > 0$, что (см. Определение 4.1) $d(u, M) > \lambda$, предполагающая, что $V(u) > \varepsilon = \xi(\lambda)$, т.е. такая, что $d(u, M) < \lambda$ везде, где $V(u) < \varepsilon$.

Таким образом, для всех $\varepsilon > 0$, существует такая $\delta > 0$, что $d(u, M) < \delta$, что предполагает, что $d(\emptyset_\alpha (u,t), M) < \varepsilon$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.Отсюда следует, что $u \in B(M, \delta)$ предполагает, что $\emptyset_\alpha (u,t) \in B(M, \varepsilon)$, т.е. $f_\alpha(u,t) \cap B(M, \varepsilon) \neq \emptyset$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 4.3 даёт критерий α −устойчивости, который не требует особых знаний об эволюционных уравнениях нечёткой системы. Мы можем установить подобный результат для частичной α −устойчивости.

Теорема 4.6. *Пусть нечёткая система определена через нечёткое отношение R, и пусть M - подмножество X. Если существует такая* C^1 *−функция* $V: X \to \mathbb{R}$, *что*

(i) V *определяется вблизи* N *от* M,

(ii) V *– положительно определённая по отношению к* M,

(iii) $\inf \{\langle \nabla V, z \rangle : z \in R_\alpha(u)\} < 0$, *для всех* $u \in N$,

тогда M является частично α *−стабильным.*

Теорема 4.7. *Пусть нечёткая система определена через нечёткое отношение R, и пусть M - подмножество X. Если существует такая полунепрерывная снизу функция* $V: X \to \mathbb{R}$, *что*

(i) V *определяется вблизи* N *от* M,

(ii) V *– положительно определённая по отношению к* M,

(iii) *существует такая непрерывная функция* $W: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, *что*

$$\inf\left\{\liminf_{\substack{t\to 0_+\\ \zeta\to z}} \frac{V(u+t\zeta)-V(u)}{t} : z\in R_\alpha(u)\right\} < -W(u)$$

для всех $u \in N$, *тогда* M *является частично* α *−устойчивым.*

4.3. Понятие α −устойчивости и частичной α −устойчивости подмножества M от X имеют особый интерес, когда M приведено к точке равновесия.

Определение 4.7. Точка u_e в X дана как α *−точка равновесия* нечёткой системы f если $u_e \in f_\alpha(u_e, t)$, для всех $t \in \mathbb{R}_+$

Очевидно, что если f находится под воздействием нечёткого отношения R, u_e - α −точка равновесия тогда и только тогда, когда $0 \in R_\alpha(u_e)$.

Следующие теоремы содержат несколько описаний α −точки равновесия.

Теорема 4.8. *Точка* u_e *в* X - α *−точка равновесия нечёткой системы* f *тогда и только тогда, когда существует такая последовательность* $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *что* $u_e \in f_\alpha(u_e, t_n)$, *для всех* n.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для достаточности, если $t = kt_{n,}$ для некоторых целых k, из индуктивный предположений следует, что $f_\alpha(u_e, kt_n) = f_\alpha(f_\alpha(u_e,(k-1)\,t_n), t_n) \ni u_e$. Иначе, существует такое целое k_n, что $k_n t_n < t < (k_n+1)\,t_n$ и, следовательно, такое целое m, что $k_n t_n < k_m t_m < t < (k_m+1)\,t_m < (k_m+1)\,t_n$. Отсюда следует, что $k_n t_n \to t$ при $n \to \infty$. Отображение, что $f_\alpha(u,\cdot)$ непрерывное, $d[f_\alpha(u_e, k_n t_n)\, f_\alpha(u_e, t)] \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $u_e \in f_\alpha(u_e, t)$. Так как t – произвольное число, u_e- α −точка равновесия.

Теорема 4.9. *Если* u - *не* α *−точка равновесия нечёткой системы* f, *тогда существует окрестность* N_1 *точки* u *и такая* N_2 *в* $f_\alpha(u,t)$, *что* $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ *и* $f_\alpha(N_1, t) = N_2$.

Доказательство. Пусть t – заданное, но произвольное. Пусть A и B – два непересекающихся открытых подмножества X, содержащих u и $f_\alpha(u,t)$, соответственно. Тогда

$$f_\alpha(A,t) = \bigcup_{\emptyset_\alpha} \emptyset_\alpha(A,t)\,.$$

Отображение $z \longmapsto \varnothing_\alpha(z,t)$ является взаимно-одназначным и непрерывным, $\varnothing_\alpha(A,t)$ – открытое. Их этого следует, что $f_\alpha(A,t)$ – открытое. Сформулируем определение

$$N_2 = f_\alpha(A,t) \cap B.$$

Тогда, N_2 - открытая окрестность $f_\alpha(u,t)$, так как и $f_\alpha(A,t)$ и B содержат $f_\alpha(u,t)$и являются открытыми. Теперь дадим такое определение

$$N_1 = \{z \in X : \varnothing_\alpha(z,t) \in N_2 \ \forall \ \varnothing_\alpha \in \Phi_\alpha\}.$$

В этом случае

$$N_1 = \bigcap_{\varnothing_\alpha \in \Phi_\alpha} \{z \in X : \varnothing_\alpha(z,t) \in N_2\}$$

и, следовательно, $f_\alpha(N_1,t) = N_2$. отметим, что N_1не является обязательно открытой, но она содержит u. Так как, наконец, A включает N_1, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$.

Теорема 4.10. *Множество α −точек равновесия нечёткой системы f - закрытое.*

Доказательство. Если множество α −точек равновесия не является закрытым, тогда существует такая последовательность $\{u_n\}$ α −точек равновесия, что $u_n \to u$ и u не является α −точкой равновесия. Таким образом, применяя Теорему 4.9, существует две окрестности: N_1 точки u и N_2 - $f_\alpha(u,t)$, такие, что $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ и $f_\alpha(u\,,t) = N_2$. Так как $u_n \to u$, для достаточно большого n, $u_n \in N_1$. Тогда, имеем $f_\alpha(u_n,t) \subset N_2$ и, следовательно, $f_\alpha(u_n,t) \cap N_1 = \varnothing$. Таким образом, $u_n \notin f_\alpha(u_n,t)$, что является противоречием.

Теорема 4.11. *Точка u_e в X - α −точка равновесия нечёткой системы f тогда и только тогда, когда каждая окрестность u_e содержит траекторию α −кривой.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для достаточности, предположим, что u_e не является α −точкой равновесия. Тогда, существует две окрестности: N_1 точки u_e и N_2 - $f_\alpha(u_e,t)$, такие, что $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ и $f_\alpha(N_1,t) = N_2$. Так как N_1 содержит траекторию α −кривой $\varnothing_\alpha$ проходящую через u_e, тогда $\varnothing_\alpha(z,t) \in N_2$, для всех $z \in N_1$. Таким образом, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$, что является противоречием.

Теорема 4.12. *Пусть f – нечёткая система. Если существует такая α −кривая $\varnothing_\alpha$, что $d[\varnothing_\alpha(u,t),u_e] \to 0$ при $t \to \infty$, тогда u_e- α −точка равновесия.*

Доказательство. Пусть N – окрестность u_e. Так как имеется $d[\varnothing_\alpha\ (u,t),u_e]\ \to\ 0$ при $t \to \infty$, существует такая $\not{f}$, что $\varnothing_\alpha\ (u,t) \subset N$ для всех $t\ \geq\ \not{f}$. Пусть, $z\ =\ \varnothing_\alpha(u,\not{f})$. Тогда, N содержит траекторию $\varnothing_\alpha(z,t)$. Применение Теоремы 4.11 дополняет доказательство.

Критерий (частичной) α −устойчивости α −точки равновесия может быть получен простейшим образом.

Теорема 4.13. *Пусть u_e - α −точка равновесия нечёткой системы, определённая чрез нечёткое отношение R. Пусть V и W – функции, определённые как в Теореме 4.4. Если для всех u в окрестности u_e*

$$\sup\left\{\liminf_{\substack{t\to 0_+\\ \zeta\to z}}\ \frac{V(u+t\zeta)-\ V(u)}{t} : z\in R_\alpha(u)\right\}\ \leq\ -W(u)$$

(*соотв.* $<\ -W(u)$), *тогда u_e– α −устойчива* (*соотв. асимптотически α −устойчива*).

Теорема 4.14. *Пусть u_e- α −точка равновесия нечёткой системы, определённая чрез нечёткое отношение R. Пусть V и W – функции, определённые как в Теореме 4.7. Если для всех u в окрестности u_e*

$$\inf\left\{\liminf_{\substack{t\to 0_+\\ \zeta\to z}}\ \frac{V(u+t\zeta)-\ V(u)}{t} : z\in R_\alpha(u)\right\}\ <\ -W(u)$$

тогда u_e – частично α −устойчива.