

1. Доказать, что в непустом замкнутом множестве  $A \subset \mathbf{R}^n$  всегда есть точка  $a$ , ближайшая к данной точке  $b$ , т.е. такая, что  $\rho(b, a) = \rho(b, A)$ .
2. Доказать, что  $\rho(b, A) = \rho(b, \bar{A})$  и  $\rho(A, B) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$ .
3. Доказать, что функция  $\varphi(x) = \rho(x, A)$  непрерывна на  $\mathbf{R}^n$  и выполнено неравенство треугольника  $\|\rho(x, A) - \rho(y, A)\| \leq \rho(x, y)$ .
4. Доказать равенство  $\rho(x, M^\varepsilon) = \rho(x, M) - \varepsilon$ .
5. Доказать, что если множество  $A$  выпукло, то  $A^\varepsilon$  — тоже.
6. Доказать лемму 10 параграфа 5 о том, что если множество  $M$  ограничено, замкнуто, а функция  $f(x)$  непрерывна, то множество  $f(M)$  замкнуто. Если же  $M$  выпукло, а  $f(x) = Ax + b$ , то множество  $f(x) = AM + b$  выпукло.
7. Привести пример с замкнутым неограниченным  $M$ , для которого первое утверждение леммы из задачи 6 не верно.
8. Или показать, что  $\text{Parat } x(t)$  является выпуклым множеством, или привести пример, в котором  $\text{Parat } x(t)$  не является выпуклым.
9. Найти  $\text{Cont } x(0)$  и  $\text{Parat } x(0)$  функции  $x(t) = t \sin \frac{1}{t}$ .