Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман,
А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Предисловие

Ноша добродетели нелегка.

Закон добродетели

Если вы однажды что-то сделали правильно, то кто-нибудь обязательно попросит вас сделать это еще раз.

Следствие закона добродетели

Настоящее издание является расширенным, дополненным и исправленным вариантом книги *"Введение в теорию многозначных отображений"* ([21]), вышедшей в 1986 г. в издательстве Воронежского университета и давно уже ставшей библиографической редкостью. За истекшие неполные двадцать лет многозначный анализ и теория дифференциальных включений продолжали развиваться очень бурно, находя новые приложения и новых сторонников. Весьма эффективные применения идей и методов теории многозначных отображений и дифференциальных включений в некоторых разделах современной математики, таких как теория оптимизации, негладкий и выпуклый анализ, теория дифференциальных уравнений, теория игр, математическая экономика и других, стали общепризнанными. Несмотря на появившиеся за это время несколько монографий и огромное число других публикаций, идея небольшой книги, дающей достаточно элементарное введение в предмет как для "прикладников", так и для "теоретиков", начиная со студентов старших курсов и аспирантов, стала, пожалуй, еще более актуальной, и мы признательны профессорам П.П. Забрейко и В.А. Мильману и издательству "Едиториал УРСС"за предложение подготовить это издание.

Основному изложению предпослана нулевая глава, где приводятся необходимые определения и сведения, в основном, из топологии.

Первая глава книги начинается примерами, показывающими насколько естественно возникает идея многозначного отображения в различных областях математики. Далее описываются типы непрерывности многозначных отображений, различные операции над многозначными отображениями и их свойства. Затем определяется понятие непрерывного однозначного сечения многозначного отображения и доказывается классическая теорема Майкла о существовании непрерывного сечения. Вводится понятие однозначной аппроксимации многозначного отображения и доказывается соответствующая теорема существования. В отличие от первого издания, мы приводим аналоги данных утверждений для многозначных отображений с разложимыми значениями. Завершает первую главу описание свойств измеримых многозначных функций. Мы приводим здесь доказательство известной по своим приложениям в теории управления леммы Филиппова и подробно изучаем свойства многозначного оператора суперпозиции. Здесь новыми элементами является рассмотрение многозначных функций со значениями в банаховом пространстве, изложение свойств многозначного интеграла и свойств мультиоператора суперпозиции, порожденного полунепрерывным снизу мультиотображением.

Вторая глава посвящена теории неподвижных точек многозначных отображений. Мы приводим теорему Надлера – многозначный аналог классического принципа Банаха неподвижной точки сжимающего отображения. По сравнению с первым изданием, мы добавили здесь рассмотрение сжимающих многозначных отображений, зависящих от параметра, топологической структуры множества неподвижных точек, приложений к уравнениям с сюръективными линейными операторами. Далее излагается теория относительной топологической степени компактных многозначных векторных полей в банаховом пространстве и даются ее приложения к доказательству ряда принципов неподвижной точки, включая известную теорему Какутани–Боненбласта–Карлина. Глава дополнена описанием топологических свойств множества неподвижных точек, теоремой Браудера–Фана о неподвижной точке и ее приложением к решению вариационных неравенств.

Вся третья глава отведена изучению дифференциальных включений и их приложений в теории управления. Этот раздел подвергся наиболее существенной переработке. Мы начинаем с ряда примеров, иллюстрирующих появление дифференциальных включений при описании управляемых систем, дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, в математической экономике. Затем, на базе развитых в предыдущей главе топологических методов, мы приводим теоремы существования решения задачи Коши для дифференциальных включений различных типов, дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и описываем свойства множеств решений. Систематическое применение теория топологической степени находит также и при исследовании периодической задачи для дифференциальных включений. Здесь выделим в качестве новых элементов рассмотрение случая полулинейного дифференциального включения и развитие метода направляющей функции. Далее мы изучаем вопрос об эквивалентности управляемых систем и дифференциальных включений и рассматриваем приложения к решению некоторых задач оптимизации.

Последняя глава посвящена приложениям в теории динамических систем, теории игр и математической экономике. Описываются основные свойства обобщенных динамических систем и их траекторий. Этот раздел дополнен вопросом о точках покоя динамических систем, который решается с помощью техники теории неподвижных точек. Последний раздел, отведенный приложениям к теоремам о равновесии в теории игр и математической экономике, является новым. В нем приводится общая теорема о точках равновесия в антагонистической игре и ее следствие для матричных игр. Рассматривается также вопрос о существовании равновесия в модели конкурентной экономики типа Эрроу–Дебре–Маккензи.

Книгу завершают комментарии по библиографии и дополнения, также написанные специально для настоящего издания. Необходимость литературных указаний особо подчеркивается тем обстоятельством, что по сравнению с первоначальным вариантом книги библиография существенно расширена – с 33 до 334 наименований. Дополнения кратко обрисовывают направления развития ряда разделов, описанных в настоящей работе.

Данная версия книги подготовлена Б.Д. Гельманом и В.В. Обуховским. Эта работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00100.

Содержание

Глава 0. Предварительные сведения.

Глава содержит предварительные сведения в основном из общей топологии, необходимые для дальнейшего чтения (подробнее см. [1], [69], [78], [79], [119], [130]). Читатель, знакомый с данными вопросами, может сразу перейти к Главе 1.

Мы будем использовать стандартные символы $x \in X (x \notin X)$, $X \subset Y, \complement X = Y \setminus X$ для обозначения *принадлежности (не принадлежности) элемента множеству, включения множества в множество* (отметим, что знак $\subset$ не исключает равенства множеств X и Y) и *дополнения к множеству* X в Y. Если $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - некоторое семейство множеств, то символами $\bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ и $\bigcap\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ обозначаются *объединение* и , соответственно, *пересечение* множеств из этого семейства. *Декартово произведение* множеств X и Y обозначается $X \times Y$. Знаком $\{x | M(x)\}$ обозначается множество всех объектов x, обладающих свойством $M(x)$.

Пусть X - некоторое множество; под *топологией* в X понимается некоторая система τ подмножеств из X, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varnothing$ и X принадлежит τ;

2) если U и V принадлежат τ, то и их пересечение $U \cap V$ принадлежит τ;

3) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ.

Элементы системы τ называются *открытыми множествами*, а пара (X, τ) называется *топологическим пространством.* Если топология τ подразумевается, то говорят просто о топологическом пространстве X.

Если τ - топология на пространстве X, то *базой* этой топологии называется такая подсистема $\tau_1 \subset \tau$, что каждый элемент из τ является объединением некоторого подмножества элементов из τ_1.

Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ обычно наделяется топологией, в которой база состоит из интервалов (a, b).

Пусть (X, τ) - топологическое пространство; *окрестностью точки* $x \in X$ называется любое подмножество X, в котором лежит открытое множество, содержащее x. Аналогично *окрестностью множества* $A \subset X$ называется любое подмножество X, в котором лежит открытое подмножество, содержащее A. Подмножество в X тогда и только тогда открыто, когда оно есть окрестность каждой своей точки.

Внутренность множества A, обозначаемая как $intA$ - это наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Точки $intA$ называются *внутренними точками* A.

Подмножество A топологического пространства X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто. *Замыкание* $\overline{A}$ множества A - это наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное подмножество A, которое всюду плотно, т.е. $\overline{A} = X$.

Если $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ - топологические пространства, то топология в декартовом произведении $X_1 \times X_2$ порождается следующим образом: ее базой служат множества вида $\{U_\alpha \times U_\beta\}$, где $U_\alpha \in \tau_1, U_\beta \in \tau_2$. Множество $X_1 \times X_2$, наделенное такой топологией, называется *топологическим произведением* X_1 и X_2.

Топологическое пространство X называется:

а) T_1-*пространством*, если каждое одноточечное множество из X замкнуто;

б) *хаусдорфовым*, если любые две различные точки из X имеют непересекающиеся окрестности;

в) *регулярным*, если любая точка и любое замкнутое множество, не содержащее ее, обладают непересекающимися окрестностями;

г) *нормальным*, если любые два его непересекающихся замкнутых подмножества обладают непересекающимися окрестностями.

Пусть X, Y - топологические пространства; отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если множество $f^{-1}(V) = \{x | x \in X, f(x) \in V\}$ открыто в X для любого открытого $V \subset Y$.

Топологическое пространство X на каждом из своих подмножеств $A \subset X$ определяет топологию, открытыми множествами которой являются пересечения A с открытыми подмножествами из X. Такая топология называется *относительной* или *индуцированной*. Подмножество A с этой топологией называется *подпространством* (пространства X). Если A - подпространство X, то отображение $i : A \to X$, определенное по правилу $i(x) = x$, называется *отображением вложения*. Легко видеть, что отображение вложения непрерывно.

Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых (в относительной топологии) множеств.

Открытое связное подмножество топологического пространства называется *областью.*

Пусть X - топологическое пространство; функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху (снизу) в точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(x)$ точки x, что $f(x') < f(x) + \varepsilon$ для всех $x' \in U(x)$ (соответственно $f(x') > f(x) - \varepsilon$ для всех $x \in U(x)$). Если функция f полунепрерывна сверху (или снизу) в каждой точке пространства X, то она называется *полунепрерывной сверху (или снизу).* Нетрудно видеть, что функция f полунепрерывна сверху (снизу), если для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{x|x \in X, f(x) < r\}$ (соответственно $\{x|x \in X, f(x) > r\}$) открыто. При рассмотрении полунепрерывных функций часто удобно считать, что они действуют в расширенную числовую прямую $\bar{\mathbb{R}}$, полученную из $\mathbb{R}$ добавлением $+\infty$ и $-\infty$.

Множество $\mathcal{A}$ с заданным на нем бинарным отношением $\leq$ называется *направленным*, если выполнены условия: 1)$\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \gamma$ влечет $\alpha \leq \gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$; 2) $\alpha \leq \alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}$; 3) для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ найдется $\gamma \in \mathcal{A}$ такое, что $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$. Отображение направленного множества $\mathcal{A}$ в топологическое пространство X, т.е. соответствие, по которому каждому $\alpha \in \mathcal{A}$ сопоставляется некоторое $x_\alpha \in X$, называется *направленностью* или *обобщенной последовательностью.*

Направленность $\{x_\alpha\} \subset X$ *сходится к точке* $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует такой индекс α_0, что $x_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geq \alpha_0$. Точка x принадлежит замыканию подмножества M пространства X в том и только том случае, когда в M есть направленность, сходящаяся к x.

Покрытием множества X называется система $\sum$ подмножеств X, объединение которых совпадает с X. Покрытие $\sum'$ называется *подпокрытием* покрытия $\sum$, если каждое из множеств системы $\sum'$ принадлежит $\sum$. Если каждое покрытие топологического пространства X открытыми множествами содержит конечное подпокрытие, то пространство X называется *компактным.*

Компактность пространства X равносильна каждому из следующих условий:
1) каждая направленность в X содержит сходящуюся поднаправленность;
2) всякая центрированная система замкнутых подмножеств X (т.е. такая, что каждая непустая конечная ее подсистема имеет непустое пересечение) имеет непустое пересечение.

Множество X называется *относительно компактным*, если его замыкание $\overline{X}$ компактно. Компактное метрическое пространство называют *компактом*. Полунепрерывная сверху функция $f : X \to \mathbb{R}$, заданная на компактном пространстве X, достигает своего максимума, а полунепрерывная снизу - минимума.

В силу теоремы Тихонова топологическое произведение $X_1 \times X_2$ компактных пространств X_1 и X_2 компактно.

Подмножество евклидова n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено.

Покрытие $\sum$ топологического пространства X называется *локально конечным*, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью U, пересекающейся лишь с конечным числом множеств из $\sum$. Топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если оно хаусдорфово и в каждое его открытое покрытие $\triangle$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\sum$ (т.е. каждое из множеств $\sum$ содержится в одном из множеств $\triangle$).

Для всякого локально конечного открытого покрытия $\Xi = \{U_j\}_{j \in J}$ паракомпактного пространства X существует подчиненное ему *разбиение единицы*, т.е. семейство $\{p_j\}_{j \in J}$ непрерывных на X неотрицательных функций, таких что: 1) для любого $j \in J$ выполнено: $\{x | x \in X, p_j(x) \neq 0\} \subset U_j$; 2) для любой точки $x \in X : \sum\limits_{j \in J} p_j(x) = 1$, причем ввиду локальной конечности покрытия Ξ лишь конечное число слагаемых в данной сумме отлично от нуля.

Пусть (X, ϱ) - метрическое пространство, $x \in X, r > 0$. Множество

$$B_r(x) = \{y | y \in X, \varrho(x, y) < r\}$$

называется *открытым шаром* радиуса r с центром в x, а множество

$$\overline{B}_r(x) = \{y | y \in X, \varrho(x, y) \leq r\}$$

называется *замкнутым шаром* радиуса r с центром в x. Множество всех открытых шаров является базой некоторой топологии на X, которую называют *метрической топологией*.

Две метрики на одном и том же множестве X называются *эквивалентными*, если они порождают на X одну и ту же метрическую топологию. Каждое пространство с метрической топологией нормально, а поскольку оно является и T_1 - пространством, то оно регулярно и хаусдорфово. Согласно теореме Стоуна всякое метрическое пространство паракомпактно.

Расстояние от точки x до множества $A \subset X$ есть

$$\varrho(x, A) = \inf\{\varrho(x, y) | y \in A\}.$$

Если $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$, то множество

$$U_\varepsilon(A) = \{y | y \in X, \varrho(y, A) < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью множества A.

Если (X, ϱ) - метрическое пространство, A - замкнутое подмножество X, B - компактное подмножество X и $A \cap B = \varnothing$, то из леммы Лебега о покрытии (см. [69]) вытекает, что

$$\varrho(A, B) = \inf\{\varrho(a, b) | a \in A, b \in B\} > 0,$$

поэтому существует такое $\epsilon > 0$, что

$$U_\epsilon(B) \cap A = \varnothing.$$

Пусть T - компактное пространство; (X, ϱ) - метрическое пространство; на множестве $C(T, X)$ всех непрерывных отображений из T в X можно задать метрику $\tilde{\varrho}$ формулой

$$\tilde{\varrho}(f_0, f_1) = \sup_{t \in T} \varrho(f_0(t), f_1(t)).$$

Топология τ_c, порождаемая на $C(T, X)$ этой метрикой, называется *топологией равномерной сходимости.* Семейство функций $H \subset C(T, X)$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $t \in T$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(t)$ точки t, что $\varrho(f(t'), f(t)) < \varepsilon$ для всех $t' \in U(t)$ и $f \in H$. Семейство H называется *равностепенно непрерывным*, если оно равностепенно непрерывно в каждой точке $t \in T$. Согласно теореме Арцела–Асколи (см., например, [69]), *если множество $H \subset C(T, X)$ равностепенно непрерывно и множество $H(t) = \{f(t) | f \in H\}$ относительно компактно в X при каждом $t \in T$, то H относительно компактно в пространстве* $(C(T, X), \tau_c)$.

Если X - линейное пространство и $A, B \subset X$, то

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}.$$

Множество всевозможных конечных линейных комбинаций

$$\sum_i \lambda_i x_i,$$

где $\lambda_i \geq 0, \sum\limits_i \lambda_i = 1$ и каждое x_i принадлежит A, является наименьшим выпуклым множеством, содержащим A, и называется *выпуклой оболочкой* множества A и обозначается coA.

Пусть задано линейное пространство X, в котором определена топология τ. Пара (X, τ) называется *линейным топологическим пространством*, если топология τ согласована с линейными операциями в X следующим образом: 1) операция сложения непрерывна, т.е. непрерывно отображение

$$X \times X \to X, (x, y) \to x + y;$$

2) операция умножения на число непрерывна, т.е. непрерывно отображение

$$X \times \mathbb{R} \to X, (x, \lambda) \to \lambda x.$$

Если X - линейное топологическое пространство и $A \subset X$, то замыкание множества coA обозначается $\overline{co}A$ и называется *выпуклым замыканием* A. Это наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее A.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке (теорема Брауэра). *Если M – выпуклое замкнутое подмножество конечномерного линейного топологического пространства, то любое непрерывное отображение $f : M \to M$ такое, что множество $f(M)$ ограничено, имеет хотя бы одну неподвижную точку $x \in M$, $x = f(x)$.*

Мы будем предполагать известными понятия *нормированного* и *банахова пространства,* а также основные сведения о их свойствах (см., например, [55], [71], [107], [128] и др.)

Выделим все же следующие используемые нами в дальнейшем факты.

Пусть A – замкнутое подмножество метрического пространства X, а Y – нормированное пространство. Тогда всякое непрерывное отображение $f : A \to Y$ имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f} : X \to Y$, причем такое, что $\widetilde{f}(X) \subset cof(A)$ (теорема Титце–Дугунджи). Немедленным следствием этой теоремы является следующее утверждение. *Если Y - нормированное пространство и A - его непустое замкнутое выпуклое подмножество, то существует такое непрерывное отображение (ретракция) $r : Y \to A$, что $r(y) = y$ для всех $y \in A$.*

Если X - банахово пространство и $A \subset X$ компактно, то выпуклое замыкание $\overline{co}A$ также компактно (теорема Мазура).

Если A - компактное подмножество нормированного пространства X, то *нормой* множества A мы будем называть величину

$$\|A\| = \max_{a \in A} \|y\|.$$

Мы будем полагать также, что читатель знаком с понятиями *меры Лебега* на числовой прямой $\mathbb{R}$, *измеримой* и *суммируемой по Бохнеру* функции со значениями в банаховом пространстве, а также с основными свойствами пространства суммируемых функций L^1(см., например, [55], [63], [86], [107], [128]).

Знаком $:=$ будет обозначаться равенство по определению.

Конец доказательства отмечается знаком $\blacksquare$.

Глава 1. Многозначные отображения

1.1. Некоторые примеры

Пусть X, Y - произвольные множества; *многозначное отображение* F множества X в множество Y - это такое соответствие, которое сопоставляет каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое *значением* (или *образом*) x. Обозначив $P(Y)$ множество всех непустых подмножеств Y, запишем это соответствие в виде $F : X \to P(Y)$. Ясно, что класс многозначных отображений включает в себя и обычные, однозначные отображения; для них каждое значение состоит из единственной точки.

В дальнейшем многозначные отображения мы будем именовать *мультиотображениями.* Условимся также всюду ниже мультиотображения обозначать прописными буквами, а однозначные отображения - строчными.

1.1.1. Определение. Для любого множества $A \subset X$ множество $F(A) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} F(a)$ называется *образом множества A при мультиотображении F.*

1.1.2. Определение. Пусть $F : X \to P(Y)$ - мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$,

$$\Gamma_F = \{(x, y)|\ (x, y) \in X \times Y,\ y \in F(x)\}$$

называется *графиком* мультиотображения F.

Отметим, что понятие мультиотображения не является чем-то уж слишком необычным: ведь с отображениями такого рода приходится сталкиваться уже в элементарной математике при попытке обратить такие, например, функции как $y = x^2$ или $y = \sin x$ и др. Впрочем, здесь неоднозначность обратной функции воспринимается, скорее, как обстоятельство негативное - именно с "ликвидацией" многозначности связано введение такого понятия, как арифметическое значение квадратного корня, или функции типа arcsin, arccos и т.д.

Приведем несколько примеров мультиотображений.

1.1.3. Пример. Обозначим pr_1, pr_2 проекции из $X \times Y$ на X и Y соответственно. Любое подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ такое, что

$pr_1(\Gamma) = X$, определяет мультиотображение $F : X \to P(Y)$ по формуле $F(x) = pr_2 \circ pr_1^{-1}(x)$. Ясно, что график Γ_F мультиотображения F совпадает с Γ.

1.1.4. Пример. Определим мультиотображения отрезка $[0, 1]$ в себя, положив

(а) $F_1(x) = [x, 1]$;

(б) $F_2(x) = \begin{cases} [0, 1/2], & x \neq 1/2, \\ [0,1], & x = 1/2; \end{cases}$

(в) $F_3(x) = \begin{cases} [0,1], & x \neq 1/2, \\ [0,\ 1/2], & x = 1/2; \end{cases}$

Графики этих мультиотображений приведены на рис. 1 - 3.

Обозначим $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

1.1.5. Пример. Определим мультиотображение $F : [0, \frac{\pi}{2}) \to P(\overline{\mathbb{R}}_+)$, положив $F(x) = [tgx, +\infty)$ (рис. 4).

1.1.6. Пример. Определим мультиотображение $F : [0, \pi] \to P(\mathbb{R})$,

$$F(x) = \begin{cases} [tgx, 1 + tgx], x \neq \frac{\pi}{2}, \\ \{0\}, \qquad\qquad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

График мультиотображения F приведен на рис. 5.

1.1.7. Пример. Определим мультиотображение $F : \overline{\mathbb{R}}_+ \to P([0, 1])$, положив $F(x) = [e^{-x}, 1]$ (рис.6):

1.1.8. Пример. Определим мультиотображение $F : \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^2)$, положив для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x) = \{(y_1, y_2) | (y_1, y_2) \in R^2, (y_1, y_2) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2),$$

$$z_1 > 0, z_2 > 0, z_1 \cdot z_2 = 1\}.$$

Мультиотображение F (но не график Γ_F!) показано на рис.7.

1.1.9. Пример. Обратные функции. Если X, Y - произвольные множества, а $f : X \to Y$ - сюръективное отображение, то мультиотображение $F : Y \to P(X)$, $F(y) = \{x | x \in X, f(x) = y\}$ является обратным к f.

1.1.10. Пример. Неявные функции. Пусть X, Y, Z - произвольные множества, отображения $f : X \times Y \to Z$ и $g : X \to Z$ таковы, что для любого $x \in X$ найдется $y \in Y$ такое, что $f(x, y) = g(x)$. Неявная функция, задаваемая f и g, в общем случае есть мультиотображение $F : X \to P(Y)$, $F(x) = \{y | y \in Y, f(x, y) = g(x)\}$

1.1.11. Пример. Пусть X, Y - прозвольные множества, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ - некоторая функция. Пусть для некоторого числа $r \in \mathbb{R}$ по любому $x \in X$ найдется $y \in Y$ такое, что $f(x, y) \leq r$. Тогда определено мультиотображение $F_r : X \to P(Y)$, $F_r(x) = \{y | y \in Y, f(x, y) \leq r\}$.

1.1.12. Пример. Обобщенные динамические системы.

а)**Многозначный оператор сдвига.**

Пусть множество X является пространством состояний некоторой динамической системы такой, что находясь в начальный момент в состоянии $x \in X$, система может двигаться в дальнейшем по различным траекториям. Например, такая ситуация имеет место, если поведение системы описывается дифференциальным уравнением, не удовлетворяющим условию единственности решения или или содержащим управляющий параметр. Обобщенная динамическая система будет определена, если задать ее *множества достижимости*

$Q(x,t) \subset X$, т.е. множества всех состояний, в которые она может перейти за время $t \geq 0$ из состояния $x \in X$. Получающееся таким образом мультиотображение $Q : X \times \mathbb{R}_+ \to P(X)$ называется *мультиоператором сдвига.* Отметим, что обычно мультиоператор сдвига удовлетворяет естественным условиям:
1) $Q(x,0) = \{x\}$;
2) $Q(x, t_1 + t_2) = Q(Q(x,t_1), t_2)$ для всех $x \in X; t_1, t_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$

б)**Многозначные поля направлений.**

Рассмотрим важный способ задания обобщенной динамической системы. Пусть пространством состояний системы служит $\mathbb{R}^n$. Пусть для каждого состояния $x \in R^n$ задано множество скоростей $F(x) \subset R^n$, с которыми система может покинуть x. Определенное таким образом мультиотображение $F : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ называется *многозначным полем (мультиполем) направлений.* Кривая $x : \Delta \to \mathbb{R}^n$, где $\Delta \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, называется *интегральной кривой* мультиполя F, если в каждой (или почти каждой) точке $t \in \Delta$ она имеет производную $x'(t)$ и $x'(t) \in F(x(t))$ для всех (или почти всех) $t \in \Delta$. Такое соотношение называют *дифференциальным включением*, а интегральную кривую x - его *решением.*

Решение $x : \Delta \to \mathbb{R}^n$ естественно рассматривать как линию в $\mathbb{R}^n$ - это *траектория* данного мультиполя скоростей. Совокупность $Q(x,t)$ конечных точек таких траекторий временно́й длины t с началом в данной точке x (предполагается, что для любых $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ существует по крайне мере одна такая траектория) определяет мультиоператор сдвига Q, соответствующий полю F.

Пусть, например, рассматриваемая динамическая система без единственности является управляемой системой и описывается дифференциальным уравнением $x'(t) = f(x,u)$, где $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - некоторое отображение, $u \in \mathbb{R}^m$ - параметр управления. Пусть мультиотображение $U : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^m)$ задает переменное, вообще говоря, множество допустимых (для данного состояния $x \in \mathbb{R}^n$) управлений $U(x)$. Тогда мультиполе направлений рассматриваемой системы определяется формулой $F(x) = f(x, U(x))$.

Мы будем подробнее изучать дифференциальные включения, управляемые системы и обобщенные динамические системы в Главах 3 и 4.

1.1.13. Пример. Метрическая проекция.

Следующее понятие естественно появляется в теории наилучших приближений. Пусть (X, ϱ) - метрическое пространство; $C \subset X$ - непустое замкнутое подмножество. Для $x \in X$, множество $\mathbb{P}_C(x)$ точек $y \in M$ таких, что $\varrho(x, y) = \varrho(x, M)$ называется *метрической проекцией* x на C. Множество $\mathbb{P}_C(x)$ может быть пусто. Если $\mathbb{P}_C(x) \neq \varnothing$ для каждого $x \in X$, множество C называется *проксиминальным.* В этом случае возникает мультиотображение $\mathbb{P}_C : X \to P(C)$, которое также называют метрической проекцией. Примерами проксиминальных множеств являются компактные множества, а также замкнутые выпуклые подмножества рефлексивных банаховых пространств. Метрические проекции играют важную роль в различных задачах теории аппроксимаций, геометрии банаховых пространств, теории неподвижных точек, вариационных задачах. Исследованию их свойств посвящена обширная литература (см. [51], [317] и др.).

1.1.14. Пример. Приближенные вычисления.

Пусть в каждой точке x некоторого множества X измерены ее некоторые числовые характеристики $y(x) = (y_1(x), ..., y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$. В силу неоднородности множества X абсолютные погрешности $\delta_i(1 \leq i \leq n)$ измерений зависят от $x : \delta_i = \delta_i(x)$. Мультиотбражение $F : X \to P(\mathbb{R}^n)$,

$$F(x) = \{y | y \in \mathbb{R}^n, |y_i - y_i(x)| \leq \delta_i(x), 1 \leq i \leq n\},$$

называется *полем значений характеристик.*

1.1.15. Пример. Теория игр.

а)**Антагонистические игры.**

Отметим, что первые примеры и приложения понятия многозначного отображения были связаны с нарождавшейся в тридцатые–сороковые годы XX века новой наукой – *теорией игр* . Эта дисциплина изучает математические модели конфликтных ситуаций, т.е. таких коллизий, в которых интересы участников не совпадают или даже прямо противоположны. Такого рода ситуации постоянно возникают в экономике, военном деле, их простой и наглядной моделью могут служить шахматы, карточные игры и т.д., откуда и происходит название дисциплины. Основы теории игр заложили такие выдающиеся ученые как Дж. фон Нейман (J. von Neumann), Дж. Нэш (J.Nash), О. Моргенштерн (O.Morgenstern) и другие.

С математической точки зрения поведение участников конфликтной ситуации (будем называть их *игроками*) определяется выбором *стратегии* – точки из некоторого множества допустимых стратегий. Выбор стратегии полностью определяет поведение игрока в любой позиции, которая может возникнуть в процессе игры. Нетрудно видеть, что даже в самых простых играх имеется громадное число возможных стратегий и их анализ является непростым делом. Каковы могут быть основные принципы такого анализа?

Для простоты рассмотрим случай игры с двумя участниками. Пусть всевозможные статегии первого игрока образуют некоторое множество X, а второго – множество Y. *Игровым правилом* для первого игрока может быть названо сопоставление каждой стратегии $y \in Y$ второго игрока множества стратегий $A(y) \subset X$, из которых в этом случае будет выбирать свою стратегию первый. Аналогично, игровое правило для второго игрока представляет собой множество наилучших ответов $B(x) \subset Y$ на применяемую первым стратегию $x \in X$. Следовательно, игровое правило для первого игрока может быть интерпретировано как некоторое мультиотображение $A : Y \to P(X)$, а для второго - как мультиотображение $B : X \to P(Y)$.

Простым примером построения игровых правил может служить ситуация *антагонистической игры,* когда на произведении пространств стратегий задана *игровая функция* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, так что при выборе первым игроком некоторой стратегии $x \in X$, а вторым – $y \in Y$ выигрыш первого игрока равен $f(x, y)$, второго прямо противоположен и равен $-f(x, y)$. Следовательно, первый игрок стремится максимизировать значение $f(x, y)$, а второй - минимизировать его. В этом случае игровые правила могут быть заданы явным образом:

$$A(x) = \{y | y \in Y, \;\; f(x, y) = \min_{\tilde{y} \in Y} f(x, \tilde{y})\}$$

$$B(y) = \{x | x \in X, \;\; f(x, y) = \max_{x \in X} f(\tilde{x}, y)\}$$

при условии, конечно, что указанные максимумы и минимумы существуют.

Таким образом, при выработке стратегий каждый из игроков должен анализировать мультиотображения $A : X \to P(Y)$ и $B : Y \to P(X)$. Рассмотрение вопроса о том, как эти мультиотображения могут быть использованы для отыскания оптимальных стратегий каждым из игроков, мы отложим до четвертой главы.

(б) **Игры с полной информацией.**

Язык многозначных отображений позволяет также моделировать часто встречающиеся игровые ситуации следующим образом. Пусть задано множество X позиций игры, разбитое в соответствии с количеством игроков на n подмножеств $X_1, ..., X_n$. Для каждого игрока задано на X некоторое отношение предпочтения, позволяющее ему сравнивать позиции с точки зрения собственной выгоды. Пусть $\{a\}$ - какое-нибудь одноэлементное множество, $a \notin X$ и задано мультиотображение $F : X \to P(X \cup a)$, причем $a \in F(x)$ влечет $F(x) = \{a\}$. Пусть задана начальная позиция $x_0 \in X_i$, i-й игрок делает ход, выбирая позицию x_1 в множестве $F(x_0)$. Если $x_1 \in X_j$, то ход делает j-й игрок, выбирая позицию в множестве $F(x_1)$, и т.д. Игра заканчивается, если какой-нибудь игрок выбрал позицию x такую, что $F(x) = \{a\}$. Целью игры для отдельного игрока может являться, например, получение хотя бы раз в течение партии как можно более выгодной позиции в смысле его отношения предпочтения.

1.1.16. Пример. Математическая экономика.

а) **Мультифункции предложения и спроса.**

Пусть в экономической системе имеется n категорий продуктов, цены на которые $p = (p_1, ..., p_n)$ могут изменяться в пределах некоторого множества $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Пусть предприятие–производитель имеет некоторое компактное множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ возможных производственных планов выпуска товаров (технологическое множество). Компонента y_j вектора $y \in Y$ соответствует количеству j-го товара, выпущенного в согласии с этим планом. Прибыль предприятия от реализации плана y равна $< p, y >= \sum\limits_{j=1}^{n} p_j y_j$. Руководствуясь стремлением получить максимальную прибыль, предприятие при ценах $p \in \Delta$ будет выбирать производственные планы из множества

$$\Psi(p) = \{y | y \in Y, \ < p, y >= \max_{\tilde{y} \in Y} < p, \tilde{y} >\}.$$

Определенное таким образом мультиотображение $\Psi : \Delta \to P(\mathbb{R}^n)$ называется *мультифункцией предложения* предприятия.

Пусть, с другой стороны, при данных ценах $p \in \Delta$ для предприятия-потребителя доступно компактное множество $X(p) \subset \mathbb{R}^n$ векторов потребления. Компонента x_j вектора $x \in X(p)$ соответствует потреблению j-го продукта. Предпочтительность того или иного вектора потребления характеризуется некоторой функцией $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – *индексом полезности.* Стремясь приобрести при данных ценах наиболее полезный для себя набор товаров, предприятие будет производить выбор в множестве

$$\Phi(p) = \{x | x \in X(p),\ u(x) = \max_{\tilde{x} \in X(p)} u(\tilde{x})\}.$$

Мультиотображение $\Phi : \Delta \to P(\mathbb{R}^n)$ называется *мультифункцией потребления* предприятия.

Более подробное описание экономической модели данного типа и применение техники теории многозначных отображений к нахождению в ней экономического равновесия будет проведено в четвертой главе.

б) **Экономическая динамика.**

Пусть в экономической системе вектор $x_{(t)} \in \mathbb{R}^n$ характеризует произведенный к моменту времени t в течение предшествующего единичного временного интервала (например, года) набор продуктов. Часть из этого набора, $y_{(t)}$, идет на потребление, а оставшаяся часть $z_{(t)} = x_{(t)} - y_{(t)}$ - на накопление, т.е. служит ресурсом для получения нового вектора выпуска $x_{(t+1)}$. Пара $(y_{(t)}, z_{(t)})$ называется *состоянием экономики* в момент t. Вложив в накопление ресурс $z_{(t)}$, можно к моменту $t + 1$ произвести один из наборов продуктов в пределах некоторого множества $B_t(z_{(t)}) \subset \mathbb{R}^n$. Мультиотображение $B_t : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$, называемое *производственным*, характеризует технологию системы в момент времени t. Таким образом, исходя из состояния экономики $(y_{(t)}, z_{(t)})$, можно к следующему моменту получить одно из возможных состояний, заполняющих множество

$$A_t(y_{(t)}, z_{(t)}) = \{(y_{(t+1)}, z_{(t+1)}) | (y_{(t+1)}, z_{(t+1)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$y_{(t+1)} + z_{(t++1)} \in B_t(z_{(t)})\}.$$

Мультиотображения $A_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ играют важную роль при изучении моделей экономической динамики.

1.1.17. Пример. Негладкая оптимизация.

В современной теории оптимизации очень часто приходится находить максимумы и минимумы функций, которые не являются дифференцируемыми. Такого рода функции возникают, например, при переходе к точным верхним и нижним граням семейств гладких функций. (Так "классическая" недифференцируемая в нуле функция $y = \mid x \mid$ получается как верхняя грань функций $y = x$ и $y = -x$). Для нахождения экстремумов таких функций расширяют понятие производной.

Пусть, например, E - конечномерное линейное пространство; $f : E \to \mathbb{R}$ - выпуклый функционал. Множество $\partial f(x) \subset E$ всех точек $\xi \in E$ называется *субдифференциалом* в точке $x \in E$ функционала f, если для всех $v \in E$ выполнено

$$f(x + v) - f(x) \geq \ < \xi, v > .$$

Таким образом, для данного функционала взамен обычной производной придется иметь дело с модифицированной производной, выражающейся мультиотображением $x \to \partial f(x)$. Классическое правило Ферма в этой ситуации приобретает следующий вид: *если* x_0 *- точка локального экстремума функционала* f, *то* $0 \in \partial f(x_0)$.

Нетрудно видеть, что для функции $y = \mid x \mid$ субдифференциал вычисляется по формуле:

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ [-1, 1], & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

С проблематикой негладкого анализа можно познакомиться по книгам [12], [56], [57], [58], [65], [70], [83], [89], [90], [106], [129], [141] и др.

1.2. Непрерывность многозначных отображений

Классическая концепция непрерывности однозначной функции расщепляется на различные понятия применительно к мультиотображениям и каждый из этих типов непрерывности имеет свои специфические свойства.

В основе этого многообразия лежит уже то обстоятельство, что обычное теоретико-множественное понятие прообраза множества может трактоваться по-разному, когда речь идет о мультиотображениях. С исследования этого понятия мы и начнем.

1.2.1. Малый и полный прообразы множества

Пусть X, Y - произвольные множества, $F : X \to P(Y)$ - некоторое мультиотображение.

1.2.1. Определение. *Малым прообразом* множества $D \subset Y$ называется множество

$$F_+^{-1}(D) = \{x | x \in X,\ F(x) \subset D\}.$$

1.2.2. Определение. *Полным прообразом* множества $D \subset Y$ называется множество

$$F_-^{-1}(D) = \{x | x \in X,\ F(x) \cap D \neq \varnothing\}.$$

Ясно, что $F_+^{-1}(D) \subset F_-^{-1}(D)$.

Пусть $A \subset X$; $D \subset Y$; $\{D_j\}_{j \in J}$ – семейство подмножеств Y, J – некоторое множество индексов.

Следующие свойства малого и полного прообразов вытекают непосредственно из определений.

1.2.3. Лемма.
(а) $F_+^{-1}(F(A)) \supset A$;
(б) $F(F_+^{-1}(D)) \subset D$;
(в) $\complement F_+^{-1}(D) = F_-^{-1}(\complement D)$;
(г) $F_+^{-1}(\bigcup\limits_{j \in J} D_j) \supset \bigcup\limits_{j \in J} F_+^{-1}(D_j)$;
(д) $F_+^{-1}(\bigcap\limits_{j \in J} D_j) = \bigcap\limits_{j \in J} F_+^{-1}(D_j)$.

1.2.4. Лемма.
(а) $F_-^{-1}(F(A)) \supset A$;
(б) $F(F_-^{-1}(D)) \supset D \cap F(X)$;
(в) $\complement F_-^{-1}(D) = F_+^{-1}(\complement D)$;
(г) $F_-^{-1}(\bigcup\limits_{j \in J} D_j) = \bigcup\limits_{j \in J} F_-^{-1}(D_j)$;
(д) $F_-^{-1}(\bigcap\limits_{j \in J} D_j) \subset \bigcap\limits_{j \in J} F_-^{-1}(D_j)$.

Проследим за свойствами малого и полного прообразов при переходе к различным теоретико-множественным операциям над мультиотображениями.

1.2.5. Определение. Пусть $F_0, F_1 : X \to P(Y)$ - мультиотображения. Мультиотображение $F_0 \cup F_1 : X \to P(Y)$,

$$(F_0 \cup F_1)(x) = F_0(x) \cup F_1(x),$$

называется *объединением мультиотображений* F_0 и F_1.

1.2.6. Определение. Пусть $F_0, F_1 : X \to P(Y)$ - мультиотображения, причем $F_0(x) \cap F_1(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$. Мультиотображение $F_0 \cap F_1 : X \to P(Y)$,

$$(F_0 \cap F_1)(x) = F_0(x) \cap F_1(x),$$

называется *пересечением мультиотображений* F_0 и F_1.

Непосредственно проверяются следующие утверждения.

1.2.7. Лемма. *Пусть* $D \subset Y$, *тогда*
(а) $(F_0 \cup F_1)_+^{-1}(D) = (F_0)_+^{-1}(D) \cap (F_1)_+^{-1}(D)$;
(б) $(F_0 \cap F_1)_+^{-1}(D) \supset (F_0)_+^{-1}(D) \cup (F_1)_+^{-1}(D)$.

1.2.8. Лемма. *Пусть* $D \subset Y$, *тогда*
(а) $(F_0 \cup F_1)_-^{-1}(D) = (F_0)_-^{-1}(D) \cup (F_1)_-^{-1}(D)$;
(б) $(F_0 \cap F_1)_-^{-1}(D) \subset (F_0)_-^{-1}(D) \cap (F_1)_-^{-1}(D)$.

1.2.9. Определение. Пусть X, Y, Z - произвольные множества, $F_0 : X \to P(Y)$, $F_1 : Y \to P(Z)$ - мультиотображения. Мультиотображение $F_1 \circ F_0 : X \to P(Z)$,

$$(F_1 \circ F_0)(x) = F_1(F_0(x)),$$

называется *композицией мультиотображений* F_0 и F_1.

1.2.10. Лемма. *Пусть* $D \subset Z$, *тогда*
(а) $(F_1 \circ F_0)_+^{-1}(D) = (F_0)_+^{-1}((F_1)_+^{-1}(D))$;
(б) $(F_1 \circ F_0)_-^{-1}(D) = (F_0)_-^{-1}((F_1)_-^{-1}(D))$.

1.2.11. Определение. Пусть X, Y_0, Y_1 - произвольные множества, $F_0 : X \to P(Y_0)$, $F_1 : X \to P(Y_1)$ - мультиотображения. Мультиотображение $F_0 \times F_1 : X \to P(Y_0 \times Y_1)$,

$$(F_0 \times F_1)(x) = F_0(x) \times F_1(x),$$

называется *декартовым произведением мультиотображений* F_0 и F_1.

1.2.12. Лемма. *Пусть* $D_0 \subset Y_0$, $D_1 \subset Y_1$, *тогда*
(а) $(F_0 \times F_1)_+^{-1}(D_0 \times D_1) = (F_0)_+^{-1}(D_0) \cap (F_1)_+^{-1}(D_1)$;
(а) $(F_0 \times F_1)_-^{-1}(D_0 \times D_1) = (F_0)_-^{-1}(D_0) \cap (F_1)_-^{-1}(D_1)$.

1.2.2. Полунепрерывность сверху и снизу, непрерывность, замкнутость

Пусть X, Y - топологические пространства, $F : X \to P(Y)$ - некоторое мультиотображение.

1.2.13. Определение. Мультиотображение F называется *полунепрерывным сверху в точке* $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что

$$F(U(x)) \subset V.$$

1.2.14. Определение. Мультиотображение F называется *полунепрерывным сверху*, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Приведем некоторые равносильные формулировки.

1.2.15. Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*
(а) мультиотображение F *полунепрерывно сверху;*
(б) для любого открытого множества $V \subset Y$ *множество* $F_+^{-1}(V)$ *открыто в* X;
(в) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ *множество* $F_-^{-1}(W)$ *замкнуто в* X;

(г) если $D \subset Y$, то $F_-^{-1}(\overline{D}) \supset \overline{F_-^{-1}(D)}$.

Доказательство. 1) Эквивалентность (а)<=>(б) очевидна;
2) эквивалентность (б)<=>(в) следует из Леммы 1.2.3(в) и Леммы 1.2.4(в);
3) (в) => (г): $F_-^{-1}(\overline{D})$ является замкнутым множеством и содержит $F_-^{-1}(D)$;
4) (г)=> (в): если D замкнуто, то $F_-^{-1}(D) = F_-^{-1}(\overline{D}) \supset \overline{F_-^{-1}(D)}$, т.е. $F_-^{-1}(D)$ замкнуто. ■

1.2.16. Пример. Полунепрерывными сверху являются мультиотображения из Примеров 1.1.4 (а), (б); 1.1.5; 1.1.7. Полунепрерывно сверху также и субдифференциальное мультиотображение из Примера 1.1.17 (см., например, [70]).

1.2.17. Определение. Мультиотображение F называется *полунепрерывным снизу в точке* $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$, найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(x') \cap V \neq \varnothing$ для любого $x' \in U(x)$.

1.2.18. Определение. Мультиотображение F называется *полунепрерывным снизу*, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$.

Полунепрерывность снизу также допускает эквивалентные формулировки.

1.2.19. Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

(а) мультиотображение F полунепрерывно снизу;

(б) для любого открытого множества $V \subset Y$ множество $F_-^{-1}(V)$ открыто в X;

(в) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ множество $F_+^{-1}(W)$ замкнуто в X;

(г) если множества $\{V_j\}_{j \in J}$ образуют базу топологии пространства Y, то для каждого V_j, множество $F_-^{-1}(V_j)$ открыто в X;

(д) если $D \subset Y$, то $F_+^{-1}(\overline{D}) \supset \overline{F_+^{-1}(D)}$;

(е) если $A \subset X$, то $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Доказательство. 1) Эквивалентность (а)<=>(б) очевидна;
2) эквивалентности (б)<=>(в) и (в)<=>(д) доказываются аналогич-

но соответствующим утверждениям Теоремы 1.2.15;
3) эквивалентность (б)<=>(г) следует из того, что каждое множество V_j, открыто, и из Леммы 1.2.4 (г);
4) (д)=>(е): $F_+^{-1}(\overline{F(A)}) \supset \overline{F_+^{-1}(F(A))}$, но в силу Леммы 1.2.3 (а) $F_+^{-1}(F(A)) \supset A$, поэтому $F_+^{-1}(\overline{F(A)}) \supset \overline{A}$. В силу Леммы 1.2.3 (б) $F(F_+^{-1}(\overline{F(A)})) \subset \overline{F(A)}$, поэтому $\overline{F(A)} \supset F(\overline{A})$;
5) (е)=>(д): $F(\overline{F_+^{-1}(D)}) \subset \overline{F(F_+^{-1}(D))}$, но в силу Леммы 1.2.3 (б) $F(F_+^{-1}(D)) \subset D$, поэтому $F(\overline{F_+^{-1}(D)}) \subset \overline{D}$. Применяя F_+^{-1} к обеим частям последнего включения и используя Лемму 1.2.3 (а), получим $F_+^{-1}(\overline{D}) \supset F_+^{-1}(F(\overline{F_+^{-1}(D)})) \supset \overline{F_+^{-1}(D)}$. ■

В случае метрических пространств мы можем получить следующую удобную характеризацию полунепрерывности снизу в терминах последовательностей.

1.2.20. Теорема. *Пусть X и Y - метрические пространства. Для полунепрерывности снизу мультиотображения $F : X \to P(Y)$ в точке $x \in X$ необходимо и достаточно, чтобы:*
$(*)$ для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \to x$ и любого $y \in F(x)$ нашлась бы последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$, $y_n \in F(x_n)$ такая, что $y_n \to y$.

Доказательство. а) Пусть выполнено условие $(*)$. Если мультиотображение F не является полунепрерывным снизу в точке x, то найдутся открытое множество $V \subset Y$ такое, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \to x$ такие, что $F(x_n) \cap V = \varnothing$ для всех $n = 1, 2, ...$ Но эти соотношения противоречат тому, что мы можем, выбрав точку $y \in F(x) \cap V$, найти сходящуюся к ней последовательность $y_n \in F(x_n)$.

б) Пусть мультиотображение F полунепрерывно снизу в точке x и заданы некоторая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \to x$ и точка $y \in F(x)$. Рассмотрим последовательность открытых шаров $B_{\frac{1}{m}}(y)$, $m = 1, 2, ...$ с центром в точке y. Пусть номер n_1 таков, что $F(x_n) \cap B_1(y) \neq \varnothing$ для всех $n \geq n_1$. Для всех $n < n_1$ выберем $y_n \in F(x_n)$ произвольно. Затем найдем номер $n_2 \geq n_1$ такой, что $F(x_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(y) \neq \varnothing$ для всех $n \geq n_2$. Для всех n, $n_1 \leq n < n_2$ выберем $y_n \in F(x_n) \cap B_1(y)$. Продолжая далее этот процесс, мы построим искомую последовательность y_n, сходящуюся к y. ■

1.2.21. Определение. Если мультиотображение F полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется *непрерывным.*

В случае однозначного отображения как полунепрерывность сверху, так и полунепрерывность снизу означают обычную непрерывность. Отметим также, что постоянное отображение $F(x) \equiv Y_1 \subset Y$, как легко видеть, непрерывно.

1.2.22. Примеры. а) Полунепрерывными снизу являются многозначные отображения из Примеров 1.1.4 (а), (в); 1.1.5; 1.1.7; 1.1.8. Это легко проверяется применением Определения 1.2.14. Следовательно, непрерывными являются отображения из Примеров 1.1.4 (а); 1.1.5; 1.1.7. Отображение из Примера 1.1.4 (б) полунепрерывно сверху, но не полунепрерывно снизу, а отображения из Примеров 1.1.4 (в); 1.1.8 полунепрерывны снизу, но не полунепрерывны сверху. В частности, для отображения F из Примера 1.1.8 имеем $F_+^{-1}(\mathbb{R}_+^2) = \overline{\mathbb{R}}_+^2$, где $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2)|(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, x_2 > 0\}, \overline{\mathbb{R}}_+^2 = \{x_1, x_2)|(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

б) Пусть T - компактное пространство; X - метрическое пространство. Для произвольного непустого подмножества непрерывных отображений $\Omega \subset C(T, X)$ мультиотображение $Q : T \to P(X)$, определенное как

$$Q(t) = \Omega(t) := \{y(t)|y \in \Omega\}$$

полунепрерывно снизу. Это легко установить, используя Теорему 1.2.20. Нетрудно убедиться также (проверьте!), что если семейство Ω компактно, то мультиотображение Q полунепрерывно сверху и, следовательно, непрерывно.

Еще один важный класс составляют замкнутые мультиотображения.

1.2.23. Определение. Мультиотображение F называется *замкнутым*, если его график Γ_F (см. Определение 1.1.2) есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.

Рассмотрим некоторые равносильные формулировки.

1.2.24. Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*
(а) мультиотображение F замкнуто;

(б) для любой пары $x \in X, y \in Y$ такой, что $y \notin F(x)$, существуют окрестности $U(x)$ точки x и $V(y)$ точки y такие, что $F(U(x)) \cap V(y) = \varnothing$;

(в) для любых направленностей $\{x_\alpha\} \subset X, \{y_\alpha\} \subset Y$ таких, что $x_\alpha \to x, y_\alpha \in F(x_\alpha), y_\alpha \to y$, выполнено $y \in F(x)$.

Доказательство. 1) (а)<=>(б): условие (б) означает, что точка $(x, y) \in X \times Y$ принадлежит дополнению графика Γ_F вместе с некоторой окрестностью;
2) (а)<=>(в): условие (в) означает, что если направленность $\{(x_\alpha, y_\alpha)\} \subset \Gamma_F$ сходится к точке $(x, y) \in X \times Y$, то $(x, y) \in \Gamma_F$. ■

Отметим, что в случае, когда X и Y являются метрическими пространствами, в условии (в) вместо направленностей достаточно рассматривать обычные последовательности.

1.2.25. Пример. Отображения из Примеров 1.1.4 (а), (б); 1.1.5 - 1.1.8 являются замкнутыми.

1.2.26. Пример. Рассмотрим Пример 1.1.9. Если X, Y - топологические пространства, пространство Y хаусдорфово и $f : X \to Y$ - непрерывное сюръективное отображение, то мультиотображение $F : Y \to P(X)$, обратное к f, замкнуто.

1.2.27. Пример. Рассмотрим Пример 1.1.10. Если X, Y, Z - топологические пространства, а отображения f и g непрерывны, то определенное в Примере 1.1.10 мультиотображение F замкнуто.

1.2.28. Пример. Рассмотрим Пример 1.1.11. Если X, Y - топологические пространства, а функция f непрерывна, то определенное в Примере 1.1.11 мультиотображение F_r замкнуто.

Справедливость утверждений в Примерах 1.2.26 – 1.2.28 может быть проверена с помощью Теоремы 1.2.24(в).

Введем некоторые обозначения, которые мы будем постоянно использовать в дальнейшем.

Пусть Y - топологическое пространство.

Обозначим $C(Y)$, $K(Y)$ совокупности, состоящие из всех непустых замкнутых или, соответственно, компактных подмножеств Y.

Если топологическое пространство Y линейно, то $Pv(Y)$ обозначает совокупность всех непустых выпуклых подмножеств Y. Введем также обозначения:

$$Cv(Y) = Pv(Y) \cap C(Y), \quad Kv(Y) = Pv(Y) \cap K(Y).$$

В том случае, когда мультиотображение F принимает свои значения в множествах $C(Y)$, $K(Y)$ или $Pv(Y)$, будем говорить иногда, что F имеет соответственно замкнутые, компактные или выпуклые значения.

Из определения замкнутого отображения немедленно вытекает, что оно имеет замкнутые значения.

Рассмотрение примеров указывает на тесную связь замкнутых и полунепрерывных сверху отображений. Действительно, справедливы следующие утверждения.

1.2.29. Теорема. *Если мультиотображение $F : X \to C(Y)$ полунепрерывно сверху и пространство Y регулярно, то F замкнуто.*

Доказательство. Пусть $y \in Y, y \notin F(x)$. В силу регулярности пространства Y существуют окрестность $V(y)$ точки y и открытое множество $W \supset F(x)$ такие, что $V(y) \cap W = \varnothing$. Пусть $U(x)$ - окрестность x такая, что $F(U(x)) \subset W$. Тогда $F(U(x)) \cap V(y) = \varnothing$, и справедливость утверждения вытекает из Теоремы 1.2.24(б). ■

1.2.30. Замечание. Из доказательства ясно, что если отображение F имеет компактные значения, то условие регулярности пространства Y может быть заменено хаусдорфовостью.

Для формулировки достаточного условия полунепрерывности сверху замкнутого отображения дадим следующие определения.

1.2.31. Определение. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется:
а) *компактным*, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y, т.е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y;
б) *локально компактным*, если каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью $U(x)$ такой, что сужение F на $U(x)$ компактно;
в) *квазикомпактным*, если сужение F на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Ясно, что а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в).

1.2.32. Теорема. *Пусть $F : X \to K(Y)$ - замкнутое отображение. Если оно локально компактно, то оно полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, V - открытое множество в Y такое, что $F(x) \subset V$. Пусть $U(x)$ - окрестность x такая, что сужение на нее F компактно, и пусть $W = \overline{F(U(x))} \setminus V \neq \varnothing$. Если $y \in W$, то в силу замкнутости F найдутся окрестности $V(y)$ точки y и $U_y(x)$ точки x такие, что $F(U_y(x)) \cap V(y) = \varnothing$. Поскольку множество W компактно, его можно покрыть конечным набором окрестностей $V(y_1), ..., V(y_n)$. Рассмотрим открытую окрестность точки x: $\widetilde{U}(x) = U(x) \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}(x))$. Заметим теперь, что $x' \in \widetilde{U}(x)$ влечет $F(x') \cap V(y_j) = \varnothing$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, следовательно $F(x') \cap W = \varnothing$. С другой стороны, $F(\widetilde{U}(x)) \subset F(U(x))$. Таким образом, $F(\widetilde{U}(x)) \subset V$. ■

Различие между замкнутостью и полунепрерывностью сверху иллюстрируют Примеры 1.1.6 и 1.1.8. Как уже указывалось, мультиотображения в этих примерах замкнуты, но они не являются полунепрерывными сверху. Заметим, что отображение Примера 1.1.6 имеет компактные значения и для него условие полунепрерывности сверху нарушается в той же точке $x = \pi/2$, в которой не выполнено условие локальной компактности.

Отметим некоторые свойства замкнутых и полунепрерывных сверху мультиотображений.

1.2.33. Теорема. *Пусть $F : X \to C(Y)$ - замкнутое мультиотображение. Если $A \subset X$ - компактное множество, то его образ $F(A)$ замкнут в Y.*

Доказательство. Если $F(A) \neq Y$, то возьмем $y \in Y, y \notin F(A)$. Пусть $x \in A$ и $U(x), V_x(y)$ - окрестности точек x и y такие, что

$$F(U(x)) \cap V_x(y) = \varnothing.$$

Далее, пусть окрестности $U(x_1), ..., U(x_n)$ образут конечное покрытие A; тогда $V(y) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}(y)$ – окрестность y такая, что $V(y) \cap F(A) = \varnothing$. ■

1.2.34. Замечание. Условие компактности множества A существенно: образ замкнутого множества при замкнутом отображении может быть и не замкнут. Так, в Примере 1.1.7: $F(\overline{\mathbb{R}}_+) = (0, 1]$.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее свойство полунепрерывных сверху мультиотображений.

1.2.35. Теорема. *Пусть $F : X \to K(Y)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение. Если $A \subset X$ - компактное множество, то его образ $F(A)$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\{V_j\}_{j \in J}$ – открытое покрытие множества $F(A)$. Значение $F(x)$ каждой точки $x \in A$ можно покрыть конечным числом множеств $V_{j_1}, ..., V_{j_n}$ из этого покрытия; обозначим V_x их объединение. Множества $F_+^{-1}(V_x),\ x \in A$, образуют открытое покрытие A. Выделим из него конечное подпокрытие $F_+^{-1}(V_{x_1}), .., F_+^{-1}(V_{x_m})$. Но тогда множества $V_{x_1}, ..., V_{x_m}$ образуют конечное покрытие $F(A)$ и, следовательно, множество $F(A)$ может быть покрыто конечным числом множеств из покрытия $\{V_j\}_{j \in J}$. ■

1.2.36. Замечание. Условие полунепрерывности сверху существенно в данном утверждении. В Примере 1.1.6 замкнутое отображение имеет компактные значения, но $F([0, \pi]) = \mathbb{R}$.

Отметим также следующее свойство.

1.2.37. Теорема. *Пусть X, Y – топологические пространства; $A \subset X$ – связное множество и $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Если выполнено одно из следующих условий:*

(i) F полунепрерывно сверху или полунепрерывно снизу и значения $F(x)$ связны для каждого $x \in A$;

(ii) F непрерывно и значение $F(x_0)$ связно для некоторого $x_0 \in A$,

то $F(A)$ – связное подмножество Y.

Доказательство. (i) Рассмотрим случай полунепрерывного сверху мультиотображения F. Предположим противное, тогда существуют открытые множества V_0 и V_1 в пространстве Y такие, что:

а) $F(A) \subset (V_0 \cup V_1)$;
б) $F(A) \cap V_i \neq \varnothing, \quad i = 0, 1$;
в) $(F(A) \cap V_0) \cap (F(A) \cap V_1) = \varnothing$.
Рассмотрим множества $F_+^{-1}(V_0) = U_0$, $F_+^{-1}(V_1) = U_1$. В силу полунепрерывности сверху мультиотображения F эти множества открыты. Заметим, что значение любой точки $x \in A$ попадает только в одно из множеств V_0 или V_1, так как в противном случае множество $F(x)$ было бы несвязным. Следовательно, $A \subset (U_0 \cup U_1)$; $A \cap U_i \neq \varnothing$ для каждого $i = 0, 1$ и $(A \cap U_0) \cap (A \cap U_1) = \varnothing$. Это противоречит связности множества A.

Если же мультиотображение F полунепрерывно снизу, достаточно заметить, что открытые множества, фигурирующие в определении связного множества, могут быть заменены на замкнутые, и провести те же рассуждения, что и выше, воспользовавшись Теоремой 1.2.19 (в).

(ii) Также предположим противное. Тогда в силу связности множество $F(x_0)$ должно содержаться в V_0 или V_1, пусть для определенности $F(x_0) \subset V_0$ и, следовательно, $F_+^{-1}(V_0) \neq \varnothing$. Тогда получаем

$$A \subset (F_+^{-1}(V_0) \bigcup F_-^{-1}(V_1)),$$

причем оба последних множества непусты, не пересекаются и, в силу непрерывности мультиотображения F, они открыты, но это противоречит связности A. ■

1.2.3. Многозначные отображения в метрическое пространство

В случае, если мультиотображение действует в метрическое пространство, мы можем получить несколько удобных способов характеризации рассмотренных выше типов непрерывности.

Всюду в этом пункте (Y, ϱ) - метрическое пространство.

1.2.38. Определение. Пусть $F : X \to P(Y)$ - мультиотображение. Мультиотображение $F_\varepsilon : X \to P(Y)$,

$$F_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(F(x)) = \{y | y \in Y, \ \ \varrho(y, F(x)) < \varepsilon\}$$

называется *ε-раздутием мультиотображения F.*

1.2.39. Теорема. *Для полунепрерывности сверху мультиотображения $F : X \to K(Y)$ в точке $x \in X$, необходимо и достаточно,* *чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $U(x)$ точки x, что из того, что $x' \in U(x)$ следовало бы, что $F(x') \subset F_\varepsilon(x)$.*

Доказательство. *1) Необходимость.* Отметим, что

$$F_\varepsilon(x) = \bigcup_{y \in F(x)} B_\varepsilon(y)$$

– открытое множество, содержащее $F(x)$, и применим Определение 1.2.13.

2) Достаточность. Пусть $F(x) \subset V, V$ - открытое множество. Тогда (см. гл. O) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $F_\varepsilon(x) \subset V$. Но тогда существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(U(x)) \subset F_\varepsilon(x) \subset V$.■

1.2.40. Теорема. *Для полунепрерывности снизу мультиотображения $F : X \to K(Y)$ в точке $x \in X$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $U(x)$ точки x, что из $x' \in U(x)$ следовало бы $F(x) \subset F_\varepsilon(x')$.*

Доказательство. *1) Необходимость.* Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $y_1, ..., y_n$ точки множества $F(x)$ такие, что шары $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i), 1 \leq i \leq n$, образуют покрытие множества $F(x)$. В силу полунепрерывности снизу мультиотображения F для каждого $i, 1 \leq i \leq n$, найдется окрестность $U_i(x)$ точки x такая, что из $x' \in U_i(x)$ следует $F(x') \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i) \neq \varnothing$. Но тогда, если $x' \in U(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i(x)$, то $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i) \subset F_\varepsilon(x')$ для всех $i, 1 \leq i \leq n$, и, следовательно, окрестность $U(x)$ является искомой.

2) Достаточность. Пусть V - открытое множество в Y и $F(x) \cap V \neq \varnothing$. Выберем произвольную точку $y \in F(x) \cap V$, и пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $B_\varepsilon(y) \subset V$. Пусть $U(x)$ - окрестность x такая, что из $x' \in U(x)$ следует $F(x) \subset F_\varepsilon(x')$. Тогда $F(x') \cap B_\varepsilon(y) \neq \varnothing$ для всех $x' \in U(x)$, что и означает полунепрерывность снизу мультиотображения F в точке x. ■

Отметим, что в необходимой части Теоремы 1.2.39 и достаточной части Теоремы 1.2.40 компактность значений мультиотображения F не используется.

Пусть $C(Y)$ обозначает, как и раньше, совокупность всех непустых замкнутых подмножеств Y. Для $A, B \in C(Y)$ величина $\varrho_*(A, B) = \sup\limits_{a \in A} \varrho(a, B)$ называется *отклонением множества A от множества*

B. Функция $\varrho_* : C(Y) \times C(Y) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ обладает следующими свойствами.

1.2.41. Теорема.
(а) $\varrho_*(A, B) \geq 0$ для любых $A, B \in C(Y)$;
(б) $\varrho_*(A, B) = 0$ влечет $A \subset B$;
(в) в общем случае $\varrho_*(A, B) \neq \varrho_*(B, A)$;
(г) если $\varrho_*(A, B) < \infty$, то $\varrho_*(A, B) \leq \varrho_*(A, C) + \varrho_*(C, B)$ для любого $C \in C(Y)$;
(д) если $\varrho_*(A, B) < \infty$, то $\varrho_*(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset U_\varepsilon(B)\}$.

Доказательство. (а) Вытекает непосредственно из определения.

(б) Для любого $x \in A$ выполнено $\varrho(x, B) = 0$. Следовательно, точка х является предельной для некоторой последовательности точек из B. В силу замкнутости B получаем, что $x \in B$.

(в) Возьмем $A = \{a\} \in Y$, $B = \{a\} \cup \{b\} \in Y$, $a \neq b$. Тогда $\varrho_*(A, B) = 0$, $\varrho_*(B, A) \neq 0$.

(г) Для любого $x \in A$ в силу неравенства треугольника выполнено

$$\varrho(x, B) = \inf_{y \in B} \varrho(x, y) \leq \inf_{y \in B} (\varrho(x, z) + \varrho(z, y)) = \varrho(x, z) + \varrho(z, B),$$

где z - произвольная точка C. Тогда

$$\varrho(x, B) \leq \varrho(x, z) + \varrho_*(C, B)$$

для любого $z \in C$. Следовательно,

$$\varrho(x, B) \leq \inf_{z \in C} \varrho(x, z) + \varrho_*(C, B) = \varrho(x, C) + \varrho_*(C, B)$$

$$\leq \varrho_*(A, C) + \varrho_*(C, B).$$

Тогда $\varrho_*(A, B) \leq \varrho_*(A, C) + \varrho_*(C, B)$.

(д) Пусть $\varepsilon > \varrho_*(A, B)$, тогда для любой точки $x \in A$ найдется точка $y \in B$ такая, что $x \in B_\varepsilon(y)$. Следовательно, $A \subset U_\varepsilon(B)$, т.е. $\inf\{\varepsilon | A \subset U_\varepsilon(B)\} \leq \varrho_*(A, B)$. Если же $\varepsilon > 0$ таково, что $A \subset U_\varepsilon(B)$, то для любого $x \in A$ выполнено $\varrho(x, B) < \varepsilon$. Тогда $\varrho_*(A, B) \leq \varepsilon$, т.е. $\varrho_*(A, B) \leq \inf\{\varepsilon | A \subset U_\varepsilon(B)\}$. Сопоставляя полученные неравенства, получаем требуемое свойство. ■

Рассмотрим функцию $h : C(Y) \times C(Y) \to \mathbb{R} \cup \ \{\infty\}$,

$$h(A, B) = \max\{\varrho_*(A, B),\ \varrho_*(B, A)\}.$$

Применяя предыдущую теорему, мы можем установить, что эта функция обладает следующими свойствами:

Для любых $A, B \in C(Y)$ *выполнено:*

1) $h(A, B) \geq 0$*;*
2) $h(A, B) = 0$ *равносильно* $A = B$*;*
3) $h(A, B) = h(B, A)$
4) Если $h(A, B) < \infty$*, то* $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ *для любого* $C \in C(Y)$.

1.2.42. Определение. Функция h называется *расширенной метрикой Хаусдорфа* на множестве $C(Y)$.

Термин "расширенная" здесь означает, что функция h может принимать бесконечные значения.

Обозначим $Cb(Y)$ - *совокупность непустых замкнутых ограниченных подмножеств* Y. Из вышеуказанных свойств немедленно вытекает, что функция h является обычной метрикой на этом множестве. Ее называют *метрикой Хаусдорфа.*

Заметим, что из Теоремы 1.2.41(д) следует, что для любых $A, B \in Cb(Y)$ выполнено

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon | A \subset U_\varepsilon(B), B \subset U_\varepsilon(A)\}.$$

1.2.43. Определение. Мультиотображение $F : X \to Cb(Y)$ называется *непрерывным в метрике Хаусдорфа*, если оно непрерывно как однозначное отображение в метрическое пространство $(Cb(Y), h)$.

Для мультиотображений с компактными значениями мы можем получить теперь следующую полезную характеризацию непрерывности.

1.2.44. Теорема. *Мультиотображение* $F : X \to K(Y)$ *непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из Теорем 1.2.39 и 1.2.40. ■

Пусть теперь Y - сепарабельное метрическое пространство. В дальнейшем будут полезны следующие характеризации полунепрерывности снизу и сверху.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ - некоторое счетное всюду плотное подмножество Y. Для мультиотображения $F : X \to P(Y)$ определим функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(x) = \varrho(r_n, F(x)).$$

1.2.45. Теорема. *Для полунепрерывности снизу мультиотображения $F : X \to P(Y)$ необходима и достаточна полунепрерывность сверху (в однозначном смысле) функций φ_n.*

Доказательство. Для любых $a > 0$ и n множество

$$\{x | x \in X, \varphi_n(x) < a\}$$

совпадает с множеством $F_-^{-1}(B_a(r_n))$. Для доказательства теоремы остается заметить, что шары с центрами в точках r_n образуют базу топологии пространства Y и затем воспользоваться Теоремой 1.2.19 (г).■

Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующее утверждение.

1.2.46. Лемма. *Пусть $F : X \to P(Y)$ - мультиотображение, $W \subset Y$ - замкнутое множество. Пусть множества W_m таковы, что $W \subset W_m \subset U_{\varepsilon_m}(W)$ для некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}, \varepsilon_m > 0, \varepsilon_m \to 0$. Тогда:*

(а) $F_+^{-1}(W) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_+^{-1}(W_m)$;

(б) если значения мультиотображения F компактны, то

$$F_-^{-1}(W) = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_-^{-1}(W_m).$$

Доказательство. Включения

$$F_+^{-1}(W) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} F_+^{-1}(W_m), \;\; F_-^{-1}(W) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} F_-^{-1}(W_m)$$

очевидны.

(а) Если $x \notin F_+^{-1}(W)$, то существует $y \in F(x)$ такое, что $y \notin W$.

Но тогда, если $\varepsilon_m < \varrho(y, W)$, то $x \notin F_+^{-1}(W_m)$, что и доказывает (а).

(б) Если $x \notin F_-^{-1}(W)$, то $F(x) \cap W = \varnothing$, и так как множество $F(x)$ компактно, то (см. Главу 0) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $F_\varepsilon(x) \cap W = \varnothing$. Но тогда, если $\varepsilon_m < \varepsilon$, то $x \notin F_-^{-1}(W_m)$, и (б) также доказано.■

1.2.47. Теорема. *Для полунепрерывности сверху мультиотображения $F : X \to K(Y)$ необходима, а в случае компактности мультиотображения F и достаточна полунепрерывность снизу (в однозначном смысле) функций φ_n.*

Доказательство. *1) Необходимость.* Если мультиотображение F полунепрерывно сверху, то для любых $a > 0$ и n множество $\{x | x \in X, \varphi_n(x) > a\} = F_+^{-1}(Y \setminus \overline{B}_a(r_n))$ открыто.

2) Достаточность. Поскольку мультиотображение F компактно, достаточно показать, что для любого компактного множества $K \subset Y$ множество $F_-^{-1}(K)$ замкнуто. Для некоторой последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$ рассмотрим конечные покрытия K замкнутыми шарами радиуса ε_m с центрами в точках из множества $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} : K \subset K_m = \bigcup\limits_{i=1}^{q(m)} \overline{B}_{\varepsilon_m}(r_{n_{(m,i)}})$. Для каждого m множество

$$F_-^{-1}(K_m) = \bigcup_{i=1}^{q(m)} F_-^{-1}(\overline{B}_{\varepsilon_m}(r_{n_{(m,i)}})) = \bigcup_{i=1}^{q(m)} \{x | x \in X, \varphi_{n_{(m,i)}}(x) \leq \varepsilon_m\}$$

замкнуто. Применяя Лемму 1.2.46 (б), получим, что $F_-^{-1}(K) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_-^{-1}(K_m)$, откуда и вытекает замкнутость множества $F_-^{-1}(K)$.■

В заключение этого раздела отметим, что для метрических пространств имеет место следующее уточнение Теоремы 1.2.32.

1.2.48. Теорема. *Пусть X и Y - метрические пространства и $F : X \to K(Y)$ - замкнутое квазикомпактное мультиотображение. Тогда F полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ - некоторая точка и $V \subset Y$ - открытое множество такое, что $F(x) \subset V$. Если F не является полунепрерывным сверху в точке x, то найдется последовательность

$\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x$ такая, что можно выбрать последовательность точек $y_n \in F(x_n)\backslash V$ для всех $n = 1, 2, ...$ В силу условия квазикомпактности мы можем полагать, без ущерба для общности, что $y_n \to y \notin V$, в противоречие с $y \in F(x)$.■

1.3. Операции над многозначными отображениями

Определяемый для мультиотображений набор операций существенно богаче, чем в случае однозначных отображений: такие операции, как объединение, пересечение мультиотображений и некоторые другие, не имеют "однозначных" аналогов. В этом разделе мы исследуем сохранение свойств непрерывности мультиотображений при различных операциях над ними.

1.3.1. Теоретико-множественные операции

Пусть X, Y - топологические пространства; $\{F_j\}_{j\in J}$, $F_j : X \to P(Y)$ - некоторое семейство мультиотображений.

1.3.1. Теорема. *(а) Пусть мультиотображения F_j полунепрерывны сверху. Если множество индексов J конечно, то объединение мультиотображений $\bigcup\limits_{j\in J} F_j : X \to P(Y)$, $(\bigcup\limits_{j\in J} F_j)(x) = \bigcup\limits_{j\in J} F_j(x)$ полунепрерывно сверху;*

(б) Пусть мультиотображения F_j полунепрерывны снизу. Тогда их объединение $\bigcup\limits_{j\in J} F_j$ полунепрерывно снизу;

(в) Пусть мультиотображения $F_j : X \to C(Y)$ замкнуты. Если множество индексов J конечно, то объединение $\bigcup\limits_{j\in J} F_j : X \to C(Y)$ замкнуто.

Доказательство. (а) Пусть $V \subset Y$ открыто, тогда согласно Лемме 1.2.7 (а)

$$(\bigcup_{j\in J} F_j)_+^{-1}(V) = \bigcap_{j\in J} (F_j)_+^{-1}(V),$$

следовательно, это множество открыто, а значит, в силу Теоремы 1.2.15(б) мультиотображение $\bigcup\limits_{j\in J} F_j$ полунепрерывно сверху.

(б) Данное утверждение аналогичным образом следует из Леммы 1.2.8(а) и Теоремы 1.2.19(б).

(в) Легко проверить, что график $\Gamma_{\bigcup\limits_{j\in J} F_j}$ мультиотображения $\bigcup\limits_{j\in J} F_j$ является объединением графиков $\bigcup\limits_{j\in J} \Gamma_{F_j}$, откуда и следует утверждение. ■

1.3.2. Теорема. *(а) Пусть мультиотображения $F_j : X \to C(Y)$ полунепрерывны сверху. Если множество индексов J конечно, пространство Y нормально и $\bigcap\limits_{j\in J} F_j(x) \neq \varnothing, \forall x \in X$, то пересечение мультиотображений $\bigcap\limits_{j\in J} F_j : X \to C(Y)$, $(\bigcap\limits_{j\in J} F_j)(x) = \bigcap\limits_{j\in J} F_j(x)$, полунепрерывно сверху.*

(б) Пусть мультиотображения $F_j : X \to C(Y)$ замкнуты и $\bigcap\limits_{j\in J} F_j(x) \neq \varnothing, \forall x \in X$. Тогда пересечение $\bigcap\limits_{j\in J} F_j : X \to C(Y)$ замкнуто.

Доказательство. (а) Докажем утверждение сначала для случая двух мультиотображений F_0 и F_1. Для $x \in X$ пусть V - некоторая окрестность множества $F(x) = (F_0 \cap F_1)(x)$. Если хотя бы одно из множеств $F_0(x)$ или $F_1(x)$ содержится в V, то тогда существование такой окрестности $U(x)$ точки x, что $F(U(x)) \subset V$ очевидно. В противном случае $F_0(x) \setminus V$ и $F_1(x) \setminus V$ – непустые замкнутые множества. Они не пересекаются, поэтому в силу нормальности пространства Y найдутся непересекающиеся открытые множества W_0 и W_1 такие, что $(F_j(x) \setminus V) \subset W_j$, $j = 0, 1$. Тогда для каждого $j = 0, 1$ выполнено

$$F_j(x) \subset (V \cup (F_j(x) \setminus V)) \subset (V \cup W_j).$$

В силу полунепрерывности сверху мультиотображений F_j для каждого $j = 0, 1$ найдется такая окрестность $U_j(x)$ точки x, что

$$F_j(U_j(x)) \subset (V \cup W_j).$$

Но тогда, если $U(x) = U_0(x) \cap U_1(x)$, то для любого $x' \in U(x)$ выполнено

$$F(x') = F_0(x') \cap F_1(x') \subset ((V \cup W_0) \cap (V \cup W_1)) = V,$$

что и означает полунепрерывность сверху мультиотображения F в точке x.

Справедливость утверждения в общем случае теперь следует из принципа математической индукции.

(б) Справедливость утверждения вытекает из того, что график мультиотображения $\bigcap\limits_{j\in J} F_j$ является пересечением графиков мультиотображений F_j.■

Отметим также следующее утверждение.

1.3.3. Теорема. *Пусть мультиотображение $F_0 : X \to C(Y)$ замкнуто, мультиотображение $F_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху и*

$$F_0(x) \cap F_1(x) \neq \varnothing, \forall x \in X.$$

Тогда пересечение $F = F_0 \cap F_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Для произвольного $x \in X$ пусть $V \subset Y$ - некоторая открытая окрестность множества $(F_0 \cap F_1)(x)$. Покажем, что найдется такая окрестность $U(x)$ точки x, что $(F_0 \cap F_1)(U(x)) \subset V$.

Если $F_1(x) \subset V$, то существование $U(x)$ вытекает из полунепрерывности сверху мультиотображения F_1. Пусть $K = F_1(x) \setminus V \neq \varnothing$, тогда множество K компактно и $K \cap F_0(x) = \varnothing$. В силу замкнутости мультиотображения F_0 для любой точки $y \in K$ найдутся окрестности $V(y) \subset Y$ точки y и $U_y(x) \subset X$ точки x такие, что $F_0(U_y(x)) \cap V(y) = \varnothing$ (Теорема 1.2.24(б)). Пусть $\{V(y_i)\}_{i=1}^n$ - конечное покрытие множества K окрестностями вида $V(y)$ и $V(K) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V(y_i)$. Открытое множество $V \cup V(K)$ содержит $F_1(x)$, поэтому найдется такая окрестность $U_1(x)$ точки x, что $F_1(U_1(x)) \subset (V \cup V(K))$. Тогда окрестность $U(x) = U_1(x) \cap U_{y_1}(x) \cap ... \cap U_{y_n}(x)$ является искомой. Действительно, $F_0(U(x)) \cap V(K) = \varnothing$, а $F_1(U(x)) \subset (V \cup V(K))$, следовательно, $(F_0 \cap F_1)(U(x)) \subset V$.■

1.3.4. Следствие. *Пусть мультиотображение $F : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху, $C \subset Y$ - замкнутое множество и $F(x) \cap C \neq \varnothing, \forall x \in X$. Тогда мультиотображение $\tilde{F} : X \to K(Y)$,*

$$\tilde{F}(x) = F(x) \cap C$$

полунепрерывно сверху.

Доказательство. Ясно, что мультиотображение $F_0 : X \to C(Y)$,

$$F_0(x) \equiv C$$

замкнуто. Положим $F_1 = F$ и применим утверждение доказанной теоремы.■

1.3.5. Следствие. *Пусть пространство Y хаусдорфово, мультиотображения $\{F_j\}_{j\in J}, F_j : X \to K(Y)$ полунепрерывны сверху и $\bigcap\limits_{j\in J} F_j(x) \neq \varnothing, \forall x \in X$. Тогда пересечение $\bigcap\limits_{j\in J} F_j : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть F_{j_0} - одно из мультиотображений семейства; поскольку все мультиотображения F_j замкнуты (см. Замечание 1.2.30), мультиотображение $F_1 = \bigcap\limits_{j\in J} F_j$ также замкнуто (Теорема 1.3.2(б)). Положим $F_0 = F_{j_0}$ и применим утверждение доказанной теоремы.■

Если мультиотображения полунепрерывны снизу, исследование их пересечения на непрерывность усложняется. Следующий простой пример показывает, что в общем случае такое пересечение не будет полунепрерывно снизу.

1.3.6. Пример. Рассмотрим мультиотображения $F_0, F_1 : [0, \pi] \to Kv(\mathbb{R}^2)$, определенные следующим образом. Мультиотображение F_0 постоянно:

$$F_0(\varphi) = \{(y_0, y_1) | (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2, y_1 \geq 0, y_0^2 + y_1^2 \leq 1\},$$

а мультиотображение F_1 определено так:

$$F_1(\varphi) = \{(y_0, y_1) | (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2, y_0 = \lambda \cos\varphi, y_1 = \lambda \sin\varphi, \lambda \in [-1, 1]\}$$

(см. рис.8).

Мультиотображения F_0 и F_1, очевидно, полунепрерывны снизу (они даже непрерывны), но их пересечение $F_0 \cap F_1$, определенное на всем промежутке $[0, \pi]$, не является, как легко видеть, полунепрерывным снизу в точках 0 и π.

Для выяснения условий, при которых можно гарантировать полунепрерывность снизу пересечения мультиотображений, полезно следующее понятие.

1.3.7. Определение. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *квазиоткрытым в точке* $x \in X$, если

$$intF(x) \neq \varnothing$$

и если для любого $y \in intF(x)$ найдутся такая окрестность $V(y) \subset Y$ и такая окрестность $U(x) \subset X$, что $V(y) \subset F(x')$ для всех $x' \in U(x)$. Если F квазиоткрыто в каждой точке $x \in X$, то оно называется *квазиоткрытым.*

Нетрудно видеть, что мультиотображение $F : X \to P(Y)$ такое, что $intF(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$, квазиоткрыто тогда и только тогда, когда график мультиотображения $intF : X \to P(Y)$,

$$(intF)(x) = intF(x)$$

открыт в $X \times Y$.

1.3.8. Теорема. *Пусть Y - конечномерное линейное топологическое пространство. Мультиотображение $F : X \to Cv(Y)$ квазиоткрыто в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда множество*

$intF(x) \neq \varnothing$ и F полунепрерывно снизу в точке x.

Доказательство. 1) Пусть мультиотображение F квазиоткрыто в точке $x \in X$, тогда $intF(x) \neq \varnothing$ по определению. Пусть $V \subset Y$ - открытое множество такое, что $V \cap F(x) \neq \varnothing$, тогда нетрудно видеть, что и $V \cap intF(x) \neq \varnothing$. Для произвольного $y \in Y \cap intF(x)$ пусть $V(y) \subset Y$ и $U(x) \subset X$ такие окрестности, что $V(y) \subset F(x')$ для всех $x' \in U(x)$. Но поскольку $V(y) \cap V \neq \varnothing$, то $V \cap F(x') \neq \varnothing$ для всех $x' \in U(x)$, что и означает полунепрерывность снизу мультиотображения F в точке x.

2) Обратно, пусть $intF(x) \neq \varnothing$ и F полунепрерывно снизу в точке $x \in X$. Пусть $y \in intF(x)$ и $B_\delta(y) \subset F(x)$. Зафиксируем $\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta$. В силу конечномерности пространства Y шар $B_\delta(y)$ относительно компактен. Используя те же рассуждения, которые были применены при доказательстве необходимости в Теореме 1.2.40, получим, что существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что для любой точки $x' \in U(x)$ выполнено $B_\delta(y) \subset F_\eta(x')$, где $\eta = \delta - \delta_1$. Если теперь $y' \in B_{\delta_1}(y)$, но $y' \notin F(x')$, то отделим точку y' от множества $F(x')$ гиперплоскостью L^*. Тогда шар $B_\eta(y')$ будет содержать точки, удаленные от L, а следовательно, и от $F(x')$ на расстояние, большее η. Это противоречит тому, что $B_\eta(y') \subset B_\delta(y) \subset F_\eta(x')$. Следовательно, $B_{\delta_1}(y) \subset F(x')$ для всех $x' \in U(x)$.■

Приведем теперь следующее условие полунепрерывности снизу пересечения мультиотображений.

1.3.9. Теорема. *Пусть X, Y - топологические пространства; мультиотображение $F_0 : X \to P(Y)$ полунепрерывно снизу в точке $x_0 \in X$, мультиотображение $F_1 : X \to P(Y)$ квазиоткрыто в x_0 и*

$$F_0(x) \cap F_1(x) \neq \varnothing$$

для всех $x \in X$. Если

$$F_0(x_0) \cap F_1(x_0) \subset \overline{F_0(x_0) \cap intF_1(x_0)},$$

то пересечение $F_0 \bigcap F_1$ полунепрерывно снизу в точке x_0.

Доказательство. Пусть $V \subset Y$ - открытое множество такое, что

[0]Это можно сделать в силу теорем отделимости (см., например, [105], [106]).

$V \cap (F_0 \cap F_1)(x_0) \neq \varnothing$. Из условий теоремы вытекает, что найдется точка $y \in V \cap (F_0 \cap F_1)(x_0)$, являющаяся внутренней точкой множества $F_1(x_0)$. Пусть $V(y)$ - окрестность y такая, что $V(y) \subset (V \cap F_1(x_0))$. Используя квазиоткрытость мультиотображения F_1, мы можем полагать, без ущерба для общности, что существует такая окрестность $U_1(x_0)$ точки x_0, что $V(y) \subset F_1(x')$ для всех $x' \in U_1(x_0)$.

Поскольку $y \in F_0(x_0)$, и мультиотображение F_0 полунепрерывно снизу, найдется окрестность $U_0(x_0)$ точки x_0 такая, что $F_0(x'') \cap V(y) \neq \varnothing$ для всех $x'' \in U_0(x_0)$. Но тогда для любого $\tilde{x} \in U(x_0) = U_0(x_0) \cap U_1(x_0)$ выполнено $(F_0 \cap F_1)(\tilde{x}) \cap V(y) \neq \varnothing$, т.е. $(F_0 \cap F_1)(\tilde{x}) \cap V \neq \varnothing$, что и означает полунепрерывность снизу мультиотображения $F_0 \cap F_1$ в точке x_0. ■

В качестве следствия мы можем получить теперь достаточное условие полунепрерывности снизу пересечения полунепрерывных снизу мультиотображений.

1.3.10. Теорема. *Пусть Y - конечномерное линейное топологическое пространство; мультиотображения $F_0, F_1 : X \to Cv(Y)$ полунепрерывны снизу. Пусть $F_0(x) \cap F_1(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$ и*

$$F_0(x_0) \cap intF_1(x_0) \neq \varnothing$$

для некоторого $x_0 \in X$. Тогда пересечение $F_0 \cap F_1 : X \to Cv(Y)$ полунепрерывно снизу в точке x_0.

Доказательство. Из Теоремы 1.3.8 следует, что мультиотображение F_1 квазиоткрыто в точке x_0. Пусть $y \in (F_0 \cap F_1)(x_0)$ - произвольная точка, а $\tilde{y} \in F_0(x_0) \cap intF_1(x_0)$. Из выпуклости значений мультиотображений F_0 и F_1 следует, что отрезок $[y, \tilde{y}]$ содержится в $(F_0 \cap F_1)(x_0)$ и $(y, \tilde{y}] \subset intF_1(x_0)$. Это означает, что для мультиотображений F_0 и F_1 выполнены условия Теоремы 1.3.9. ■

Рассмотрим теперь различные свойства непрерывности композиции мультиотображений (см. Определение 1.2.9).

1.3.11. Теорема. *Если мультиотображения $F_0 : X \to P(Y)$ и $F_1 : Y \to P(Z)$ полунепрерывны сверху (снизу), то их композиция $F_1 \circ F_0 : X \to P(Z)$ полунепрерывна сверху (снизу).*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из Теорем 1.2.15(б), 1.2.19(б) и Леммы 1.2.10.■

1.3.12. Теорема. *Пусть мультиотображение $F_0 : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху, мультиотображение $F_1 : Y \to C(Z)$ замкнуто. Тогда композиция $F_1 \circ F_0 : X \to C(Z)$ является замкнутым мультиотображением.*

Доказательство. Пусть точка $z \in Z$ такова, что $z \notin F_1 \circ F_0(x), \;\; x \in X$. Применяя Теорему 1.2.24(б) к замкнутому мультиотображению F_1, для каждой точки $y \in F_0(x)$ найдем окрестности $W_y(z)$ точки z и $V(y)$ точки y такие, что

$$F_1(V(y) \cap W_y(z)) = \varnothing.$$

Пусть $\{V(y_i)\}_{i=1}^n$ - конечное покрытие множества $F_0(x)$. Если теперь $U(x)$ - окрестность точки x такая, что

$$F_0(U(x)) \subset \bigcup_{i=1}^n V(y_i),$$

то

$$(F_1 \circ F_0)(U(x)) \cap (\bigcap_{i=1}^n W_{y_i}(x)) = \varnothing,$$

что и доказывает в силу Теоремы 1.2.24(б) замкнутость мультиотображения $F_1 \circ F_0$. ■

1.3.13. Замечание. Условие полунепрерывности сверху мультиотображения F_0 существенно. Как показывает следующий пример, композиция замкнутых мультиотображений в общем случае может не быть замкнутым мультиотображением.

1.3.14. Пример. Мультиотображения $F_0 : \mathbb{R} \to K(\mathbb{R})$,

$$F_0(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, x \neq 0 \\ \{0\}, x = 0 \end{cases}$$

и $F_1 : \mathbb{R} \to K(\mathbb{R})$,

$$F_1(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, x \neq 0 \\ \{1\}, x = 0 \end{cases}$$

замкнуты, но не полунепрерывны сверху. Их композиция $F_1 \circ F_0 : \mathbb{R} \to K(\mathbb{R})$,

$$(F_1 \circ F_0)(x) = \begin{cases} \{x\}, x \neq 0 \\ \{1\}, x = 0 \end{cases}$$

очевидно, не замкнута.

Рассмотрим теперь операцию перехода к декартову произведению двух мультиотображений (см. Определение 1.2.11).

1.3.15. Теорема. *Если мультиотображения $F_0 : X \to P(Y)$, $F_1 : X \to P(Z)$ полунепрерывны снизу, то их декартово произведение $F_0 \times F_1 : X \to P(Y \times Z)$ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Заметим, что множества вида $V_0 \times V_1$, где $V_0 \subset Y$, $V_1 \subset Z$ - открытые множества, образуют базу топологии пространства $Y \times Z$ и применим Теорему 1.2.19(г) и Лемму 1.2.12(б).■

1.3.16. Теорема. *Если мультиотображения $F_0 : X \to C(Y)$, $F_1 : X \to C(Z)$ замкнуты, то их декартово произведение $F_0 \times F_1 : X \to C(Y \times Z)$ замкнуто.*

Доказательство. Рассмотрим обобщенные последовательности $\{x_\alpha\} \subset X$, $\{v_\alpha\} \subset Y \times Z$ такие, что $x_\alpha \to x$, $v_\alpha \in (F_0 \times F_1)(x_\alpha)$, $v_\alpha \to v$. Тогда $v_\alpha = y_\alpha \times z_\alpha$, где $y_\alpha \in F_0(x_\alpha)$, $z_\alpha \in F_1(x_\alpha)$. По определению топологии в $Y \times Z$ из сходимости $v_\alpha \to v = (y, z)$ вытекают сходимости $y_\alpha \to y, z_\alpha \to z$. Из замкнутости мультиотображений F_0 и F_1 следует $y \in F_0(x), z \in F_1(x)$(Теорема 1.2.24(в)), но это означает, что $v \in (F_0 \times F_1)(x)$, откуда в силу той же Теоремы 1.2.24 (в) следует замкнутость мультиотображения $F_0 \times F_1$. ■

Вопрос о полунепрерывности сверху декартова произведения полунепрерывных сверху многозначных отображений решается при более жестком предположении компактности их образов.

1.3.17. Теорема. *Если мультиотображения $F_0 : X \to K(Y)$, $F_1 : X \to K(Z)$ полунепрерывны сверху, то их декартово произведение $F_0 \times F_1 : X \to K(Y \times Z)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Мультиотображение $F_0 \times F_1$ имеет компактные значения в силу теоремы Тихонова (см. гл. 0). Для произвольной точки $x \in X$ пусть $G \supset (F_0 \times F_1)(x)$ - открытое в $Y \times Z$ множество. Для каждого $(y, z) \in (F_0 \times F_1)(x)$ пусть $G_0(y, z)$ и $G_1(y, z)$ - открытые в Y и Z соответственно множества такие, что $(y, z) \in G_0(y, z) \times G_1(y, z) \subset G$. (Такие множества существуют по определению топологии в $Y \times Z$, см. гл. 0). Для каждого $y \in F_0(x)$ рассмотрим покрытие $\sum_y = \{G_1(y, \tilde{z}) | \tilde{z} \in F_1(x)\}$ множества $F_1(x)$. В силу компактности $F_1(x)$ из $\sum_y$ можно выделить конечное подпокрытие $\sum'_y = \{G_1(y, \tilde{z_1}), ..., G_1(y, \tilde{z_k})\}$. Множество $V(y) = \bigcap\limits_{j=1}^{k} G_0(y, \tilde{z_j})$ - некоторая окрестность точки y в Y, а множество $W_y = \bigcup\limits_{j=1}^{k} G_1(y, \tilde{z_j})$ - окрестность $F_1(x)$ в Z, причем $(V(y) \times W_y) \subset G$. Множества $V(y), y \in F_0(x)$ образуют открытое покрытие компактного множества $F_0(x)$. Выделим из него конечное подпокрытие $\{V(y_i)\}_{i=1}^{l}$, и пусть $V = \bigcup\limits_{i=1}^{l} V(y_i)$ и $W = \bigcap\limits_{i=1}^{l} W_{y_i}$. Тогда V - окрестность $F_0(x)$ в Y, а W - окрестность $F_1(x)$ в Z и $V \times W \subset G$. Тогда из Леммы 1.2.12 (а) и полунепрерывности сверху мультиотображений F_0 и F_1 вытекает существование такой окрестности $U(x)$ точки x, что $(F_0 \times F_1)(x') \subset V \times W \subset G$ для любого $x' \in U(x)$. Это и означает полунепрерывность сверху мультиотображения $F_0 \times F_1$. ■

1.3.2. Алгебраические и другие операции

Пусть X - топологическое пространство, Y - линейное топологическое пространство.

1.3.18. Определение. Пусть $F_0, F_1 : X \to P(Y)$ - мультиотображения. Мультиотображение $F_0 + F_1 : X \to P(Y)$,

$$(F_0 + F_1)(x) = F_0(x) + F_1(x)$$

называется *суммой мультиотображений* F_0 и F_1.

1.3.19. Теорема. *Если мультиотображения $F_0, F_1 : X \to P(Y)$ полунепрерывны снизу, то их сумма $F_0 + F_1 : X \to P(Y)$ полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Согласно Теореме 1.3.15 мультиотображение

$F_0 \times F_1 : X \to P(Y \times Y)$ полунепрерывно снизу. Однозначное отображение $f : Y \times Y \to Y$,

$$f(u, v) = u + v$$

непрерывно. Но

$$F_0 + F_1 = f \circ (F_0 \times F_1),$$

и утверждение теоремы следует из Теоремы 1.3.11.■

Аналогичным применением Теорем 1.3.17 и 1.3.11 устанавливается следующее утверждение.

1.3.20. Теорема. *Если мультиотображения $F_0, F_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывны сверху, то их сумма $F_0 + F_1 : X \to K(Y)$ полунепрерывна сверху.*

1.3.21. Замечание. Отметим существенность условия компактности значений мультиотображений F_0, F_1 в данной теореме. Так, мультиотображение F в Примере 1.1.8, не являющееся, как уже отмечалось, полунепрерывным сверху, может быть представлено как сумма тождественного отображения $F_0(x) \equiv \{x\}$ и постоянного мультиотображения $F_1(x) = \{(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\ z_1 z_2 = 1,\ z_1 > 0, z_2 > 0\}$.

1.3.22. Определение. Пусть $F : X \to P(Y)$ - мультиотображение; $f : X \to \mathbb{R}$ - некоторая функция. Мультиотображение $f \cdot F : X \to P(Y)$,

$$(f \cdot F)(x) = f(x) \cdot F(x)$$

называется *произведением f на F.*

1.3.29. Теорема. *Если мультиотображение $F : X \to P(Y)$ полунепрерывно снизу, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, то произведение $f \cdot F : X \to P(Y)$ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Согласно Теореме 1.3.15 мультиотображение $f \times F : X \to P(\mathbb{R} \times Y)$ полунепрерывно снизу. Отображение $\varphi : \mathbb{R} \times Y \to Y$,

$$\varphi(r, y) = r \cdot y$$

непрерывно. Но тогда согласно Теореме 1.3.11 мультиотображение

$$f \cdot F = \varphi \circ (f \times F)$$

полунепрерывно снизу. ■

Следующее утверждение доказывается аналогичным применением Теорем 1.3.17 и 1.3.11.

1.3.24. Теорема. *Если мультиотображение $F : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, то произведение $f \cdot F : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху.*

1.3.25. Определение. Пусть Y - линейное топологическое пространство, $F : X \to P(Y)$ - некоторое мультиотображение. Мультиотображение $\overline{co}F : X \to Cv(Y)$,

$$(\overline{co}F)(x) = \overline{co}(F(x))$$

называется *выпуклым замыканием мультиотображения F.*

1.3.26. Теорема. *Пусть Y - банахово пространство. Если мультиотображение $F : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху (снизу), то выпуклое замыкание $\overline{co}F : X \to Kv(Y)$ полунепрерывно сверху (снизу).*

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу теоремы Мазура (см. гл. 0) мультиотображение $\overline{co}F$ действительно имеет компактные значения. Пусть мультиотображение F полунепрерывно сверху. Рассмотрим некоторую точку $x \in X$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $\varepsilon_1, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что $F(x') \subset F_{\varepsilon_1}(x)$ для любого $x' \in U(x)$ (Теорема 1.2.39). Но $F_{\varepsilon_1}(x) \subset U_{\varepsilon_1}(\overline{co}F(x))$, следовательно, $coF(x') \subset U_{\varepsilon_1}(\overline{co}F(x))$, поскольку множество $U_{\varepsilon_1}(\overline{co}F(x))$ выпукло. Но тогда $\overline{co}F(x') \subset U_{\varepsilon_1}(\overline{co}F(x))$ для любого $x' \in U(x)$, что и доказывает в силу Теоремы 1.2.39 полунепрерывность сверху мультиотображения $\overline{co}F$. В случае полунепрерывности снизу мультиотображения F полунепрерывность снизу $\overline{co}F$ доказывается аналогичным рассуждением и применением Теоремы 1.2.40.■

1.3.27. Замечание. Как показывает следующий пример, свойство замкнутости мультиотображения может теряться при переходе к выпуклому замыканию.

1.3.28. Пример. Мультиотображение $F : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$,

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \leq 0, \\ \{\pm\frac{1}{x}\}, & x > 0 \end{cases}$$

замкнуто, но его выпуклое замыкание $\overline{co}F : \mathbb{R} \to Cv(\mathbb{R})$,

$$\overline{co}F(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \leq 0, \\ \left[-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right], & x > 0 \end{cases}$$

не замкнуто.

1.3.3. Теорема максимума

Теорема максимума, называемая иногда *принципом непрерывности оптимальных решений*, играет важную роль в приложениях многозначных отображений в теории игр и математической экономике (см. Главу 4).

1.3.29. Теорема. Пусть X, Y - топологические пространства, $\Phi : X \to K(Y)$ - непрерывное мультиотображение, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Тогда функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \max_{\tilde{y} \in \Phi(x)} f(x, \tilde{y})$$

непрерывна, а мультиотображение $F : X \to P(Y)$

$$F(x) = \{y | y \in \Phi(x), f(x, y) = \varphi(x)\}$$

имеет компактные значения и полунепрерывно сверху.

1.3.30. Замечание. Функцию φ и мультиотображение F часто называют *маргинальными.*

Доказательство Теоремы 1.3.29 будет опираться на следующие два утверждения.

1.3.31. Лемма. *Пусть мультиотображение $\Phi : X \to K(Y)$ полунепрерывно снизу, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ - полунепрерывная снизу (в однозначном смысле) функция. Тогда функция $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$,*

$$\varphi(x) = \sup_{\tilde{y} \in \Phi(x)} f(x, \tilde{y})$$

полунепрерывна снизу.

Доказательство. Выберем точку $x \in X$ и допустим сначала, что $\varphi(x) < +\infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$; тогда найдется точка $y \in \Phi(x)$ такая, что $f(x,y) \geq \varphi(x) - \varepsilon$. В силу полунепрерывности снизу функции f найдутся такие окрестности $U_0(x)$ точки x и $V(y)$ точки y, что для любых $x' \in U_0(x), y' \in V(y)$ имеем $f(x',y') > f(x,y) - \varepsilon \geq \varphi(x) - 2\varepsilon$. В силу полунепрерывности снизу мультиотображения Φ найдется окрестность $U_1(x)$ точки x такая, что из $x'' \in U_1(x)$ следует $\Phi(x'') \cap V(y) \neq \varnothing$. Далее, если $\tilde{x} \in U(x) = U_0(x) \cap U_1(x)$, то найдется $\tilde{y} \in \Phi(x'') \cap V(y)$, и тогда $f(\tilde{x},\tilde{y}) > \varphi(x) - 2\varepsilon$, следовательно, $\varphi(\tilde{x}) > \varphi(x) - 2\varepsilon$. Случай $\varphi(x) = +\infty$ рассматривается аналогично.■

1.3.32. Лемма. *Пусть мультиотображение* $\Phi : X \to K(Y)$ *полунепрерывно сверху,* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *- полунепрерывная сверху (в однозначном смысле) функция. Тогда функция* $\varphi : X \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \max_{\tilde{y} \in \Phi(x)} f(x, \tilde{y})$$

полунепрерывна сверху.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любой пары $x \in X, y \in \Phi(x)$ найдутся окрестности $U_y(x)$ и $V(y)$ такие, что из $x' \in U_y(x), y' \in V(y)$ следует $f(x',y') < f(x,y) + \varepsilon$. В силу компактности множества $\Phi(x)$ найдется конечное число точек $y_1, ..., y_n$ таких, что окрестности $V(y_i), 1 \leq i \leq n$, покрывают $\Phi(x)$. Если теперь $U_0(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}(x)$, а $V(\Phi(x)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V(y_i)$, то из $x'' \in U_0(x), y'' \in V(\Phi(x))$ следует $f(x'',y'')$ $< \max\limits_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i) + \varepsilon \leq \varphi(x) + \varepsilon$. Пусть $U_1(x)$ - окрестность точки x такая, что $\Phi(U_1(x)) \subset V(\Phi(x))$. Тогда из $\tilde{x} \in U(x) = U_0(x) \cap U_1(x)$ следует $\Phi(\tilde{x}) \subset V(\Phi(x))$ и для любого $\tilde{y} \in \Phi(\tilde{x})$ имеем $f(\tilde{x},\tilde{y}) < \varphi(x) + \varepsilon$, откуда $\varphi(\tilde{x}) \leq \varphi(x) + \varepsilon$.■

Доказательство теоремы 1.3.29. Для любого $x \in X$ множество

$$\Gamma(x) = \{y | y \in Y, f(x,y) = \varphi(x)\}$$

непусто. Из Лемм 1.3.31 и 1.3.32 вытекает, что функция φ непрерывна, но тогда мультиотображение $\Gamma : X \to C(Y)$ замкнуто (см. Пример 1.2.27). Заметим теперь, что $F = \Phi \cap \Gamma$, и применим Теорему 1.3.3.■

1.4. Непрерывные сечения и аппроксимации многозначных отображений

Пусть X, Y - топологические пространства, $F : X \to P(Y)$ - некоторое мультиотображение.

1.4.1. Определение. Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется *сечением мультиотображения* F, если

$$f(x) \in F(x)$$

для каждой точки $x \in X$.

Задача существования сечений, обладающих определенными свойствами, весьма интересна и находит разнообразные приложения во многих областях математики. Вопрос о существовании измеримых сечений будет затронут в Разделе 1.5, здесь же мы рассмотрим непрерывные сечения.

Приводимая ниже теорема о существовании непрерывного сечения основана на классической теореме Э. Майкла [276].

1.4.2. Теорема. *Пусть X - паракомпактное пространство; Y - банахово пространство. Тогда каждое полунепрерывное снизу мультиотображение $F : X \to Cv(Y)$ имеет непрерывное сечение.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующее утверждение о существовании приближенного сечения.

1.4.3. Лемма. *Пусть X - паракомпактное пространство, Y - нормированное пространство, $F : X \to Pv(Y)$ - полунепрерывное снизу мультиотображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ такое, что $f_\varepsilon \in U_\varepsilon(F(x))$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $U_y = F_-^{-1}(B_\varepsilon(y))$ для любого $y \in Y$. Эти множества открыты в силу полунепрерывности снизу мультиотображения F. Система $\{U_y\}_{y \in Y}$ образует открытое покрытие паракомпактного пространства X. Пусть $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$ - локально конечное подпокрытие этого покрытия. Рассмотрим $\{p_{y_j}\}_{j \in J}$ - разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$. Определим непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ следующим образом:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j\in J} p_{y_j}(x) y_j.$$

Нетрудно проверить, что f_ε является искомым.■

Доказательство Теоремы 1.4.2. Построим индуктивно последовательность непрерывных отображений $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$f_k : X \to Y,$$

удовлетворяющих условиям:
1)$||f_{k+1}(x) - f_k(x)|| < \frac{1}{2^{k-1}}$;
2)$f_k(x) \in U_{\frac{1}{2^k}}(F(x))$ для каждого $x \in X$.
Существование f_1, , удовлетворяющего условию (2), следует из Леммы 1.4.3. Если $f_1, ..., f_k$ уже построены, то f_{k+1} строится следующим образом. По предположению индукции

$$F_{k+1}(x) = F(x) \cap U_{2^{-k}}(f_k(x)) \neq \varnothing, \forall x \in X.$$

Из Теоремы 1.3.9 вытекает, что мультиотображение $F_{k+1} : X \to Pv(Y)$ полунепрерывно снизу. Тогда из Леммы 1.4.3 следует существование непрерывного отображения $f_{k+1} : X \to Y$ такого, что

$$f_{k+1}(x) \in U_{2^{-k-1}}(F_{k+1}(x))$$

для каждого $x \in X$. Но тогда для каждого $x \in X$

$$||f_{k+1}(x) - f_k(x)|| < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

то есть условие (1) выполнено и

$$f_{k+1}(x) \in U_{2^{-k-1}}(F(x)),$$

что означает выполнение и условия (2).

Из условия (1) следует, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к непрерывной функции f, для которой в силу условия (2) и замкнутости значений мультиотображения F выполнено $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$, то есть f является искомым непрерывным сечением.■

1.4.4. Замечание. Теорема Майкла в полном объеме содержит также утверждение о том, что для T_1 -пространства X существование непрерывного сечения для всякого полунепрерывного снизу мультиотображения $F : X \to Cv(Y)$, где Y - банахово пространство, есть достаточное условие паракомпактности X. Доказательство этого утверждения может быть найдено в [276], [20].

Из доказанной теоремы вытекает возможность построить продолжение непрерывного сечения.

1.4.5. Следствие. *Пусть X – паракомпактное пространство, Y - банахово пространство, A – замкнутое подмножество в X. Пусть $F : X \to Cv(Y)$ - полунепрерывное снизу мультиотображение. Если отображение $g : A \to Y$ является непрерывным сечением мультиотображения F, суженного на A, то существует непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что:*
1) f – непрерывное сечение F;
2) $f(x) = g(x)$ для любого $x \in A$.

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\widetilde{F} : X \to Cv(Y)$,

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in A, \\ F(x), & x \notin A \end{cases}$$

Нетрудно убедиться (проверьте!), что это мультиотображение также является полунепрерывным снизу и для него выполнены условия Теоремы 1.4.2. Следовательно, мультиотображение $\widetilde{F}$ имеет непрерывное сечение f, которое и будет искомым.■

Границы, установленные условиями Теоремы 1.4.2, достаточно жестки и гарантировать существование непрерывного сечения мультиотображения можно далеко не всегда. Отметим прежде всего важность требования полноты пространства Y и замкнутости значений мультиотображения F в условиях указанной теоремы. Соответствующие контрпримеры можно найти в работе [276].

Следующий пример иллюстрирует важность условия выпуклости значений мультиотображения F. Мультиотображение, которое мы построим, будет не только полунепрерывным снизу, но и непрерывным, однако оно не будет допускать непрерывного сечения, поскольку его значения будут невыпуклыми множествами.

1.4.6. Пример. Пусть $\overline{B_1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ замкнутый единичный шар на плоскости с центром в нуле, S - его граница. Рассмотрим мультиотображение $F : \overline{B_1}(0) \to K(\overline{B_1}(0))$, определенное следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} S \backslash B_{||x||}(\frac{x}{||x||}), & x \neq 0, \\ S, & x = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что мультиотображение F непрерывно. Предположим теперь, что оно допускает непрерывное сечение $f : \overline{B_1}(0) \to \overline{B_1}(0)$.

Согласно теореме Брауэра (см. Главу 0) отображение f имеет неподвижную точку, т.е. найдется точка $x_0 \in \overline{B_1}(0)$ такая, что $x_0 = f(x_0)$.

Но тогда $x_0 \in F(x_0)$, что невозможно по построению F.

Тем не менее, существование непрерывных сечений может быть доказано и для некоторых классов мультиотображений с невыпуклыми значениями. Введем необходимые понятия. Пусть $I = [a, b]$ - некоторый отрезок числовой прямой, снабженный мерой Лебега; E - банахово пространство. Символ $L^1(I; E)$ обозначает банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых по Бохнеру функций $\varphi : I \to E$ с нормой

$$\| \varphi \| = \int_I \| \varphi(s) \|_E \, ds.$$

Для измеримого подмножества $m \subset I$, пусть $\kappa_m : I \to [0, 1]$ обозначает его характеристическую функцию

$$\kappa_m(t) = \begin{cases} 1, & t \in m, \\ 0, & t \notin m. \end{cases}$$

1.4.7. Определение. Множество $M \subset L^1(I; E)$ называется *разложимым* (или *выпуклым по переключению*), если для любых $\varphi, \psi \in M$ и любого измеримого подмножества $m \subset I$ функция

$$\kappa_m \cdot \varphi + \kappa_{I \backslash m} \cdot \psi$$

принадлежит M.

Совокупность всех непустых замкнутых разложимых подмножеств пространства $L^1(I; E)$ обозначим $D(L^1(I; E))$.

Справедлив следующий аналог теоремы Майкла (см.[202], [165]).

1.4.8. Теорема. *Пусть X - сепарабельное метрическое пространство. Тогда каждое полунепрерывное снизу мультиотображение*

$$F : X \to D(L^1(I; E))$$

имеет непрерывное сечение.

Доказательство этого утверждения может быть найдено в [191], [232].

Вернемся к примерам несуществования непрерывных сечений. Еще один, совсем простой пример, особенно интересен для нас. Он показывает, что нельзя гарантировать существование непрерывного сечения даже для многозначных отображений с выпуклыми компактными значениями, если мы выходим из класса полунепрерывных снизу мультиотображений.

1.4.9. Пример. Рассмотрим мультиотображение $F : [0,1] \to Kv([0,1])$

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ [0,1], & x = \frac{1}{2}, \\ \{1\}, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что отображение F полунепрерывно сверху (и замкнуто) и не может иметь непрерывного сечения.

Итак, мы видим, что класс многозначных отображений, допускающих однозначные непрерывные сечения, достаточно узок: в частности, в него не входят полунепрерывные сверху мультиотображения, очень важные для приложений. Однако возможность изучения полунепрерывных сверху многозначных отображений с помощью однозначных отображений существует. Для достаточно широкого класса таких мультиотображений могут быть построены *однозначные непрерывные аппроксимации.*

Пусть (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) - метрические пространства.

1.4.10. Определение. Пусть $F : X \to P(Y)$ - некоторое мультиотображение. Непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-аппроксимацией мультиотображения* F, если для каждого $x \in X$ найдется $x' \in X$ такое, что $\varrho_X(x, x') < \varepsilon$ и

$$f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(x')).$$

Ясно, что это понятие может быть равносильно выражено условием

$$f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(B_\varepsilon(x))$$

для всех $x \in X$.

Если ввести метрику ϱ в декартовом произведении пространств $X \times Y$ с помощью равенства

$$\varrho((x, y), (x', y')) = \max\{\varrho_X(x, x'), \varrho_Y(y, y')\},$$

то мы получаем еще одну геометрически наглядную интерпретацию: график Γ_{f_ε} содержится в ε-окрестности графика Γ_F.

Справедливо следующее утверждение о существовании ε-аппроксимации.

1.4.11. Теорема. *Пусть (X, ϱ) - метрическое пространство, Y - нормированное пространство. Для всякого полунепрерывного сверху мультиотображения $F : X \to Cv(Y)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ такое, что:*
(i) для каждого $x \in X$ найдется $x' \in X$ такое, что $\varrho(x, x') < \varepsilon$ и

$$f_\varepsilon(x) \cup F(x) \subset U_\varepsilon(F(x'));$$

(ii) $f_\varepsilon(X) \subset coF(X)$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $x \in X$ найдется $\delta(x) \in (0, \varepsilon)$ таково, что $F(B_{\delta(x)}(x)) \subset U_\varepsilon(F(x))$. Для $\eta(x) = \frac{1}{4}\delta(x)$ рассмотрим покрытие $\{B_{\eta(x)}(x)\}_{x \in X}$ пространства X и впишем в него локально конечное покрытие $\{V_j\}_{j \in J}$. Пусть $\{p_j\}_{j \in J}$ - соответствующее разбиение единицы.

Выбирая для каждого индекса $j \in J$ произвольную точку $y_j \in F(V_j)$, определим отображение $f_\varepsilon : X \to Y$ равенством

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j \in J} p_j(x) y_j.$$

Отображение f_ε является искомым. Действительно, пусть $x \in X$ принадлежит всем членам семейства $\{V_j\}_{j=1}^n$ из покрытия $\{V_j\}_{j \in J}$.

Каждое V_j, $j = 1, ..., n$ вписано в некоторый шар $B_{\eta(x_j)}(x_j)$, поэтому $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_{\eta(x_j)}(x_j)$. Пусть k, $1 \leq k \leq n$, таково, что $\eta_k = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \eta(x_j)$. Возьмем $x' = x_k$, тогда $x_j \in B_{\eta_k}(x)$ и, следовательно, $x_j \in B_{2\eta_k}(x')$ для всех $j = 1, ..., n$. Тогда $B_{\eta(x_j)}(x_j) \subset B_{4\eta_k}(x')$, $j = 1, ..., n$. Но тогда мы получаем

$$y_j \in F(V_j) \subset F(B_{\eta(x_j)}(x_j)) \subset F(B_{4\eta_k}(x')) \subset U_\varepsilon(F(x'))$$

для всех $j = 1, ..., n$, а так как множество $U_\varepsilon(F(x'))$ выпукло, то $f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(F(x'))$. Поскольку $x \in V_j, j = 1, ..., n$, мы получаем также, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x'))$. ■

1.4.12. Определение. Однозначную ε-аппроксимацию, удовлетворяющую требованию (ii) Теоремы 1.4.11, будем называть *регулярной.*

Нетрудно видеть, что сужение ε-аппроксимации мультиотображения F на подмножество пространства X не является, вообще говоря, ε-аппроксимацией сужения F на это же подмножество. Справедливо, однако, следующее утверждение.

1.4.13. Лемма. *Пусть X, Y - метрические пространства; $F : X \to P(Y)$ - полунепрерывное сверху мультиотображение; $X_1 \subset X$ – компактное подмножество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что, если $f : X \to Y$ – δ'-аппроксимация F, $0 < \delta' \leq \delta$, то $f\,|_{X_1}$ есть ε-аппроксимация $F\,|_{X_1}$.*

Доказательство. В предположении противного найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, последовательность δ_n-аппроксимаций $f_{\delta_n} : X \to Y$, $(\delta_n \to 0)$ мультиотображения F и последовательность точек $\{x_n\} \subset X_1$ таких, что

$$(x_n, f_{\delta_n}(x_n)) \notin U_{\varepsilon_0}(\Gamma_{F|_{X_1}}), \;\; n = 1, 2, ...$$

В силу компактности множества X_1, мы можем считать без ущерба для общности, что $x_n \to x_0 \in X_1$. Пусть η, $0 < \eta \leq 2\varepsilon_0$ таково, что $F(B_\eta(x_0)) \subset U_{\varepsilon_0/2}(F(x_0))$.

Найдем такой номер N_0, что $\delta_n < \min\{\varepsilon_0/2, \eta/2\}$ и $\varrho(x_n, x_0) < \eta/2$ для всех $n \geq N_0$. Но тогда для тех же n выполнено

$$f_{\delta_n}(x_n) \in U_{\delta_n}(F(B_{\delta_n}(x_n))) \subset U_{\delta_n}(F(B_\eta(x_0))) \subset$$

$$\subset U_{\delta_n}(U_{\varepsilon_0/2}(F(x_0))) \subset U_{\varepsilon_0}(F(x_0)).$$

Поскольку также $\varrho(x_n, x_0) < \varepsilon_0$, мы получаем противоречие с предположением. ■

Отметим в заключение, что Теорема 1.4.11 также имеет "разложимый" аналог. Действительно, справедливо следующее утверждение (см. [165]).

1.4.14. Теорема. *Пусть X - метрическое пространство; мультиотображение $F : X \to D(L^1(I; E))$ полунепрерывно сверху. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ мультиотображение F обладает ε-аппроксимацией $f_\varepsilon : X \to L^1(I; E)$ такой, что $f_\varepsilon(X) \subset decF(X)$, где $decF(X)$ обозначает разложимую оболочку $F(X)$, то есть наименьшее разложимое множество, содержащее $F(X)$.*

О существовании однозначных ε-аппроксимаций для других классов невыпукло-значных мультиотображений см. раздел "Библиографические указания и дополнения".

1.5. Измеримые многозначные функции и мультиоператор суперпозиции

1.5.1. Измеримые многозначные функции и многозначный интеграл

Понятие измеримой многозначной функции (мультифункции) является естественным обобщением классического понятия измеримой функции. Оно оказывается весьма полезным в многочисленных приложениях в различных разделах анализа, теории дифференциальных уравнений и теории оптимизации. В этом разделе мы опишем некоторые свойства измеримых мультифункций. Отметим, что рассматриваемые ниже определения и утверждения приводятся в виде, удобном для последующих применений, и мы не стремимся к их максимальной общности.

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ - компактный интервал, снабженный мерой Лебега μ и E - банахово пространство.

1.5.1. Определение. Мультифункция $F : I \to K(E)$ называется *измеримой*, если для любого открытого множества $V \subset E$ множество

$F_+^1(V)$ измеримо.

Ясно, что эквивалентным является условие измеримости полного прообраза $F_-^{-1}(W)$ для любого замкнутого множества $W \subset E$. Следующее утверждение дает еще два эквивалентных определения измеримости.

1.5.2. Лемма. *Мультифункция $F : I \to K(E)$ измерима тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: а) для любого замкнутого множества $W \subset E$ малый прообраз $F_+^{-1}(V)$ измерим; б) для любого открытого множества $V \subset E$ полный прообраз $F_-^{-1}(V)$ измерим.*

Доказательство. 1) Пусть мультифункция F измерима, $W \subset E$ - замкнутое множество. Из Леммы 1.2.3(д) вытекает, что для произвольной последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \to 0$,

$$F_+^{-1}(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_+^{-1}(U_{\varepsilon_n}(W)),$$

следовательно, множество $F_+^{-1}(W)$ измеримо.

2) Обратно, если $F_+^{-1}(W)$ - измеримое множество для всякого замкнутого $W \subset E$ то для любого открытого множества $V \subset E$ множество $F_-^{-1}(V)$ измеримо. Пусть $W \subset E$ - замкнутое множество. Легко проверить, что при компактности значений F для произвольной последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}, \varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \to 0$, выполнено

$$F_-^{-1}(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_-^{-1}(U_{\varepsilon_n}(W)),$$

следовательно, $F_-^{-1}(W)$ измеримо.■

Отметим, что в случае сепарабельности пространства E можно получить эквивалентные определения измеримости мультифункции, если требовать измеримость лишь малых (или полных) прообразов открытых (или замкнутых) шаров пространства E рационального радиуса с центрами в точках счетного плотного подмножества. Доказательство, использующее тот факт, что такие открытые шары образуют базу топологии пространства E, несложно и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Из Определения 1.5.1 и Леммы 1.5.2 вытекает, что полунепрерывная сверху или снизу мультифункция $F : I \to K(E)$ является измеримой.

Для описания дальнейших свойств измеримых мультифункций нам понадобятся следующие понятия.

1.5.3. Определение. Функция $f : I \to E$ называется *измеримым сечением* мультифункции $F : I \to K(E)$, если отображение f измеримо и

$$f(t) \in F(t)$$

для μ - п.в. $t \in I$.

Множество всех измеримых сечений F обозначим S_F.

1.5.4. Определение. Счетное семейство $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_F$ называется *представлением Кастена* для F, если

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}} f(t) = F(t)$$

для μ - п.в. $t \in I$.

Мультифункцию $F : I \to K(E)$ называют *ступенчатой*, если существует разбиение I на конечное семейство непересекающихся измеримых подмножеств $\{I_j\}$, $\bigcup_j I_j = I$ такое, что F постоянно на каждом I_j.

1.5.5. Определение. Мультифункция $F : I \to K(E)$ называется *сильно измеримой*, если существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ступенчатых функций такая, что

$$h(F_n(t), F(t)) \to 0$$

при $n \to \infty$ для μ-п.в. $t \in I$, где h - метрика Хаусдорфа в $K(E)$ (см. Определение 1.2.42).

Известно, что понятие сильно измеримой функции (и, следовательно, сильно измеримого сечения) определяется аналогично. Отметим, что измеримая мультифункция не является, вообще говоря, сильно измеримой (см., например, [191]). Но для мультифункций со значениями в сепарабельном банаховом пространстве эти понятия совпадают. Это становится ясно из следующего утверждения, описывающего основные свойства измеримых мультифункций.

1.5.6. Теорема. *Пусть E - сепарабельное банахово пространство. Для мультифункции $F : I \to K(E)$ следующие условия эквивалентны:*

(а) F измерима;

(б) для любого счетного плотного подмножества $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства E функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = \varrho(x_n, F(t)),$$

измеримы (ϱ - метрика в E, порожденная нормой);

(в) F обладает представлением Кастена;

(г) F сильно измерима;

(д) F измерима как однозначная функция из I в метрическое пространство $(K(E), h)$;

(е) F обладает свойством Лузина: для каждого $\delta > 0$ существует замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$ такое, что $\mu(I \backslash I_\delta) \leq \delta$ и сужение F на I_δ непрерывно.

Доказательство. 1) (а)<=>(б). Заметим, что набор шаров $B_r(x_n)$ рационального радиуса r образует счетную базу топологии пространства E. Тогда условие (а) эквивалентно измеримости прообраза $F_-^{-1}(B_r(x_n))$ каждого такого шара. Но этот прообраз совпадает с лебеговым множеством

$$\Delta_{x_n}(r) = \{t | t \in I, \varphi_n(t) < r\}.$$

2) (б)=>(в). Пусть $Q = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - какое-либо счетное всюду плотное подмножество E. Определим последовательность функций $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\psi_k : I \to E$ с помощью следующего индуктивного процесса. Положим

$$\psi_1(t) = x_i,$$

если при данном $t \in I$, i - наименьший номер такой, что

$$\varphi_i(t) = \varrho(x_i, F(t)) \leq \frac{1}{2}.$$

Если ψ_k уже построено, то ψ_{k+1} определяется как

$$\psi_{k+1}(t) = x_i,$$

если при данном t, i - наименьший номер такой, что

$$\varphi_i(t) \leq \frac{1}{2^{k+1}},$$

и

$$\varrho(\psi_k(t), x_i) \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Функции ψ_k измеримы. Действительно, заметим, что эти функции принимают не более чем счетное множество значений , а лебеговы множества функций φ_i,

$$\bar{\Delta}_i(\alpha) = \{t | t \in I, \varphi_i(t) \leq \alpha\}$$

измеримы. Тогда функция ψ_1 измерима, так как

$$\{t | t \in I, \psi_1(t) = x_i\} = \bar{\Delta}_i(\frac{1}{2}) \setminus \bigcup_{p<i} \bar{\Delta}_p(\frac{1}{2}))$$

измеримое множество. Далее предположив, что ψ_k, $k \geq 1$ измерима, из следующего равенства получим измеримость ψ_{k+1} :

$$\{t | t \in I, \psi_{k+1}(t) = r_i\} = \{\bar{\Delta}_i(\frac{1}{2^{k+1}}) \cap [t | t \in I, \varrho(\psi_k(t), x_i) \leq \frac{1}{2^{k-1}}]\} \setminus$$

$$\setminus \{\bigcup_{p<i} [\bar{\Delta}_p(\frac{1}{2^{k+1}}) \cap [t | t \in I, \varrho(\psi_k(t), x_p) \leq \frac{1}{2^{k-1}}]]\}$$

Для любого $t \in I$ имеем

$$\varrho(\psi_k(t), \psi_{k+1}(t)) \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

поэтому последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к некоторой измеримой функции $\psi_Q : I \to E$.

Из соотношений

$$\varrho(\psi_k(t), F(t)) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

вытекает, что ψ_Q является измеримым сечением F.

Итак, каждому счетному всюду плотному подмножеству $Q \subset E$, можно сопоставить измеримое сечение ψ_Q. Отметим, что если для некоторых $t \in I$ и $x \in F(t)$ выполнено

$$\varrho(x, x_1) \leq \frac{1}{2^k},$$

то $\psi_k(t) = x_1$ и

$$\varrho(x, \psi_Q(t)) \leq \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^k}.$$

Пусть теперь $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность счетных всюду плотных подмножеств E, которая построена по следующему правилу. Если $Q_0 = \{x_1, ..., x_i, ...\}$ то $Q_m = \{x_{m_1}, ..., x_{m_l}, ...\}$, где $x_{m_r} = x_{m+r}$.

Тогда последовательность функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$,

$$f_m = \psi_{Q_m}$$

образует искомое представление Кастена для F.

Действительно, если заданы $t \in I, x \in F(t)$ и целое $k > 0$, то можно найти такой номер m, что

$$\varrho(x_{m_1}, x) \leq \frac{1}{2^k}$$

и следовательно

$$\varrho(x, \psi_{Q_m}(t)) \leq \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^k}.$$

3) (в)=>(б). Пусть $x \in E$ - произвольная точка и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - представление Кастена для F. Тогда

$$\varphi_x(t) = \varrho(x, F(t)) = \inf_n \parallel x - f_n(t) \parallel,$$

следовательно, функция φ_x измерима.

4) (г)<=>(д)<=>(е). Известно, что метрическое пространство $(K(E), h)$ сепарабельно (см., например, [119]). Тогда указанные равносильности являются прямым следствием аналогичных свойств для однозначных измеримых функций (см., например, [128], Теорема 23_2 и Следствие Теоремы 33 гл.4).

5) (е) => (а). Пусть $W \subset E$ - замкнутое множество. Для произвольного $\delta > 0$ возьмем замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$ такое, что $\mu(I \setminus I_\delta) \leq \delta$ и сужение F на I_δ непрерывно. Тогда полный прообраз $F_-^{-1}(W)$ состоит из замкнутого множества $F_-^{-1}(W) \cap I_\delta$ и множества $F_-^{-1}(W) \cap (I \setminus I_\delta)$, внешняя мера которого не превышает δ и, следовательно, множество $F_-^{-1}(W)$ измеримо.

6) (в) => (д). Пусть $M \in K(E)$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - представление Кастена для F. Тогда

$$h(M, F(t)) = \max\{\sup_n \varrho(f_n(t), M), \sup_{x \in M} \inf_n \|x - f_n(t)\|\},$$

и таким образом функция $t \to h(M, F(t))$, $t \in I$ измерима.■

1.5.7. Замечание. Отметим, что понятие измеримости может быть введено и для замкнуто-значных мультифункций $F : I \to C(E)$. Из доказательства Теоремы 1.5.6 ясно, что в этом случае условия (а), (б) и (в) также равносильны (см. [173]).

1.5.8. Следствие. *Пусть E - сепарабельное банахово пространство.*
(а) Пусть $\{F_j\}_{j \in J}$ - не более чем счетное семейство измеримых мультифункций $F_j : I \to K(E)$ такое, что $\bigcap_{j \in J} F_j(t) \neq \varnothing$ для каждого $t \in I$, тогда пересечение $\bigcap_{j \in J} F_j(t) : I \to K(E)$ - измеримая мультифункция;

(б) Если мультифункции $F_0, F_1 : I \to K(E)$ измеримы, то их декартово произведение $F_0 \times F_1 : I \to K(E \times E)$ и сумма $F_0 + F_1 : I \to K(E)$ - измеримые мультифункции;

(в) Если мультифункция $F : I \to K(E)$ измерима, а $f : I \to \mathbb{R}$ - измеримая функция, то произведение $f \cdot F : I \to K(E)$ - измеримая мультифункция;

(г) Если мультифункция $F : I \to K(E)$ измерима, то ее выпуклое замыкание $\overline{co}F : I \to Kv(E)$ - измеримая мультифункция.

Доказательство. Все эти свойства выводятся из свойства Лузина для измеримых мультифункций (Теорема 1.5.6(е)) и утверждений о непрерывности соответствующих операций над мультиотображениями (см. Раздел 1.3). ■

1.5.9. Следствие. *Пусть E - сепарабельное банахово пространство. Если мультифункции $F_0, F_1 : I \to K(E)$ измеримы, то функция отклонения $\varrho_* : I \to \mathbb{R}_+$,*

$$\varrho_*(t) = \varrho_*(F_0(t), F_1(t))$$

и функция Хаусдорфа $h : I \to \mathbb{R}_+$,

$$h(t) = h(F_0(t), F_1(t))$$

измеримы.

Доказательство. Измеримость функции ϱ_* следует из того, что

$$\varrho_*(t) = \sup_n [\varrho(x_n, F_1(t)) - \varrho(x_n, F_0(t))],$$

где $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - счетное плотное подмножество E, и из Теоремы 1.5.6 (б). Измеримость же функции h вытекает из того, что

$$h(t) = h(F_0(t), F_1(t)) = \max\{\varrho_*(F_0(t), F_1(t)), \varrho_*(F_1(t), F_0(t))\}.$$

■

1.5.10. Лемма. *Пусть E - банахово пространство. Если семейство измеримых мультифункций $\{F_j\}_{j \in J}$, $F_j : I \to K(E)$ не более чем счетно и существует такая мультифункция $\Phi : I \to K(E)$, что*

$$\bigcup_{j \in J} F_j(t) \subset \Phi(t)$$

для всех $t \in I$, то мультифункция $\overline{\bigcup_{j \in J} F_j} : I \to K(E)$,

$$\overline{\bigcup_{j \in J} F_j}(t) = \overline{\bigcup_{j \in J} F_j(t)}$$

измерима.

Доказательство. Пусть $V \subset E$ - открытое множество, тогда

$$(\overline{\bigcup_{j \in J} F_j})_-^{-1}(V) = (\bigcup_{j \in J} F_j)_-^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} [(F_j)_-^{-1}(V)]$$

- измеримое множество, и остается воспользоваться Леммой 1.5.2 (б). ■

Мы уже отмечали, что в произвольном (несепарабельном) пространстве E измеримая мультифункция может не быть сильно измеримой. В то же время справедливо следующее утверждение.

1.5.11. Теорема. *Пусть E банахово пространство; $F : I \to K(E)$ - сильно измеримая мультифункция. Тогда F измерима и обладает представлением Кастена, состоящим из сильно измеримых функций.*

Доказательство. Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность ступенчатых мультифункций, аппроксимирующая мультифункцию F. Тогда для μ-п.в. $t \in I$ множества $F(t)$ содержатся в сепарабельном банаховом пространстве

$$E' = \overline{sp} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(I),$$

где $\overline{sp}$ обозначает замыкание линейной оболочки, и мы можем применить Теорему 1.5.6.■

Рассмотрим теперь понятие *многозначного интеграла.* Пусть E - банахово пространство и $F : I \to P(E)$ - некоторая мультифункция.

Символом S_F^1 мы будем обозначать множество всех интегрируемых по Бохнеру сечений мультифункции F, т.е.

$$S_F^1 = \{f \mid f \in L^1(I;E),\ f(t) \in F(t) \text{ для } \mu-\text{п.в. } t \in I\}.$$

Если $S_F^1 \neq \varnothing$, то мультифункция F называется *интегрируемой* и

$$\int_{\mathcal{T}} F(s)ds := \{\int_{\mathcal{T}} f(s)ds \mid f \in S_F^1\}$$

для любого измеримого подмножества $\mathcal{T} \subset I$. Ясно, что если мультифункция $F : I \to K(E)$ сильно измерима и *интегрально ограничена,* то есть существует суммируемая функция $\nu \in L_+^1(I)$ такая, что

$$\|F(t)\| := \max\{\|y\| \mid y \in F(t)\} \leq \nu(t)$$

для μ-п.в. $t \in I$, то F интегрируема.

Многозначный интеграл обладает многими интересными свойствами. Отметим лишь некоторые из них, связанные с понятием выпуклости.

1.5.12. Теорема. *Пусть E - сепарабельное банахово пространство; $F : I \to K(E)$ - измеримая интегрируемая мультифункция. Тогда*

а) $\overline{\int_I \overline{co} F(s)ds} = \overline{co} \int_I F(s)ds$;

б) множество $\overline{\int_I F(s)ds}$ *выпукло; более того, если пространство E конечномерно, то выпукл и сам интеграл* $\int_I F(s)ds$;

в) если F интегрально ограничена, то

$$\int_I \overline{co} F(s)ds = \overline{\int_I F(s)ds};$$

г) если E рефлексивно, F интегрально ограничена и имеет выпуклые значения, то интеграл $\int_I F(s)ds$ замкнут.

д) если F постоянна: $F(t) \equiv A \in Kv(E)$, то

$$\int_I F(s)ds = A\mu(I).$$

Доказательства свойств (а)-(г) могут быть найдены, например, в [141], [232]. Свойство (д) вытекает из очевидного соотношения $A\mu(I) \subset \int_I F(s)ds$ и того факта, что, в силу выпуклости множества A, интегральные суммы, определяющие интеграл $\frac{1}{\mu(I)} \int_I f(s)ds$ для произвольного измеримого сечения f мультиотображения F, содержатся в A.

1.5.2. Условия Каратеодори и лемма Филиппова

Пусть E_0, E - банаховы пространства; как и прежде, I обозначает компактный интервал, снабженный мерой Лебега μ.

1.5.13. Определение. Мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ *удовлетворяет верхним [нижним] условиям Каратеодори,* если:

а) для всех фиксированных $x \in E_0$ мультифункция

$$F(\cdot, x) : I \to K(E)$$

измерима;

б) почти для всех фиксированных $t \in I$ мультиотображение

$$F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$$

полунепрерывно сверху [соответственно, полунепрерывно снизу].

Если мультиотображение F удовлетворяет и верхним и нижним условиям Каратеодори, то оно называется *удовлетворяющим условиям Каратеодори.*

Иначе говоря, мультиотображение F удовлетворяет условиям Каратеодори, если для него выполнено условие (а) Определения 1.5.13 и условие

б$'$) почти для всех фиксированных $t \in I$ мультиотображение

$$F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$$

непрерывно.

Мы будем рассматривать далее некоторые свойства мультиотображений, удовлетворяющих указанным условиям Каратеодори.

Прежде всего отметим, что, если пространства E_0, E сепарабельны, то из Теоремы 1.2.44 и Теоремы 1.5.6 (д) вытекает, что мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$, удовлетворяющее условиям Каратеодори, может рассматриваться как однозначное отображение в сепарабельное метрическое пространство $(K(E), h)$, удовлетворяющее "однозначным" условиям Каратеодори. Поэтому к F можно применить соответствующий результат для однозначных отображений (см., например, [232], Теорема 7.11) и вывести из него следующее *свойство Скорца–Драгони,* представляющее параметрическую версию свойства Лузина.

1.5.14. Теорема *Пусть E_0, E - сепарабельные банаховы пространства и мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любого $\delta > 0$ существует* *замкнутое подмножество $I_\delta \subset I$, такое, что $\mu(I \setminus I_\delta) \leq \delta$, и сужение F на $I_\delta \times E_0$ непрерывно.*

Приведем все же "независимое" доказательство этого результата для случая конечномерных пространств $E_0 = \mathbb{R}^m$ и $E = \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое натуральное число N и рассмотрим куб $K_N \subset \mathbb{R}^m$:

$$K_N = \{x | x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m, |x_r| \leq N, 1 \leq r \leq m\}.$$

Для каждого натурального p, разделив ребра куба K_N на 2^p равных частей, разобьем K_N на 2^{mp} кубов $K_{pq}, 1 \leq q \leq 2^{mp}$.

Пусть h - метрика Хаусдорфа на множестве $K(\mathbb{R}^n)$; для каждого K_{pq} рассмотрим функцию $æ_{pq} : I \to \mathbb{R}$,

$$æ_{pq}(t) = \sup_{x,y \in K_{pq}} h(F(t,x); F(t,y)).$$

Если Q - счетное всюду плотное подмножество K_N , то из непрерывности F по x , а следовательно, и непрерывности в метрике Хаусдорфа (Теорема 1.2.44) при почти всех $t \in I$ следует, что

$$æ_{pq}(t) = \sup_{x,y \in K_{pq} \cap Q} h(F(t,x); F(t,y))$$

для почти всех $t \in \Delta$. Но тогда из Следствия 1.5.9 вытекает, что функции $æ_{pq}$ измеримы. Следовательно, функции $æ_p : I \to \mathbb{R}$, $p = 1, 2, ...$

$$æ_p(t) = \max_q æ_{pq}(t),$$

также измеримы. Из равномерной непрерывности в метрике Хаусдорфа мультиотображения F на компакте K_N при почти всех $t \in I$ следует, что последовательность $\{x_p\}$ сходится к 0 почти всюду на I.

Для заданного $\delta > 0$ рассмотрим последовательность $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$\delta_i = \frac{\delta}{2^{N+i+1}}.$$

Обозначим x_{pq} центр куба K_{pq}. Мультифункции $F(\cdot, x_{1q}) : I \to K(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q \leq 2^m$, измеримы, следовательно в силу свойства Лузина найдется компакт $I_1 \subset I$ такой, что $\mu(I \setminus I_1) \leq \delta_1$ и сужения мультифункций $F(\cdot, x_{1q})$, $1 \leq q \leq 2^m$ на I_1 непрерывны. Затем найдем компакт $I_2 \subset I_1$ такой, что $\mu(I \setminus I_2) \le \delta_1 + \delta_2$ и сужения мультифункций $F(\cdot, x_{pq})$, $p = 1, 2$; $1 \le q \le 2^{mp}$ на I_2 непрерывны. Продолжая этот процесс, мы построим убывающую последовательность $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ компактных подмножеств I такую, что $\mu(I \setminus I_j) \le \sum\limits_{i=1}^{j} \delta_i$ и сужения мультифункций $F(\cdot, x_{pq}) : I \to K(R^n)$ при $1 \le p \le j$, $1 \le q \le 2^{mp}$ на I_j непрерывны.

Если теперь $I' = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, то

$$\mu(I \setminus I') \ \le \ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \frac{\delta}{2^{N+1}},$$

и сужение каждой мультифункции $F(\cdot, x_{pq})$ при любом натуральном p и $1 \le q \le 2^{mp}$ на I' непрерывно.

В силу теоремы Егорова (см., например, [86]) мы можем найти теперь компакт $I_N \subset I'$ такой, что $\mu(I' \setminus I_N) \le \frac{\delta}{2^{N+1}}$ (следовательно, $\mu(I \setminus I_N) \le \frac{\delta}{2^N}$) и сходимость функций $æ_p$ к нулю равномерна на I_N.

Рассмотрим теперь произвольные $(t_0, x_0) \in I_N \times K_N$ и $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости $æ_p$ к нулю на I_N следует, что найдется такой номер p_0, что $x_{p_0}(t) \le \varepsilon$ для всех $t \in I_N$. Обозначим $C(x_0)$ объединение всех кубов $K_{p_0 q}$, $1 \le q \le 2^{mp_0}$, содержащих точки x такие, что $\|x - x_0\| \le \frac{N}{2^{p_0+1}}$ и пусть $D(x_0)$ - множество всех центров $x_{p_0 q}$ таких кубов.

Нетрудно видеть, что любые два куба из $C(x_0)$ имеют общую точку. Поэтому для любых $t \in I_N$ и $x, y \in C(x_0)$ получаем

$$h(F(t,x), F(t,y)) \le 2æ_{p_0}(t) \le 2\varepsilon.$$

Отсюда

$$h(F(t,x), F(t, D(x_0))) \le 2\varepsilon$$

для любых $(t, x) \in I_N \times C(x_0)$. В силу непрерывности всех мультифункций $F(\cdot, x_{pq})$ на I_N и конечности множества $D(x_0)$ можно указать такое число $\eta > 0$, что $t \in I_N$, $|t - t_0| \le \eta$ влечет

$$h(F(t_0, D(x_0)), F(t, D(x_0))) \le \varepsilon.$$

Но тогда, если $(t, x) \in I_N \times K_N$, $|t - t_0| \le \eta$ и $\|x - x_0\| \le \frac{N}{2^{p_0+1}}$, то

$$h(F(t,x), F(t_0, x_0)) \le h(F(t,x), F(t, D(x_0))) +$$

$$+ h(F(t, D(x_0)), F(t_0, D(x_0))) + h(F(t_0, D(x_0)), F(t_0, x_0)) \le 5\varepsilon$$

и, следовательно, мультиотображение F непрерывно на $I_N \times K_N$. Если теперь положить

$$I_\delta = \bigcap_{N=1}^{\infty} I_N,$$

то $\mu(I \setminus I_\delta) \leq \delta$, и мультиотображение F непрерывно на $I_\delta \times \mathbb{R}^m$. ■

Используя свойство Скорца-Драгони, мы мы можем доказать теперь следующую теорему, которая является обобщением весьма важного в теории управляемых систем результата, установленного в его первоначальном виде А.Ф.Филипповым [121]. В современной литературе это утверждение известно как *"Лемма Филиппова о неявной функции"*.

1.5.15. Теорема. *Пусть E_0, E - сепарабельные банаховы пространства и мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть $U : I \to K(E_0)$ - измеримая мультифункция и $g : I \to E$ - измеримая функция такая, что*

$$g(t) \in F(t, U(t))$$

почти для всех $t \in I$. Тогда существует такое измеримое сечение $u \in S_U$, что

$$g(t) \in F(t, u(t))$$

почти для всех $t \in I$.

Доказательству будет предшествовать следующая лемма, справедливость которой легко может быть проверена.

1.5.16. Лемма. *Пусть мультиотображение $F : I \times E_0 \to C(E)$ замкнуто, отображение $g : I \to E$ непрерывно и для любого $t \in I$ найдется $x \in E_0$ такое, что*

$$g(t) \in F(t, x)$$

. Тогда мультифункция $\Gamma : I \to C(E_0)$,

$$\Gamma(t) = \{x | x \in E_0, g(t) \in F(t, x)\}$$

замкнута.

Доказательство Теоремы 1.5.15. Без ущерба для общности можно считать, что отображение F непрерывно по второму аргументу и $g(t) \in F(t, U(t))$ для всех $t \in I$. Рассмотрим мультифункцию $\Gamma : I \to C(E_0)$,

$$\Gamma(t) = \{x | x \in E_0, g(t) \in F(t, x)\}.$$

Нетрудно видеть, что мультифункция $\Phi = \Gamma \cap U : I \to K(E_0)$ корректно определена и ее измеримое сечение является искомой функцией $u : I \to E_0$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать измеримость мультиотображения Φ.

Зафиксируем $\delta > 0$. В силу Теоремы 1.5.14 найдется такой компакт $I_1 \subset I$, что $\mu(I \setminus I_1) \leq \frac{\delta}{2}$ и сужение мультиотображения F на $I_1 \times E_0$ непрерывно. Применение свойства Лузина к однозначному отображению g и мультиотображению U дает существование такого замкнутого подмножества $I_2 \subset I$, что $\mu(I \setminus I_2) \leq \frac{\delta}{2}$ и сужения g и U на I_2 непрерывны.

Пусть $I_\delta = I_1 \cap I_2$, тогда $\mu(I \setminus I_\delta) \leq \delta$ и из Теоремы 1.2.29 следует замкнутость мультиотображения F на $I_\delta \times E_0$, но тогда в силу Леммы 1.5.16 мультифункция Γ замкнута на I_δ. Следовательно (Теорема 1.3.3), мультиотображение Φ полунепрерывно сверху на I_δ, откуда в силу Теоремы 1.5.6 (e) и измеримости полунепрерывного сверху мультиотображения легко вытекает измеримость Φ на I. ■

1.5.17. Замечание. Нередко рассматривается более частный случай леммы Филиппова: отображение F предполагается однозначным. Утверждение леммы в этом случае означает существование измеримого сечения $u : I \to E_0$ мультиотображения U такого, что

$$g(t) = f(t, u(t))$$

почти для всех $t \in I$.

1.5.3. Мультипeратор суперпозиции

Каждое мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ порождает некоторый оператор, сопоставляющий каждой мультифункции $Q : I \to P(E_0)$ мультифункцию $\Phi : I \to P(E)$ по правилу

$$\Phi(t) = F(t, Q(t)).$$

По аналогии с известным из анализа и теории дифференциальных уравнений понятием мы будем называть это соответствие *оператором Немыцкого.* Нас будут интересовать свойства этого оператора, связанные с его действием на измеримые однозначные и многозначные функции.

Выделим прежде всего следующее свойство *суперпозиционной измеримости.*

1.5.18. Теорема. *Если* E_0, E *- сепарабельные банаховы пространства и мультиотображение* $F : I \times E_0 \to K(E)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, то для любой измеримой мультифункции* $Q : I \to K(E_0)$ *мультифункция* Φ *измерима.*

Доказательство. Без ущерба для общности мы можем предположить, что мультиотображение F непрерывно по x для всех $t \in I$. Тогда в силу Теоремы 1.2.35 отображение Φ имеет компактные значения.

Зафиксируем $\delta > 0$ и найдем такой компакт $I_\delta \subset I$, что $\mu(I \backslash I_\delta) \le \delta$ и сужения Q на I_δ и F на $I_\delta \times E_0$ непрерывны (Теоремы 1.5.6 (e) и 1.5.14). Если $i : I_\delta \to I_\delta$ - тождественное отображение, то в силу Теорем 1.3.15 и 1.3.17 мультифункция $i \times Q : I_\delta \to K(I_\delta \times E_0)$ непрерывна. Но тогда и мультифункция $\Phi = F \circ (i \times Q)$ непрерывна на I_δ (Теорема 1.3.11). Измеримость Φ следует теперь из Теоремы 1.5.6(e).$\blacksquare$

С учетом того, что полунепрерывные сверху или снизу мультифункции измеримы, рассуждения такого же типа приводят к следующим достаточным условиям суперпозиционной измеримости.

1.5.19. Теорема. *Если* E_0, E *- сепарабельные банаховы пространства и мультиотображение* $F : I \times E_0 \to K(E)$ *полунепрерывно сверху или полунепрерывно снизу, то оно суперпозиционно измеримо.*

Существенным обстоятельством является то, что свойство суперпозиционной измеримости мультиотображения F теряется, как только мы переходим от условий Каратеодори к верхним или нижним условиям Каратеодори. Рассмотрим следующие примеры.

1.5.20. Пример. Пусть $D \subset [0,1]$ - произвольное неизмеримое множество.

а) Пусть мультиотображение $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ определено следующим образом:

$$F(t,x) = \begin{cases} [0,1], & \text{если } x = t \quad \text{и } t \in [0,1] \setminus D; \\ [0,1], & \text{если } x = t+1 \text{ и } t \in D; \\ \{1\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение F удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, но не удовлетворяет условиям Каратеодори.

Если теперь $i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i(t) = t$, то мультифункция $\Phi : [0,1] \to K(\mathbb{R})$,

$$\Phi(t) = F(t, i(t)) = \begin{cases} [0,1], & t \in [0,1] \setminus D; \\ \{1\}, & t \in D, \end{cases}$$

очевидно, не является измеримой.

б) Пусть мультиотображение $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R})$ определено следующим образом:

$$F(t,x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } x = t \text{ и } t \in [0,1] \setminus D; \\ \{1\}, & \text{если } x = t \text{ и } t \in D; \\ [0,1] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это мультиотображение удовлетворяет нижним условиям Каратеодори, но не удовлетворяет условиям Каратеодори.

Подставляя снова функцию $i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i(t) = t$, получаем мультифункцию

$$\Phi(t) = F(t, i(t)) = \begin{cases} \{0\}, & t \in [0,1] \setminus D; \\ \{1\}, & t \in D, \end{cases}$$

также не являющуюся измеримой.

Однако оказывается все же, что, хотя для многозначного отображения F, удовлетворяющего верхним условиям Каратеодори, свойство суперпозиционной измеримости и не выполнено, оператор Немыцкого и в этом случае обладает определенными "хорошими" качествами, которые к тому же выполнены в произвольных (не обязательно сепарабельных) банаховых пространствах. Именно, введем следующее понятие.

1.5.21. Определение. Пусть E_0, E - банаховы пространства; мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ *суперпозиционно селектируемо,* если для любой сильно измеримой функции $q : I \to E_0$ -

существует сильно измеримое сечение $f : I \to E$ мультифункции $\Phi : I \to K(E)$,

$$\Phi(t) = F(t, q(t)).$$

1.5.22. Теорема. *Пусть E_0, E - банаховы пространства и мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ таково, что*

$F1$) для каждого $x \in E_0$ мультифункция $F(\cdot, x) : I \to K(E)$ имеет сильно измеримое сечение;

$F2$) для μ-п.в. $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot) : E_0 \to K(E)$ полунепрерывно сверху.

Тогда мультиотображение F суперпозиционно селектируемо.

Доказательство. Аппроксимируем функцию q последовательностью ступенчатых функций $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n : I \to E_0$, сходящихся к q μ-почти всюду на I. Из условия ($F1$) следует, что мы можем образовать последовательность сильно измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : I \to E$,

$$f_n(t) \in F(t, q_n(t)) \quad \text{для } \mu - \text{п.в. } t \in I.$$

Переопределяя эту последовательность на множестве нулевой меры, мы можем полагать, что функции последовательности $\{f_n\}$ принимают свои значения в сепарабельном банаховом пространстве $E' \subset E$,

$$E' = \overline{sp} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(I).$$

Теперь для μ-п.в. $t \in I$ и $m \geq 1$ мы можем определить

$$\Phi_m(t) = \overline{\bigcup_{k=m}^{\infty} f_k(t)}.$$

Из условия ($F2$) и Теоремы 1.2.35 следует, что множества $\Phi_m(t)$ компактны и Теорема 1.5.6 (в) влечет, что $\{\Phi_m\}$, $\Phi_m : I \to K(E')$ - последовательность измеримых мультифункций.

Для μ-п.в. $t \in I$ множества $\Phi_m(t)$, $m \geq 1$ образуют убывающую последовательность компактов и, принимая во внимание Следствие 1.5.8 (а), мы заключаем, что мультифункция $\widetilde{\Phi} : I \to K(E')$,

$$\widetilde{\Phi}(t) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) \quad \text{для } \mu - \text{п.в. } t \in I$$

корректно определена и измерима. Из условия (б) следует, что

$$\widetilde{\Phi}(t) \subset \Phi(t) = F(t, q(t))$$

для μ-п.в. $t \in I$ и применение Теоремы 1.5.6 (в) обеспечивает существование измеримой функции $f \in S_{\widetilde{\Phi}}$, которая сильно измерима, поскольку $\widetilde{\Phi}(I) \subset E'$. ■

1.5.23. Следствие. Пусть пространства E_0, E и мультиотображение F такие же, как в Теореме 1.5.22. Тогда для любой сильно измеримой мультифункции $Q : I \to K(E_0)$ существует сильно измеримое сечение $f : I \to E$ мультифункции Φ, $\Phi(t) = F(t, Q(t))$.

Доказательство. Из Теоремы 1.5.11 мы получаем существование сильно измеримого сечения q мультифункции Q, к которому мы можем применить доказанную теорему. ■

1.5.24. Следствие. *Если пространства E_0, E сепарабельны и мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, то F суперпозиционно селектируемо.*

Напомним (см. Главу 0), что *нормой ограниченного множества* A в нормированном пространстве мы называем величину

$$||A|| = \sup_{a \in A} \|a\|.$$

Мы можем ввести теперь следующее понятие.

1.5.25. Определение. Пусть E_0, E - банаховы пространства; мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ суперпозиционно селектируемо и удовлетворяет следующему условию

$F3$) для любого непустого ограниченного подмножества $\Omega \subset E_0$ существует такая функция $\nu_\Omega \in L^1_+(I)$, что

$$\|F(t, x)\| \leq \nu_\Omega(t)$$

для всех $x \in \Omega$ и п.в. $t \in I$.

Тогда мультиотображение $\mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to P(L^1(I; E))$, сопоставляющее каждой непрерывной функции $q \in C(I; E_0)$ множество всех суммируемых по Бохнеру сечений мультифункции Φ, $\Phi(t) = F(t, q(t))$, называтся *мультиоператором суперпозиции,* порожденным F.

Отметим, что суммируемость сильно измеримых сечений мультифункции Φ вытекает из непрерывности q и условия $(F3)$. Нас будут интересовать свойства непрерывности мультиоператора суперпозиции.

Рассмотрим сначала случай мультиотображения F, полунепрерывного сверху по x.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, которые нам понадобятся ниже.

Мы будем использовать следующее понятие.

1.5.26. Определение. Пусть E - банахово пространство; последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(I; E)$ называтся *полукомпактной,* если она: а) *интегрально ограничена,* то есть найдется такая функция $\nu \in L_+^1(I)$, что

$$\|f_n(t)\| \leq \nu(t)$$

для п.в. $t \in I$; б) множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in I$.

1.5.27. Лемма. *Полукомпактная последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо компактна, то есть из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

См. [247], Предложение 4.2.1.

1.5.28. Лемма. (**Лемма Мазура.**) *Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов нормированного пространства, слабо сходящаяся к u. Тогда найдется двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_{ik}\}_{i=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty}$ такая, что: а) $\sum\limits_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} = 1$ для всех $i = 1, 2, ...$; б) для каждого $i = 1, 2, ...$ найдется номер $k_0 = k_0(i)$ такой, что $\lambda_{ik} = 0$ для всех $k \geq k_0$; в) последовательность выпуклых комбинаций $\{\widetilde{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$,*

$$\widetilde{u}_i = \sum_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} u_k$$

сходится к u по норме.

См., например, [129].

1.5.29. Лемма. *Пусть E - банахово пространство. Если последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(I;E)$ сходится по норме пространства $L^1(I;E)$ к функции f, то существует подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, которая будет сходиться к f почти всюду на I.*

См., например, [128], Глава IV, Теорема 38.

При условии выпуклозначности порождающего мультиотображения F справедливо следующее утверждение о замкнутости мультиоператора суперпозиции.

1.5.30. Теорема. *Пусть E_0, E - банаховы пространства; E_1 - нормированное пространство; мультиотображение $F : I \times E_0 \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F1)$ - $(F3)$ и $a : L^1(I;E) \to E_1$ - непрерывный линейный оператор. Тогда композиция*

$$a \circ \mathcal{P}_F : C(I;E_0) \to Cv(E_1)$$

- замкнутое мультиотображение.

Доказательство. Отметим прежде всего, что выпуклость значений мультиотображения $a \circ \mathcal{P}_F$ следует из выпуклости значений F и линейности оператора a.

Рассмотрим последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \in C(I;E_0)$; $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in E_1$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \|q_n - q\|_C = 0, \ \ z_n \in a \circ \mathcal{P}_F(q_n), \ \ \lim_{n\to\infty} \|z_n - z\|_{E_1} = 0.$$

Выберем последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(I;E)$, $f_n \in \mathcal{P}_F(q_n)$, $z_n = a(f_n)$. Применяя условия $(F2)$, $(F3)$ и Теорему 1.2.35 легко вывести из сходимости последовательности $\{q_n\}$, что последовательность $\{f_n\}$ полукомпактна и, следовательно, в силу Леммы 1.5.27 она слабо компактна. Переходя к подпоследовательности, мы будем считать без ущерба для общности, что она слабо сходится к функции $f \in L^1(I;E)$.

Применяя теперь Лемму 1.5.28, мы получаем последовательность $\{\widetilde{f}_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\widetilde{f}_i \in L^1(I;E)$, $\widetilde{f}_i = \sum\limits_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} f_k$, сходящуюся к f по норме пространства $L^1(I;E)$. Используя Лемму 1.5.29, мы снова без ущерба для общности будем предполагать, что последовательность $\{\widetilde{f}_i\}$ сходится к f почти всюду на I.

Из условия $(F2)$ следует, что почти для каждого $t \in I$ по данному $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $i_0 = i_0(\varepsilon, t)$ такое, что

$$F(t, q_i(t)) \subset F_\varepsilon(t, q(t)) \quad \text{для всех} \quad i \geq i_0.$$

Но тогда и

$$f_i(t) \in F_\varepsilon(t, q(t))$$

для всех $i \geq i_0$, а следовательно, в силу выпуклости множества $F_\varepsilon(t, q(t))$ и

$$\widetilde{f}_i(t) \in F_\varepsilon(t, q(t)) \text{ для всех } i \geq i_0.$$

Следовательно

$$f(t) \in F(t, q(t)) \text{ п.в. } t \in I,$$

то есть $f \in \mathcal{P}_F(q)$.

С другой стороны,

$$a(\widetilde{f}_i) = \sum_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} a(f_k) = \sum_{k=i}^{\infty} \lambda_{ik} z_k,$$

поэтому $\lim\limits_{i \to \infty} \|a(\widetilde{f}_i) - z\|_{E_1} = 0$.

Из непрерывности оператора a тогда следует, что $z = a(f)$, поэтому $z \in a \circ \mathcal{P}_F(q)$ и остается применить Теорему 1.2.24 (в). ■

1.5.31. Следствие. *Пусть мультиотображение $F : I \times E_0 \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F1)$ - $(F3)$. Тогда мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to Cv(L^1(I; E))$ замкнут.*

1.5.32. Замечание. Более того, из доказательства Теоремы 1.5.30 видно, что мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F$ *слабо замкнут* в следующем смысле. Пусть последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \in C(I; E_0)$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(I; E)$, $f_n \in \mathcal{P}_F(q_n)$ таковы, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|q_n - q\|_C = 0$, $\{f_n\}$ слабо сходится к $f \in L^1(I; E)$. Тогда $f \in \mathcal{P}_F(q)$.

Пусть $I = [t_0, T]$ и $j : L_1(I; E) \to C(I; E)$ - оператор интегрирования

$$j(f)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s) ds.$$

1.5.33. Определение. Композицию

$$j \circ \mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to Cv(C(I; E))$$

назовем *интегральным мультиоператором,* порожденным мультиотображением F.

1.5.34. Следствие. *Пусть мультиотображение* $F : I \times E_0 \to Kv(E)$ *удовлетворяет условиям* $(F1)$ *-* $(F3)$*. Тогда интегральный мультиоператор* $j \circ \mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to Cv(C(I; E))$ *замкнут.*

Рассмотрим теперь случай, когда мультиотображение F полунепререрывно снизу по x. Заметим, что нижние условия Каратеодори не обеспечивают существования мультиоператора суперпозиции, ибо, как показывает Пример 1.5.20 (б), при этих условиях не выполнено не только требование суперпозиционной измеримости, но и суперпозиционной селектируемости.

Одной из подходящих замен нижних условий Каратеодори в этом случае является условие почти полунепрерывности снизу.

Пусть E_0, E - сепарабельные банаховы пространства.

1.5.35. Определение. Мультиотображение $F : I \times E_0 \to K(E)$ называется *почти полунепрерывным снизу,* если

(F_L) существует последовательность непрерсекающихся компактных подмножеств $\{I_n\}$, $I_n \subset I$ такая, что: а) $\mu(I \setminus \bigcup_n I_n)$ и б) сужение F на каждое множество $J_n = I_n \times E_0$ полунепрерывно снизу.

Мы будем предполагать также далее, что для почти полунепрерывного снизу мультиотображения F выполнено условие интегральной ограниченности $(F3)$.

Из Теоремы 1.5.19 следует, что почти полунепрерывное снизу мультиотображение F суперпозиционно измеримо и следовательно для него определен мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F$.

Из Леммы 1.5.29 вытекает, что $\mathcal{P}_F$ имеет замкнутые значения. Справедливо также следующее утверждение.

1.5.36. Теорема. *Пусть мультиотображение* $F : I \times E_0 \to K(E)$ *почти полунепрерывно снизу и удоввлетворяет условию* $(F3)$*. Тогда мультиоператор суперпозиции* $\mathcal{P}_F : C(I; E_0) \to C(L^1(I; E))$ *полунепрерывен снизу.*

Для доказательства нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

1.5.37. Лемма. *Для любой функции* $q_0 \in C(I; E_0)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что*

$$F(t, q_0(t)) \subset F_\varepsilon(t, q(t)) \ \textit{для п.в.} \ t \in I$$

для каждой функции $q \in C(I; E_0)$, $\|q - q_0\|_C < \delta$.

Доказательство. Поскольку мультифункция $F(t, q_0(t))$ измерима, используя для нее свойство Лузина (Теорема 1.5.6 (e)) и Теорему 1.2.44, мы получим, что для любого $\rho > 0$ найдется компакт $I_\rho \subset I$, $\mu(I \setminus I_\rho) \leq \rho$ и число $\omega > 0$ такие, что

$$h(F(t_1, q_0(t_1)), F(t_2, q_0(t_2))) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $t_1, t_2 \in I_\rho$, $|t_1 - t_2| < \omega$, где h - метрика Хаусдорфа.

Поскольку F почти полунепрерывно снизу, мы можем покрыть компактное множество - график $\Gamma_{q_0} \subset I \times E_0$ функции q_0 конечным числом шаров $B_i = \{(t, x) | (t, x) \in I \times E_0 : \ |t_i - t| < \omega_i, \|q_0(t_i) - x\|_{E_0} < \omega_i\}$, $t_i \in I$, $i = 1, ..., m$; $0 < \omega_i < \omega$ так что будет выполнено

$$F(t_i, q_0(t_i)) \subset F_{\frac{\varepsilon}{2}}(t, x)$$

для всех $(t, x) \in B_i \bigcap (\bigcup_n J_n)$.

Тогда получаем

$$F(t, q_0(t)) \subset F_{\frac{\varepsilon}{2}}(t_i, q_0(t_i)) \subset F_\varepsilon(t, x)$$

для всех $(t, x) \in B_i \bigcap (\bigcup_n J_n)$, $t \in I_\rho$. Из произвольности ρ вытекает, что последнее соотношение выполнено для п.в. $t \in I$, $(t, x) \in B_i$.

Для отыскания желаемого числа $\delta > 0$ достаточно теперь выбрать δ-окрестность компакта Γ_{q_0}, содержащуюся в $\bigcup_{i=1}^m B_i$. ■

1.5.38. Лемма. *Если* $q \in C(I; E_0)$ *и* $z : I \to E$ *- измеримая функция, то найдется функция* $f \in \mathcal{P}_F(q)$ *такая, что*

$$\|z(t) - f(t)\|_E = \varrho(z(t), F(t, q(t)) \ \textit{для п.в.} \ t \in I,$$

где ϱ *- расстояние от точки до множества, порожденное нормой в* E.

Доказательство этого утверждения несложно и основывается на том факте, что пересечение измеримых мультифункций измеримо (ср. Следствие 1.5.8 (a)). Но поскольку мы рассматривали только измеримые мультифункции с компактными значениями, мы отсылаем читателя к [112], Лемма 2.1.4 или [191], Предложение 3.5 (b).

Доказательство Теоремы 1.5.36. Из Леммы 1.5.38 вытекает, что для любой суммируемой функции $z : I \to E$ выполнено

$$\varrho_{L^1}(z, \mathcal{P}_F(q)) = \int_I \varrho(z(s), F(s, q(s)))ds.$$

Возьмем произвольную функцию $q_0 \in C(I; E_0)$ и зададим $\varepsilon > 0$. Согласно Лемме 1.5.37, пусть $\delta > 0$ таково, что

$$F(t, q_0(t)) \subset F_\varepsilon(t, q(t)) \text{ для п.в. } t \in I$$

для каждой функции $q \in C(I; E_0)$, $\|q - q_0\|_{E_0} < \delta$.

Если мы возьмем теперь произвольную функцию $z \in \mathcal{P}_F(q_0)$, то из последних соотношений получаем, что

$$\varrho_{L^1}(z, \mathcal{P}_F(q)) < \varepsilon \cdot \mu(I),$$

что означает

$$\mathcal{P}_F(q_0) \subset U_{\varepsilon \cdot \mu(I)}(\mathcal{P}_F(q)).$$

Для того, чтобы сделать заключение о полунепрерывности снизу мультиоператора суперпозиции $\mathcal{P}_F$ остается применить достаточную часть Теоремы 1.2.40 (как уже отмечалось, в ней компактность значений мультиотображения не используется).■

Глава 2. Неподвижные точки и топологическая степень

Задача о разрешимости различного вида включений составляет один из важных разделов современного анализа мультиотображений. Наиболее часто она принимает вид задачи о неподвижной точке.

Пусть $X \subseteq Y$ - некоторые множества, $F : X \to P(Y)$ - мультиотображение. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой мультиотображения* F, если $x \in F(x)$.

Множество всех неподвижных точек F будем обозначать $FixF$.

Ясно, что понятие неподвижной точки мультиотображения является прямым обобщением понятия неподвижной точки для обычного однозначного отображения. Хорошо известна важная роль, которую играют различные принципы неподвижной точки в теоремах функционального анализа, топологии, дифференциальных уравнений и других областей математики. Понятие неподвижной точки мультиотображения столь же естественно возникает во многих задачах и весьма полезно при рассмотрении ряда прикладных вопросов. Ниже мы убедимся в этом на примерах из теории линейных операторов, теории дифференциальных включений и управляемых систем, теории обобщенных динамических систем, а также теории игр и математической экономики.

Как и в случае однозначных отображений, существуют различные подходы к изучению неподвижных точек мультиотображений. Опишем некоторые из них.

2.1. Неподвижные точки сжимающих мультиотображений

2.1.1. Теорема Надлера

Принцип Банаха неподвижной точки для сжимающего отображения является одной из самых известных и применяемых в приложениях теорем о неподвижной точке. Докажем его аналог для мультиотображений.

Пусть (X, ϱ) - полное метрическое пространство; $C(X)$, как и прежде, обозначает совокупность всех непустых замкнутых подмножеств

X; h - расширенная метрика Хаусдорфа в $C(X)$, порожденная ϱ (см. Определение 1.2.42).

2.1.1. Определение. Мультиотображение $F : X \to C(X)$ называется *k-липшицевым,* если существует число $k > 0$ такое, что для любых $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$h(F(x), F(y)) \le k\varrho(x, y).$$

Если $k < 1$, то k-липшицево мультиотображение F называется *сжимающим (k-сжимающим).*

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке [280], [185].

2.1.2. Теорема. *Пусть X - полное метрическое пространство, $F : X \to C(X)$ k-сжимающее мультиотображение. Пусть x_0 - некоторая точка из пространства X и $\varrho(x_0, F(x_0)) < \delta$. Тогда F имеет неподвижную точку x_* такую, что $\varrho(x_0, x_*) < \frac{\delta}{1-k}$.*

Доказательство. Построим последовательность точек $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ такую, что

$$x_n \in F(x_{n-1}) \qquad n = 1, 2, ...,$$

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) < k^n\delta \qquad n = 0, 1, ...$$

Эту последовательность будем строить индуктивно. Пусть x_0 – заданная точка, точку x_1 выберем произвольно из $F(x_0)$ так, чтобы $\varrho(x_0, x_1) < \delta$. Допустим, что уже построены точки $x_0, x_1, ..., x_n$ нашей последовательности. Тогда

$$\varrho(x_n, F(x_n)) \le h(F(x_{n-1}), F(x_n)) \le k\varrho(x_{n-1}, x_n) < k^n\delta.$$

Следовательно, существует такая точка $x_{n+1} \in F(x_n)$, что

$$\varrho(x_n, x_{n+1}) < k^n\delta.$$

Нетрудно видеть, что построенная последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Действительно,

$$\varrho(x_n, x_{n+p}) \le \sum_{i=n}^{n+p-1} \varrho(x_i, x_{i+1}) < \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i\delta < \frac{k^n\delta}{1-k}.$$

Так как пространство X полно, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x_* \in X$.

Покажем, что точка x_* является неподвижной точкой мультиотображения F. Действительно,

$$\varrho(x_{n+1}, F(x_*)) \leq h(F(x_n), F(x_*)) \leq k\varrho(x_n, x_*).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_{n+1}, F(x_*)) = 0$. Так как множество $F(x_*)$ замкнуто, то $x_* \in F(x_*)$.

Так как

$$\varrho(x_0, x_*) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varrho(x_n, x_{n+1}) < \sum_{n=0}^{\infty} k^n \delta = \frac{\delta}{1-k},$$

то и требуемая оценка доказана.■

Нетрудно видеть, что в отличие от однозначного случая, сжимающие мультиотображения, вообще говоря, могут иметь много неподвижных точек. Более того, справедливо следующее утверждение.

2.1.3. Теорема. *Пусть X - полное метрическое пространство, $F : X \to C(X)$ сжимающее мультиотображение с константой Липшица $k \in (0, \frac{1}{2})$ и пусть $\overline{x}$ – неподвижная точка F. Если $F(\overline{x}) \neq \{\overline{x}\}$, то у F существует по крайней мере еще одна неподвижная точка.*

Доказательство. Пусть $x_0 \neq \overline{x}$ - произвольная точка из $F(\overline{x})$, тогда

$$\varrho(x_0, F(x_0)) \leq h(F(\overline{x}), F(x_0)) \leq k\varrho(\overline{x}, x_0) < \delta,$$

где $\delta = k_1\varrho(\overline{x}, x_0)$, $k < k_1 < \frac{1}{2}$. Тогда в силу Теоремы 2.1.2 существует неподвижная точка x_* отображения F такая, что

$$\varrho(x_0, x_*) < \frac{\delta}{1-k} = \frac{k_1\varrho(\overline{x}, x_0)}{1-k} < \varrho(\overline{x}, x_0).$$

Следовательно, $x_* \neq \overline{x}$. ■

2.1.2. Сжимающие мультиотображения, зависящие от параметра.

Пусть E – банахово пространство, X – замкнутое выпуклое подмножество E, Y - метрическое пространство.

Рассмотрим мультиотображение $F : X \times Y \to Cv(X)$ удовлетворяющее следующим условиям:

i) существует такое число $k \in (0,1)$, что для любых $x', x'' \in X$ и любого $y \in Y$ справедливо неравенство:

$$h(F(x', y), F(x'', y) \le k||x' - x''||;$$

ii) мультиотображение F - полунепрерывно снизу по совокупности переменных.

В силу Теоремы 2.1.2 для любого $y \in Y$ мультиотображение $F_y = F(\cdot, y) : X \to Cv(X)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку. Обозначим $\mathcal{F}(y) = \{x \mid x \in F_y(x)\}$. Возникает мультиотображение $\mathcal{F} : Y \to C(X)$.

2.1.4. Теорема. *Пусть выполнены условия (i), (ii) и пусть A - замкнутое подмножество в Y, $f : A \to X$ - непрерывное отображение такое, что $f(y) \in F(f(y), y)$ для любого $y \in A$.*

Тогда существует непрерывное отображение $g : Y \to X$ удовлетворяющее условиям:
а) g - непрерывное сечение мультиотображения $\mathcal{F}$, т.е.
$g(y) \in F(g(y), y)$ для любого $y \in Y$;
б) отображение g является непрерывным продолжением отображения f, т.е. $g|_A = f$.

Доказательство. Построим последовательность непрерывных отображений $g_n : Y \to X$, $n = 0, 1, 2, ...$, удовлетворяющих условиям:

1) $g_n(y) \in F(g_{n-1}(y), y)$ для любого $y \in Y$ и $n = 1, 2, ...$,
2) существует такая непрерывная функция $r : Y \to \mathbb{R}_+$, что для любого $y \in Y$ и $n = 0, 1, 2, ...$ выполнено неравенство $||g_{n+1}(y) - g_n(y)|| < k^n r(y)$,
3) $g_n|_A = f$ для любого $n = 0, 1, 2, ...$

Эту последовательность будем строить индуктивно. В качестве отображения $g_0 : Y \to X$ возьмем произвольное непрерывное продолжением отображения f на все пространство Y, существующее в силу теоремы Титце-Дугунджи (см. Главу 0). Определим мультиотображение $\Psi_1 : Y \to Cv(E)$ формулой $\Psi_1(y) = F(g_0(y), y)$. Согласно Теореме 1.3.11 это мультиотображение полунепрерывно снизу. Следовательно, в силу Теоремы 1.4.2 мультиотображение Ψ_1 имеет непрерывное сечение $q : Y \to E$. Зададим непрерывную функцию $r : Y \to \mathbb{R}_+$ как $r(y) = ||g_0(y) - q(y)|| + 1$.

Рассмотрим мультиотображение $Q : Y \to Pv(E)$,

$$Q(y) = \{x \in E \mid ||g_0(y) - x|| < r(y)\}.$$

Нетрудно видеть, что график этого мультиотображения открыт в пространстве $Y \times E$. Заметим также, что $Q(y) \cap \Psi_1(y) \neq \emptyset$ для любого $y \in Y$ и $f(y) \in (Q(y) \cap \Psi_1(y))$ для любого $y \in A$.

Тогда, опираясь на теорему Майкла (Теорема 1.4.2), нетрудно доказать, что существует непрерывное отображение $g_1 : Y \to E$, которое является непрерывным сечением Ψ_1, совпадает с отображением f на множестве A и $||g_1(y) - g_0(y)|| < r(y)$. Очевидно, что построенное отображение удовлетворяет условиям (1) – (3).

Предположим, что мы уже построили отображения $g_0, g_1, ..., g_n$, удовлетворяющие условиям (1) – (3). Положим $\Psi_{i+1}(y) = F(g_i(y), y)$. Тогда для всех $y \in Y$ имеем

$$\varrho(g_n(y), \Psi_{n+1}(y)) \leq h(F(g_{n-1}(y), y); F(g_n(y), y)) \leq$$

$$\leq k||g_n(y) - g_{n-1}(y)|| < k^n r(y).$$

Тогда у мультиотображения Ψ_{n+1} существует непрерывное сечение $g_{n+1}(y)$, которое удовлетворяет условиям (1) – (3). Это и заканчивает построение последовательности $\{g_n\}$.

Покажем теперь, что для любого $y \in Y$ последовательность $x_n = g_n(y)$ является фундаментальной. Действительно,

$$||x_{n+p} - x_n|| \leq ||x_{n+1} - x_n|| + ||x_{n+2} - x_{n+1}|| + ... + ||x_{n+p} - x_{n+p-1}|| <$$

$$< r(y)(k^n + k^{n+1} + ... + k^{n+p-1}) < \frac{r(y)}{1-k} k^n.$$

Обозначим $g(y) = \lim\limits_{n \to \infty} g_n(y)$ и докажем непрерывность этого отображения. Действительно, пусть y_0 - произвольная точка из Y, тогда в некоторой окрестности V этой точки для любого $y \in V$ справедливо неравенство $||r(y)|| \leq ||r(y_0)|| + 1$. Тогда на множестве V последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится к отображению g, что и гарантирует непрерывность g на этом множестве. Так как точка y_0 выбиралась произвольно, то g является непрерывным отображением.

Переходя к пределу при фиксированном y в условии (1) для построенной последовательности, получаем включение $g(y) \in F(g(y), y)$.

Условие $g|_A = f$ вытекает из свойства (3) для построенной последовательности. ■

В качестве приложения этой теоремы докажем теорему Ричери (B.Ricceri) [308] о структуре множества неподвижных точек сжимающих мультиотображений. Напомним следующее понятие (см. Главу 0).

Пусть X - метрическое пространство, A - подпространство X.

2.1.5. Определение Множество A является *ретрактом* X, если существует непрерывное отображение $r : X \to A$ такое, что $r(x) = x$ для любого $x \in A$. В этом случае отображение r называется *ретракцией.*

Ретракты "наследуют" многие топологические свойства пространства X. Например, если пространство X связно, то его ретракт также связен и т.д. (см. [26]).

2.1.6. Теорема. *Пусть X - замкнутое выпуклое подмножество банахова пространства E, $F : X \to Cv(X)$ - сжимающее мультиотображение. Тогда множество $\mathcal{F} = FixF$ является ретрактом X.*

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\widehat{F} : X \times X \to Cv(X)$ определенное условием: $\widehat{F}(x, y) = F(x)$. Рассмотрим отображение вложения $f : \mathcal{F} \to X$, $f(y) = y$. Очевидно, что $f(y) \in \widehat{F}(f(y), y)$ для любого $y \in \mathcal{F}$. Тогда, в силу Теоремы 2.1.4, существует непрерывное отображение $g : X \to X$ удовлетворяющее следующим условиям:
а) $g(y) \in \widehat{F}(g(y), y) = F(g(y))$, т.е. $g(y) \in \mathcal{F}$ для любого $y \in X$;
б) отображение g является непрерывным продолжением отображения f, т.е. для любого $y \in \mathcal{F}$ справедливо равенство $g(y) = f(y) = y$.

Таким образом, отображение g является ретракцией пространства X на $\mathcal{F}$.■

2.1.7. Следствие. *Пусть выполнены условия Теоремы 2.1.6, тогда множество неподвижных точек $FixF$ связно.*

2.1.3. Уравнения с сюръективными линейными операторами.

В настоящем разделе теоремы о неподвижных точках сжимающих мультиотображений будут применены для изучения некоторых классов уравнений с линейными операторами.

Пусть E_1, E_2 - два банаховых пространства, $D(a)$ - линейное подпространство в E_1, $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ - линейный оператор. Напомним следующее понятие (см., например, [55], [63], [115]).

2.1.8. Определение. Линейный оператор a называется *замкнутым*, если его график – замкнутое линейное подпространство $E_1 \times E_2$, т.е. из того, что $\{x_n\} \subset D(a)$, $x_n \to x$ и $a(x_n) \to y$ следует, что $x \in D(a)$ и $a(x) = y$.

Пусть a - замкнутый линейный сюръективный оператор, $Ker(a)$ – его ядро. Рассмотрим фактор-пространство $E = E_1/Ker(a)$. Элементами пространства E являются фактор-классы $[x] = x + Ker(a)$. Известно, что норма в пространстве E определяется следующим образом: если $[x] = x + Ker(a) \in E$, то $||[x]|| = \inf\limits_{u \in Ker(a)} ||x + u||$. Пусть p - проекция пространства E_1 на E, $p(x) = [x]$.

Рассмотрим линейный оператор $a_1 : D(a_1) \subset E \to E_2$, где $D(a_1) = p(D(a))$ и $a_1([x]) = a(x)$. Ясно, что оператор a_1 является замкнутым, имеет нулевое ядро и сюръективен. Следовательно, оператор a_1 является обратимым и имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} D(a) \subset E_1 & \xrightarrow{a} & E_2 \\ p \searrow & & \nearrow a_1 \\ & D(a_1) \subset E & . \end{array}$$

По теореме Банаха об обратном операторе (см., например, [115] п.15.4) оператор a_1^{-1} ограничен. По определению нормы линейного оператора имеем:

$$||a_1^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} \frac{||a_1^{-1}(y)||}{||y||} = \sup_{y \in E_2} \left(\frac{\inf\{||x|| \mid x \in E_1, a(x) = y\}}{||y||}\right).$$

Обозначим $||a_1^{-1}|| = \beta(a)$.

2.1.9. Определение. Число $\beta(a)$ будем называть *нормой* мультиоператора a^{-1} и обозначать $||a^{-1}||$.

Рассмотрим теперь свойства мультиоператора $a^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$.

2.1.10. Лемма. *Мультиоператор a^{-1} является липшицевым с константой Липшица $||a^{-1}||$, т.е.*

$$h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) \leq ||a^{-1}|| \, ||x_1 - x_2||.$$

Доказательство. Для произвольных $x_1, x_2 \in E_2$ имеем

$$h(a^{-1}(x_1), a^{-1}(x_2)) = \inf\{ \, ||z_1 - z_2|| \mid z_1 \in a^{-1}(x_1), z_2 \in a^{-1}(x_2) \, \} =$$

$$= \inf\{ \, ||z_1 - z_2|| \mid z_1 - z_2 \in a^{-1}(x_1 - x_2) \, \} \leq ||a^{-1}|| \, ||x_1 - x_2||. \blacksquare$$

Пусть теперь $a : D(a) \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \to E_2$ - липшицево отображение, т.е. существует константа $c > 0$, такая, что для любых $x_1, x_2 \in E_1$ выполнено неравенство: $||f(x_1) - f(x_2)|| \leq c||x_1 - x_2||$.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$a(x) = f(x).$$

Обозначим $N(a, f)$ множество решений этого уравнения, т.е.

$$N(a, f) = \{x \in E_1 | \ a(x) = f(x)\}.$$

2.1.11. Теорема. *Если $c < \frac{1}{||a^{-1}||}$, то множество $N(a, f)$ непусто и является ретрактом пространства E_1.*

Доказательство. Очевидно, что рассматриваемое уравнение эквивалентно включению $x \in F(x)$, где $F(x) = a^{-1}(f(x))$. Покажем, что мультиотображение F имеет неподвижные точки. Для этого заметим, что оно является сжимающим. Действительно,

$$h(F(x), F(y)) = \inf\{ \, ||z_1 - z_2|| \mid z_1 \in F(x), z_2 \in F(y) \, \} =$$

$$= \inf\{ \, ||z_1 - z_2|| \mid a(z_1 - z_2) = f(x) - f(y) \, \} \leq$$
$$\leq ||a^{-1}|| \, ||f(x) - f(y)|| \leq ||a^{-1}|| \, c||x - y||$$

и остается воспользоваться тем, что по условию теоремы $||a^{-1}||c < 1$. Теперь справедливость утверждения вытекает из Теорем 2.1.2 и 2.1.6.■

Хорошо известно, что свойство обратимости линейных операторов устойчиво в пространстве всех ограниченных линейных операторов относительно малых по норме возмущений. Классическое доказательство этой теоремы опирается на принцип сжимающих отображений Банаха. Устойчивость свойства сюръективности линейного оператора относительно малых по норме возмущений также оказывается следствием теоремы о неподвижной точке, но для сжимающих мультиотображений.

2.1.12. Теорема. *Пусть $a : D(a) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый сюръективный линейный оператор; $b : E_1 \to E_2$ – ограниченный линейный оператор и $||b|| < \frac{1}{||a^{-1}||}$. Тогда линейный оператор $a+b : D(a) \subset E_1 \to E_2$ также является сюръективным.*

Доказательство. Пусть y_0 - произвольная точка пространства E_2. Рассмотрим уравнение

$$a(x) = y_0 - b(x).$$

Очевидно, что отображение $f(x) = y_0 - b(x)$ является липшицевым с константой Липшица $c = ||b|| < \frac{1}{||a^{-1}||}$. Следовательно, согласно Теореме 2.1.11, это уравнение имеет решение, что и доказывает утверждение.■

2.1.13. Следствие. *Множество линейных ограниченных сюръективных операторов $S(E_1, E_2)$ открыто в пространстве ограниченных линейных операторов $L(E_1, E_2)$.*

Доказательство. Если $a \in S(E_1, E_2)$, то любой оператор $c \in L(E_1, E_2)$, такой, что $||a - c|| < \frac{1}{||a^{-1}||}$, также является сюръективным. ■

2.2. Топологическая степень многозначных векторных полей

Понятие топологической степени (вращения) многозначного векторного поля является удобным и эффективным средством, применяемым в задаче о неподвижных точках мультиотображений и других вопросах. В данном параграфе мы определим понятие относительной топологической степени вполне непрерывного многозначного векторного поля с выпуклыми значениями в банаховом пространстве, опишем его основные свойства и дадим приложения к теоремам о неподвижной точке. О распространении понятия топологической степени на более широкие классы мультиотображений и пространств см. раздел "Библиографические указания и дополнения".

Всюду в дальнейшем E - вещественное банахово пространство.

Пусть $X \subset E$; всякое мультиотображение $F : X \to P(E)$ определяет мультиотображение $\Phi : X \to P(E)$,

$$\Phi(x) = x - F(x),$$

называемое *многозначным векторным полем* или *мультиполем*, соответствующим мультиотображению F. Обозначая $i : X \to E$ отображение вложения, будем записывать

$$\Phi = i - F.$$

Если Λ - пространство параметров, и $G : X \times \Lambda \to P(E)$ - семейство мультиотображений, то $\Psi : X \times \Lambda \to P(E)$, заданное как

$$\Psi(x, \lambda) = x - G(x, \lambda),$$

называется *семейством мультиполей.*

Точка $x \in X$ такая, что

$$0 \in \Phi(x),$$

называется *особой точкой* мультиполя Φ. Ясно, что особые точки мультиполя $\Phi = i - F$ и только они являются неподвижными точками отображения F. Если мультиполе Φ не имеет особых точек, то будем называть его *невырожденным.*

Условимся также о следующей терминологии. Для удобства всюду в дальнейшем полунепрерывное сверху и компактное мультиотображение $F : X \to K(E)$ будем называть просто *компактным.* Аналогично, компактным будем называть однозначное отображение, являющееся непрерывным и компактным. Компактными будем называть и соответствующие векторные поля.

Отметим, что если $F_0, F_1 : X \to K(E)$ - компактные мультиотображения, то (см. Раздел 1.3.2) мультиотображение $G : X \times [0,1] \to K(E)$,

$$G(x,\lambda) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_0(x),$$

также компактно.

Пусть теперь $\mathbf{K} \subseteq E$ – непустое выпуклое замкнутое множество и $U_{\mathbf{K}}$ – непустое относительно открытое подмножество $\mathbf{K}$. Замыкание и границу множества $U_{\mathbf{K}}$ в относительной топологии пространства $\mathbf{K}$ обозначим $\overline{U}_{\mathbf{K}}$ и $\partial U_{\mathbf{K}}$ соответственно. Мы будем предполагать сначала, что $\partial U_{\mathbf{K}}$ непусто.

Известно, что всякому компактному однозначному отображению $f : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$, не имеющему неподвижных точек, может быть сопоставлена целочисленная характеристика - *относительная топологическая степень*

$$deg_{\mathbf{K}}(\varphi, \partial U_{\mathbf{K}})$$

соответствующего векторного поля $\varphi = i - f$, $\varphi(x) = x - f(x)$ (см. [13], [14]). Эта характеристика обладает следующими основными свойствами.

2.2.1. Свойство нормализации. *Если $f(x) \equiv x_0$ для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$, то*

$$deg_{\mathbf{K}}(\varphi, \partial U_{\mathbf{K}}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in U_{\mathbf{K}}, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin U_{\mathbf{K}}. \end{cases}$$

2.2.2. Гомотопическая инвариантность. *Пусть компактные поля $\varphi_0 = i - f_0$ и $\varphi_1 = i - f_1$ гомотопны ($\varphi_0 \sim \varphi_1$), т.е. существует компактное отображение $g : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to \mathbf{K}$ такое, что*
1) $x \neq g(x,\lambda)$ для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$, $\lambda \in [0,1]$;
2) $g(\cdot, 0) = f_0$, $g(\cdot, 1) = f_1$.
Тогда $deg_{\mathbf{K}}(\varphi_0, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\varphi_1, \partial U_{\mathbf{K}})$.

2.2.3. Аддитивная зависимость от области. *Пусть $\{U_{j\mathbf{K}}\}_{j \in J}$ - конечное семейство относительно открытых непересекающихся подмножеств $U_{\mathbf{K}}$; отображение $f : \bar{U}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ компактно и не имеет* *неподвижных точек на множестве* $\overline{U}_{\mathbf{K}} \setminus \bigcup\limits_{j\in J} U_{j\mathbf{K}}$. *Тогда*

$$deg_{\mathbf{K}}(i-f,\partial U_{\mathbf{K}}) = \sum_{j\in J} deg_{\mathbf{K}}(i-f,\partial U_{j\mathbf{K}}).$$

2.2.4. Принцип сужения отображения. *Пусть* $\mathbf{K_1}$ *- непустое выпуклое замкнутое подмножество* E, $\mathbf{K_1} \subset \mathbf{K}$ *и* $\partial U_{\mathbf{K_1}} = \partial(U \cap \mathbf{K_1}) \neq \varnothing$. *Если компактное отображение* $f : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ *не имеет неподвижных точек и* $f(\partial U_{\mathbf{K}}) \subset \mathbf{K_1}$, *то*

$$deg_{\mathbf{K}}(i-f,\partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K_1}}(i-f,\partial U_{\mathbf{K_1}}).$$

2.2.5. Теорема о нечетном поле. *Пусть* $\mathbf{K}$ *и* U *симметричны относительно нуля и* $0 \in U_{\mathbf{K}}$. *Пусть* $f : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ *- компактное отображение без неподвижных точек, являющееся нечетным, то есть*

$$f(-x) = -f(x)$$

для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$. *Тогда топологическая степень* $deg_{\mathbf{K}}(i-f,\partial U_{\mathbf{K}})$ *нечетна.*

2.2.6. Свойство неподвижной точки. *Если компактное отображение* $f : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ *не имеет неподвижных точек на* $\partial U_{\mathbf{K}}$ *и*

$$deg_{\mathbf{K}}(i-f,\partial U_{\mathbf{K}}) \neq 0,$$

то f *имеет неподвижную точку* x *в* $U_{\mathbf{K}}$, *то есть найдется* $x \in U_{\mathbf{K}}$ *такое, что* $x = f(x)$.

2.2.7. Замечание. Если $\mathbf{K} = \mathbf{E}$, то в этом "абсолютном" случае мы получаем классическую топологическую степень (вращение) $deg(i-f,\partial U)$ компактного векторного поля типа Лере-Шаудера-Красносельского, конструкция которой описана во многих работах (см., например, [75], [190], [334]). Переход от классической степени к относительной может быть осуществлен многими способами. Один из самых простых заключается в том, чтобы, взяв существующую по теореме Титце-Дугунджи ретракцию $r : E \to \mathbf{K}$ (см. Главу 0), положить

$$deg_{\mathbf{K}}(i - f, \partial U_{\mathbf{K}}) := deg(i - \widetilde{f}, \partial \widetilde{U}),$$

где $\widetilde{U} = r^{-1}(U_{\mathbf{K}})$, $\widetilde{f} = f \circ r$. Можно показать, что получающееся таким образом значение степени не зависит от выбора ретракции r.

Перейдем теперь к построению относительной топологической степени компактного многозначного векторного поля. С этой целью введем следующие понятия.

2.2.8. Определение. Компактные мультиотображения $F_0, F_1 : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ и соответствующие им мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ называются *гомотопными*,

$$\Phi_0 \sim \Phi_1,$$

если существует компактное мультиотображение $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0, 1] \to Kv(\mathbf{K})$ такое, что: 1) $Fix\ G(\cdot, \lambda) = \varnothing$ для всех $\lambda \in [0, 1]$; 2) $G(\cdot, 0) = F_0$, $G(\cdot, 1) = F_1$.

Нетрудно видеть, что отношение гомотопии есть отношение эквивалентности на классе всех невырожденных компактных мультиполей, заданных на $\partial U_{\mathbf{K}}$.

2.2.9. Определение. Компактное однозначное векторное поле $\varphi = i - f$, $f : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ называется *однозначной гомотопической аппроксимацией* компактного мультиполя $\Phi = i - F$, $F : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$, если $\varphi \sim \Phi$.

Для доказательства существования однозначных гомотопических аппроксимаций нам понадобится следующее утверждение.

2.2.10. Лемма. *Пусть $X \subset E$ – некоторое топологическое подпространство; Δ – компакт, $F : X \times \Delta \to Kv(E)$ – компактное мультиотображение такое, что $F(\cdot, \mu)$ не имеет неподвижных точек на замкнутом подмножестве $X_1 \subset X$ для всех $\mu \in \Delta$. Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, если $f_\varepsilon : X \times \Delta \to E$ – регулярная ε-аппроксимация F, то мультиотображение $G : X \times \Delta \times [0, 1] \to Kv(E)$,*

$$G(x, \mu, \lambda) = \lambda f_\varepsilon(x, \mu) + (1 - \lambda) F(x, \mu)$$

таково, что $x \notin G(x, \mu, \lambda)$ для всех $(x, \mu, \lambda) \in X_1 \times \Delta \times [0, 1]$.

Доказательство. В предположении противного мы будем иметь последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Delta$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ такие, что

$$x_n \in \lambda_n f_{\varepsilon_n}(x_n, \mu_n) + (1 - \lambda_n)F(x_n, \mu_n)$$

для каждого $n = 1, 2, ...$, где $f_{\varepsilon_n} : X \times \Delta \to E$ – регулярные ε_n-аппроксимации F. Последовательности $\{f_{\varepsilon_n}(x_n, \mu_n)\}$ и $\{x_n\}$ содержатся в компактном множестве $\overline{co}F(X)$ и поэтому их можно без ущерба для общности считать сходящимися: $f_{\varepsilon_n}(x_n, \mu_n) \to v_0$, $x_n \to x_0 \in X_1$. Ясно, что и последовательности $\{\mu_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ мы также можем считать сходящимися: $\mu_n \to \mu_0 \in \Delta$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in [0, 1]$.

Для точек x_n мы имеем представление

$$x_n = \lambda_n f_{\varepsilon_n}(x_n, \mu_n) + (1 - \lambda_n)y_n,$$

где $y_n \in F(x_n, \mu_n)$. В силу компактности F последовательность $\{y_n\}$ также считаем сходящейся: $y_n \to y_0$, причем ввиду замкнутости F получаем $y_0 \in F(x_0, \mu_0)$. Каждая точка вида $((x_n, \mu_n), f_{\varepsilon_n}(x_n, \mu_n)) \in X_1 \times \Delta \times E$ лежит в ε_n-окрестности графика Γ_F, поэтому предельная точка (x_0, μ_0, v_0) принадлежит этому графику, то есть $v_0 \in F(x_0, \mu_0)$. Переходя к пределу, получаем

$$x_0 = \lambda_0 v_0 + (1 - \lambda_0)y_0 \in F(x_0, \mu_0),$$

что противоречит отсутствию неподвижных точек $F(\cdot, \mu_0)$ на X_1. ■

2.2.11. Теорема. *Всякое невырожденное компактное мультиполе $\Phi = i - F$, $F : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ обладает однозначной гомотопической аппроксимацией.*

Доказательство. Из предыдущей леммы вытекает, что в качестве однозначной гомотопической аппроксимации Φ можно взять поле $\varphi = i - f$, где $f : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ - произвольная регулярная ε-аппроксимация мультиотображения F и $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Более того, мы можем дать оценку степени малости подходящего ε. В самом деле, нетрудно проверить, что множество $\Phi(\partial U_{\mathbf{K}})$ замкнуто и, следовательно, его расстояние от нуля δ положительно. Тогда в качестве ε можно взять число, удовлетворяющее соотношению $0 < \varepsilon < \delta/2$. Действительно, пусть $f_\varepsilon : \partial U_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ – регулярная

ε-аппроксимация F, удовлетворяющая также условию (i) Теоремы 1.4.12. Гомотопию между $\varphi_\varepsilon = i - f_\varepsilon$ и Φ порождает семейство мультиотображений $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K})$ вида

$$G(x,\lambda) = \lambda f_\varepsilon(x) + (1-\lambda)F(x).$$

Компактность мультиотображения G очевидна. Остается показать лишь, что $x \notin G(x,\lambda)$ для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$, $\lambda \in [0,1]$. Предположив противное, мы будем иметь точку $x_0 \in \partial U_{\mathbf{K}}$, и число $\lambda_0 \in [0,1]$ такие, что $x_0 \in \lambda_0 f_\varepsilon(x_0) + (1-\lambda_0)F(x_0)$. Согласно условию (i) найдем точку $x' \in \partial U_{\mathbf{K}}$ такую, что $\|x' - x_0\| < \varepsilon$ и $f_\varepsilon(x_0) \cup F(x_0) \subset U_\varepsilon(F(x'))$.

Но тогда $x_0 \in U_\varepsilon(F(x'))$ и, следовательно, расстояние от x' до $F(x')$ меньше $2\varepsilon < \delta$, что противоречит выбору числа δ. ■

Мы можем дать теперь следующее определение.

2.2.12. Определение. *Относительной топологической степенью*

$$deg_{\mathbf{K}}(\Phi, \partial U_{\mathbf{K}})$$

невырожденного компактного мультиполя $\Phi = i - F$,

$$F : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$$

называется относительная топологическая степень $deg_{\mathbf{K}}(\varphi, \partial U_{\mathbf{K}})$ его произвольной однозначной гомотопической аппроксимации φ.

Покажем, что это определение корректно, т.е. топологическая степень $deg_{\mathbf{K}}(\Phi, \partial U_{\mathbf{K}})$ не зависит от выбора однозначной гомотопической аппроксимации.

2.2.13. Лемма. *Пусть $\varphi_0 = i - f_0$ и $\varphi_1 = i - f_1$ - однозначные гомотопические аппроксимации невырожденного компактного мультиполя $\Phi = i - F$, $F : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$. Тогда φ_0 и φ_1 гомотопны в классе однозначных компактных векторных полей.*

Доказательство. Из Определения 2.2.9 вытекает, что поля φ_0 и φ_1 гомотопны в классе компактных мультиполей. Пусть эту гомотопию осуществляет компактное мультиотображение без неподвижных точек $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K})$; $G(\cdot, 0) = f_0$, $G(\cdot, 1) = f_1$.

Согласно Лемме 2.2.10, найдется регулярная ε-аппроксимация $g : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to \mathbf{K}$ мультиотображения G такая, что

$$x \notin \lambda g(x,\mu) + (1-\lambda)G(x,\mu)$$

для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$, $\mu \in [0,1]$, $\lambda \in [0,1]$.

Тогда искомую гомотопию, связывающую φ_0 и φ_1, как нетрудно видеть, порождает компактное отображение $h : \partial U \times [0,1] \to E$,

$$h(x,\nu) = \begin{cases} 3\nu g(x,0) + (1-3\nu) f_0(x), & 0 \le \nu \le \frac{1}{3}; \\ g(x, 3\nu - 1), & \frac{1}{3} \le \nu \le \frac{2}{3}; \\ (3-3\nu) g(x,1) + (3\nu - 2) f_1(x), & \frac{2}{3} \le \nu \le 1, \end{cases}$$

■

Из доказанной леммы и Свойства 2.2.2 вытекает, что степени всех однозначных гомотопических аппроксимаций мультиполя Φ одинаковы, что и обосновывает корректность Определения 2.2.12.

Рассмотрим теперь основные свойства введенной характеристики.

2.2.14. Теорема. Свойство нормализации. *Если $F(x) \equiv A$ для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$, где $A \subset E$ - выпуклое компактное подмножество, то*

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \subset U_{\mathbf{K}}, \\ 0, & \text{если } A \cap \overline{U}_{\mathbf{K}} = \varnothing. \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно взять в качестве однозначной гомотопической аппроксимации поле вида $\varphi = i - f$, где $f(x) \equiv x_0 \in A$. ■

2.2.15. Теорема. Гомотопическая инвариантность. *Если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то*

$$deg_{\mathbf{K}}(\Phi_0, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\Phi_1, \partial U_{\mathbf{K}}).$$

Доказательство. Это утверждение немедленно вытекает из Определения 2.2.12 и свойства транзитивности отношения гомотопии. ■

На данном свойстве основан прием, часто применяемый при вычислении топологической степени: мультиполе, степень которого следует подсчитать, гомотопируют к более простому, для которого топологическая степень легко находится.

Отметим в этой связи два удобных признака гомотопии мультиполей. Первый признак указывает на устойчивость топологической степени относительно малых возмущений мультиполя.

2.2.16. Теорема (Аналог теоремы Руше). *Пусть* $\mathbf{K}$ *- выпуклый конус в* E *(т.е.* $\lambda\mathbf{K} \subset \mathbf{K}$ *для всякого* $\lambda > 0$ *и* $\mathbf{K} + \mathbf{K} \subset \mathbf{K}$*). Пусть компактное мультиполе* $\Phi_0 = i - F_0$, $F_0 : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ *невырождено; компактное мультиотображение* $\widetilde{F} : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ *таково, что для всех* $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$

$$\|\widetilde{F}(x)\| < \min_{z \in \Phi_0(x)} \|z\|.$$

Тогда мультиполе $\Phi_1 = i - (F_0 + \widetilde{F})$*, соответствующее мультиотображению* $F_0 + \widetilde{F}$*, невырождено и гомотопно* Φ_0*, а следовательно,*

$$deg_{\mathbf{K}}(\Phi_1, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\Phi_0, \partial U_{\mathbf{K}}).$$

Доказательство. Гомотопию мультиполей Φ_0 и Φ_1 обеспечивает компактное мультиотображение $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K})$, $G(x,\lambda) = F_0(x) + \lambda\widetilde{F}(x)$. Действительно, если для некоторых $x_0 \in \partial U_{\mathbf{K}}$, $\lambda_0 \in [0,1]$ выполнено $x_0 \in G(x_0, \lambda_0)$, то $x_0 = y_0 + \lambda_0\widetilde{y}$, где $y_0 \in F_0(x_0), \widetilde{y} \in \widetilde{F}(x_0)$. Но тогда $x_0 - y_0 \in \Phi_0(x_0)$, и $\|x_0 - y_0\| = \|\lambda_0\widetilde{y}\| \leq \|\widetilde{y}\|$ в противоречие с условием теоремы.■

2.2.17. Теорема (Аналог теоремы Пуанкаре–Боля.) *Пусть компактные невырожденные мультиполя* $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ *не допускают противоположных направлений, т.е.*

$$\frac{z_0}{\|z_0\|} \neq -\frac{z_1}{\|z_1\|}$$

для любых $z_0 \in \Phi_0(x)$, $z_1 \in \Phi_1(x)$, $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$*. Тогда* $\Phi_0 \sim \Phi_1$ *и, следовательно,*

$$deg_{\mathbf{K}}(\Phi_0, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\Phi_1, \partial U_{\mathbf{K}}).$$

Доказательство. Гомотопию мультиполей Φ_0 и Φ_1 обеспечивает компактное мультиотображение $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K})$, $G(x,\lambda) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_0(x)$. Действительно, если $x_0 \in G(x_0, \lambda_0)$ при некоторых $x_0 \in \partial U_{\mathbf{K}}$ и $\lambda_0 \in (0,1)$, то $x_0 = \lambda_0 y_1 + (1-\lambda_0)y_0$, где $y_1 \in F_1(x_0)$, $y_0 \in F_0(x_0)$. Но это равносильно тому, что

$$x_0 - y_0 = -\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}(x_0 - y_1),$$

в противоречие с условием теоремы.■

Рассмотрим теперь другие свойства относительной топологической степени.

2.2.18. Теорема (Аддитивная зависимость от области). *Пусть* $\{U_{j\mathbf{K}}\}_{j\in J}$ *- конечное семейство относительно открытых непересекающихся подмножеств* $U_{\mathbf{K}}$*; мультиотображение*

$$F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$$

компактно и не имеет неподвижных точек на множестве $\overline{U}_{\mathbf{K}} \setminus \bigcup\limits_{j\in J} U_{j\mathbf{K}}$. *Тогда*

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = \sum_{j\in J} deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{j\mathbf{K}}).$$

Доказательство. Пусть $f : \bar{U}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ – регулярная ε-аппроксимация мультиотображения F. Из Леммы 2.2.10 вытекает, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то f не имеет неподвижных точек на $\overline{U}_{\mathbf{K}} \setminus \bigcup\limits_{j\in J} U_{j\mathbf{K}}$ и сужение f на каждую из границ $\partial U_{\mathbf{K}}$, $\partial U_{j\mathbf{K}}$, $j \in J$ является гомотопической аппроксимацией сужения F на соответствующую границу. Тогда утверждение теоремы вытекает из Свойства 2.2.3 для однозначных полей. ■

2.2.19. Теорема (Принцип сужения отображения). *Пусть* $\mathbf{K_1}$ *- непустое выпуклое замкнутое подмножество* E*,* $\mathbf{K_1} \subset \mathbf{K}$ *и* $\partial U_{\mathbf{K_1}} = \partial(U \cap \mathbf{K_1}) \neq \varnothing$*. Если компактное мультиотображение* $F : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ *не имеет неподвижных точек и* $F(\partial U_{\mathbf{K}}) \subset \mathbf{K_1}$*, то*

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K_1}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K_1}}).$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.2.10, мы можем выбрать регулярную ε-аппроксимацию $f : \partial U_{\mathbf{K_1}} \to \mathbf{K}$ мультиотображения F так, что она будет определять степень $deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}})$ и ее сужение на $\partial U_{\mathbf{K_1}}$ будет являться гомотопической аппроксимацией F на этом множестве. Тогда утверждение доказывается применением Свойства 2.2.4 к f. ■

Сформулируем теперь основной принцип неподвижной точки.

2.2.20. Теорема. *Пусть компактное мультиотображение* $F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ *не имеет неподвижных точек на* $\partial U_{\mathbf{K}}$ *и*

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) \neq 0.$$

Тогда F *имеет в* U *неподвижную точку.*

Доказательство. Действительно, если мультиотображение F не имеет неподвижных точек, то, применяя Лемму 2.2.10, мы построим такую регулярную ε-аппроксимацию $f : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to \mathbf{K}$ мультиотображения F, которая не имеет неподвижных точек, и ее сужение на границу $\partial U_{\mathbf{K}}$ является однозначной гомотопической аппроксимацией сужения F на эту же границу. Тогда, применяя Свойство 2.2.6, получаем:

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(i - f, \partial U_{\mathbf{K}}) = 0,$$

в противоречие с предположением. ■

Этот основной принцип позволяет дать простое и геометрически наглядное доказательство многих теорем о неподвижной точке для мультиотображений. Приведем некоторые примеры.

2.2.21. Теорема. *Пусть множество* $U_{\mathbf{K}}$ *выпукло,* $F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ *- компактное мультиотображение такое, что*

$$F(x) \cap \overline{U}_{\mathbf{K}} \neq \varnothing \ \text{ для всех } x \in \partial U_{\mathbf{K}}.$$

Тогда $FixF \neq \varnothing$.

Доказательство. Если граница $\partial U_{\mathbf{K}}$ содержит хотя бы одну неподвижную точку F, то утверждение доказано. Пусть $FixF \cap \partial U_{\mathbf{K}} = \varnothing$. Из Следствия 1.3.4 вытекает, что мультиотображение $F_1 : \partial U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$, $F_1(x) = F(x) \cap \overline{U}_{\mathbf{K}}$, компактно. Пусть $x_0 \in U_{\mathbf{K}}$ - произвольная точка; тогда легко видеть, что мультиотображение $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K})$,

$$G(x, \lambda) = \begin{cases} (1 - 2\lambda)F(x) \ + 2\lambda F_1(x), & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}; \\ (2 - 2\lambda)F_1(x) + (2\lambda - 1)x_0, & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1, \end{cases}$$

порождает гомотопию мультиполя $i - F$ и мультиполя $i - F_0$, где $F_0(x) \equiv x_0$. Применяя теперь свойства гомотопической инвариантности и нормализации, получаем

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(i - F_0, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1,$$

и остается воспользоваться Теоремой 2.2.20. ■

Следствием этой теоремы является известная теорема Боненбласта–Карлина о неподвижной точке [159]:

2.2.22. Теорема. *Если M - выпуклое замкнутое подмножество E и мультиотображение $F : M \to Kv(M)$ компактно, то*

$$FixF \neq \varnothing.$$

Доказательство. Возьмем $\mathbf{K} = \mathbf{E}$ и пусть $U \subset E$ - произвольное выпуклое открытое ограниченное множество, содержащее компактное множество $M_1 = \overline{co}F(M) \subset M$. Пусть $r : \overline{U} \to M_1$ - существующая в силу теоремы Титце-Дугунджи ретракция. Рассмотрим мультиотображение $F_1 : \overline{U} \to Kv(M_1)$, $F_1 = F \circ r$. Оно компактно (см. Теорему 1.3.11) и, очевидно, удовлетворяет условиям Теоремы 2.2.21. Поэтому $FixF_1 \neq \varnothing$, но если $x \in FixF_1$, то $x \in M_1$, и следовательно $r(x) = x$. Таким образом, $x \in F_1(x) = F(r(x)) = F(x)$, то есть x - неподвижная точка F.■

Для конечномерного пространства E это утверждение, являющееся обобщением на случай многозначных отображений классической теоремы Брауэра (см. Главу 0), доказано С. Какутани (S. Kakutani) [239]. Его обобщение на случай локально выпуклого линейного топологического пространства E дано И. Гликсбергом (I.L. Glicksberg) [210] и Ки Фаном (Ky Fan) [199].

2.2.23. Замечание. Мы можем включить теперь в общую схему и случай $\partial U_{\mathbf{K}} = \varnothing$. В ситуации, когда $U_{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$, естественно полагать

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1.$$

Приведем еще одну теорему о неподвижной точке, которая доказывается методом подсчета топологической степени.

2.2.24. Теорема. *Пусть компактное мультиотображение $F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ таково, что для соответствующего мультиполя $\Phi = i - F$ в каждой точке $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$ выполнено*

$$\Phi(x) \cap \{\mu(x - a) \mid \mu \leq 0\} = \varnothing,$$

где $a \in U_{\mathbf{K}}$ - некоторая точка. Тогда $deg_{\mathbf{K}}(\Phi, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1$ и, следовательно, $Fix F \neq \varnothing$.

Доказательство. Сужение поля Φ на $\partial U_{\mathbf{K}}$ и однозначное поле $\varphi : \partial U_{\mathbf{K}} \to E$, $\varphi(x) = x - a$, очевидно, не допускают противоположных направлений и, следовательно, применяя Теорему 2.2.17 и свойство нормализации, получаем

$$deg_{\mathbf{K}}(\Phi, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\varphi, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1.$$

■

В качестве следствия мы можем получить следующую теорему о неподвижной точке для мультиотображений, удовлетворяющих *граничному условию Лере-Шаудера.*

2.2.25. Следствие. *Пусть $0 \in U_{\mathbf{K}}$ и компактное мультиотображение $F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ таково, что в каждой точке $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$ выполнено*

$$F(x) \cap \{\gamma x \mid \gamma \geq 1\} = \varnothing.$$

Тогда $\deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1$ *и следовательно $Fix\ F \neq \varnothing$.*

Еще одним следствием является принцип неподвижной точки для мультиотображений, "направленных внутрь" на границе.

2.2.26. Следствие. *Пусть $U_{\mathbf{K}}$ выпукло, $0 \in U_{\mathbf{K}}$, компактное мультиотображение $F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ не имеет неподвижных точек на $\partial U_{\mathbf{K}}$ и таково, что*

$$F(x) \subset I_{\overline{U}_{\mathbf{K}}}(x) = \{y | y \in E,\ x + \gamma(y - x) \in \overline{U}_{\mathbf{K}} \text{ для некоторого } \gamma > 0\}$$

в каждой точке $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$. Тогда $\deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1$ *и следовательно $Fix F \neq \varnothing$.*

Рассмотрим теперь *теорему о нечетном поле.*

2.2.27. Теорема. *Пусть $\mathbf{K}$ и $U_{\mathbf{K}}$ – симметричны относительно нуля, $0 \in U_{\mathbf{K}}$. Пусть компактное мультиотображение $F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ таково, что для соответствующего мультиполя $\Phi = i - F$ выполнено граничное условие*

$$\Phi(x) \cap \mu\Phi(-x) = \varnothing$$

для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$ *и* $0 \le \mu \le 1$. *Тогда топологическая степень* $deg_{\mathbf{K}}(\Phi, \partial U_{\mathbf{K}})$ *нечетна и, следовательно,* $FixF \ne \varnothing$.

Доказательство. Покажем сначала, что для любой регулярной ε-аппроксимации f сужения F на $\partial U_{\mathbf{K}}$, отвечающей достаточно малому $\varepsilon > 0$, соответствующее поле $\varphi = i - f$ удовлетворяет тому же граничному условию

$$\varphi(x) \ne \mu\varphi(-x)$$

для всех $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$ и $0 \le \mu \le 1$. Действительно, предположив противное, мы будем иметь последовательность регулярных ε_n-аппроксимаций f_n, $\varepsilon_n \to 0$ таких, что $\varphi_n(x_n) = \mu_n\varphi_n(-x_n)$ для некоторых $x_n \in \partial U_{\mathbf{K}}$ и $\mu_n \in [0,1]$, где $\varphi_n = i - f_n$. Это означает, что

$$x_n = \frac{1}{1+\mu_n}[f_n(x_n) - \mu_n f_n(-x_n)].$$

Поскольку последовательности $\{f_n(x_n)\}$, $\{f_n(-x_n)\}$ содержатся в относительно компактном множестве $coF(\partial U_{\mathbf{K}})$, мы можем считать, без ущерба для общности, что $f_n(x_n) \to y_0$, $f_n(-x_n) \to z_0$. Полагаем также, что $\mu_n \to \mu_0 \in [0,1]$. Следовательно, $x_n \to x_0 = \frac{1}{1+\mu_0}(y_0 - \mu_0 z_0)$ и, таким образом, $x_0 - y_0 = \mu_0(-x_0 - z_0)$.

Но пары $(x_n, f_n(x_n))$, $(-x_n, f_n(-x_n))$ лежат в ε_n-окрестности графика сужения F на $\partial U_{\mathbf{K}}$, а так как этот график замкнут (Теорема 1.2.29), то имеем $y_0 \in F(x_0)$, $z_0 \in F(-x_0)$. Но это означает, что $\Phi(x_0) \cap \mu_0\Phi(-x_0) \ne \varnothing$, в противоречие с предположением.

Гомотопия, порожденная семейством невырожденных полей $\psi : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to E$,

$$\psi(x,\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}[\varphi(x) - \lambda\varphi(-x)],$$

связывает поле $\varphi(\cdot) = \psi(\cdot,0)$ с нечетным полем $\psi_1 = \psi(\cdot,1) = \frac{1}{2}[\varphi(x) - \varphi(-x)]$. Но тогда, применяя Теорему 2.2.5, получаем, что

$$deg_{\mathbf{K}}(\Phi, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\varphi, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(\psi_1, \partial U_{\mathbf{K}})$$

- нечетное число, что и доказывает теорему. ■

Отметим, что развитием теоремы о нечетном поле являются утверждения о вычислении топологической степени *эквивариантных* (т.е. перестановочных с периодическими операторами) мультиполей (см., например, [61], [62], [247]).

Для формулировки следующего утверждения рассмотрим итерации мультиотображения $F : X \to P(E),\ X \subset E$. Положим $F^0 := id_X$, $F^j(x) = F(F^{j-1}(x)),\ j \geq 1$.

Докажем теперь асимптотическую теорему о неподвижной точке типа Ф. Браудера (F.E.Browder) [167].[1]

2.2.28. Теорема. *Пусть $U_{0\mathbf{K}}$, $U_{1\mathbf{K}}$, $U_{\mathbf{K}}$ – непустые относительно открытые подмножества $\mathbf{K}$, $\overline{U}_{0\mathbf{K}} \subset U_{1\mathbf{K}} \subset \overline{U}_{1\mathbf{K}} \subset U_{\mathbf{K}}$; $U_{0\mathbf{K}}$ и $U_{\mathbf{K}}$ выпуклы. Пусть компактное мультиотображение $F : U_{\mathbf{K}} \to Kv(\mathbf{K})$ таково, что для некоторого целого $m \geq 1$ выполнены условия:*

1) $\bigcup\limits_{1 \leq j \leq m-1} F^j(\overline{U}_{1\mathbf{K}}) \subset U_{\mathbf{K}}$;

2) $\bigcup\limits_{1 \leq j \leq m-1} F^j(\overline{U}_{0\mathbf{K}}) \subset U_{1\mathbf{K}}$;

3) $F^m(\overline{U}_{1\mathbf{K}}) \subset U_{0\mathbf{K}}$.

Тогда мультиотображение F имеет в множестве $U_{0\mathbf{K}}$ хотя бы одну неподвижную точку.

Доказательство. Переходя в случае необходимости к множеству $\widetilde{\mathbf{K}} \subset \mathbf{K}$, $\widetilde{\mathbf{K}} = \overline{co}(F(U_{\mathbf{K}}) \cup x_0)$, где $x_0 \in U_{0\mathbf{K}}$ – произвольная точка, мы можем считать без ущерба для общности множество $\mathbf{K}$ компактным.

Обозначим $P_j = F^j(\overline{U}_{1\mathbf{K}}),\ \ 1 \leq j \leq m-1$. В силу компактности множеств P_j (Теорема 1.2.35), условия (1) и полунепрерывности сверху мультиотображения F, найдется такой конечный набор положительных чисел $\{\varepsilon_j^1\}_{j=1}^{m-1}$, для которого будет выполнено: а) $U_{\varepsilon_j^1\mathbf{K}}(P_j) \subset U_{\mathbf{K}},\ 1 \leq j \leq m-1$; б) $F(U_{\varepsilon_{j-1}^1\mathbf{K}}(P_{j-1})) \subset U_{\varepsilon_j^1\mathbf{K}}(P_j)$, $2 \leq j \leq m-1$. Если теперь положить $\varepsilon' = \min\limits_{1 \leq j \leq m-1} \varepsilon_j^1$, то для мультиотображения $F_1 : U_{\mathbf{K}} \to V(\mathbf{K})$, являющегося ε'-раздутием мультиотображения F :

$$F_1(x) = F_{\varepsilon'}(x) \cap \mathbf{K},$$

а следовательно, и для любой ε'-аппроксимации мультиотображения F на $\overline{U}_{1\mathbf{K}}$ выполнено условие (1) теоремы. Аналогичными соображе-

[1] Асимптотическими называют такие теоремы, в которых существование неподвижной точки отображения выводится из свойств его итераций.

ниями можно указать и такие числа $\varepsilon'' > 0$ и $\varepsilon''' > 0$, что для соответствующих аппроксимаций F на $\overline{U}_{0\mathbf{K}}$ и $\overline{U}_{1\mathbf{K}}$ выполнены условия (2) и (3) теоремы.

Заметим, что из условия (3) вытекает, что F не имеет неподвижных точек на $\partial U_{1\mathbf{K}}$. Теперь используя Леммы 1.4.13 и 2.2.10, мы можем выбрать $\delta > 0$ столь малым, что, во-первых, сужения δ-аппроксимации f мультиотображения F на подмножества $\overline{U}_{0\mathbf{K}}$, и $\overline{U}_{1\mathbf{K}}$ являются ε-аппроксимациями F на этих подмножествах, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''\}$, а во-вторых, сужение f на $\partial U_{1\mathbf{K}}$ является гомотопической аппроксимацией F на этом множестве.

Согласно [13], из выполнения условий (1), (2) и (3) для отображения f вытекает

$$deg_{\mathbf{K}}(i - f, \partial U_{1\mathbf{K}}) = 1,$$

но тогда и

$$deg_{\mathbf{K}}(i - F, \partial U_{1\mathbf{K}}) = 1,$$

что и влечет существование хотя бы одной неподвижной точки F в $U_{1\mathbf{K}}$. То, что фактически все такие точки принадлежат $U_{0\mathbf{K}}$, следует из условия (3). ■

2.3. Некоторые свойства множества неподвижных точек.

В этом разделе мы приведем несколько простых, но важных для дальнейшего свойств множеств неподвижных точек компактных мультиотображений.

2.3.1. Теорема. *Пусть X - замкнутое подмножество банахова пространства E и $F : X \to K(E)$ - замкнутое мультиотображение такое, что образ $F(\Omega)$ каждого ограниченного подмножества $\Omega \subset X$ относительно компактен. Если множество неподвижных точек $FixF$ ограничено, то оно компактно.*

Доказательство. Из замкнутости мультиотображения F следует замкнутость множества $FixF$. Тогда его компактность следует из соотношения

$$FixF \subset F(FixF).$$

■

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывной зависимости множества неподвижных точек мультиотображения от параметра.

2.3.2. Теорема. *Пусть X - замкнутое подмножество банахова пространства E; Λ - метрическое пространство и $G : X \times \Lambda \to K(E)$ - замкнутое мультиотображение такое, что для любого компактного множества $\Delta \subset \Lambda$ множество $G(X \times \Delta)$ относительно компактно. Пусть*

$$\mathcal{F}(\lambda) := FixG(\cdot, \lambda) \neq \varnothing$$

для всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда мультиотображение $\mathcal{F} : \Lambda \to P(E)$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. В предположении противного мы можем найти точку $\lambda_0 \in \Lambda$ и последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такие, что

$$x_n \in \mathcal{F}(\lambda_n) \setminus V$$

для всех n, где V - некоторая окрестность множества $\mathcal{F}(\lambda_0)$. Поскольку $x_n \in G(x_n, \lambda_n)$ для всех n и последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна, из условия теоремы мы получаем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ также относительно компактна и, следовательно, мы можем считать без ущерба для общности, что $x_n \to x_0 \in X$. Но тогда в силу замкнутости мультиотображения G мы получаем $x_0 \in G(x_0, \lambda_0)$, то есть $x_0 \in \mathcal{F}(\lambda_0)$, что дает противоречие. ∎

Для проверки непустоты множеств неподвижных точек $\mathcal{F}(\lambda)$ можно использовать принципы неподвижной точки, описанные в предыдущем разделе. Удобную возможность предоставляет также следующее свойство устойчивости топологической степени.

2.3.3. Теорема. *Пусть Λ - метрическое пространство; $G : \partial U_{\mathbf{K}} \times \Lambda \to Kv(\mathbf{K})$ - полунепрерывное сверху мультиотображение такое, что для любого компактного множества $\Delta \subset \Lambda$ множество $G(\partial U_{\mathbf{K}} \times \Delta)$ относительно компактно. Пусть для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$ выполнено $FixG(\cdot, \lambda_0) = \varnothing$. Тогда для всех $\lambda \in \Lambda$, достаточно близких к λ_0, степень*

$$deg_{\mathbf{K}}(i - G(\cdot, \lambda), \partial U_{\mathbf{K}})$$

определена и совпадает с $deg_{\mathbf{K}}(i - G(\cdot, \lambda_0), \partial U_{\mathbf{K}})$.

Доказательство. Для всех $\lambda \in \Lambda$, достаточно близких к λ_0, мультиотображение $\mathcal{G}_\lambda : \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K})$,

$$\mathcal{G}_\lambda(x,\mu) = \mu G(x,\lambda) + (1-\mu)G(x,\lambda_0)$$

определяет гомотопию, связывающую компактные мультиполя $i - G(\cdot,\lambda_0)$ и $i - G(\cdot,\lambda)$. Действительно, в противном случае мы имели бы последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,1]$, $\mu_n \to \mu_0 \in [0,1]$ и $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \partial U_{\mathbf{K}}$ такие, что

$$x_n \in \mathcal{G}_{\lambda_n}(x_n,\mu_n)$$

для всех n.

Последовательность $\{x_n\}$ содержится в относительно компактном множестве $\overline{coG(\{x_n\} \times \{\lambda_n\})}$, поэтому мы без ущерба для общности можем считать, что $x_n \to x_0 \in \partial U_{\mathbf{K}}$. Нетрудно видеть (см. Раздел 1.3), что мультиотображение $\mathcal{G}_\lambda(x,\mu)$ полунепрерывно сверху и, следовательно, замкнуто по совокупности переменных λ, x и μ. Тогда, переходя к пределу, получаем, что

$$x_0 \in \mathcal{G}_{\lambda_0}(x_0,\mu_0) = G(x_0,\lambda_0),$$

в противоречие с условием теоремы. Остается применить свойство гомотопической инвариантности степени (Теорема 2.2.15). ■

2.3.4. Следствие. *Пусть* Λ *- метрическое пространство;* $G : \overline{U}_{\mathbf{K}} \times \Lambda \to Kv(\mathbf{K})$ *- полунепрерывное сверху мультиотображение такое, что для любого компактного множества* $\Delta \subset \Lambda$ *множество* $G(\overline{U}_{\mathbf{K}} \times \Delta)$ *относительно компактно. Пусть для некоторого* $\lambda_0 \in \Lambda$ *выполнено* $FixG(\cdot,\lambda_0) \cap \partial U_{\mathbf{K}} = \varnothing$ *и* $deg_{\mathbf{K}}(i - G(\cdot,\lambda_0), \partial U_{\mathbf{K}}) \neq 0$. *Тогда для всех* $\lambda \in \Lambda$, *достаточно близких к* λ_0, *мультиотображение*

$$\mathcal{F}(\lambda) = FixG(\cdot,\lambda)$$

определено и полунепрерывно сверху.

2.4. Теорема Браудера–Фана о неподвижной точке и вариационные неравенства

К настоящему времени теория неподвижных точек распространена, помимо рассмотренных выше, и на многие другие классы мультиотображений. Рассмотрим один из примеров. Приводимый далее изящный результат (см. [168], [200]) интересен тем, что справедлив в произвольном топологическом векторном пространстве и не требует замкнутости значений рассматриваемого мультиотображения.

2.4.1. Теорема. *Пусть M – непустое выпуклое компактное подмножество топологического векторного пространства X и мультиотображение $F : M \to Pv(M)$ таково, что прообразы $F_-^{-1}(y)$ – относительно открытые подмножества M для каждого $y \in M$. Тогда $FixF \neq \varnothing$.*

Доказательство. В силу компактности M найдется такое конечное множество точек $y_1, ..., y_n$ из M, что множества $F_-^{-1}(y_i)$, $i = 1, ..., n$ образуют покрытие множества M. Поскольку компактное множество паракомпактно, пусть $p_1, ..., p_n$ – подчиненное данному покрытию разбиение единицы (см. Главу 0).

Пусть $M_0 = \overline{co}\{y_1, ..., y_n\}$. Тогда M_0 – выпуклый компакт в конечномерном пространстве $X_0 = sp\{y_1, ..., y_n\}$. Рассмотрим непрерывное отображение $f : M_0 \to M_0$ заданное как

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_i.$$

Нетрудно видеть, что оно является сечением F на множестве M_0. Действительно, если $p_i(x) \neq 0$ для некоторого $x \in M_0$, то это означает, что $x \in F_-^{-1}(y_i)$ или $y_i \in F(x)$, а следовательно $f(x) \in F(x)$ в силу выпуклости множества $F(x)$. Согласно теореме Брауэра, отображение f должно иметь неподвижную точку, которая, очевидно, будет и неподвижной точкой F. ■

Доказанное утверждение может быть использовано для решения вариационных неравенств. Действительно, рассмотрим следующую задачу.

Пусть X – гильбертово пространство со скалярным произведением $<,>$; M – выпуклое компактное подмножество X и $t : M \to X$ – непрерывное отображение.

2.4.2. Теорема. *Существует точка $x_0 \in M$ такая, что*

$$< t(x_0), x_0 - x > \ \geq \ 0 \ \text{для всех} \ \ x \in M.$$

Доказательство. В предположении противного, для каждой точки $x_0 \in M$ найдется точка $x \in M$ такая, что

$$< t(x_0), x_0 - x > < 0.$$

Тогда зададим мультиотображение $F : M \to Pv(M)$ формулой

$$F(x_0) = \{x \in M \mid < t(x_0), x_0 - x > < 0\}.$$

Нетрудно видеть (в силу непрерывности отображения t и скалярного произведения), что мультиотображение F удовлетворяет условиям Теоремы 2.4.1 и следовательно, должно обладать неподвижной точкой, что приводит к противоречию. ■

Помимо вариационных неравенств, Теорема 2.4.1 и ее многочисленные обобщения находят применение во многих разделах нелинейного функционального анализа (теоремы типа Кнастера–Куратовского–Мазуркевича), теории игр (минимаксные соотношения) и математической экономики (рыночное равновесие и оптимум по Парето) (см., например, обзор [23] и монографию [329]).

Глава 3. Дифференциальные включения и управляемые системы.

3.1. Дифференциальные включения. Некоторые примеры.

Дифференциальные включения иногда (не вполне точно) называют дифференциальными уравнениями с многозначной правой частью. В достаточно общей форме дифференциальное включение может быть записано в виде соотношения

$$x'(t) \in F(t, x(t)),$$

где F - некоторое мультиотображение.

Возникновение теории дифференциальных включений относится к тридцатым годам прошлого века. Пионерскими работами этого направления явились исследования французского математика А.Маршо (A.Marchaud) [271] - [274] и польского математика С.Зарембы (S.K.Zaremba) [330], [331]. В этих статьях были доказаны теоремы существования для "дифференциальных уравнений в контингенциях и паратингенциях" и описаны основные свойства решений. Данные работы ждала судьба многих выдающихся открытий, опередивших свой час – на какое-то время о них забыли. Отметим впрочем, что в сороковых-пятидесятых годах дифференциальные включения изучались и использовались в статьях А.Д. Мышкиса [84], [85].

Со временем выяснилось, что дифференциальные включения являются удобным аппаратом для описания неявных дифференциальных уравнений и дифференциальных неравенств. В самом деле, соотношения вида

$$f(t, x(t), x'(t)) = 0$$

или

$$f(t, x(t), x'(t)) \geq 0$$

могут быть записаны в виде дифференциальных включений

$$x'(t) \in F(t, x(t)),$$

где мультиотображение F определено как

$$F(t, x) = \{z : f(t, x, z) = 0\}$$

или, соответственно,

$$F(t,x) = \{z : f(t,x,z) \geq 0\}.$$

Могут быть применены дифференциальные включения и для изучения дифференциальных уравнений, правая часть которых известна лишь с некоторой степенью точности или подвержена систематическим возмущениям. В этом случае соответствующее описание достигается с помощью соотношения вида

$$x'(t) \in f(t, x(t)) + \varepsilon B,$$

где B - некоторый шар.

Однако "звездный час" теории дифференциальных включений пробил на рубеже пятидесятых-шестидесятых годов, когда (прежде всего, в работах А.Ф. Филиппова [121] и Т. Важевского (T. Ważewski) [324], [325]) выяснилась глубокая и естественная связь дифференциальных включений и управляемых систем. Интерес к проблемам управления в годы после Второй мировой войны был вызван острыми потребностями новых технологий, авиации, космонавтики, энергетики. Именно в этот период возникают такие общие методы решения оптимизационных проблем управления, как принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана и др.

Достаточно адекватное математическое описание управляемой системы с обратной связью может быть сведено к соотношениям типа

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) & (3.1) \\ u(t) \in \ U(t, x(t)) & (3.2) \end{cases}$$

где функция f характеризует динамику системы, x – ее *траектория*, а $u(t)$ – *управляющий параметр*, который в каждый момент времени t выбирается из соответствующего множества допустимых управлений U, зависящего, вообще говоря, как от времени, так и от состояния системы. Мультиотображение U называют *мультифункцией обратной связи.* Управление u обычно реализуется в классе измеримых функций.

Рассмотрим, например, задачу регулировки вращения вокруг некоторой оси космического летательного аппарата, снабженного двигателями управления. Пусть ρ – момент инерции аппарата относительно оси вращения, $\omega(t)$ – угловая скорость вращения в момент времени t, $u(t)$ - момент сил, создаваемых двигателями управления относительно оси вращения. Тогда уравнение, описывающее вращение аппарата, будет иметь вид

$$\rho\omega'(t) = u(t).$$

При изучении данного процесса необходимо учитывать изменение возможностей двигателей с течением времени (это может быть вызвано, например, постепенным падением давления в баллонах с рабочим веществом). Таким образом, управляющий момент подвержен ограничениям $u(t) \in U(t)$, где U - некоторое мультиотображение.

При более тонких расчетах необходимо учитывать также и зависимость возможностей управления от состояния системы, что и отражается выбором мультифункции обратной связи.

Вернемся к общему случаю управляемой системы (3.1),(3.2). Конечно, если пара $(x(t), u(t))$ задает траекторию системы и реализующее ее управление, то траектория является решением ассоциированного дифференциального включения

$$x'(t) \in f(t, x(t), U(t, x(t))). \tag{3.3}$$

Однако обратный переход от включения (3.3) к системе (3.1), (3.2) совсем не очевиден. Эквивалентность соотношений (3.1)-(3.2) и (3.3), т.е. тот факт, что для каждого решения x включения (3.3) найдется такая измеримая управляющая функция u, которая реализует его как траекторию системы (3.1)-(3.2), устанавливается с помощью леммы Филиппова (см. Теорему 1.5.15). Мы рассмотрим этот вопрос ниже в Разделе 3.4.

Еще одним важным и своевременным применением, которое нашли дифференциальные включения примерно в это же время, явилось их использование для изучения систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью (см. [122], [125]). В классической теории дифференциальных уравнений правая часть, как правило непрерывна по фазовым переменным. Если же правая часть разрывна, то уравнение может не иметь решения уже в простейших случаях. Например, задача Коши

$$x'(t) = \begin{cases} 1, \; x < 0, \\ -1, \; x \geq 0 \end{cases}$$

$$x(0) = 0,$$

как легко видеть, не имеет решения в обычном виде.

Однако дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями естественно возникают во многих приложениях. Большое число задач механики и электротехники приводят к уравнениям такого рода, поскольку многие физические соотношения описываются с помощью разрывных функций, таких, например, как сила сухого трения или скачкообразные характеристики многих электронных устройств. Еще одной мотивацией для рассмотрения разрывных правых частей является то обстоятельство, что если правая часть непрерывна, но достаточно сложна, то бывает полезно аппроксимировать ее простыми разрывными функциями, типа кусочно-постоянных или кусочно-линейных.

В качестве примера рассмотрим одномерную модель автопилота. Пусть φ - угол между желаемым направлением самолета и реальным. Если этот угол достаточно мал, то угловое движение самолета описывается дифференциальным уравнением

$$\varphi'' = -k\varphi' + \tau(\varphi),$$

где τ - вращающий момент, создаваемый стабилизирующим устройством по простому принципу:

$$\tau(\varphi) = \begin{cases} T, & \varphi < 0, \\ -T, & \varphi > 0. \end{cases}$$

Один из подходов, предложенный для изучения уравнений такого рода был очень естественен: заменить разрывную правую часть $f(x)$ на многозначную, определяемую формулой

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} f(B_\varepsilon(x)).$$

Нетрудно видеть, что операция такого рода не изменяет значения $f(x)$, если x - точка непрерывности, но "заклеивает дыры" в точках разрыва: так, например, указанная выше функция $\tau(\varphi)$ после данного преобразования принимает значение $[-T, T]$ при $\varphi = 0$.

Естественно назвать решение дифференциального включения

$$x'(t) \in F(x(t))$$

обобщенным решением исходного дифференциального уравнения

$$x'(t) = f(x(t))$$

с разрывной правой частью и этот подход оказался чрезвычайно плодотворным. Дело в том, что в случае ограниченной правой части f мультиотображение F оказывается полунепрерывным сверху независимо от класса функции f и это дает возможность применять для соответствующего дифференциального включения технику теорем существования и другие методы (см., например, Теорему 3.2.15 ниже).

Дифференциальные включения и связанные с ними задачи возникают естественным образом не только при описании технических или транспортных систем. Приведем пример из сферы математической экономики. Рассмотрим модель *экономической динамики типа Неймана–Гейла.*

Пусть состояние экономики в данный момент времени характеризуется некоторым n - мерным вектором x. Компонентами вектора x являются количества всевозможных продуктов, имеющихся в данный момент в системе. Отметим, что понятию продукта здесь придается достаточно широкий смысл - это могут быть не только обычные продукты, но и виды природных и трудовых ресурсов, фондов, услуг и т.д. Пусть для каждого состояния экономики $x \in \mathbb{R}^n$ в момент t задано множество $A(x) \subset \mathbb{R}^n$ состояний, в которые экономика может перейти в момент времени $t+1$. Таким образом, данная экономическая модель задается некоторым мультиотображением $A : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$, характеризующим производственные возможности системы. Последовательность состояний системы $\{x(t_0+k)\}_{k=0}^{\infty}$ в моменты времени $\{t_0+k\}_{k=0}^{\infty}$ называется технологически допустимой траекторией системы, если

$$x(t+1) \in A(x(t))$$

для всех $t = t_0 + k$, $k = 0, 1, \ldots.$

Теперь перейдем от данной дискретной модели к модели, функционирующей в непрерывном времени. Предположим, что процесс переработки продуктов происходит равномерно (т.е. в момент $t+\tau$, $\tau \in (0,1)$, состояние экономики может характеризоваться любым из векторов множества $(1-\tau)x(t) + \tau Ax(t)$. Тогда

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} \in \frac{(1-\tau)x(t)+\tau A(t)-x(t)}{\tau} = Ax(t) - x(t).$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$, получаем дифференциальное включение, описывающее непрерывную динамику экономической системы

$$x'(t) \in A(x(t)) - x(t).$$

3.2. Теоремы существования и свойства множеств решений.

В этом разделе нас будут интересовать вопросы разрешимости задачи Коши для дифференциального включения в конечномерном пространстве:

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) & (3.4) \\ x(t_0) = x_0, & (3.5) \end{cases}$$

где $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ - некоторое мультиотображение, $I = [t_0, T]$ - некоторый интервал вещественной прямой, снабженный мерой Лебега.

Задачу (3.4) - (3.5) можно рассматривать при различных предположениях на правую часть включения F и вкладывая различный смысл в понятие ее решения. Можно рассматривать, например, *классические решения,* полагая функцию x всюду дифференцируемой и требуя выполнения включения (3.4) в каждой точке интервала I. Мы, однако, всюду в дальнейшем будем рассматривать лишь *решения в смысле Каратеодори.* Более точно говоря, дадим следующее определение.

3.2.1. Определение. *Решением задачи Коши* (3.4)-(3.5) на некотором промежутке $[t_0, \tau]$, $t_0 < \tau \leq T$ называется абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая начальному условию (3.5) и включению (3.4) почти в каждой точке промежутка $[t_0, \tau]$.

Для нахождения решений задачи Коши мы будем применять развитые в предыдущей главе методы неподвижной точки, основываясь на следующем простом наблюдении, проверку справедливости которого мы оставляем читателю в качестве упражнения. Пусть мультиотображение F суперпозиционно селектируемо и удовлетворяет условию интегральной ограниченности $(F3)$ (см. Определения 1.5.21 и 1.5.25). Тогда определен интегральный мультиоператор (ср. 1.5.33):

$$j \circ \mathcal{P}_F : C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n) \to P(C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)).$$

3.2.2. Теорема. *Функция $x : [t_0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, является решением задачи (3.4)-(3.5) тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора*

$$\mathcal{J}_F : C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n) \to P(C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{J}_F = x_0 + j \circ \mathcal{P}_F.$$

В дальнейшем важную роль будет играть следующее свойство мультиоператора $\mathcal{J}_F$.

3.2.3. Лемма. *Образ $\mathcal{J}_F(\Omega) \subset C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)$ любого ограниченного множества $\Omega \subset C([t_0, \tau]; \mathbb{R}^n)$ относительно компактен.*

Доказательство. Воспользуемся критерием компактности Арцела–Асколи (см. Главу 0). Пусть $y \in \mathcal{J}_F(\Omega)$ - произвольная функция. Это означает, что y имеет вид

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(x)$, $x \in \Omega$. Тогда для любого $t \in [t_0, \tau]$ имеем

$$|y(t)| \le |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s)|ds \le |x_0| + \int_{t_0}^{\tau} \nu_\Omega ds,$$

т.е. множество $\mathcal{J}_F(\Omega)$ ограничено.

С другой стороны, для любых $t_1, t_2 \in [t_0, \tau]$:

$$|y(t_2) - y(t_1)| = |\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds| \le \int_{t_1}^{t_2} |f(s)|ds \le \int_{t_1}^{t_2} \nu_\Omega ds,$$

т.е. множество $\mathcal{J}_F(\Omega)$ равностепенно непрерывно. ■

Мы можем доказать теперь следующую *локальную* теорему существования.

3.2.4. Теорема. *Пусть мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям:*
$F1$) для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ мультифункция $F(\cdot, x) : I \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение;
$F2$) для μ-п.в. $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху
и условию интегральной ограниченности ($F3$).

Тогда найдется такое τ, $t_0 < \tau \le T$, что задача Коши (3.4)-(3.5) имеет решение на промежутке $[t_0, \tau]$.

Доказательство. Пусть $\overline{B} = \overline{B}_R(x_0) \subset C(I;\mathbb{R}^n)$ - замнутый шар произвольного радиуса $R > 0$ с центром в точке $x_0(t) \equiv x_0$ и $\nu_{\overline{B}}$ - соответствующая ему по условию $(F3)$ функция. Пусть теперь τ, $0 < \tau \leq T$ достаточно мало для того, чтобы

$$\int_{t_0}^{\tau} \nu_{\overline{B}}(s)ds \leq R.$$

Тогда "сужая"шар $\overline{B} = \overline{B}_R(x_0)$ на пространство $C([t_0,\tau];\mathbb{R}^n)$, мы, очевидно, будем иметь

$$\mathcal{J}_F(\overline{B}) \subset \overline{B}.$$

Из Следствия 1.5.34, очевидно, вытекает замкнутость мультиоператора $\mathcal{J}_F : \overline{B} \to Cv(\overline{B})$, а из Леммы 3.2.3 и Теоремы 1.2.32 - его компактность. Применяя теперь теорему Боненбласта–Карлина (Теорема 2.2.22), мы заключаем, что мультиотображение $\mathcal{J}_F$ имеет неподвижную точку, что в силу Теоремы 3.2.2 и завершает доказательство. ■

Для доказательства следующей теоремы существования нам понадобится утверждение об интегральных нервенствах, известное под названием *леммы Гронуолла* (см., например, [126], Теорема III.1.1)

3.2.5. Лемма. *Пусть $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ - непрерывные неотрицательные функции; $C \geq 0$ - некоторая постоянная и*

$$v(t) \leq \ C + \int_a^t u(s)v(s)ds, \ \ a \leq t \leq b.$$

Тогда

$$v(t) \leq \ Ce^{\int_a^t u(s)ds}, \qquad a \leq t \leq b.$$

Заменим теперь условие интегральной ограниченности правой части $(F3)$ более сильным условием *подлинейного роста*

$F3'$) существует такая функция $\alpha \in L^1_+(I)$, что

$$\|F(t,x)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in I$.

Мы можем теперь сформулировать *глобальную* теорему существования.

3.2.6. Теорема. *Пусть мультиотображение $F : I\times\mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $(F1)$, $(F2)$ и $(F3')$. Тогда задача Коши (3.4)-(3.5) имеет решение на промежутке $[t_0, T]$.*

Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

3.2.7. Лемма. *При условиях Теоремы 3.2.6 множество решений однопараметрического семейства задач Коши*

$$\begin{cases} x'(t) \in \lambda F(t, x(t)), \qquad t \in I,\ \lambda \in [0,1] & (3.6)\\ x(t_0) = x_0, & (3.7)\end{cases}$$

априори ограничено.

Доказательство. Всякая функция, являющаяся решением задачи (3.6)-(3.7) при некотором $\lambda \in [0, 1]$, имеет вид

$$x(t) = x_0 + \lambda \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(x)$. Но тогда для непрерывной функции $v(t) = |x(t)|$ имеем следующую оценку:

$$v(t) \le |x_0| + \lambda \int_{t_0}^{t} |f(s)|ds \le |x_0| + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)(1 + |x(s)|)ds \le$$

$$\le |x_0| + \int_{t_0}^{T} \alpha(s)ds + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)v(s)ds.$$

Применяя Лемму 3.2.5, получаем

$$|x(t)| \le \ \ Ce^{\int_{t_0}^{T} \alpha(s)ds}, \quad t \in [t_0, T],$$

где $C = |x_0| + \int_{t_0}^{T} \alpha(s)ds$. ■

Доказательство Теоремы 3.2.6. Рассмотрим выпуклое замкнутое множество $\mathbf{K} \subset C(I; \mathbb{R}^n)$,

$$\mathbf{K} = \{y \in C(I; \mathbb{R}^n) \ \mid \ y(t_0) = x_0\}.$$

В силу Леммы 3.2.7 мы можем указать относительно открытое ограниченное подмножество $U_{\mathbf{K}}$, содержащее все решения задачи (3.6)-(3.7). (Заметим, что это множество содержит в том числе и функцию $x_0(t) \equiv x_0$, поскольку она является решением при $\lambda = 0$).

Нетрудно видеть, что мультиотображение

$$\mathcal{G}_F : \overline{U}_{\mathbf{K}} \times [0,1] \to Kv(\mathbf{K}),$$

$$\mathcal{G}_F(x,\lambda) = x_0 + \lambda j \circ \mathcal{P}_F(x)$$

компактно и, кроме того, $x \notin \mathcal{G}_F(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in \partial U_{\mathbf{K}} \times [0,1]$, ибо в противном случае такая функция x являлась бы решением задачи (3.6)-(3.7). Но это означает, что семейство $\mathcal{G}_F$ определяет гомотопию мультиполей $i - \mathcal{G}_F(\cdot,1) = i - \mathcal{J}_F$ и $i - \mathcal{G}_F(\cdot,0) = i - x_0$ на $\partial U_{\mathbf{K}}$.

Применяя теперь свойства гомотопической инвариантности и нормализации топологической степени (Теоремы 2.2.15 и 2.2.14), мы получаем

$$deg_{\mathbf{K}}(i - \mathcal{J}_F, \partial U_{\mathbf{K}}) = deg_{\mathbf{K}}(i - x_0, \partial U_{\mathbf{K}}) = 1.$$

Доказательство завершается применением общего принципа неподвижной точки (Теорема 2.2.20) и Теоремы 3.2.2. ■

Данная теорема может быть использована для решения вопроса о продолжении решения задачи Коши.

3.2.8. Теорема. *При выполнении условий Теоремы 3.2.6 любое решение задачи Коши* (3.4), (3.5) *на промежутке* $[t_0,\tau]$, $t_0 < \tau < T$ *может быть продолжено до решения на всем промежутке* $[t_0,T]$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}$ – некоторое решение задачи (3.4), (3.5) на промежутке $[t_0,\tau]$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t,x(t)) \\ x(\tau) = \widetilde{x}(\tau). \end{cases}$$

В силу Теоремы 3.2.6, эта задача имеет решение $\overline{x}$ на промежутке $[\tau,T]$. Соединяя решения $\widetilde{x}$ и $\overline{x}$, получаем искомое продолжение. ■

Примененный операторный метод позволяет теперь получить ряд топологических свойств множества решений задачи Коши в качестве прямых следствий соответствующих свойств множества неподвижных точек. Следующее свойство играет важнейшую роль в задачах оптимизации управляемых систем, описываемых с помощью дифференциальных включений (см. Раздел 3.4.)

3.2.9. Теорема. *При выполнении условий Теоремы 3.2.6 множество* $\Sigma(x_0) \subset C(I; \mathbb{R}^n)$ *компактно.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из Теорем 3.2.2, 2.3.1 и Лемм 3.2.3 и 3.2.7. ■

Используя Пример 1.2.22 (б), мы получаем следующее утверждение.

3.2.10. Следствие. *При выполнении условий Теоремы 3.2.6 мультифункция* $\Pi : I \to K(\mathbb{R}^n)$,

$$\Pi(t) = \Sigma(x_0)(t) = \{x(t) \mid x \in \Sigma(x_0)\}$$

непрерывна.

3.2.11. Замечание. Можно показать, что при условиях Теоремы 3.2.6 множество решений $\Sigma(x_0)$ связно, а следовательно связны и все множества $\Pi(t)$, $t \in I$ (см., например, [187], [112], [131], [191], [215]). О более тонких свойствах топологической структуры множества $\Sigma(x_0)$ см. раздел "Библиографические указания и дополнения".

Справедливо также следующее утверждение о непрерывной зависимости множества решений от начальных данных.

3.2.12. Теорема. *При условиях Теоремы 3.2.6 мультиотображение* $\Sigma : \mathbb{R}^n \to K(C(I; \mathbb{R}^n))$ *полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Если рассматривать мультиоператор $\mathcal{J}_F$ как мультиотображение от двух переменных – функции $x \in C(I; \mathbb{R}^n)$ и параметра $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то нетрудно видеть, что это мультиотображение удовлетворяет условиям Теоремы 2.3.2. ■

Мы можем использовать Теорему 2.3.2 и для исследования вопроса о зависимости множества решений задачи Коши от параметра.

Пусть Λ - некоторый компакт и мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$F1_\lambda$) для каждых $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$ мультифункция $F(\cdot, x, \lambda) : I \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение;
$F2_\lambda$) для μ-п.в. $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \Lambda \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;
$F3'_\lambda$) существует такая функция $\alpha \in L^1_+(I)$, что

$$\|F(t, x, \lambda)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$ и п.в. $t \in I$.

Для каждого фиксированного $\lambda \in \Lambda$ мы можем определить мультиоператор

$$\mathcal{J}_{F_\lambda} = x_0 + j \circ \mathcal{P}_{F_\lambda},$$

где $F_\lambda(t, x) = F(t, x, \lambda)$.

Используя методы предшествующих рассуждений, можно легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

3.2.13. Теорема. *Для любого ограниченного подмножества $\Omega \subset C(I; \mathbb{R}^n)$ семейство мультиоператоров*

$$\mathcal{G} : \Omega \times \Lambda \to Kv(C(I; \mathbb{R}^n)), \quad \mathcal{G}(\cdot, \lambda) = \mathcal{J}_{F_\lambda}$$

компактно.

Рассмотрим теперь задачу Коши для однопараметрического семейства дифференциальных включений:

$$\begin{cases} x'(t) \in \ F(t, x(t), \lambda), \qquad t \in I,\, \lambda \in \Lambda & (3.8) \\ x(t_0) = x_0, & (3.9) \end{cases}$$

Используя Теоремы 2.3.2, 3.2.6 и 3.2.13, мы приходим к следующему выводу.

3.2.14. Теорема. *При выполнении условий ($F1_\lambda$), ($F2_\lambda$) и ($F3'_\lambda$) однопараметрическая задача Коши (3.8)-(3.9) имеет непустое множество решений $\Sigma_\lambda(x_0)$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ и мультиотображение $\Xi : \Lambda \to K(C(I; \mathbb{R}^n))$,*

$$\Xi(\lambda) = \Sigma_\lambda(x_0)$$

полунепрерывно сверху.

Рассмотрим теперь (не стремясь к максимальной общности) в качестве приложения полученных результатов вопрос о разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения с разрывной правой частью. Справедливо следующее утверждение.

3.2.15. Теорема. *Пусть отображение* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ограничено на ограниченных подмножествах* $\mathbb{R}^n$. *Тогда задача Коши*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & (3.10) \\ x(t_0) = x_0, & (3.11) \end{cases}$$

имеет обобщенное решение на некотором промежутке $[t_0, \tau]$, $\tau > t_0$.

Доказательство. Напомним (см. Раздел 3.1), что обобщенным решением задачи (3.10)-(3.11) называется решение задачи Коши для дифференциального включения

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)), & (3.12) \\ x(t_0) = x_0, & (3.13) \end{cases}$$

где

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} f(B_\varepsilon(x)).$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение F имеет непустые выпуклые компактные значения в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ и также ограничено на ограниченных подмножествах.

В силу этого, для доказательства полунепрерывности сверху мультиотображения F достаточно показать его замкнутость. Пусть заданы последовательности $x_k \to x_*$, $y_k \in F(x_k)$, $y_k \to y_*$.

Без ущерба для общности будем считать последовательность

$$\varepsilon_k = 2\|x_k - x_*\| \to 0$$

монотонно убывающей.

Поскольку

$$y_k \in F(x_k) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{co} f(B_\varepsilon(x_k))$$

получаем, что

$$y_k \in \overline{co} f(B_\varepsilon(x_k))$$

для любого $\varepsilon > 0$. Для зафиксированного k возьмем теперь $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы

$$B_\varepsilon(x_k) \subset B_{\varepsilon_k}(x_*).$$

Тогда

$$y_k \in \overline{co} f(B_{\varepsilon_k}(x_*)) \;\; k = 1, 2, ...$$

Поскольку шары $B_{\varepsilon_k}(x_*)$ $k = 1, 2, ...$ вложены друг в друга, мы тогда получаем, что, если зафиксировать некоторое $k = m$, то

$$y_k \in \overline{co} f(B_{\varepsilon_m}(x_*))$$

для всех $k \geq m$. Но тогда и

$$y_* \in \overline{co} f(B_{\varepsilon_m}(x_*)).$$

В силу произвольности m это означает, что

$$y_* \in F(x_*).$$

Теперь к задаче (3.12)-(3.13) мы можем применить Теорему 3.2.4. ■

Используя тот же метод и Теорему 3.2.6, мы можем установить и существование обобщенного решения задачи (3.10)-(3.11) на произвольном промежутке $[t_0, T]$ в случае ограниченности отображения f.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости задачи Коши (3.4)-(3.5) в случае, когда правая часть F почти полунепрерывна снизу (см. Определение 1.5.35) и удовлетворяет условию интегральной ограниченности ($F3$). Как мы знаем из Теоремы 1.5.36, в этом случае мультиоператор суперпозиции $\mathcal{P}_F : C(I; \mathbb{R}^n) \to C(L^1(I; \mathbb{R}^n)$ полунепрерывен снизу. Кроме того $\mathcal{P}_F$, очевидно, имеет разложимые значения (см. Определение 1.4.7). Тогда, в силу Теоремы 1.4.8, мультиоператор $\mathcal{P}_F$ имеет непрерывное сечение

$$\rho_F : C(I; \mathbb{R}^n) \to L^1(I; \mathbb{R}^n).$$

Но тогда непрерывный оператор $\iota_F : C(I; \mathbb{R}^n) \to P(C(I; \mathbb{R}^n))$,

$$\iota_F = x_0 + j \circ \rho_F$$

в свою очередь, является непрерывным сечением мультиоператора $\mathcal{J}_F$ и его неподвижные точки будут являться неподвижными точками этого мультиоператора. Это дает возможность в развитом выше операторном подходе заменять мультиоператор $\mathcal{J}_F$ его непрерывным сечением ι_F и применить к нему соответствующие "однозначные" принципы неподвижной точки (теорему Шаудера и степень компактных полей). В результате мы получаем следующие теоремы существования, детали доказательства которых мы оставляем читателю.

3.2.16. Теорема. *Пусть мультиотображение* $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *почти полунепрерывно снизу и удовлетворяет условию* $(F3)$. *Тогда найдется такое* τ, $t_0 < \tau \le T$, *что задача Коши* (3.7)-(3.5) *имеет решение на промежутке* $[t_0, \tau]$.

3.2.17. Теорема. *Пусть мультиотображение* $F : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ *почти полунепрерывно снизу и удовлетворяет условию* $(F3')$. *Тогда задача Коши* (3.4)-(3.5) *имеет решение на промежутке* I.

Что касается топологических свойств множества решений в полунепрерывном снизу случае, то отметим следующее утверждение.

3.2.18. Теорема. *При условиях Теоремы 3.2.17 множество решений* $\Sigma(x_0)$ *связно, а следовательно связны и все множества*

$$\Pi(t) = \Sigma(x_0)(t), \;\; t \in I.$$

Доказательство этого результата может быть найдено, например, в [191], [247].

3.3. Периодические решения дифференциальных включений

Задача об отыскании периодических решений является одной из классических проблем теории дифференциальных уравнений. В этом разделе мы применим развитые выше операторные методы, в частности, теорию топологической степени, к исследованию этой задачи для дифференциальных включений.

Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ является T-периодическим по t, т.е.

$$F(t,x) = F(t+T, x), \;\; T > 0$$

для любых $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что это условие дает возможность рассматривать мультиотображение F лишь на множестве $[0,T] \times \mathbb{R}^n$. Мы будем всюду ниже в этом разделе предполагать, что мультиотображение F удовлетворяет на этом множестве условиям $(F1)$, $(F2)$ и $(F3')$ предыдущего раздела.

Назовем *T-периодическим решением дифференциального включения*

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \tag{3.14}$$

такое решение x, которое удовлетворяет граничному условию периодичности

$$x(0) = x(T). \tag{3.15}$$

Ясно, что любая такая функция может быть продолжена до T-периодического решения, заданного на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Нашей ближайшей целью будет являться сведение вопроса о существовании периодического решения дифференциального включения к задаче о неподвижной точке многозначного интегрального оператора в функциональном пространстве. Это позволит доказывать теоремы существования периодических решений развитыми в Главе 2 топологическими методами.

Обозначим $\mathcal{C} = C([0,T]; \mathbb{R}^n)$. По-видимому, простейшим интегральным мультиоператором, предназначенным для поиска T-периодических решений, является мультиоператор $\mathcal{J}_T : \mathcal{C} \to Kv(\mathcal{C})$ вида

$$\mathcal{J}_T(x) = x(T) + j \circ \mathcal{P}_F(x).$$

(см. Определение 1.5.3).

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

3.3.1. Теорема. *Неподвижные точки мультиоператора $\mathcal{J}_T$ совпадают с решениями периодической задачи* (3.14)-(3.15).

Аналогично тому, как это было сделано для интегрального мультиоператора $\mathcal{J}_T$ (см. Лемму 3.2.3), мы можем убедиться в том, что образ $\mathcal{J}_T(\Omega)$ любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ относительно компактен. Далее, используя Следствие 1.5.34, нетрудно проверить, что мультиоператор $\mathcal{J}_T$ замкнут, а следовательно, полунепрерывен сверху (Теорема 1.2.32) и, значит, компактен на любом ограниченном множестве.

Таким образом, к мультиоператору $\mathcal{J}_T$ применима теория топологической степени, развитая в Главе 2, и мы можем сформулировать следующий общий принцип.

3.3.2. Теорема. *Пусть* $\mathbf{K}$ *- замкнутое выпуклое множество в пространстве* $\mathcal{C}$; $U_{\mathbf{K}} \subset \mathbf{K}$ *- ограниченное относительно открытое подмножество. Если* $deg_{\mathbf{K}}(i - \mathcal{J}_T, \partial U_{\mathbf{K}}) \neq 0$, *то периодическая задача* (3.14)-(3.15) *имеет решение в* $U_{\mathbf{K}}$.

Рассмотрим некоторые простейшие теоремы существования T-периодических решений дифференциальных включений.

Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ T-периодично по первому аргументу и его сужение на $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times [0,1]$ удовлетворяет условиям $(F1_\lambda)$-$(F3'_\lambda)$ предыдущего раздела.

Тогда можно рассмотреть однопараметрическое семейство дифференциальных включений

$$x'(t) \in F(t, x(t), \lambda), \qquad \lambda \in [0,1] \tag{3.16}$$

и порожденное им семейство интегральных мультиоператоров $\mathcal{G}_T : \mathcal{C} \times [0,1] \to Kv(\mathcal{C})$,

$$\mathcal{G}_T(x, \lambda) = x(T) + j \circ \mathcal{P}_{F_\lambda}(x),$$

где $F_\lambda = F(\cdot, \cdot, \lambda)$.

Нетрудно видеть, что сужение $\mathcal{G}_T$ на $\Omega \times [0,1]$, где $\Omega \subset \mathcal{C}$ - произвольное ограниченное множество, компактно и, следовательно, семейство $\mathcal{G}_T$ может порождать гомотопию интегральных мультиоператоров.

Пусть $U_{\mathbf{K}} \subset \mathbf{K}$ - ограниченное относительно открытое подмножество такое, что $\partial U_{\mathbf{K}}$ ни при каком $\lambda \in [0,1]$ не содержит T-периодических решений семейства (3.16) (такая ситуация может быть, если, например, все T-периодические решения этого семейства, принадлежащие $\mathbf{K}$, допускают априорную оценку, в силу которой они лежат в $U_{\mathbf{K}}$). Тогда справедливо следующее утверждение, которое является прямым следствием принципа гомотопической инвариантности топологической степени (Теорема 2.2.15) и Теоремы 3.3.2.

3.3.3. Теорема. *Пусть* $deg_{\mathbf{K}}(i - \mathcal{G}_T(\cdot, 0), \partial U_{\mathbf{K}}) \neq 0$. *Тогда периодическая задача для дифференциального включения*

$$x'(t) \in F(t, x(t), 1)$$

имеет решение в $U_{\mathbf{K}}$.

В частности, имеют место следующие результаты.

3.3.4. Следствие. *Пусть* U *выпукло и* $\mathcal{G}_T(\cdot,0)(x) \cap \overline{U}_{\mathbf{K}} \neq \varnothing$ *для всех* $x \in \partial U_{\mathbf{K}}$. *Тогда справедливо заключение Теоремы 3.3.3.*

Доказательство. Из доказательства Теоремы 2.2.21 вытекает, что $deg_{\mathbf{K}}(i - \mathcal{G}_T(\cdot,0), \partial U_{\mathbf{K}}) = 1$. ■

3.3.5. Следствие. *Пусть* $\mathbf{K}$ *и* $U_{\mathbf{K}}$ *симметричны относительно нуля и* $0 \in U_{\mathbf{K}}$. *Пусть* $F(t,-x,0) = -F(t,x,0)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и почти всех* $t \in [0,T]$. *Тогда справедливо заключение Теоремы 3.3.3.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что интегральный мультиоператор $\mathcal{G}_T(\cdot,0)$, отвечающий правой части $F(\cdot,\cdot,0)$, нечетен:

$$\mathcal{G}_T(-x,0) = -\mathcal{G}_T(x,0)$$

и остается воспользоваться теоремой о нечетном поле (Теорема 2.2.27). ■

При исследовании ряда конкретных периодических задач могут оказаться полезными интегральные мультиоператоры, которые имеют вид, отличный от $\mathcal{J}_T$. Рассмотрим, в частности, случай дифференциального включения с выделенной линейной частью или *полулинейного дифференциального включения*

$$x'(t) \in ax(t) + F(t,x(t)), \tag{3.17}$$

где $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - линейный оператор, а мультиотбражение F T-периодично и удовлетворяет прежним условиям $(F1)$, $(F2)$ и $(F3')$.

Будем предполагать, что оператор a удовлетворяет условию: *1 не принадлежит спектру оператора* e^{aT} и, следовательно определен линейный оператор $[i - e^{aT}]^{-1}$.

Определим мультиоператор $\mathcal{I}_T : \mathcal{C} \to P(\mathcal{C})$ следующим образом:

$$\mathcal{I}_T(x) = \{y \mid y(t) = e^{at}[i - e^{aT}]^{-1} \int_0^T e^{a(T-s)} f(s)ds +$$

$$+\int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds, \quad f \in \mathcal{P}_F(x)\}.$$

3.3.6. Теорема. *Множество всех решений периодической задачи* (3.17), (3.15) *совпадает с множеством неподвижных точек* $Fix\mathcal{I}_T$.

Доказательство. 1) Нетрудно убедиться, что каждое решение x включения (3.17) может быть записано в виде

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(x)$. Если это решение удовлетворяет условию T-периодичности (3.15), то для него выполнено

$$x(0) = e^{aT} x(0) + \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds,$$

и, следовательно,

$$x(0) = [i - e^{aT}]^{-1} \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds,$$

откуда

$$x(t) = e^{at} [i - e^{aT}]^{-1} \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds,$$

т.е. $x \in \mathcal{I}_T(x)$.

2) Пусть теперь функция x - неподвижная точка $\mathcal{I}_T$. Тогда

$$x(t) = e^{at} [i - e^{aT}]^{-1} \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) ds,$$

где $f \in \mathcal{P}_F(x)$, откуда следует, что x есть решение включения (3.17). Далее,

$$x(T) = e^{aT} [i - e^{aT}]^{-1} \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds + \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds$$

$$= (e^{aT} [i - e^{aT}]^{-1} + i) \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds = [i - e^{aT}]^{-1} \int_0^T e^{a(T-s)} f(s) ds$$

$$= x(0),$$

т.е. x удовлетворяет условию периодичности (3.15). ■

Применяя Теорему 1.5.30 и методы исследования интегральных мультиоператоров, развитые выше, нетрудно проверить, что мультиоператор $\mathcal{I}_T$ имеет выпуклые компактные значения и компактен на ограниченных подмножествах пространства $\mathcal{C}$. Это обстоятельство также дает возможность приложить к нему топологические методы. В качестве примера приведем следующие результаты.

3.3.7. Теорема. *Пусть существует априорная оценка для всех T-периодических решений семейства включений*

$$x'(t) \in \;\; ax(t) + \lambda F(t, x(t)), \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{3.18}$$

Тогда множество всех решений периодической задачи (3.17), (3.15) *непусто и компактно.*

Доказательство. Если $\mathcal{I}_T$ – интегральный мультиоператор задачи (3.17), (3.15), то, как нетрудно убедиться, мультиотображение $\lambda\mathcal{I}_T$ для каждого $\lambda \in [0, 1]$ является интегральным мультиоператором для соответствующего включения из семейства (3.18). Тогда для достаточно большого $r > 0$, и шара $B_r(0) \subset \mathcal{C}$ семейство мультиполей $i - \lambda\mathcal{I}_T$ реализует гомотопию тождественного поля i и мультиполя $i - \mathcal{I}_T$ на $\partial B_r(0)$. Используя свойства нормализации и гомотопической инвариантности топологической степени, мы приходим к заключению, что $deg(i - \mathcal{I}_T, \partial B_r(0)) = 1$ и, следовательно множество всех неподвижных точек $Fix\mathcal{I}_T$ непусто и содержится в $B_r(0)$. Его компактность вытекает из Теоремы 2.3.1. ■

3.3.8. Следствие. *Пусть многозначная часть F включения* (3.17) *допускает оценку*

($F3''$) *найдется функция $\gamma \in L^1_+[0, T]$ такая, что*

$$\|F(t, x)\| \leq \gamma(t)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $t \in [0, T]$.

Тогда выполнено заключение Теоремы 3.3.7.

Доказательство. Достаточно заметить, что неподвижные точки x мультиотображений семейства $\lambda\mathcal{I}_T$, $\lambda \in [0, 1]$ в этом случае допускают априорную оценку

$$\|x\| \leq M\|\gamma\|_{L^1}(M\|[i - e^{aT}]^{-1}\| + 1),$$

где $M = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{at}\|$. ■

Еще одним методом доказательства теорем существования периодических решений дифференциальных включений является метод направляющих функций. Основы этого метода в случае обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены в работах М.А. Красносельского, А.И. Перова и их учеников (см., например, [74], [75]).

Для простоты мы ограничимся случаем, когда правая часть дифференциального включения полунепрерывна сверху по совокупности переменных.

Введем следующее понятие.

3.3.9. Определение. Точка $x_0 \in R^n$ называется *точкой T-невозвращаемости* траекторий дифференциального включения (3.14), если для любого решения x, выходящего из x_0, выполнено следующее условие:

$$x(t) \neq x_0, \;\; \forall t \in (0, T]. \tag{3.19}$$

Следующее утверждение играет ключевую роль в обосновании метода направляющих функций.

3.3.10. Теорема. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество такое, что любая точка $x \in \partial U$ является точкой T-невозвращаемости траекторий включения. Пусть мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию $(F3')$. Если мультиполе $R_0 : \overline{U} \to Kv(\mathbb{R}^n)$,*

$$R_0(x) = -F(0, x),$$

не имеет на ∂U особых точек, то

$$deg(\Phi, \partial\Omega) = deg(R_0, \partial U),$$

где $\Phi = i - \mathcal{J}_T$ – мультиполе, порожденное интегральным мультиоператором $\mathcal{J}_T$, а Ω – некоторое ограниченное открытое множество *в пространстве $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Из Леммы 3.2.7 следует, что множество всех решений включения (3.14), выходящих из $\overline{U}$, является ограниченным. Пусть число $m > 0$ таково, что норма любого решения из этого множества меньше m. Определим открытое множество Ω в пространстве $\mathcal{C}$ следующими условиями:

$$\Omega = \{x \in \mathcal{C} \ | \ x(0) \in U, \ \ ||x|| < m\}.$$

Воспользуемся свойством топологической инвариантности степени (Теорема 2.2.15). Рассмотрим семейство мультиотображений

$$F_\lambda(t,x) = F(\lambda t, x), \ \ \lambda \in [0,1]$$

и порождаемое им семейство мультиполей $\Psi : \bar{\Omega} \times [0,1] \to Kv(\mathcal{C})$,

$$\Psi(x,\lambda) = \{z \ | \ z(t) = x(t) - x(T) - \lambda \int\limits_0^t f(s)ds - (1-\lambda)\int\limits_0^T f(s)ds,$$

$$f \in \mathcal{P}_{F_\lambda}(x)\}.$$

Используя Лемму 3.2.3, нетрудно убедиться, что семейство мультиполей Ψ компактно. Покажем, что это семейство невырожено на $\partial\Omega \times [0,1]$.

Предположим противное, т.е. что найдутся такая функция $x_0 \in \partial\Omega$ и число $\lambda_0 \in [0,1]$, что $0 \in \Psi(x_0, \lambda_0)$. Это означает, что существует суммируемое сечение $f(s) \in F(\lambda_0 s, x_0(s))$, для которого выполняется следующее равенство:

$$x_0(t) = x_0(T) + \lambda_0 \int\limits_0^t f(s)ds + (1-\lambda_0)\int\limits_0^T f(s)ds, \tag{3.20}$$

для любого $t \in [0,T]$.

При $t = 0$ имеем

$$x_0(0) = x_0(T) + (1-\lambda_0)\int\limits_0^T f(s)ds,$$

а при $t = T$ получаем

$$\int\limits_0^T f(s)ds = 0. \tag{3.21}$$

Следовательно, $x_0(0) = x_0(T)$.

Продифференцировав по t равенство (3.20), получаем

$$x_0'(t) = \lambda_0 f(t) \in \lambda_0 F(\lambda_0 t, x_0(t))$$

при почти всех $t \in [0, T]$.

Таким образом, x_0 – решение дифференциального включения

$$x'(t) \in \lambda_0 F(\lambda_0 t, x(t)).$$

Заметим, что по построению множества Ω, его граница состоит из функций двух типов:

1) $x(0) \in \partial U$;
2) $x(0) \in U$, $||x|| = m$.

Рассмотрим 2 случая:

(a) Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $x_0(t) \equiv x_0$ для любого $t \in [0, T]$, $f(t) \in F(0, x_0)$ для п.в. $t \in [0, T]$ и из (3.21) получаем $0 \in F(0, x_0)$.

Функция $x_0(t)$, будучи постоянной, не может быть функцией первого типа, так как по условию мультиполе R_0 не имеет особых точек на ∂U.

С другой стороны, функция $x_0(t)$ не может быть и функцией второго типа, поскольку $||x_0|| < m$ по построению множества Ω.

(b) Пусть теперь $\lambda_0 \neq 0$. Рассмотрим функцию $z_0(t) = x_0(\frac{t}{\lambda_0})$. Тогда почти для каждого $t \in [0, \lambda_0 T]$ имеем

$$z_0'(t) = \frac{1}{\lambda_0} x_0'(\frac{t}{\lambda_0}) = f(\frac{t}{\lambda_0}) \in F(t, x_0(\frac{t}{\lambda_0})) = F(t, z_0(t)).$$

Таким образом функция z_0 является решением дифференциального включения (3.19) на промежутке $[0, \lambda_0 T]$. Согласно Теореме 3.2.8 мы можем считать его продолженным на весь промежуток $[0, T]$.

Функция x_0 не может быть функцией первого типа. В самом деле,

$$x_0(0) = z_0(0) = x_0(T) = z_0(\lambda_0 T),$$

откуда вытекает, что включение (3.19) имеет решение z_0 такое, что $z_0(0) \in \partial U$ и $z_0(0) = z_0(\lambda_0 T)$, что противоречит T-невозвращаемости траекторий, выходящих из ∂U.

С другой стороны, x_0 не может быть и функцией второго типа. Это следует из того, что

$$||x_0|| \leq ||z_0|| < m,$$

поскольку z_0 - решение включения (3.19), выходящее из множества U.

Таким образом, семейство мультиполей Ψ реализует гомотопию мультиполей

$$\Psi_1 = \Phi = i - \mathcal{J}_T,$$

и

$$\Psi_0(x) = i - \Gamma_0(x),$$

где мультиоператор $\Gamma_0 : \overline{U} \to Kv(\mathcal{C})$ определен соотношением

$$\Gamma_0(x) = x(T) + \int\limits_0^T F(0, x(s))ds.$$

Этот мультиоператор действует в конечномерное подпространство $C^n_{[0,T]}$ постоянных функций, естественно изоморфное $\mathbb{R}^n$. Воспользовавшись Теоремой 2.2.19 о сужении, получаем

$$deg(\Psi_0; \partial U) = deg(\Psi_0 \mid_{R^n}, \partial(U \cap \mathbb{R}^n)).$$

Используя Теорему 1.5.12(д), заметим, что мультиполе $\widehat{\Psi}_0 = \Psi_0 \mid_{\mathbb{R}^n}$ определяется соотношениями

$$\widehat{\Psi}_0(x) = -\int\limits_0^T F(0, x)ds = -T \cdot F(0, x).$$

Тогда окончательно получаем

$$deg(\Phi, \partial\Omega) = deg(\Psi_0, \partial\Omega) = deg(-F(0, \cdot), \partial U) = deg(R_0, \partial U).$$

■

Из доказанной теоремы немедленно вытекает следующее утверждение о существовании периодического решения.

3.3.11. Следствие. *В условиях Теоремы 3.3.10, пусть*

$$deg(R_0, \partial U) \neq 0.$$

Тогда дифференциальное включение (3.14) имеет T-периодическое решение.

Теорема 3.3.10 может быть использована также для обоснования *метода направляющих функций.* Введем необходимые понятия.

Непрерывно дифференцируемую функцию $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть *невырожденным потенциалом,* если ее градиент не обращается в нуль вне некоторого шара, т.е. найдется $r_v > 0$ такое, что

$$grad\, v(x) = \{\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial v(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\} \neq 0,$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| \geq r_v$.

Из свойств топологической степени 2.2.3 и 2.2.6 вытекает, что степень градиента невырожденного потенциала

$$deg(grad\, v(x), S)$$

на сфере $S \subset \mathbb{R}^n$ радиуса $r \geq r_v$ не зависит от r. Это общее значение степени называется *индексом невырожденного потенциала* и обозначается $ind\, v$.

В качестве примера потенциала с ненулевым индексом можно рассмотреть невырожденный потенциал v, удовлетворяющий условию коэрцитивности

$$\lim_{||x|| \to \infty} |v(x)| \to \infty. \tag{3.22}$$

(см. [75]).

3.3.12. Определение. Невырожденный потенциал v называется *направляющей функцией* для дифференциального включения (3.14), если

$$(grad\, v(x), y) > 0$$

при $0 \leq t \leq T$, $y \in F(t, x)$, $||x|| \geq r_v$.

Из данного определения сразу вытекает, что если v - направляющая функция включения (3.14), то поле $-grad\, v$ и мультиполе R_0

не допускают противоположных направлений на сферах S_r радиуса $r \geq r_v$, и поэтому, в силу Теоремы 2.2.17

$$deg(R_0, S_r) = (-1)^n ind\, v. \tag{3.23}$$

(Мы использовали известное свойство степени однозначных полей: $deg(-\varphi, S) = (-1)^n deg(\varphi, S)$, см., например, [74]).

Мы можем сформулировать теперь следующее условие существования периодического решения.

3.3.13. Теорема. *Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию $(F3')$. Если для дифференциального включения (3.14) существует направляющая функция v ненулевого индекса, то это включение имеет T-периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $r_0 \geq r_v$ определено как

$$r_0 = (r_v + \int_0^T \alpha(s)ds)\ e^{\int_0^T \alpha(s)ds},$$

где α – функция из условия $(F3')$.

Тогда если x – решение включения (3.14) с начальным условием $||x(0)|| > r_0$, то $||x(t)|| > r_v$ для всех $t \in [0, T]$. В самом деле, пусть найдется точка $t_0 \in (0, T]$ такая, что $||x(t_0)|| \leq r_v$. Для $t \in [0, t_0]$ определим $y(t) = x(t_0 - t)$, $\beta(t) = \alpha(t_0 - t)$, $G(t, x) = -F(t_0 - t, x)$. Ясно, что

$$y'(t) \in G(t, y(t)).$$

Поскольку $||G(t, x)|| \leq \beta(t)(1 + ||x||)$ почти для всех $t \in [0, t_0]$, то применяя Лемму 3.2.7, получаем

$$||y(t)|| \leq (||y(0)|| + \int_0^{t_0} \beta(s)ds)\ e^{\int_0^{t_0} \beta(s)ds} \leq r_0$$

для всех $t \in [0, t_0]$. Таким образом $||x(0)|| = ||y(t_0)|| \leq r_0$ и мы получаем противоречие.

Если теперь r, $r > r_0$ произвольно, то сфера S_r состоит из точек T-невозвращаемости траекторий включения (3.14). Действительно, если x – решение (3.14) такое, что $x(0) \in S_r$, то как показано выше $||x(t)|| > r_v$ для всех $t \in [0, T]$. Тогда для любого $t \in (0, T]$ имеем

$$v(x(t)) - v(x(0)) = \int_0^t (grad\, v(x(s)),\, x'(s))ds > 0,$$

откуда и следует (3.19).

Для завершения доказательства остается воспользоваться формулой (3.23) и Следствием 3.3.11. ■

3.3.14. Следствие. *Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию $(F3')$. Если для дифференциального включения (3.14) существует направляющая функция v, удовлетворяющая условию коэрцитивности (3.22), то это включение имеет T-периодическое решение.*

Теорема 3.3.13 допускает усиления в различных направлениях. Приведем один из самых общих результатов (см. [215]).

3.3.15. Теорема. *Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям $(F1)$, $(F2)$ и $(F3')$. Пусть существует невырожденный потенциал $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ненулевого индекса такой, что для каждых $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| \geq r_v$ и $t \in [0, T]$ найдется $y \in F(t, x)$ такое, что*

$$(grad\, v(x), y) \geq 0.$$

Тогда включение (3.14) имеет T-периодическое решение.

3.4. Управляемые системы

Мы будем рассматривать *управляемую систему с обратной связью* вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), & (3.19)\\ u(t) \ \in U(t, x(t)). & (3.20)\end{cases}$$

Здесь $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – *отображение, характеризующее динамику системы*; как прежде, $I = [t_0, T]$; $\mathbb{R}^m$ – *пространство управляющих параметров;* $U : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^m)$ – *мультифункция обратной связи.*

Будем предполагать выполнеными следующие условия.

$(f1)$ для каждых $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $f(\cdot, x, u) : I \to \mathbb{R}^n$ измерима;

$(f2)$ для п.в. $t \in I$ отображение $f(t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывно;

$(U1)$ мультиотображение U удовлетворяет верхним условиям Каратеодори (см. Определение 1.5.13);

$(U2)$ мультиотображение U суперпозиционно измеримо (см. Теоремы 1.5.18 и 1.5.19);

$(U3)$ множество

$$F(t,x) = f(t,x,U(t,x))$$

выпукло для всех $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$;

$(U4)$ мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию подлинейного роста $(F3')$.

Решением управляемой системы (3.19), (3.20) называется пара $\{x,u\}$, состоящая из траектории x и управления u. Здесь $x : I \to \mathbb{R}^n$ - абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (3.19) почти всюду на I, а $u : I \to \mathbb{R}^m$ - измеримая функция, удовлетворяющая включению (3.20) всюду на I.

От управляемой системы (3.19), (3.20) перейдем к ассоциированному с ней дифференциальному включению

$$x'(t) \in F(t,x(t)). \tag{3.21}$$

Как уже отмечалось выше, каждая траектория системы (3.19), (3.20) является решением включения (3.21). Лемма Филиппова (Теорема 1.5.15) позволяет установить и обратную зависимость.

3.4.1. Теорема. *При указанных выше условиях для любого решения x включения* (3.21) *найдется измеримая функция $u : I \to \mathbb{R}^m$ такая, что пара $\{x,u\}$ будет решением управляемой системы* (3.19), (3.20).

Доказательство. Пусть $x : I \to \mathbb{R}^n$ - решение включения (3.21). Рассмотрим отображение $\varphi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t,u) = f(t,x(t),u)$. Нетрудно видеть, что отображение φ удовлетворяет условиям Каратеодори. Действительно, непрерывность φ по u при почти всех фиксированных $t \in I$ прямо вытекает из условия $(f2)$. Далее, поскольку при любом фиксированном $u \in \mathbb{R}^m$ однозначное отображение $f(\cdot, \cdot, u) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори, оно суперпозиционно измеримо. Поэтому при любом фиксированном $u \in \mathbb{R}^m$ отображение $\varphi(\cdot, u) = f(\cdot, x(\cdot), u) : I \to \mathbb{R}^n$ измеримо.

В силу условия $(U2)$ мультифункция $V : I \to K(\mathbb{R}^m)$, $V(t) = U(t, x(t))$, измерима. Функция x удовлетворяет включению $x'(t) \in \varphi(t, V(t))$ почти для всех $t \in I$. Из Теоремы 1.5.15 следует, что найдется измеримое сечение $u : I \to \mathbb{R}^m$ мультифункции V, которое будет удовлетворять почти для всех $t \in I$ соотношению $x'(t) = \varphi(t, u(t))$, т.е. $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$.

Это и означает, что функция $u : I \to \mathbb{R}^m$ является искомым управлением, реализующим решение x включения (3.21) как траекторию управляемой системы (3.19), (3.20).■

Установленная Теоремой 3.4.1 эквивалентность управляемых систем и дифференциальных включений позволяет без труда переносить на управляемые системы полученные ранее утверждения, касающиеся дифференциальных включений. Более того, изученные выше свойства множеств решений дифференциальных включений могут быть использованы для решения задач оптимизации. Приведем некоторые примеры.

3.4.2. Теорема. *Пусть $j : C(I; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ – полунепрерывный снизу функционал. Тогда при условиях* $(f1)$, $(f2)$ *и* $(U1)$-$(U4)$ *существует решение* $\{x_*, u_*\}$ *системы* (3.19), (3.20), *удовлетворяющее начальному условию*

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.22}$$

и такое, что

$$j(x_*) = \min_{x \in \Sigma(x_0)} j(x),$$

где $\Sigma(x_0)$ *– множество всех траекторий управляемой системы, удовлетворяющих начальному условию* (3.22).

Доказательство. Покажем, что мультиотображение F, задающее правую часть ассоциированного дифференциального включения (3.22), удовлетворяет условиям глобальной теоремы существования (Теорема 3.2.6). Поскольку выполнение условия $(F3')$ обеспечено условием $(U4)$, остается проверить лишь выполнение условий $(F1)$ и $(F2)$.

Пусть $t \in I$ таково, что отображение $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно, а мультиотображение $U(t,\cdot)$ полунепрерывно сверху. Тогда

$$F(t,\cdot) = f(t,\cdot,U(t,\cdot)) = f(t,\cdot,\cdot) \circ (id_{R^n} \times U(t,\cdot))$$

и полунепрерывность сверху данного мультиотображения вытекает из Теорем 1.3.11 и 1.3.17. Таким образом, условие $(F2)$ выполнено.

С другой стороны, при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $\psi : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\psi(t,u) = f(t,x,u)$, удовлетворяет условиям Каратеодори, поэтому мультиотображение $F(\cdot,x) = f(\cdot,x,U(\cdot,x)) = \psi(\cdot,U(\cdot,x))$ измеримо, а следовательно, выполнено и условие $(F1)$.

Из Теорем 3.2.6 и 3.2.9 следует, что множество $\Sigma(x_0)$ всех решений включения (3.21), удовлетворяющих начальному условию (3.22), (оно же в силу предыдущей теоремы является и множеством всех траекторий управляемой системы) непусто и компактно. Следовательно, в нем найдется траектория x_*, минимизирующая функционал j. ■

В качестве еще одного примера рассмотрим *задачу оптимального быстродействия*, заключающуюся в том, чтобы найти такое решение $\{u_*, x_*\}$ управляемой системы, чтобы из заданного начального множества $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ попасть в некоторое *целевое множество* $M \subset \mathbb{R}^n$ за кратчайшее время.

3.4.3. Теорема. *Пусть для управляемой системы выполнены условия* $(f1)$, $(f2)$ *и* $(U1)$-$(U4)$; *начальное множество* M_0 *компактно; целевое множество* M *замкнуто и пусть найдется хотя бы одна траектория системы, достигающая множества* M *из множества* M_0 *в некоторый момент времени* t_1, $t_0 < t_1 \leq T$. *Тогда управляемая система имеет оптимальное по быстродействию решение.*

Доказательство. Обозначим, как и прежде, $\Sigma(x) \subset C(I;\mathbb{R}^n)$ – множество всех траекторий системы, выходящих из точки $x \in M_0$. Из Теорем 3.2.9 и 3.2.12 мы знаем, что мультиотображение Σ компактнозначно и полунепрерывно сверху. Следовательно, множество $\Sigma(M_0)$ всех траекторий, выходящих из M_0, компактно (Теорема 1.2.35).

Рассмотрим *мультифункцию достижимости* $\Pi : I \to K(\mathbb{R}^n)$, $\Pi(t) = \Sigma(M_0)(t)$ и множество $\mathcal{T} = \Pi_-^{-1}(M)$. Это множество непусто, т.к. по предположению содержит точку t_1. Далее, мультифункция Π полунепрерывна сверху (см. Пример 1.2.22 (б)), а значит множество $\mathcal{T} \subset I$ замкнуто и содержит свою нижнюю грань t_*, которая и характеризует минимальный момент достижимости множества M. ■

Глава 4. О некоторых приложениях

4.1. Обобщенные динамические системы

4.1.1. Общие свойства.

Пусть X - некоторое множество. *Динамической системой* на X называется отображение $q : X \times \mathbb{R} \to X$, удовлетворяющее следующим условиям:

$q1)$ $q(\cdot, 0) = id_X$ – *тождественное отображение на* X.

$q2)$ *Для любых* $x \in X; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$q(q(x, t_1), t_2) = q(x, t_1 + t_2)$$

(полугрупповое свойство).

Данные аксиомы согласуются с интуитивным представлением о стационарном законе движения детерминированной системы, находящейся в начальный момент отсчета $t = 0$ в состоянии x, а в момент $t = \tau$ – в однозначно определенном состоянии $q(x, \tau)$.

В частности, динамическая система естественным образом возникает при рассмотрении автономного дифференциального уравнения

$$x'(t) = f(x(t))$$

$(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ при условии, что задача Коши для такого уравнения разрешима для любого начального условия единственным образом и каждое такое решение продолжимо на всю числовую ось. Действительно, если x - решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, то динамическую систему q можно задать с помощью оператора сдвига $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $q(x_0, t) = x(t)$.

Легко видеть, что аксиомы $(q1)$ и $(q2)$ в данном случае выполнены.

Однако применение обычных динамических систем к описанию многих процессов вызывает затруднения. Часто это связано с тем, что для многих систем начальное состояние не определяет единственным образом их дальнейшего поведения. Именно такие системы возникают при рассмотрении дифференциальных уравнений, не удовлетворяющих условию единственности решения, а также дифференциальных уравнений с параметрами и дифференциальных включений. Сюда же относятся и управляемые системы в общем смысле слова, т.е. системы, развитие которых может протекать различным образом в зависимости от воздействия управляющих факторов.

Понятно, что если мы хотим описывать такие объекты в терминах динамических систем, то аксиоматика обычных динамических систем должна быть пересмотрена.

Желаемый результат будет достигнут, если допустить, что отображение Q, задающее динамическую систему, многозначно:

$$Q : X \times \mathbb{R} \to P(X)$$

и удовлетворяет следующим аксиомам:

$Q1)$ $Q(\cdot, 0) = id_X$.

$Q2)$ *Для любых* $x \in X$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ \ t_1 \cdot t_2 \geq 0$:

$$Q(Q(x, t_1), t_2) = Q(x, t_1 + t_2).$$

$Q3)$ *Для любых* $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ *из* $y \in Q(x, t)$ *следует* $x \in Q(y, -t)$.

Множество $Q(x, \tau)$, которое часто называют *множеством достижимости*, при $\tau \geq 0$ естественным образом интерпретируется как множество всех тех состояний, которые система может достигнуть к моменту $t = \tau$, если в момент $t = 0$ она находилась в состоянии x. Аксиома $(Q3)$ позволяет описать множество $Q(x, \tau)$ в случае $\tau < 0$ как множество всех таких состояний, находясь в которых в момент $t = \tau$, система может достигнуть состояния x к нулевому моменту.

4.1.1. Лемма. *Для любых* $x \in X$, $t_1, t_2 \in R$ *выполнено*

$$Q(x, t_1 + t_2) \subset Q(Q(x, t_1), t_2). \tag{4.1}$$

Доказательство. Случай $t_1 \cdot t_2 \geq 0$ охвачен аксиомой $(Q2)$. Пусть, например, $t_1 > 0$, $t_2 < 0$, $t_1 + t_2 > 0$. Тогда из аксиомы $(Q2)$ следует, что $Q(x, t_1) = Q(Q(x; t_1 + t_2), -t_2)$.

Тогда $\quad Q(Q(x, t_1), t_2) = Q(Q(Q(x; t_1 + t_2), -t_2), t_2)$.

Из аксиомы $(Q3)$ получаем, что для любых $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$

$$x \in Q(Q(x, t); -t).$$

Поэтому

$$Q(x, t_1 + t_2) \subset Q(Q(Q(x, t_1 + t_2), -t_2), t_2),$$

откуда и следует включение (4.1).

Остальные случаи рассматриваются аналогично; мы оставляем их читателю в качестве упражнения. ■

4.1.2. Лемма. *Для любых* $x \in X$, $t \geq 0$ *и* $y \in Q(x,t)$, $0 \leq \tau \leq t$ *выполнено*

$$Q(x,\tau) \cap Q(y,\tau - t) \neq \varnothing.$$

Доказательство. Из $y \in Q(x,t) = Q(Q(x,\tau), t-\tau)$ следует, что найдется такая точка $z \in Q(x,\tau)$, что $y \in Q(z, t-\tau)$.

Но тогда согласно аксиоме $(Q3)$ $z \in Q(y, \tau - t)$, что и доказывает лемму. ■

Для получения более содержательных фактов, касающихся обобщенных динамических систем, мы должны сделать некоторые дополнительные предположения, касающиеся непрерывности мультиотображения Q.

Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство. Будем считать, что мультиотображение Q, задающее динамическую систему, имеет компактные значения и удовлетворяет помимо аксиом $(Q1)$ – $(Q3)$ следующим условиям:

$Q4)$ *Мультиотображение* $Q : X \times \mathbb{R} \to K(X)$ *полунепрерывно сверху.*

$Q5)$ *Для любого* $x \in X$ *мультиотображение* $Q(x,\cdot) : \mathbb{R} \to K(X)$ *непрерывно.*

4.1.3. Определение. Мультиотображение $Q : X \times \mathbb{R} \to K(X)$, удовлетворяющее аксиомам $(Q1)$ – $(Q5)$, определяет *обобщенную динамическую систему.*

Обобщенные динамические системы называют также *динамическими системами без единственности.* Для обозначения обобщенной динамической системы мы будем применять тот же символ Q, что и для мультиотображения, с помощью которого она задается.

Примером обобщенной динамической системы будет система Q_F, порожденная автономным дифференциальным включением в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$x'(t) \in F(x(t)). \tag{4.2}$$

Пусть мультиотображение $F : \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху и удовлетворяет условию подлинейного роста $\|F(x)\| \leq C(1 + \|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$ для некоторой положительной константы C. Тогда, как мы знаем из Раздела 3.2, любое решение включения (4.2) продолжимо на всю числовую ось. Если, как прежде, обозначить $\Sigma(x)$ множество решений включения (4.2), выходящих из точки $x \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t = 0$, то динамическую систему $Q_F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to K(\mathbb{R}^n)$ можно задать как

$$Q_F(x,t) = \Sigma(x)(t).$$

Выполнение аксиомы $(Q5)$ для системы Q_F вытекает из Следствия 3.2.10. Свойство $(Q4)$ нуждается в проверке.

4.1.4. Лемма. *Динамическая система Q_F удовлетворяет аксиоме* $(Q4)$.

Доказательство. Из Теорем 3.2.12 и 1.2.35 вытекает, что мультиотображение Q_F локально компактно, а следовательно, в силу Теоремы 1.2.32 достаточно проверить его замкнутость. Пусть $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $x_n \to x_0$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$, $t_n \to t_0$, $y_n \in Q_F(x_n, t_n)$, $y_n \to y_0$.

Возьмем промежуток $[0, T] \subset \mathbb{R}$, содержащий последовательность $\{t_n\}$ и предельную точку t_0. Тогда по определению найдется последовательность решений $\{\widetilde{x}_n\} \subset C([0,T]; \mathbb{R}^n)$ включения (4.2) такая, что $\widetilde{x}_n(0) = x_n$ и $\widetilde{x}_n(t_n) = y_n$ для всех $n = 1, 2, ...$ Последовательность решений $\{\widetilde{x}_n\}$ относительно компактна, поэтому без ущерба для общности можно считать, что она сходится к решению $\widetilde{x}_0 \subset C([0,T]; \mathbb{R}^n)$, для которого, очевидно $\widetilde{x}_0(0) = x_0$ и $\widetilde{x}_0(t_0) = y_0$. Следовательно, $y_0 \in Q_F(x_0, t_0)$. ■

Обсудим некоторые свойства обобщенных динамических систем. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

4.1.5. Лемма. *Пусть X, Y, Z - топологические пространства; мультиотображение $F : X \times Y \to P(Z)$ полунепрерывно сверху, и для каждого $x \in X$ мультиотображение $F(x, \cdot) : Y \to P(Z)$ непрерывно. Тогда для любого $A \in K(X)$ отображение $F_A : Y \to P(Z)$,*

$$F_A(y) = F(A, y),$$

непрерывно.

Доказательство. Полунепрерывность сверху мультиотображения F_A вытекает из того, что оно может быть представлено как композиция непрерывного мультиотображения $G : Y \to K(X \times Y)$, $G(y) = A \times \{y\}$, и мультиотображения F (см. Теорему 1.3.11).

С другой стороны, если $V \subset Z$ - открытое множество, то $(F_A)_-^{-1}(V)$ также открыто, поскольку $(F_A)_-^{-1}(V) = \bigcup\limits_{a \in A} [F(a, \cdot)]_-^{-1}(V)$.

Следовательно, отображение F_A полунепрерывно снизу.■

4.1.6. Теорема. *Пусть Q – обобщенная динамическая система, заданная мультиотображением $Q : X \times \mathbb{R} \to K(X)$, $A \subset X$ - связное компактное множество. Тогда для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \leq t_2$, $0 \in [t_1, t_2]$ множество $Q(A, [t_1, t_2])$ связно и компактно.*

Доказательство. Компактность множества $Q(A, [t_1, t_2])$ следует из аксиомы $(Q4)$ и Теоремы 1.2.35. В силу аксиом $(Q4)$, $(Q5)$ и Леммы 4.1.5 мультиотображение $Q_A : \mathbb{R} \to K(X)$, $\;Q_A(t) = Q(A, t)$ непрерывно. Утверждение теоремы следует теперь из того факта, что множество $Q_A(0) = Q(A, 0) = A$ по предположению теоремы связно и Теоремы 1.2.37(ii). ■

4.1.7. Определение. *Траекторией обобщенной динамической системы Q* на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ называется отображение $\varphi : [a, b] \to X$, удовлетворяющее для любых $t_0, t_1 \in [a, b]$ соотношению

$$\varphi(t_2) \in Q(\varphi(t_1), t_2 - t_1). \tag{4.3}$$

Рассмотрим некоторые свойства траекторий динамических систем.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из Определения 4.1.7 и аксиом $(Q1)$, $(Q5)$.

4.1.8 Лемма. *Всякая траектория обобщенной динамической системы является непрерывным отображением.*

В дальнейшем нам будет полезно также следующее утверждение.

4.1.9 Лемма. *Если φ_1 - траектория обобщенной динамической системы Q на отрезке $[a, b]$, а φ_2 - ее траектория на отрезке $[b, c]$,* *причем* $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$, *то отображение* $\varphi : [a, c] \to X$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & a \le t \le b; \\ \varphi_2(t), & b < t \le c, \end{cases}$$

является траекторией системы Q *на отрезке* $[a, c]$.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2 \in [a, c]$. Если $t_1, t_2 \in [a, b]$ или $[b, c]$, то выполнение соотношения (4.3) для отображения φ очевидно. Пусть, например, $t_1 \in [a, b]$, $t_2 \in [b, c]$. Тогда $\varphi(t_2) = \varphi_2(t_2) \in Q(\varphi_2(b), t_2 - b) = Q(\varphi_1(b), t_2 - b) \subset Q(Q(\varphi_1(t_1), b - t_1), t_2 - b) = Q(\varphi_1(t_1), t_2 - t_1) = Q(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$.

Случай $t_1 \in [b, c]$, $t_2 \in [a, b]$ рассматривается аналогично. ■

4.1.10 Теорема. *Пусть* Q – *обобщенная динамическая система. Для любых* $a \le b$, $x_1 \in Q(x_0, b-a)$ *на отрезке* $[a, b]$ *существует траектория* φ *такая, что* $\varphi(a) = x_0$, $\varphi(b) = x_1$.

Доказательство. Для простоты положим $a = 0$, $b = 1$. Определим сначала значения траектории φ на счетном плотном подмножестве $J \subset [0, 1]$: $J = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, ..., \frac{p}{2^q}, ...\}$ с помощью следующего индуктивного процесса.

Положим $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$ и выберем $\varphi(\frac{1}{2})$ произвольно в множестве $Q(\varphi(0), \frac{1}{2}) \cap Q(\varphi(1), -\frac{1}{2})$, которое непусто в силу Леммы 4.1.2. Вообще, если $\varphi(\frac{p}{2^q})$ и $\varphi(\frac{p+1}{2^q})$ уже построены, то $\varphi(\frac{2p+1}{2^{q+1}})$ выбираем так, что

$$\varphi(\frac{2p+1}{2^{q+1}}) \in Q(\varphi(\frac{p}{2^q}), \frac{1}{2^{q+1}}) \cap Q(\varphi(\frac{p+1}{2^q}), -\frac{1}{2^{q+1}}).$$

Непустота пересечения также следует из Леммы 4.1.2. Таким образом мы определили $\varphi(t)$ для всех $t \in J$, причем из Леммы 4.1.1 следует, что $\varphi(t'') \in Q(\varphi(t'), t'' - t')$ для всех $t', t'' \in J$.

Если же $t \in [0, 1] \backslash J$, то рассмотрим множество

$$K(t) = \bigcap_{t', t'' \in J; t' < t < t''} Q(\varphi(t'), t - t') \cap Q(\varphi(t''), t - t'').$$

Из лемм 4.1.2 и 4.1.1 следует, что

$$\{Q(\varphi(t'), t - t') \cap Q(\varphi(t''), t - t'')\}_{t', t'' \in J, t' < t < t''}$$

– центрированная система множеств, и поэтому множество $K(t)$ непусто. Покажем, что оно состоит из одной точки. Действительно, если

$y \in K(t)$, то для всех $t'' \in J$, $t < t''$ имеем $\varphi(t'') \in Q(y, t'' - t)$, откуда следует, что для произвольной окрестности $U(y) \subset X$ точки y найдется такое $\delta > 0$, что $\varphi(t'') \in U(y)$ для всех $t'' \in J$, $0 < t'' - t < \delta$.

Положим теперь $\varphi(t) = K(t)$ для всех $t \in [0,1] \backslash J$.

Определенное таким образом отображение φ и является искомой траекторией. Действительно, если $t_1, t_2 \in J$, то по построению $\varphi(t_2) \in Q(\varphi(t_1), t_2 - t_1)$.

Если же, например, $t_1, t_2 \in [0,1] \setminus J$, $t_1 < t_2$, то пусть $t' \in J$, $t_1 < t' < t_2$. Тогда

$$\varphi(t_1) = K(t_1) \in Q(\varphi(t'), t_1 - t'),$$

следовательно

$$\varphi(t') \in Q(\varphi(t_1), t' - t_1).$$

Но тогда

$$\varphi(t_2) = K(t_2) \in \ Q(\varphi(t'), t_2 - t_1) \subset \ Q(Q(\varphi(t_1), t' - t_1), t_2 - t') =$$

$$= Q(\varphi(t_1), t_2 - t_1).$$

Остальные случаи доказываются аналогично. ■

Применяя Лемму 4.1.9, получаем следующее утверждение.

4.1.11 Следствие. *Пусть Q – обобщенная динамическая система и последовательности $\{t_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}$, $t_0 < t_1 < ... < t_n$; $\{x_i\}_{i=0}^n \subset X$ удовлетворяют условию*

$$x_k \in Q(x_{k-1}, t_k - t_{k-1}), \quad 1 \leq k \leq n$$

Тогда существует траектория φ на отрезке $[t_0, t_n]$ такая, что $\varphi(t_i) = x_i (i = 0, 1, ..., n)$.

Пусть Q - обобщенная динамическая система, заданная мультиотображением $Q : X \times \mathbb{R} \to K(X)$, $A \subset X$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Обозначим $S(Q, A, [a,b])$ множество траекторий φ системы Q на отрезке $[a,b]$ таких, что $\varphi(a) \in A$.

4.1.12 Теорема. *Пусть (X, ϱ) - метрическое пространство, Q - обобщенная динамическая система, заданная мультиотображением $Q : X \times \mathbb{R} \to K(X)$. Тогда для любых $A \in K(X)$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$*

множество $S(Q, A, [a, b])$ компактно в топологии равномерной сходимости.

Доказательство. Отметим прежде всего, что совокупная область значений семейства траекторий $S(Q, A, [a, b])$, как нетрудно видеть, совпадает с компактным множеством $Q(A, [0, b-a]) \subset X$.

Это дает возможность воспользоваться теоремой Арцела - Асколи (см. гл. О) для доказательства относительной компактности множества $S(Q, A, [a, b])$ в метрическом пространстве $C([a, b]; X)$.

Покажем, что множество функций $S(Q, A, [a, b])$ равностепенно непрерывно. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. В силу аксиом $(Q1)$ и $(Q4)$ для каждой точки $x \in Q(A, [0, b-a])$ найдутся такая ее окрестность $U(x)$ и такое число $\delta_x > 0$, что

$$Q(U(x), [-\frac{\delta_x}{2}, \frac{\delta_x}{2}]) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x).$$

Отметим, что из построения следует $U(x) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$.

Система окрестностей $\{U(x)\}_{x \in Q(A, [0, b-a])}$ образует покрытие множества $Q(A, [0, b-a])$. Выделим из него конечное подпокрытие $\{U(x_i)\}_{i=1}^{n}$ и обозначим $\delta = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \delta_{x_i}$.

Пусть теперь φ - некоторая функция из семейства $S(Q, A, [a, b])$; $t_1, t_2 \in [a, b], |t_2 - t_1| < \delta$. Пусть $\varphi(t_1) \in U(x_k)$, $1 \leq k \leq n$.

Тогда

$$\varphi(t_2) \in Q(\varphi(t_1), t_2 - t_1) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_k).$$

Поскольку также и $\varphi(t_1) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_k)$, то $\varrho(\varphi(t_1), \varphi(t_2)) < \varepsilon$, что и означает равностепенную непрерывность семейства $S(Q, A, [a, b])$.

Для завершения доказательства нам осталось показать замкнутость множества $S(Q, A[a, b])$.

Пусть

$$\{\varphi_j\}_{i=1}^{\infty} \subset S(Q, A, [a, b]), \quad ||\varphi_j - \varphi_0||_C \to 0.$$

Если $t_1, t_2 \in [a, b]$, то для каждого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\varphi_j(t_2) \in Q(\varphi_j(t_1), t_2 - t_1).$$

В силу замкнутости мультиотображения Q (Теорема 1.2.29) мы можем перейти в данном включении к пределу при $j \to \infty$ и получить

$$\varphi_0(t_2) \in Q(\varphi_0(t_1), t_2 - t_1).$$

Таким образом, функция φ_0 также является траекторией системы Q.■

Вернемся теперь к рассмотрению обобщенной динамической системы, порожденной автономным дифференциальным включением (4.2) при указанных выше условиях на его правую часть. Из определения ясно, что любое решение этого дифференциального включения на промежутке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ является траекторией динамической системы, порожденной этим включением. Естественным выглядит вопрос о том, будет ли, обратно, всякая траектория такой динамической системы решением соответствующего дифференциального включения.

4.1.13. Теорема. *Любая траектория на отрезке $[a, b]$ обобщенной динамической системы Q_F, порожденной дифференциальным включением (4.2), является его решением на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Для простоты положим $a = 0, b = 1$. Пусть $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ - траектория динамической системы Q_F, порожденной дифференциальным включением (4.2). Построим последовательность $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$; $\psi_k : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ решений дифференциального включения (4.2) так, чтобы функция ψ_k совпадала с функцией φ в точках вида $\{\frac{p}{2^k} : p = 0, 1, ..., 2^k\}$. Такое построение осуществимо, так как из включения

$$\varphi(\frac{p+1}{2^k}) \in Q_F(\varphi(\frac{p}{2^k}), \frac{1}{2^k}), \;\; p = 0, 1, ..., 2^k - 1$$

вытекает существование на отрезке $[\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}]$ решения ψ_k^p дифференциального включения (4.2) такого, что

$$\psi_k^p(\frac{p}{2^k}) = \varphi(\frac{p}{2^k}), \;\; \psi_k^p(\frac{p+1}{2^k}) = \varphi(\frac{p+1}{2^k}).$$

Ясно, что решение $\psi_k : [0,1] \to \mathbb{R}^n$,

$$\psi_k(t) = \psi_k^p(t), \quad t \in [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}])$$

удовлетворяет искомому условию.

Поскольку $\psi_k(0) = \varphi(0)$ для всех k, семейство решений $\{\psi_k\}$ компактно в пространстве $C([0,1]; \mathbb{R}^n)$ (Теорема 3.2.9). Поэтому из последовательности $\{\psi_l\}_{k=0}^{\infty}$ может быть выделена подпоследовательность, равномерно сходящаяся к некоторому решению ψ. Из построения последовательности $\{\psi_k\}$ вытекает, что функции ψ и φ совпадают на счетном плотном подмножестве $J = \{\frac{p}{2^k} : 0 \le k < \infty;\ 0 \le p \le 2^k\}$ отрезка $[0,1]$. Но в силу непрерывности обеих функций это означает, что $\varphi = \psi$ на отрезке $[0,1]$. ■

4.1.2. Точки покоя односторонних динамических систем

В этом разделе мы рассмотрим задачу о существовании постоянной траектории или *точки покоя* для обобщенной динамической системы. Поскольку в качестве основного орудия мы будем использовать теоремы о неподвижной точке, рассматривавшиеся во второй главе, для простоты мы будем считать, что мультиотображение, задающее динамическую систему, выпуклозначно. Применение других методов и, в частности, асимптотических теорем для мультиотображений с невыпуклыми значениями дает возможность изучать точки покоя или аттракторы для более общих классов динамических систем, например, порождаемых дифференциальными уравнениями или включениями (см., например, [85], [42], [94], [247] и др.).

Мы несколько изменим описанную выше аксиоматику применительно к исследуемой задаче.

Пусть X – метрическое пространство; $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

4.1.14. Определение. Мультиотображение $G : X \times \mathbb{R}_+ \to C(X)$ задает *одностороннюю обобщенную динамическую систему (ООДС),* если оно удовлетворяет следующим условиям:

$G1)$ $G(\cdot, 0) = id_X$;

$G2)$ *для любых* $x \in X$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$G(G(x,t_1),t_2) \subset G(x,t_1+t_2);$$

$G3)$ G *полунепрерывно сверху.*

4.1.15. Определение. Точка $x_* \in X$ называется *точкой покоя* ООДС G, если $x_* \in G(x_*, t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Для фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ определим мультиотображение $G_t : X \to C(X)$ равенством $G_t(x) = G(x,t)$. Мы будем использовать следующее достаточное условие существования точки покоя (см. [85]).

4.1.16. Лемма. *Пусть последовательность* $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $t_k \to 0$ *такова, что каждое мультиотображение* G_{t_k} *имеет неподвижную точку* x_k. *Если* x_* *– предельная точка последовательности* $\{x_k\}$, *то* x_* *– точка покоя ООДС* G.

Доказательство. Используя аксиому $(G2)$, для любых фиксированных $t > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ имеем:

$$G(x_k, t) \supset G(G(x_k, t_k), t - t_k) \supset G(x_k, t - t_k) \supset G(G(x_k, t_k), t - 2t_k) \supset \dots$$

$$\dots \supset G(x_k, t - [\frac{t}{t_k}]\, t_k).$$

Допустим, что $x_* \notin G(x_*, t)$. Тогда множества $\{x_*\} = G(x_*, 0)$ и $G(x_*, t)$ можно отделить непересекающимися открытыми окрестностями V_0 и V_1. В силу аксиомы $(G3)$ для достаточно больших k будет выполнено

$$G(x_k, t - [\frac{t}{t_k}]\, t_k) \subset V_0, \quad G(x_k, t) \subset V_1,$$

что невозможно. ■

Мы можем доказать теперь следующие теоремы о точке покоя.

4.1.17. Теорема. *Пусть* M *– выпуклое компактное подмножество банахова пространства; мультиотображение* $G : M \times \mathbb{R}_+ \to Kv(M)$ *задает ООДС. Тогда ООДС* G *имеет точку покоя.*

Доказательство. Каждое мультиотображение $G_t : M \to Kv(M)$, $t > 0$ имеет неподвижную точку в силу Теоремы 2.2.22. Выбрав произвольную последовательность $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $t_k \to 0$, соответствующую ей последовательность неподвижных точек x_k мультиотображений G_{t_k} и предельную точку x_* этой последовательности, мы можем применить Лемму 4.1.16.■

4.1.18. Теорема. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченное открытое множество; мультиотображение* $G : \overline{U} \times \mathbb{R}_+ \to Kv(\overline{U})$ *задает ООДС и для некоторого* $T > 0$ *множество* $G(\overline{U}, T)$ *содержится в выпуклом открытом множестве* U_0, $\overline{U}_0 \subset U$. *Тогда ООДС* G *имеет точку покоя* $x_* \in U_0$.

Доказательство. Для последовательности $t_k = \frac{T}{k}$ рассмотрим мультиотображения $G_{t_k} : \overline{U} \to Kv(\overline{U})$. В силу аксиомы $(G2)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$G_{t_k}^k(\overline{U}) \subset G(\overline{U}, T) \subset U_0.$$

Применяя к мультиотображению G_{t_k} Теорему 2.2.28, получаем, что оно должно иметь неподвижную точку $x_k \in U_0$. Снова возьмем предельную точку x_* последовательности $\{x_k\}$ и воспользуемся Леммой 4.1.16. ■

4.2. О приложениях в теории игр и математической экономике

4.2.1. Оптимальные стратегии в антагонистических играх.

Мы уже знакомы (см. Пример 1.1.15) с простейшей математической моделью игры с двумя участниками. Итак, считаем, что для каждого из игроков заданы пространства стратегий - множества X и Y и игровые правила - мультиотображения $A : Y \to P(X)$ и $B : X \to P(Y)$, характеризующие наилучшие ответы каждого из игроков на ту или иную применяемую партнером стратегию.

Чем теперь следует руководствоваться каждому из игроков при выборе стратегий? Есть ли для какие-то стратегии, которые можно было бы назвать оптимальными?

4.2.1. Определение. Пара стратегий $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ называется *равновесной*, если выполнены следующие включения:

$$\begin{cases} x_0 \in A(y_0) \\ y_0 \in B(x_0). \end{cases}$$

Ситуация действительно, как мы видим, равновесная: стратегия x_0 является одним из сильнейших ответов на применяемую вторым игроком стратегию y_0, в то время как y_0 - одно из сильнейших возражений на стратегию x_0. В этом смысле эти стратегии оптимальны и, если у игроков нет дополнительной информации о намерениях партнера, то именно равновесных стратегий им и следует придерживаться.

В случае антагонистической игры, заданной с помощью игровой функции $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ (см. Пример 1.1.15) , применяя равновесную стратегию x_0, первый игрок гарантирует себе выйгрыш не ниже

$f(x_0, y_0)$ при любом ответе партнера, а второй, применяя стратегию y_0, не даст первому увеличить свой выйгрыш выше этого значения. Значение $f(x_0, y_0)$ в этом случае называют *ценой игры*.

Когда можно гарантировать существование равновесных стратегий? Обратим внимание на то обстоятельство, что пара стратегий x_0, y_0 равновесна тогда и только тогда, когда точка (x_0, y_0) является неподвижной для мультиотображения $A \times B : X \times Y \longrightarrow P(X \times Y)$, определенного как $(A \times B)(x, y) = A(y) \times B(x)$. Это дает возможность применить для доказательства существования равновесных стратегий теорему Боненбласта–Карлина о неподвижной точке (Теорема 2.2.22). В самом деле, справедливо следующее утверждение.

4.2.2. Теорема. *Пусть пространства стратегий X и Y являются выпуклыми компактными подмножествами в банаховых пространствах E_0 и E_1 соответственно. Если игровые правила A и B являются полунепрерывными сверху мультиотображениями с выпуклыми компактными значениями, то в игре существует хотя бы одна пара равновесных стратегий.*

Доказательство. Применяя Теорему 1.3.17, нетрудно установить, что мультиотображение $A \times B : X \times Y \to Kv(X \times Y)$ выпуклого компактного подмножества $X \times Y$ банахова пространства $E_0 \times E_1$ полунепрерывно сверху и, следовательно, удовлетворяет условиям Теоремы 2.2.22. ■

Частным случаем доказанной теоремы является следующая теорема о равновесных стратегиях для антагонистических игр.

4.2.3. Теорема. *Пусть в антагонистической игре пространства стратегий X, Y являются выпуклыми компактными подмножествами в банаховых пространствах E_0 и E_1 соответственно, а игровая функция $f(x, y)$, заданная на $X \times Y$, непрерывна, выпукла по y для каждого $x \in X$ и вогнута по x для каждого $y \in Y$, т.е.*

$$f(x, (1-\lambda)y' + \lambda y'') \leq (1-\lambda)f(x, y') + \lambda f(x, y'')$$

для любых $x \in X$; $y', y'' \in Y$; $\lambda \in [0, 1]$ и

$$f((1-\lambda)x' + \lambda x'', y) \geq (1-\lambda)f(x', y) + \lambda f(x'', y)$$

для любых $x', x'' \in X$; $y \in Y$; $\lambda \in [0, 1]$. Тогда в игре существует хотя бы одна пара равновесных стратегий.

Доказательство. Из теоремы максимума (Теорема 1.3.29) вытекает, что игровые правила A и B в этом случае - компактнозначные полунепрерывные сверху мультиотображения, а выпуклость их значений следует из наложенных в теореме условий.■

На первый взгляд сфера практических применений вышеуказанных теорем представляется чрезвычайно узкой прежде всего из-за ограничительного условия выпуклости пространств стратегий. В самом деле, в реальных ситуациях число стратегий у каждого игрока хотя и может быть весьма велико, но все же оно конечно. Ведь даже в шахматах количество всех мыслимых позиций не безгранично!

Джон фон Нейман предложил следующую интерпретацию, которая снимает отмеченную выше трудность. Пусть игрок имеет конечное множество стратегий $x_1, ..., x_k$. Рассмотрим множество $X \subset \mathbb{R}^k$

$$X = \{(\lambda_1, ..., \lambda_k) \mid \lambda_i \geq 0,\ i = 1, ..., k;\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}.$$

Элементы (очевидно выпуклого и компактного) множества X можно рассматривать как *смешанные стратегии*, т.е. считается, что игрок выбирает не единичную "чистую"стратегию x_i, а использует, вообще говоря, все стратегии и определяет лишь вероятности λ_i, $i = 1, ..., k$, с которыми он будет применять их в ряде туров игры. В этом случае получаемый выигрыш также рассматривается в усредненной, статистической форме.

В качестве примера рассмотрим очень распространенную на практике ситуацию *матричной игры*, то есть случай антагонистической игры двух лиц, в которой каждый из игроков имеет лишь конечное число чистых стратегий. Пусть в распоряжении первого игрока имеются стратегии $x_1, ..., x_n$, а его оппонент располагает стратегиями $y_1, ..., x_m$. В этом случае игровую функцию удобно задавать в виде *матрицы игры*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Элемент матрицы a_{ij} характеризует выигрыш первого игрока, если он применяет стратегию x_i $(i = 1, ..., n)$, на которую второй игрок отвечает стратегией y_j $(j = 1, ..., m)$.

Если теперь первый игрок применяет смешанную стратегию вида $\widetilde{x} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, а второй - смешанную стратегию $\widetilde{y} = (\mu_1, ..., \mu_m)$, то выйгрыш первого игрока есть случайная величина, которая принимает значения a_{ij} с вероятностями $\lambda_i \mu_j$. Тогда выйгрыш первого игрока при использовании данных смешанных стратегий равен математическому ожиданию этой случайной величины, то есть

$$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \mu_j.$$

Ясно, что эта билинейная форма удовлетворяет условиям Теоремы 4.2.3 и поэтому получаем следующее утверждение.

4.2.4. Теорема. *В каждой матричной игре игре существует хотя бы одна пара равновесных смешанных стратегий.*

4.2.2. Равновесие в модели конкурентной экономики.

Вопросы функционирования децентрализованных экономических систем интересовали исследователей с давних пор. В этих системах каждый из участников действует исключительно в своих собственных интересах, не обладая какими-либо знаниями о глобальном состоянии экономики или сведениями о поведении других участников. Как же может функционировать такая экономика? Это парадоксальное свойство впервые описал знаменитый английский экономист Адам Смит, который указывал в своей книге "Богатство народов"(1778) :

"Каждый индивидуум стремится использовать свой капитал так, чтобы достичь наибольшей выгоды. Он обычно не заботится о благе общества и даже не представляет себе, насколько его действия этому способствуют. Он стремится только к своей собственной безопасности, только к своей собственной выгоде. И он руководится при этом невидимой рукой с тем, чтобы содействовать реализации цели, достижение которой не входило в его намерения. Действуя в своих личных интересах, он часто гораздо лучше способствует реализации целей общества, чем он в действительности намеревался это сделать".

Но Смит не объяснил каким образом эта знаменитая невидимая рука управляет, и тем более не дал строгой аргументации в пользу ее существования. Сделать это попытался спустя сто лет французский экономист Леон Вальрас, который предположил, что на самом деле "невидимой рукой" является система цен. Основная идея Вальраса заключалась в том, что при некоторой системе цен индивидуальные планы становятся совместимыми друг с другом. Такая экономическая ситуация называется *конкурентным равновесием.*

Однако идея Вальраса оставалась в течение многих лет лишь блестящей догадкой и была строго обоснована лишь в пятидесятые годы прошлого века, когда для этого был готов соответствующий математический аппарат. Существенное место в этом аппарате занимает теория многозначных отображений.

Рассмотрим математический аспект проблемы, остановившись на модели, близкой к предложенной К.Эрроу, Ж.Дебре и Л.Маккензи (см.например, [68], [81], [82], [87]).

Пусть в экономической системе имеется n различных типов продуктов. В систему входят k потребителей, для каждого из которых задано доступное ему выпуклое компактное множество $X^i \subset R^n$ $(i = 1, ...k)$ продуктов (*потребительское множество*) . Выбор каждого потребителя определяется его *индексом полезности* $u^i : R^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., k)$. Каждая функция u^i предполагается непрерывной и удовлетворяющей условию:

множество

$$\{x^i \in X^i \mid u^i(x^i) \geq u^i(\overline{x}^i)\}$$

выпукло для всех $\overline{x}^i \in X^i$.

Последнее требование имеет простой экономический смысл: если какие-то наборы потребительских благ более полезны, чем данный, то и их выпуклая комбинация обладает тем же свойством.

Пусть набор $(p_1, ..., p_n)$ характеризует цены на имеющиеся в системе продукты; поскольку нас интересуют лишь соотношения между этими ценами, а не их абсолютный масштаб, мы будем считать, что множество всех цен заполняет собой *ценовой симплекс* $\Delta \subset R^n$: $(p_1, ..., p_n), p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если задан набор продуктов $x \in R^n$, то при имеющихся ценах $p \in \Delta$ стоимость этого набора характеризуется, как нетрудно видеть, скалярным произведением $< p, x >$.

Производственные возможности в системе характеризуются наличием m фирм, производящих товары. Предполагается, что каждая из них способна выпустить любой набор товаров из *технологического множества* $Y^j \subset R^n$ $(j = 1, ..., m)$, которое будем предполагать выпуклым и компактным. Стремясь максимизировать свою прибыль при заданных ценах, реально j-ый производитель будет делать свой выбор в множестве

$$\Psi^j(p) = \{y \in Y^j \mid < p, y > = \max_{y' \in Y^j} < p, y' > = \pi_j(p)\}.$$

Будем считать, что каждое множество Y^j содержит нуль, что соответствует бездействию, тогда все маргинальные функции π_j неотрицательны. Мы получаем, таким образом, мультиотображения Ψ^j : $\Delta \to Kv(R^n)$, $j = 1, ..., m$, которые называются *производственными мультифункциями j-го производителя.* Из теоремы максимума (Теорема 1.3.29) следует, что все производственные мультифункции Ψ^j полунепрерывны сверху, а все маргинальные функции π_j непрерывны.

На выбор каждого из потребителей оказывают воздействие прежде всего финансовые ограничения. Для их описания обозначим символом θ_{ij} долю прибыли j-го производителя, поступающую i-му потребителю (речь может идти, например, о держателях акций). Предполагается, что $\sum_{i=1}^{k} \theta_{ij} = 1$ (такой "альтруизм" вполне объясним, если считать "производителей" также и "потребителями").

Для того, чтобы "вписать" в модель и торговцев, полагаем, что каждый из потребителей обладает набором товаров $\omega^i \in R^n$ для торговли. Тогда при заданных ценах $p \in \Delta$ каждый из потребителей обладает средствами в объеме

$$\alpha_i(p) \ = < p, \omega^i > + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \pi_j(p),$$

складывающимися из доходов от торговли и отчислений производителей. Ясно, что все функции α_i непрерывны.

Основное допущение, которое делается в описываемой модели, характеризуется *законом Вальраса* , обеспечивающим каждому из потребителей возможность "жить по средствам и еще кое-что накапливать". Точнее говоря, предполагается, что при любых ценах $p \in \Delta$

в каждом множестве X^i найдется хотя бы один элемент $x^i = x^i(p)$ такой, что

$$< p, x^i > < \ \alpha_i(p).$$

Для реализации этого условия достаточно предположить существование в каждом множестве X^i такого элемента x^i, что $x^i < \omega^i$ в смысле покомпонентного сравнения векторов.

Таким образом бюджетные ограничения выделяют для каждого потребителя множество реально доступных для него благ:

$$W^i(p) = \{x \in X^i \mid < p, x > \leq \alpha_i(p)\}.$$

Ясно, что в силу сделанных предположений каждое множество $W^i(p)$ $(i = 1, ..., k)$ непусто, выпукло и компактно для всех $p \in \Delta$.

Отметим следующее важное обстоятельство.

4.2.5. Лемма. Каждое мультиотображение $W^i : \Delta \to Kv(\mathbb{R}^n)$, $(i = 1, ..., k)$ непрерывно.

Доказательство. Каждое мультиотображение W^i можно представить как пересечение $W^i = F_0^i \cap F_1^i$ постоянного мультиотображения $F_0^i : \Delta \to Kv(\mathbb{R}^n)$,

$$F_0^i(p) \equiv X^i$$

и мультиотображения $F_1^i : \Delta \to Cv(\mathbb{R}^n)$,

$$F_1^i(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid < p, x > \leq \alpha_i(p)\}.$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение F_1^i замкнуто. Так как мультиотображение F_0^i непрерывно, то в силу Теоремы 1.3.3, мультиотображение W^i полунепрерывно сверху.

Далее, также нетрудно проверить, что F_1^i квазиоткрыто, а значит, согласно Теореме 1.3.8, оно полунепрерывно снизу. Поскольку в силу закона Вальраса в каждой точке $p \in \Delta$ выполнено

$$F_0^i(p) \cap int F_1^i(p) \neq \varnothing,$$

мы можем, применив Теорему 1.3.10, придти к заключению, что W^i полунепрерывно снизу и, следовательно, непрерывно. ■

Заметим теперь, что каждый i-ый потребитель будет выбирать в множестве $W^i(p)$ доступных ему благ наиболее полезные:

$$\Phi^i(p) = \{x \in W^i(p) \mid u^i(x) = \max_{x' \in W^i(p)} u^i(x')\}.$$

Ввиду наложенных на функции полезности условий, каждое $\Phi^i(p)$; $i = 1, ..., k$; $p \in \Delta$ - непустое выпуклое компактное множество. Используя Лемму 4.2.5 и применяя теорему максимума, мы приходим к выводу, что мультиотображения $\Phi^i : \Delta \to Kv(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1, ..., k)$ полунепрерывны сверху. Мультиотображение Φ^i называется *мультифункцией спроса i-го потребителя.*

Рассмотрим теперь:
суммарную производственную мультифункцию

$$\Psi(p) = \sum_{j=1}^{m} \Psi^j(p);$$

суммарную мультифункцию спроса

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{k} \Phi^i(p);$$

и *суммарный вектор торговли*

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega^i.$$

4.2.6. Определение. *Конкурентным равновесием* в рассматриваемой модели называется тройка

$$(p_*, x_*, y_*),\ p_* \in \Delta,\ x_* \in \Phi(p_*),\ y_* \in \Psi(p_*),$$

удовлетворяющая соотношению

$$y_* + \omega \geq x_*.$$

Мы видим, что равновесие в данной модели достигается при таких ценах, при которых весь спрос на рынке полностью удовлетворяется, и при этом каждый из участников оптимизирует лишь свои собственные интересы, никак не координируя их с другими партнерами или конкурентами.

Для доказательства существования конкурентного равновесия в данной модели нам понадобится следующее утверждение, называемое *теоремой Гейла–Никайдо–Дебре об избыточном спросе.*

4.2.7. Теорема. Пусть полунепрерывное сверху мультиотображение $T : \Delta \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию

$$< p, z > \leq 0$$

для любых $p \in \Delta$ и $z \in T(p)$. Тогда найдется $p^* \in \Delta$ и $z^* \in T(p^*)$ такой, что $z^* \leq 0$.

Доказательство. Применяя Теорему 1.2.35, устанавливаем, что множество $Z = \overline{co}T(\Delta)$ компактно. Рассмотрим теперь мультиотображение $S : Z \to Kv(\Delta)$,

$$S(z) = \{p \in \Delta \mid < p, z > = \max_{p' \in \Delta} < p', z >\}.$$

В силу теоремы максимума мультиотображение S полунепрерывно сверху.

Зададим теперь мультиотображение $F : \Delta \times Z \to Kv(\Delta \times Z)$ следующим образом

$$F(p, z) = S(z) \times T(p).$$

Из Теоремы 1.3.17 следует, что мультиотображение F полунепрерывно сверху и поэтому к нему можно применить теорему Какутани о неподвижной точке (см. Теорему 2.2.22). Следовательно существуют $p^* \in \Delta$ и $z^* \in Z$ такие, что $p^* \in S(z^*)$ и $z^* \in T(p^*)$.

Но тогда имеем, с одной стороны, $< p^*, z^* > \leq 0$ по условию теоремы, а с другой стороны, $< p, z^* > \leq < p^*, z^* >$ для любого $p \in \Delta$ по определению мультиотображения S. Это означает, что $< p, z^* > \leq 0$ для любого $p \in \Delta$, откуда следует, что $z^* \leq 0$. ■

Мы можем доказать теперь основное утверждение этого раздела.

4.2.8. Теорема. *При сделанных предположениях в данной модели существует конкурентное равновесие.*

Доказательство. Из Теоремы 1.3.20 следует, что *мультифункция избыточного спроса* $T : \Delta \to Kv(\mathbb{R}^n)$, заданная как

$$T(p) = \Phi(p) - \Psi(p) - \omega,$$

полунепрерывна сверху. Покажем, что она удовлетворяет условию Теоремы 4.2.7.

В самом деле, возьмем произвольные $p \in \Delta$ и $z \in T(p)$. Тогда имеем

$$z = x - y - \omega,$$

где $x = \sum_{i=1}^{k} x^i$, $x^i \in \Phi^i(p)$, $i = 1, ..., k$; и $y = \sum_{j=1}^{m} y^j$, $y^j \in \Psi^j(p)$, $j = 1, ..., m$.

В силу оптимальности векторов y^j $(j = 1, ..., m)$ получаем для каждого $i = 1, ..., k$ соотношения

$$< p, x^i > \ \leq \ < p, \omega^i > + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} < p, y^j > .$$

Суммируя эти неравенства по i, получаем

$$< p, x > \ \leq \ < p, \omega > + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} < p, y^j >$$

$$= \ < p, \omega > + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \theta_{ij} < p, y^j > \ = \ < p, \omega > + \sum_{j=1}^{m} < p, y^j >$$

$$= \ < p, \omega > + < p, y > \ = \ < p, \omega + y >,$$

откуда и вытекает, что $< p, z > \leq 0$. Доказательство завершается применением Теоремы 4.2.7. ■

Отметим, что применение методов теории топологической степени мультиотображений позволяет доказать (при некоторых дополнительных предположениях) существование в данной модели положительных равновесных цен (см. [95]).

Библиографические указания и дополнения

Я как-то получил письмо от читателя: "Чтобы понять ваши "Непричесанные мысли", надо быть очень начитанным". Сразу ответил телеграммой: "А как же!"

Станислав Ежи Лец

Увидев названия находившихся здесь книг, он облегченно вздохнул и заметно успокоился. Он был среди друзей.

Рэймонд Ф. Джоунс "Уровень шума"

Глава 1.

Понятие непрерывного многозначного отображения впервые появилось, по-видимому, в работе известного польского математика К. Куратовского (K. Kuratowski) [259] в 1931 г. (см. также [78], [79]), хотя еще в XIX в. математический анализ оперировал многозначными аналитическими функциями. Определение Куратовского опиралось, однако, на прочную основу - концепцию топологического пространства, выработанную в начале XX в., и с тех пор как точно определенный математический объект это понятие стало изучаться с различных точек зрения и нашло многочисленные приложения.

Среди монографий (или крупных статей обзорного характера), полностью или частично посвященных теории многозначных отображений, выделим работы К. Бержа (C. Berge) [8], [154]; В.И. Благодатских [10]; Н.А. Бобылева, С.В. Емельянова и С.К. Коровина [12]; Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса и В.В. Обуховского [19], [20], [21], [22], [23]; Б.Д. Гельмана и В.В. Обуховского [51]; Ж.-П. Обена (J.-P. Aubin) [89], [139]; Ж.-П. Обена и И. Экланда (I. Ekeland) [90]; Ж.-П. Обена и А. Челлина (A. Cellina) [140]; Ж.-П. Обена и Г. Франковской (H. Frankowska) [141]; В.И. Опойцева [99]; Е.С. Половинкина [104]; Б.Н. Пшеничного [106]; А.А. Толстоногова [112]; В.В. Федорчука и В.В. Филиппова [119]; Я. Андреса (J. Andres) и Л. Гурневича

(L. Górniewicz) [131]; Ю. Аппеля (J. Appell), Э. Де Паскале (E. De Pascale), Х.Т. Нгуена (H.T. Nguyen) и П.П. Забрейко [138]; Ш. Кастена (C. Castaing) и М. Валадье (M. Valadier) [173]; Р. Кросса (R. Cross) [186]; К. Даймлинга (K. Deimling) [190], [191]; Л. Гурневича [215], С. Ху (S. Hu) и Н.С. Папагеоргиу (N.S. Papageorgiou) [232], [234]; М.И. Каменского, В.В. Обуховского и П. Дзекка (P. Zecca) [247]; Э. Клейна (E. Klein) и Э. Томпсона (A.C. Thompson) [252]; Ж.М. Ласри (J.M. Lasry) и Р. Робера (R. Robert) [266]; А. Петруселя (A. Petruşel) и Г. Мота (G. Moţ)[298]; М. Сребрны (M. Srebrny) [321]; Э. Цайдлера (E. Zeidler) [334].

Основные направления развития теории многозначных отображений и дифференциальных включений, а также их приложений (вплоть до начала девяностых годов) отражены в обзорах [19], [20], [22], [23], [51]. Заметим, что совокупная библиография этих обзоров содержит более 2500 наименований. Подробное изложение различных аспектов теории и приложений вместе с обширной библиографией содержится также в двухтомном "Справочнике по многозначному анализу"[232], [234].

С самого начала следует оговориться, что к настоящему времени большинство разделов теории многозначных отображений и дифференциальных включений развито столь широко, что приводимая в настоящей книге библиография, равно как и данные комментарии ни в коей мере не претендуют на полноту.

Исследование непрерывности мультиотображений и свойств операций над ними восходит к работам К. Куратовского [259], [78], [79]) и К. Бержа [8], [154]. (Отметим, впрочем, ошибочность Теоремы 13 в §9 [8] и Теоремы 3 в §2 гл. 6 [154] о пересечении полунепрерывных снизу мультиотображений). Исследование свойств непрерывности пересечения полунепрерывных снизу мультиотображений было проведено в диссертации В.В. Обуховского (1974 г.), где было введено понятие квазиоткрытого мультиотображения и доказаны Теоремы 1.3.8 – 1.3.10. (Эти результаты опубликованы в обзоре [20]). Существование "прямоугольной" окрестности произведения компактных множеств, которую можно вписать в произвольную его окрестность, использованное при доказательстве Теоремы 1.3.17, составляет содержание теоремы Уоллеса (см. [69]). Теорема максимума (Теорема 1.3.29) доказана Бержем [154].

Задача о существовании непрерывного сечения мультиотображения, восходящая к классической теореме Э. Майкла (E. Michael) [276] получила в дальнейшем широкое развитие и нашла многочисленные приложения в самых различных областях математики. Отметим лишь обзор [277], монографии [297], [307], [317], специально посвященные этому вопросу, а также работы [3], [29], [30], [31], [54], [135], [165], [202], [269], [278], [316].

Первые утверждения о существовании непрерывных однозначных аппроксимаций у полунепрерывных сверху выпуклозначных мультиотображений ведут начало от работ Дж. фон Неймана [281] и С. Какутани [239]. Аппроксимационный результат (Теорема 1.4.12) доказан в работе А. Ласоты (A. Lasota) и З. Опиала (Z. Opial) [263]. Его частные случаи рассматривались А. Челлиной [174], [175], [176], Ю.Г. Борисовичем, Б.Д. Гельманом, Э. Мухамадиевым и В.В. Обуховским [17], [18].

Существование однозначных аппроксимаций у мультиотображений со стягиваемыми значениями изучалось в цикле работ Дж. Аникини (G. Anichini), Дж. Конти (G. Conti) и П. Дзекка (P. Zecca) [133], [134], [135], а у мультиотображений, значения которых являются абсолютными ретрактами – в работе Дж. Аникини [132].

Важные применения в теории топологической степени и теории дифференциальных включений нашли ведущие свое начало от работы А.Д. Мышкиса [85] результаты по аппроксимации мультотображений с асферичными значениями. Дадим некоторые пояснения. Непустое компактное подмножество M метрического пространства Y называется *асферичным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каждое непрерывное отображение единичной сферы $\sigma : S^n \to U_\delta(M)$, $n = 0, 1, 2, ...$ может быть продолжено до непрерывного отображения шара $\widetilde{\sigma} : B^{n+1} \to U_\varepsilon(M)$. Далее, напомним также (см., например, [26]), что метрическое пространство X является *абсолютным окрестностным ретрактом* или *ANR-пространством*, если при всяком гомеоморфизме h, отображающем его на замкнутое подмножество метрического пространства Y, множество $h(X)$ есть ретракт некоторой своей окрестности в Y. Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк: в частности, конечномерный компакт является ANR-пространством тогда и только тогда, когда он локально стягиваем. Это в свою очередь означает, что компактные полиэдры и компактные конечномерные многообразия являются ANR-пространствами. Объединение конечного числа выпуклых замкнутых множеств в нормированном пространстве также есть ANR-пространство. Теперь заметим (см., например, [215]), что любые компактные выпуклые или, более общо, стягиваемые подмножества ANR-пространства X являются асферичными. Более того, если подмножество такого пространства X является *R_δ-множеством,* т.е. может быть представлено как пересечение убывающей последовательности компактных стягиваемых множеств, то оно также асферично.

Конструкция аппроксимации А.Д. Мышкиса модифицировалась в работах Ю.Г. Борисовича и Ю.Е. Гликлиха [24] и Ю.Е. Гликлиха [53], а также в работах польских математиков. В частности, в работе Л. Гурневича, А. Гранаса (A. Granas) и В. Крышевского (W. Kryszewski) [216] (см. также [215]) доказано следующее утверждение: *если X – компактное ANR-пространство, а Y – метрическое пространство, то каждое полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ с асферичными значениями обладает ε-аппроксимацией для любого $\varepsilon > 0$. Более того, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что любые две ε-аппроксимации F $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ могут быть соединены деформацией, протекающей в классе δ-аппроксимаций.*

Отметим работу [35] (см. также [19]), в которой, опираясь на конструкцию А.Д. Мышкиса, дается построение препятствия к существованию однозначной ε-аппроксимации к некоторому классу мультиотображений. Вопросы характеризации мультиотображений с помощью однозначных аппроксимаций рассматриваются в работах [155], [158].

Систематическое изучение измеримых мультифункций началось в шестидесятые годы, когда стали выявляться их интересные приложения в теории дифференциальных включений, задачах оптимального управления, выпуклом анализе и других разделах математики. Среди первых работ этого направления отметим исследования Ш. Кастена [171], Ж. Дебре (G. Debreu) [188], М. Джекобса (M.Q. Jacobs) [238], Ч. Олеха (C. Olech) [291], А. Плиша (A. Pliś) [302], Р.Т. Рокафеллара (R.T. Rockafellar) [310]. Подробное изложение теории измеримых мультифункций можно найти в монографии Ш. Кастена и М. Валадье [173], специально посвященной этому вопросу. Многие вопросы теории и приложений описаны также в монографиях и работах [2], [10], [20], [21], [22], [33], [51], [52], [64], [65], [83], [112], [138], [140], [141], [190], [191], [212], [220], [228], [229], [230], [232], [247], [251], [252], [311], [321].

Различные версии Теоремы 1.5.6 могут быть найдены как в книге [173], так и во многих из указанных выше работ. Отметим лишь, что существование измеримого сечения было доказано К. Куратовским и К. Рылль-Нардзевским в [260]. Ранний вариант этой теоремы содержится в работе В.А. Рохлина [108]. Существование представления Кастена доказано в [171]. Заметим впрочем, что конструкция плотной "трубки" непрерывных сечений полунепрерывного снизу мультиотображения восходит к Э. Майклу [276]. Свойство Лузина для мультифункций изучалось А. Плишем [302] и М. Джекобсом [238].

Определение многозначного интеграла, приводимое нами, восходит к Р. Ауманну (R. Aumann) [143]. Другие подходы предлагались, например, Ж. Дебре [188] и М. Хукухарой (M. Hukuhara) [236]. Доказательство Теоремы 1.5.12, а также описание других свойств многозначного интеграла может быть найдено в книгах В. Гильденбранда (W. Hildenbrand) [52], А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова [65], Б.Ш. Мордуховича [83], А.А. Толстоногова [112], Ж.-П. Обена и Г. Франковской [141], Б. Глодде (B. Glodde) и Г.-Д. Нипажа (H.-D. Niepage) [212], С. Ху и Н.С. Папагеоргиу [232], Э. Клейна и Э. Томпсона [252], Е.С. Половинкина [104] и других. Подробная библиография по многозначному интегралу приведена в обзорах [20] и [51].

Свойства мультифункций, удовлетворяющих условиям Каратеодори, а также суперпозиционного мультиоператора описаны в монографиях [21], [112], [138], [191], [232], [234], [247]. Теорема 1.5.14 для случая конечномерных пространств доказана Н. Кикучи (N.Kikuchi) [250]. Контрпримеры 1.5.20 (а,б) построены В.В. Обуховским (см. [93] и [137]). Теорема 1.5.22 о суперпозиционной селектируемости доказана Ш. Кастеном [172]. Свойство замкнутости мультиоператора суперпозиции рассматривалось в работе А. Ласоты и З. Опиала [261]. Начиная со статьи [121], различные варианты леммы Филиппова рассматривались во многих работах. Отметим некоторые из них: [33], [83], [88], [171], [198], [220], [230], [237]. (Более подробная библиография может быть найдена в обзорах [20] и [51]). Полное доказательство теоремы о полунепрерывности снизу мультиоператора суперпозиции может быть найдено в [191], Теорема 9.3.

Отметим, что вне рамок нашего изложения остался такой важный раздел многозначного анализа, как дифференциальное исчисление. Описание различных подходов к определению понятия производной для мультифункций, некоторые приложения и библиографию можно найти, например, в монографиях [141], [232], [320], а также обзорах

[20], [51].

Глава 2.

Начиная с работ С. Надлера (S.B. Nadler, Jr) [280] и Дж. Маркина (J.T. Markin) [275], теоремам о неподвижной точке для сжимающих и нерастягивающих мультиотображений посвящено очень большое количество работ (библиография до 1987 г. приведена в обзорах [20] и [23]). Отметим изложение этих вопросов в монографиях [213], [215], [223], [232], [251], [298], [315], [327] и др. Теорема 2.1.2 доказана С. Надлером [280] для случая мультиотображения с замкнутыми ограниченными значениями и уточнена в работе [185] для случая мультиотображения с замкнутыми значениями. Теорема 2.1.3 приведена в работе [319]. В этой же работе получены некоторые другие результаты о структуре множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений. Топологическая размерность множества неподвижных точек многозначных сжимающих отображений изучалась в работе [195]. Теорема 2.1.4 доказана Б.Д.Гельманом. Локальный вариант этой теоремы опубликован в работе [45]. Теорема 2.1.6 является некоторым вариантом теоремы Б. Ричери [308]. Впервые техника теории многозначных отображений для изучения уравнений с замкнутыми линейными сюръективными операторами была применена в работе [49]. О некоторых других результатах этого направления см. [38], [44], [46], [48]. Теорема 2.1.11 в случае непрерывного сюръективного оператора была доказана в [308], Теорема 2.1.11 и Теорема 2.1.12 являются новыми. Следствие 2.1.13 восходит к работам И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна, в которых оно доказывалось иными методами.

Первые построения топологической степени для выпуклозначных мультиполей в банаховых пространствах были предложены А. Гранасом в 1959 г. в работах [221], [222]. Однако примененная Гранасом конструкция опиралась на "слишком сильное оружие": гомологические методы, ведущие свое начало от известной работы С. Эйленберга (S. Eilenberg) и Д. Монтгомери (D. Montgomery) [196] и основанные на теореме Виеториса–Бегла об изоморфизме (см., например, [110]). Использование для построения теории степени метода однозначных аппроксимаций более просто, геометрически наглядно и часто позволяет сводить вычисление степени к соответствующим "однозначным" ситуациям. Такой подход был предложен одновременно и независимо Ю.Г. Борисовичем, Б.Д. Гельманом, Э. Мухамадиевым и В.В.

Обуховским [17], [18] и А. Челлиной и А. Ласотой [177]. Отметим также работу М. Хукухары [235], который определил топологическую степень мультиполей с помощью многозначных непрерывных аппроксимаций. Основанное на аппроксимативных методах систематическое построение теории топологической степени компактных выпуклозначных мультиполей в локально выпуклых пространствах содержится в работах Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского [19] (относительный случай) и Т.-В. Ма (T.-W. Ma) [268] ("абсолютный" случай).

Распространение метода однозначных аппроксимаций на случай мультиотображений с невыпуклыми значениями (см. выше) позволило придать ему характер достаточно универсального средства для конструирования топологической степени мультиполей самых различных классов (см. монографии [131], [215], [232], [254], а также работы [53], [73], [149], [156], [216], [289]).

В то же время и гомологические методы оказались весьма эффективны в задаче о построении топологической степени для мультиотображений с ацикличными значениями, их композиций и мультиотображений имеющих более сложную структуру. (Напомним, что множество называется *ацикличным*, если оно имеет те же гомологии, что и точка. Выпуклые, стягиваемые, R_δ-множества – ацикличны).

Гомологические методы в теории топологической степени мультиотображений исследованы и описаны в обзорах [19], [20], [22], [23], монографиях [131], [194], [215], [247], [254], [255], [266], работах [96], [170], [181], [203], [207], [217], [224], [257], [258], [264], [328].

Отметим работы Б.Д. Гельмана [36], [37], [39], [207] и работу [153], в которых строились и изучались топологические характеристики мультиотображений, являющиеся обобщением топологической степени. Конструкции этих характеристик были основаны на изучении гомологической структуры графиков мультиотображений.

Еще одно интересное и интенсивно развивавшееся в последние десятилетия направление в теории топологической степени мультиотображений связано с ее распространением на случай некомпактных мультиполей в бесконечномерных проостранствах. Наибольшее внимание в этой связи привлек класс *уплотняющих* мультиотображений, что было связано с одной стороны с тем, что этот класс является естественным расширением совокупности компактных мультиотображений, а с другой стороны с тем, что мультиотображения такого рода естественно появляются в теории дифференциальных уравнений и включений в банаховых пространствах (см. ниже). Приведем некоторые определения (см., например, [19], [20], [247]).

Пусть E – банахово пространство и $(\mathcal{A}, \geq)$ – частично упорядоченное множество. Отображение $\beta : P(E) \to \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности (МНК)* в E, если

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \in P(E)$. МНК β называется *вещественной,* если $\mathcal{A} = [0, \infty]$ с естественным упорядочением и $\beta(\Omega) < \infty$ для любого ограниченного $\Omega \in P(E)$. Известными примерами вещественных мер некомпактности являются:

МНК Хаусдорфа:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}$$

и *МНК Куратовского:*

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d > 0 : \Omega \text{ допускает разбиение на конечное число}$$
$$\text{множеств, диаметр которых меньше } d\}.$$

Далее, пусть X – замкнутое подмножество E. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ называется *уплотняющим относительно МНК* β (или β-*уплотняющим*), если для любого $\Omega \subseteq X$ соотношение

$$\beta(F(\Omega)) \geq \beta(\Omega)$$

влечет относительную компактность Ω. Если β – вещественная МНК, то важный класс составляют (k, β)-*уплотняющие* мультиотображения $(0 \leq k < 1)$, т.е. такие, что

$$\beta(F(\Omega)) \leq k\beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \subseteq X$. Ясно, что компактные мультиотображения являются уплотняющими. Более интересный пример представляют мультиотображения, представимые в виде суммы компактного и k-сжимающего относительно метрики Хаусдорфа мультиотображений: оказывается, что такие мультиотображения являются (k, χ)-уплотняющими (см. [50], [247]).

Важнейшим свойством уплотняющего относительно достаточно "хорошей" МНК мультиотображения является существование для него выпуклого замкнутого подмножества (*фундаментального множества*), априори содержащего все неподвижные точки и такого, что суженное на него мультиотображение компактно. Это дает возможность применить для построения топологической степени уплотняющего мультиполя развитую в Главе 2 теорию относительной топологической степени. Именно такой подход был применен в работе В.В. Обуховского [91], где была предложена конструкция топологической степени уплотняющего мультиполя в пространстве Фреше. В дальнейшем различные методы построения теории топологической степени уплотняющих и других некомпактных мультиполей изучались в работах В.В. Петришина (W.V. Petryshyn) и П.М. Фитцпатрика (P.M. Fitzpatrick) [299], Дж.Р.Л. Вебба (J.R.L. Webb) [326], В.В. Обуховского и Е.В. Горохова [98], А. Вандербоведе (A. Vanderbauwhede) [323]. На случай уплотняющих ациклических мультиотображений теория топологической степени была распространена в работе В.В. Обуховского [96] (см. также обзор [22] и работы Л. Гурневича и З. Кухарского (Z. Kucharski) [217]; Дж. Конти (G. Conti), В.В. Обуховского и П. Дзекка [181]). Степень для уплотняющих мультиотображений, представляющих собой композицию суперпозиционного мультиоператора с абстрактным разрешающим оператором, определена в работе Р. Бадера (R. Bader), М.И. Каменского и В.В. Обуховского [148]. Систематическое изложение теории топологической степени для некомпактных мультиотображений различных классов (с дополнительными ссылками) можно найти в обзорах авторов [19], [20], [22], Ю.Г. Борисовича [15], [16] и монографии М.И. Каменского, В.В. Обуховского и П. Дзекка [247].

Важным и нашедшим интересные приложения направлением в теории топологической степени является развитие степени совпадения различных типов мультиотображений с линейными и нелинейными операторами. Отметим здесь работы Ю.Г. Борисовича [15], [16], Э. Тарафдара (E. Tarafdar) и С.К. Тео (S.K. Teo) [322], Т. Прушко (T. Pruszko) [306], Д. Габор (D. Gabor) и В. Крышевского [204], В.В. Обуховского, П. Дзекка и В.Г. Звягина [289], С.В. Корнева и В.В. Обуховского [73] (см. также монографии [131], [191], [232], [255]).

Применение методов теории топологической степени к изучению бифуркаций решений операторных включений может быть найдено в книгах [215], [255].

В ходе построения топологической теории неподвижных точек мультиотображений естественно возник вопрос изучения топологических свойств множества неподвижных точек. Связность и ацикличность множества неподвижных точек изучалась в работах [38], [41], [47], [131], [205], [215], [265], [266] и др. Вопросы топологической размерности множества неподвижных точек освещены в работах [6], [38], [41], [195], [318], [319] и др.

В заключение отметим, что теоремы о неподвижной точке для мультиотображений различных типов, конструкции топологических инвариантов, отличных от степени (числа Лефшеца и Нильсена), задачи о разрешимости операторных включений, их приложения и другие вопросы содержатся также в работах [15], [16], [19], [24], [40], [56], [89], [90], [94], [131], [140], [141], [146], [152], [168], [169], [182], [190], [191], [196], [197], [200], [206], [213], [215], [223], [227], [232], [298], [315], [329], [334]. Заметим, что в работе [225] изучается взаимосвязь между теоремами о неподвижной точке для мультиотображений различных типов, свойством Кнастера–Куратовского–Мазуркевича, вариационными неравенствами, минимаксными соотношениями и теоремой Гейла–Никайдо–Дебре об избыточном спросе . Устойчивость неподвижных точек мультиотображений в терминах топологического индекса рассматривалась в работе [285]. Отметим направление, связанное с вычислением неподвижных точек: [66], [111]. Приложения неподвижных точек и техники теории многозначных отображений к задачам о препятствиях, задачам со свободной границей и задачам, возникающих в теории термостатов описаны в работах [178], [179], [209]. Укажем снова на обзоры [20], [22], [23] и [51], где можно найти дополнительную информацию и ссылки.

Глава 3.

Начавшееся в шестидесятые годы бурное развитие теории дифференциальных включений и ее приложений продолжается и поныне. К настоящему времени детально разработаны такие ее разделы, которые являются традиционными и в общей теории дифференциальных уравнений – теоремы существования решений, качественные свойства решений, включая непрерывную зависимость от начальных данных и параметров, устойчивость, существование решений периодических и более общих краевых задач и т.д. В то же время выявились и интересные специфические проблемы, к числу которых можно отнести, например, вопросы соотношений множеств решений исходной задачи и задачи с "овыпукленной" правой частью, описание управляемых систем с помощью дифференциальных включений и другие.

В настоящее время имеется несколько достаточно содержательных и подробных монографий целиком или в значительной своей части излагающих различные аспекты теории дифференциальных включений и ее приложений и дающих достаточно полный анализ источников. К числу таких работ можно отнести: Ф. Кларк (F. Clarke) [70], Б.Ш. Мордухович [83], В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк [100]; А.А. Толстоногов [112]; О.П. Филатов и М.М. Хапаев [120]; А.Ф. Филиппов [125]; Я. Андрес и Л. Гурневич [131]; Ж.П. Обен [139]; Ж.П. Обен и А. Челлина [140]; Ж.П. Обен и Г. Франковска [141]; Ш. Кастен и М. Валадье [173]; К. Даймлинг [191]; Л. Гурневич [215]; С. Ху и Н.С. Папагеоргиу [233], [234]; М.И. Каменский, В.В. Обуховский и П. Дзекка [247]; М. Кисилевич (M. Kisielewicz) [251], Г.В. Смирнов [320]. Библиографию и обзор различных направлений исследований можно найти также в работах авторов [20] и Б.Д. Гельмана и В.В. Обуховского [51].

В силу этого мы ограничимся лишь несколькими замечаниями. В шестидесятые годы различные теоремы существования решений для дифференциальных включений в конечномерном пространстве с выпуклозначной правой частью были получены в работах В.Г. Задорожнего [60], Ш. Кастена [172], Дж. Дэви (J.L. Davy) [187], Н. Кикучи [248], [249], [250], А. Ласоты и З. Опиала [261], А. Плиша [303] – [305] и др. Отметим, что при этом в работе [261], по-видимому, впервые были применены топологические методы (теорема Боненбласта–Карлина о неподвижной точке).

Для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью первая теорема существования была доказана А.Ф. Филипповым [123] при условии, что правая часть удовлетворяет условию Липшица. Затем им же была получена теорема существования для дифференциальных включений с непрерывной правой частью [124]. Этот результат был обобщен в работе Ч. Олеха [292]. Для дифференциальных включений с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью первые результаты были получены А. Брессаном (A. Bressan) [160] и С. Лоясевичем (S. Lojasiewicz) [267]. Впоследствии разработанный Брессаном метод *направленных сечений* позволил развить единый подход к изучению дифференциальных включений с полунепрерывной снизу и полунепрерывной сверху правой частью (см. [161] – [164]).

Свойство связности множества решений в случае, когда правая часть включения удовлетворяет условиям типа верхних Каратеодори, установлено Дж. Дэви [187]. (Отметим, что связность множества достижимости была доказана ранее Н. Кикучи [249]). Впоследствии было открыто, что множество решений в этом случае имеет более тонкую топологическую структуру – Ж.-М. Ласри и Р. Робер [265] доказали его ацикличность, а затем было установлено, что оно является R_δ-множеством (К. Химмельберг (C.J. Himmelberg) и Ф. Ван Влек (F.S. Van Vleck) [231] в случае полунепрерывной сверху правой части и Ф. Де Блази (F.S. De Blasi) и И. Мыяк (J. Myjak) [157] в общем случае). В дальнейшем этот результат развивался в разных направлениях – на случай включений с фазовыми ограничениями, включений в банаховых пространствах, функционально-дифференциальных включений и др. Мы отсылаем по этому вопросу к монографиям [131], [191], [193], [215], [234], [247], работам [114], [116], [145], [150], [180], [256], [301]. R_δ-свойство множества решений имеет важное значение для исследования периодической задачи для дифференциальных включений – в силу отмечавшейся выше аппроксимируемости мультиотображений с R_δ-значениями оно позволяет применить методы теории топологической степени для исследования многозначного оператора сдвига по траекториям дифференциальных включений (помимо указанных выше, отметим еще работы [67], [144], [156], [219], [245], [286], [300] этого направления).

Свойство связности множества решений дифференциального включения с полунепрерывной снизу правой частью установлено А. Брессаном [161] (см. также [191]). Для случая включений в банаховом пространстве это свойство исследовалось А. Брессаном и В. Стайку (V. Staicu) [166] и В.В. Обуховским и П. Дзекка [287] (см. также [247]).

Топологическая размерность множества решений задачи Коши для дифференциальных включений изучалась в работах [41], [43], [195], [208]. Обобщения этих результатов на случай включений более общего вида и более общих задач были получены в работах [142], [147] и др.

Свойствам множеств решений дифференциальных уравнений и дифференциальных включений посвящена монография Р. Драгони (R. Dragoni), Дж. Маки (J.W. Macki), П. Нистри (P. Nistri) и П. Дзекка [193].

В последние десятилетия дифференциальные включения в банаховых пространствах изучаются очень интенсивно. В значительной степени это объясняется тем, что включения этого типа находят важные и интересные приложения в исследовании процессов управления, описываемых уравнениями математической физики. Дифференциальные включения в банаховых пространствах описаны в монографиях А.А. Толстоногова [112], К. Деймлинга [191], С. Ху и Н.С. Папагеоргиу [233], [234], М.И. Каменского, В.В. Обуховского и П. Дзекка [247] и многих работах (см., например, [97], [113] – [118], [136], [144], [145], [147], [148], [150], [151], [180], [192], [214], [218], [240] – [246], [256], [270], [284], [286] – [288], [293] – [296], [333]). Отметим, что в монографии [247] систематически развит подход к исследованию полулинейных дифференциальных включений в банаховом пространстве с неограниченным линейным оператором, основанный на теории топологической степени уплотняющих мультиотображений.

В теории вырожденных дифференциальных уравнений и включений в банаховом пространстве нашли эффективное применение методы, связанные с использованием *многозначных линейных операторов* (см., например, монографии А. Фавини (A. Favini) и А. Яги (A. Yagi) [201], Р. Кросса (R. Cross) [186], работы В.В. Обуховского и П. Дзекка [288], А.Г. Баскакова, В.В. Обуховского и П. Дзекка [151]).

Исследование периодических решений дифференциальных включений восходит, по-видимому, к работе А. Ласоты и З. Опиала [261], где рассматривалась разрешимость общей краевой задачи, включающей периодическую. Метод исследования периодической задачи, основанный на аппроксимации дифференциального включения дифференциальными уравнениями предлагался А.И. Поволоцким и Е.А. Ганго (см., например, [101] – [103]). Метод интегральных многозначных операторов был развит в работах Б.Д. Гельмана [34] и В.В. Обуховского [92], [93] (см. также обзоры [19], [22]). Теорема 3.3.10 доказана Б.Д. Гельманом (см. [19], [21]). Метод многозначного оператора сдвига восходит к работам Б.Д. Гельмана (см. обзор [19]), Ж.-М. Ласри и Р. Робера [264], К. Даймлинга [189]. Его подробное изложение и связь с методом направляющей функции можно найти в монографиях Я. Андреса и Л. Гурневича [131] и Л. Гурневича [215], а также работах [67], [144], [145], [150], [156], [219], [226], [241], [245], [256], [282], [284], [286], [300] и др. Применение метода интегральных мультиоператоров и метода мультиоператора сдвига в задаче о периодических решениях полулинейных дифференциальных включений в банаховом пространстве описано в книге М.И. Каменского, В.В. Обуховского и П. Дзекка [247]. Исследование более общих краевых задач, чем периодическая, осуществлялось в работах [32], [151], [192], [288], [294], [296], [333] (см. также [234], [255]). Бифуркации периодических решений рассматриваются в книге [255]. О некоторых современных развитиях метода направляющих функций для дифференциальных включений см., например, работы С.В. Корнева и В.В. Обуховского [72], [253].

Принципу усреднения дифференциальных включений посвящена монография О.П. Филатова и М.М. Хапаева [120]. Этот вопрос изучается также в книге [247] и работах [183], [184], [240].

Важное место в современной теории дифференциальных включений заняла *теория выживаемости (viablilty theory)*, изучающая задачи существования решений, принадлежащих заданному замкнутому подмножеству фазового пространства. По этим вопросам мы отсылаем читателя, прежде всего к монографиям [139] – [141], [191], [215], [320]. Среди сравнительно недавних работ отметим также [117], [118], [145], [150], [211], [218], [256], [283], [300].

Ввиду тесной связи теории дифференциальных включений с проблемами теории управляемых систем и теории оптимизации, эти вопросы рассматриваются практически во всех упомянутых выше монографиях. Выделим книги [251] и [233], специально посвященные этому предмету. Обзор некоторых результатов этого направления можно найти в [51]. Экстремальные задачи для дифференциальных включений, в том числе принцип максимума Понтрягина, исследуются в работах А.В. Арутюнова, С.М. Асеева, В.И. Благодатских [4], С.М. Асеева [5], В.И. Благодатских [9], В.И. Благодатских и А.Ф. Филиппова [11], Б.Ш. Мордуховича [83], Б.Н. Пшеничного [106]. Среди других работ отметим также [25], [67], [92], [97], [136], [241], [248], [249], [262], [282], [283], [284], [289], [290], [293] – [296].

Обзор работ по интегральным включениям можно найти в [51] (см. также работы А.И. Булгакова [29] – [31]).

Приложения дифференциальных включений в теории дифференциальных игр рассматриваются в монографиях Н.Н. Красовского и

А.И. Субботина [77] и Ж.-П. Обена [139], а в теории систем, управляемых в условиях неопределенности – в книге А.Б. Куржанского [80]. М.А. Красносельский и А.В. Покровский [76] использовали дифференциальные включения в исследовании систем с гистерезисом, а М. Монтейро Маркес (M.D.P. Monteiro Marques) [279] – в задачах механики. Примеры приложений к модели передаточной линии с нелинейными звеньями и к модели гибридной системы с сухим трением описаны в книге [247]. Приложения в задаче управления движением вязкоупругой жидкости рассмотрены В.В. Обуховским, П. Дзекка и В.Г. Звягиным [290].

Глава 4.

Понятие обобщенной (или *дисперсной*) динамической системы возникло в связи с изучением обыкновенных диференциальных уравнений, не удовлетворяющих условию единственности решения, и дифференциальных включений и было описано в работах Е.А. Барбашина [7], Б.М. Будака [27], [28], А.Д. Мышкиса [85] и др. Отметим монографию [109], в которой подробно изучаются топологические свойства обобщенных динамических систем, а также цикл работ Э. Роксина (E. Roxin) [312] – [314] по исследованию устойчивости обобщенных динамических систем. Наиболее распространенной является аксиоматика обобщенных динамических систем, предложенная Е.А. Барбашиным. В первом разделе мы описываем системы, удовлетворяющие этой аксиоматике.

Задача изучения точек покоя обобщенных динамических систем была поставлена А.Д. Мышкисом в работе [85]. Там же была предложена идея рассматривать одностороние динамические системы, удовлетворяющие аксиомам (G1)–(G3). Приведенные теоремы о существовании точек покоя являются частными случаями утверждений из работы В.В. Обуховского [94]. Различные теоремы о существовании точек покоя обобщенных динамических систем были доказаны также в работах [85], [19], [42] и др. Отметим работу [42], в которой выделен класс *аппроксимируемых* обобщенных динамических систем, для которых справедлив ряд теорем о существовании точек покоя.

Как уже отмечалось, задачи теории игр и математической экономики были одним из первых объектов применения идей и методов теории многозначных отображений. И действительно, уже пионерские работы по принципам неподвижной точки для мультиотображений содержали в качестве прямых следствий те или иные формы теоремы о существовании равновесных стратегий (см. [281], [239], [159], [210], [199]). Приложения техники многозначных отображений и дифференциальных включений в теории игр и математической экономике изложены в монографиях К. Бержа [8], [154]; В. Гильдебранда [52]; С.В. Емельянова, С.К. Коровина, Н.А. Бобылева [59], С. Карлина [68]; К. Ланкастера [81]; В.Л. Макарова и А.М. Рубинова [82]; Х. Никайдо [87]; Ж.-П. Обена [89]; Ж.-П. Обена и И. Экланда [90]; Ж.-П. Обена и А. Челлины [140]; М. Дж. Тодда [111]; В.Л. Хацкевича [127]; С. Ху и Н.С. Папагеоргиу [234]; Э. Клейна и Э. Томпсона [252]; Дж. Юана (G.X.-Z. Yuan) [329]; сборнике [66]. Обзоры литературы могут быть найдены в [19], [20], [51].

Список литературы

[1] П.С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* Наука, М., 1977.

[2] В.И. Аркин, В.Л. Левин. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи. *Успехи мат. наук.* 27 (1972), № 3, 21–77.

[3] А.В. Арутюнов. Специальные селекторы многозначных отображений. *Докл. АН.* 377 (2001), № 3, 298–300.

[4] А.В. Арутюнов, С.М. Асеев, В.И. Благодатских. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями. *Мат. сборник.* 184 (1993), № 6, 3–23.

[5] С.М. Асеев. Экстремальные задачи для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. *Труды Матем. ин–та РАН.* 233 (2001), 5–70.

[6] Р. Бадер, Б.Д. Гельман, В.В. Обуховский. Об одном классе многозначных отображений. *Вестник Воронежского госун–та. Сер. физ.–мат.* 2 (2003), 35–38.

[7] Е.А. Барбашин. К теории обобщенных динамических систем. *Учен. зап. МГУ. Математика.* 135 (1948), № 2, 110–113.

[8] К. Берж. *Общая теория игр нескольких лиц.* Физматгиз, М., 1961.

[9] В.И. Благодатских. Принцип максимума для дифференциальных включений *Тр. Мат. ин-та АН СССР.* 166 (1984), 23–43.

[10] В.И. Благодатских. *Введение в оптимальное управление.* Высш. школа, М., 2001.

[11] В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппов. Дифференциальные включения и оптимальное управление. *Труды Матем. ин–та АН СССР.* 169 (1985), 194–253.

[12] Н.А. Бобылев, С.В. Емельянов, С.К. Коровин. *Геометрические методы в вариационных задачах.* Магистр, М., 1998.

[13] Ю.Г. Борисович. Об одном применении понятия вращения векторного поля. *Докл. АН СССР.* 153 (1963), № 1, 12–15.

[14] Ю.Г. Борисович. Об относительном вращении компактных векторных полей в линейных пространствах. *Тр. семинара по функц. анализу. Воронежск. ун–т.* 12 (1969), 3–27.

[15] Ю.Г. Борисович. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. I. *Геом. и теория особенностей в нелинейных уравнениях.* Воронеж, ВГУ, 1987, 24–46.

[16] Ю.Г. Борисович. Современный подход к теории топологических характеристик нелинейных операторов. II. *Глобал. анал. и нелинейн. уравнения.* Воронеж, ВорГУ, 1988, 22–43.

[17] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, Э. Мухамадиев, В.В. Обуховский. О вращении многозначных векторных полей. *Докл. АН СССР.* 187 (1969), № 5, 971–973.

[18] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, Э. Мухамадиев, В.В. Обуховский. О вращении многозначных векторных полей. *Тр. Семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т.* 12 (1969), 69–84.

[19] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений. *Успехи мат. наук.* 35 (1980), № 1, 59–126.

[20] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. Многозначные отображения. *Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 19.* ВИНИТИ, М., 1982, 127–231.

[21] Ю.Г.Борисович, Б.Д.Гельман, А.Д.Мышкис, В.В.Обуховский. *Введение в теорию многозначных отображений.* Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986.

[22] Ю.Г.Борисович, Б.Д.Гельман, А.Д.Мышкис, В.В.Обуховский. Многозначный анализ и операторные включения. *Итоги науки и техники. Соврем. пробл.*

мат. Новейшие достижения. Т.29. ВИНИТИ, М., 1986, 151–211.

[23] Ю.Г.Борисович, Б.Д.Гельман, А.Д.Мышкис, В.В.Обуховский. О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных включений. *Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т.25* ВИНИТИ, М., 1987, 123–197.

[24] Ю.Г. Борисович, Ю.Е. Гликлих. О числе Лефшеца для одного класса многозначных отображений. *7–я летняя мат. школа, 1969.* Киев, 1970, 283–294.

[25] Ю.Г. Борисович, В.В. Обуховский. О задаче оптимизации для управляемых систем параболического типа. *Труды Матем. ин–та РАН.* 211 (1995), 95–101.

[26] К. Борсук. *Теория ретрактов.* Мир, М., 1971.

[27] Б.М. Будак. Дисперсные динамические системы. *Вестник МГУ.* 8 (1947), 135–137.

[28] Б.М. Будак. Понятие движения в обобщенной динамической системе *Учен. зап. МГУ. Математ.* 155 (1952), № 5, 174–194.

[29] А.И. Булгаков. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I. *Дифф. уравнения.* 28 (1992), № 3, 371–379.

[30] А.И. Булгаков. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. II. *Дифф. уравнения.* 28 (1992), № 4, 566–571.

[31] А.И. Булгаков. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. III. *Дифф. уравнения.* 28 (1992), № 5, 739–746.

[32] А.И. Булгаков, Л.И. Ткач. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для

функционально-дифференциальных включений. *Матем. сб.* 189 (1998), № 6, 3–32.

[33] Дж. Варга. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* Наука, М., 1977.

[34] Б.Д. Гельман. Многозначные интегральные операторы и ω-периодические решения. *Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та.* 4 (1971), 35–44.

[35] Б.Д. Гельман. Обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке для многозначных отображений. *Докл. АН СССР.* 209(1973), № 1, 22–24.

[36] Б.Д. Гельман. Топологическая характеристика многозначных отображений и теоремы о неподвижной точке. *Докл. АН СССР.* 221(1975), № 3, 524–527.

[37] Б.Д. Гельман. Топологическая характеристика многозначных отображений в банаховом пространстве. *Тр. мат. фак. Воронеж. ун-т.* 16 (1975), 17–23.

[38] Б.Д. Гельман. О структуре множества решений включений с многозначными операторами. *Глобальный анализ и матем. физика.* Воронеж, ВорГУ, 1987, 26–41.

[39] Б.Д. Гельман. Обобщенная степень многозначных отображений *Нелинейные операторы в глобальном анализе.* Воронеж, ВорГУ. 1991, 34–51.

[40] Б.Д. Гельман. Теорема об антиподах и точки совпадения. *Успехи мат. наук.* 51(1996), № 1, 147–148.

[41] Б.Д. Гельман. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений. *Математ. сборник.* 188 (1997), № 12, 33–56.

[42] Б.Д. Гельман. Точки покоя обобщенных динамических систем. *Матем. заметки.* 65 (1999), № 1, 28–36.

[43] Б.Д. Гельман. Топологическая размерность множества решений задачи Коши для дифференциальных включений. *Вестник Воронежского госуниверситета, Серия физ., матем.* 1 (2000), 107–115.

[44] Б.Д. Гельман. Об одном классе операторных уравнений. *Матем. заметки.* 70 (2001), № 4, 544–552.

[45] Б.Д. Гельман. Обобщенная теорема о неявном отображении. *Функц. анализ и его прил.* 35 (2001), № 3, 183–188.

[46] Б.Д. Гельман. О топологической размерности множества решений операторных включений, содержащих сюръективные операторы. *Вестник Воронежского госуниверситета, Серия физ., матем.* 1 (2001), 75–80.

[47] Б.Д. Гельман. О топологической структуре множества неподвижных точек абстрактного уравнения Вольтерра. *Вестник Воронежского госуниверситета, Серия физ., матем.* 2 (2001), 63–66.

[48] Б.Д. Гельман. Теорема Борсука-Улама в бесконечномерных банаховых пространствах. *Матем. сборник.* 193 (2002), № 1, 83–92.

[49] Б.Д. Гельман. Бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама. *Функц. анализ и его прил.* 38 (2004), № 4, 1–5.

[50] Б.Д. Гельман, В.В. Обуховский. Некоторые теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений уплотняющего типа. *Алгебр. вопр. анал. и топол.* Воронеж, 1990, 110–115.

[51] Б.Д. Гельман, В.В. Обуховский. О новых результатах в теории многозначных отображений. II. Анализ и приложения. *Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т.29* ВИНИТИ, М., 1991, 107–159.

[52] В. Гильденбранд. *Ядро и равновесие в большой экономике.* Наука, М., 1986.

[53] Ю.Е. Гликлих. Неподвижные точки многозначных отображений с невыпуклыми образами и вращение многозначных векторных полей. *Сб. тр. аспирантов мат. фак. Воронеж. ун-т.* 1 (1971), 30–38.

[54] В.В. Гончаров, А.А. Толстоногов. Совместные непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпулыми

значениями и их приложения. *Матем. сб.* 182 (1991), № 7, 946–969.

[55] Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. *Линейные операторы. Общая теория.* ИЛ, М., 1962.

[56] В.Ф. Демьянов. *Теорема о неподвижной точке в негладком анализе и ее применение.* Изд–во С.–Петербургского ун–та, СПб, 1996.

[57] В.Ф. Демьянов, Л.В. Васильев. *Недифференцируемая оптимизация.* Наука, М., 1981.

[58] В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* Наука, М., 1990.

[59] С.В. Емельянов, С.К. Коровин, Н.А. Бобылев. *Методы нелинейного анализа в задачах управления и оптимизации.* УРСС, М, 2002.

[60] В.Г. Задорожний. О дифференциальном уравнении первого порядка с многозначной правой частью. *Сб. трудов студентов и аспирантов ВГУ.* Воронеж, 1965, 26–30.

[61] Я.А. Израилевич, В.В. Обуховский. Об эквивариантных многозначных отображениях. *Докл. АН СССР.* 205 (1972), № 1, 16–18.

[62] Я.А. Израилевич, В.В. Обуховский. О некоторых топологических характеристиках эквивариантных многозначных отображений. *Тр. Мат. фак. Воронеж. ун-т.* 10 (1973), 52–61.

[63] К. Иосида. *Функциональный анализ.* Мир, М., 1967.

[64] А.Д. Иоффе, В.Л. Левин. Субдифференциалы выпуклых функций. *Труды ММО.* 26 (1972), 3–73.

[65] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. *Теория экстремальных задач.* Наука, М., 1974.

[66] *Итеративные методы в теории игр и программировании.* Наука, М., 1974.

[67] М.И. Каменский, В.В. Обуховский. Об операторе сдвига по траекториям управляемых систем. *Дифф. уравнения.* 32 (1996), № 6, 747-754.

[68] С. Карлин. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* Мир, М., 1964.

[69] Дж. Келли. *Общая топология.* Наука, М., 1981.

[70] Ф.Кларк. *Оптимизация и негладкий анализ.* Наука, М., 1988.

[71] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Физматлит, М., 2004.

[72] С.В. Корнев, В.В. Обуховский. О негладких многолистных направляющих функциях. *Дифф. уравнения.* 39(2003), № 11, 1497–1502.

[73] С.В. Корнев, В.В. Обуховский. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений. *Труды матем. ф–та (новая серия).* Воронеж, ВорГУ, 8 (2004), 56–74.

[74] М.А. Красносельский. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* Наука, М., 1966.

[75] М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. *Геометрические методы нелинейного анализа.* Наука, М., 1975.

[76] М.А. Красносельский, А.В. Покровский. *Системы с гистерезисом.* Наука, М., 1983.

[77] Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры.* Наука, М., 1974.

[78] К. Куратовский. *Топология. Том 1.* Мир, М., 1966.

[79] К. Куратовский. *Топология. Том 2.* Мир, М., 1969.

[80] А.Б. Куржанский. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* Наука, М., 1977.

[81] К. Ланкастер. *Математическая экономика.* Советское радио, М., 1972.

[82] В.Л. Макаров, А.М. Рубинов. *Математическая теория экономической динамики и равновесия.* Наука, М., 1973.

[83] Б.Ш. Мордухович. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* Наука, М., 1988.

[84] А.Д. Мышкис. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. *Успехи мат. наук.* 4 (1949), № 5, 99-141.

[85] А.Д. Мышкис. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. *Матем. сборник.* 34 (1954), № 3, 525-540.

[86] И.П. Натансон. *Теория функций вещественной переменной.* Наука, М., 1974.

[87] Х.Никайдо. *Выпуклые структуры и математическая экономика.* Мир, М., 1972.

[88] М.С. Никольский. Одно замечание к лемме Филиппова. *Вестн. МГУ. Вычисл. мат. и кибернет.* 2 (1982), 76–78.

[89] Ж.-П. Обен. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* Мир, М., 1988.

[90] Ж.-П. Обен, И. Экланд. *Прикладной нелинейный анализ.* Мир, М., 1988.

[91] В.В. Обуховский. О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов. *Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та.* 4 (1971), 70–79.

[92] В.В. Обуховский. Периодические решения управляемых систем. *Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та.* 7 (1972), 68–76.

[93] В.В. Обуховский. К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. *Тр. мат. фак. Воронеж. ун-та.* 10 (1973), 74–82.

[94] В.В. Обуховский. Асимптотические теоремы о неподвижной точке и точки покоя динамических систем без единственности. *Сб. работ аспирантов по теории функций и дифф. уравнениям.* Воронеж, 1974, 30–38.

[95] В.В. Обуховский. Об одном условии положительного равновесия в модели конкурентной экономики. *Труды 6-й Зимн. школы по мат. программир. и смежн. вопр., Дрогобыч, 24 янв. - 5 февр. 1973.* М., 1975, 183–189.

[96] В.В. Обуховский. О топологической степени для одного класса некомпактных многозначных отображений. *Функц. анализ (Ульяновск).* 23 (1984), 82–93.

[97] В.В. Обуховский. О полулинейных функционально–дифференциальных включениях в банаховом пространстве и управляемых системах параболического типа. *Автоматика.* 3 (1991), 73–81.

[98] В.В. Обуховский, Е.В. Горохов. К определению вращения одного класса компактно сужаемых многозначных векторных полей. *Тр. Мат. фак. Воронеж. ун-т.* 12 (1974), 45–54.

[99] В.И. Опойцев. *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.* Наука, М., 1977.

[100] В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы.* АстроПринт, Одесса, 1999.

[101] А.И. Поволоцкий, Е.А. Ганго. Периодические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин–т им. А.И.Герцена.* 464 (1970), 235–242.

[102] А.И. Поволоцкий, Е.А. Ганго. О периодических решениях дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин–т им. А.И.Герцена.* 541 (1972), 145–154.

[103] А.И. Поволоцкий, Е.А. Ганго. Существование периодических решений дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. *"Мат. анализ и теория функций".* Вып. 8, М., 1977, 106–113.

[104] Е.С. Половинкин. *Теория многозначных отображений.* Изд-во МФТИ, М., 1983.

[105] Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* Физматлит, М., 2004.

[106] Б.Н. Пшеничный. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* Наука, М., 1980.

[107] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. *Лекции по функциональному анализу.* Мир, М., 1979.

[108] В.А. Рохлин. О разложении динамической системы на транзитивные компоненты. *Матем. сборник. (Н.С.)* 25(67), (1949), 235–249.

[109] К.С. Сибирский, А.С. Шубэ. *Полудинамические системы.* Штиинца, Кишинев, 1987.

[110] Э. Спеньер. *Алгебраическая топология.* Мир, М., 1971.

[111] М.Дж. Тодд. *Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике.* Наука, М., 1983.

[112] А.А. Толстоногов. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве.* Наука, Новосибирск, 1986.

[113] А.А. Толстоногов. О решениях эволюционных включений. I. *Сибирск. мат. ж.* 33 (1992), № 3, 161–174.

[114] А.А. Толстоногов, Я.И. Уманский. О решениях эволюционных включений. II. *Сибирск. мат. ж.* 33 (1992), № 4, 163–174.

[115] В.А. Треногин. *Функциональный анализ.* Наука, М., 1980.

[116] Я.И. Уманский. Об одном свойстве множества решений дифференциальных включений в банаховом пространстве. *Дифф. уравнения.* 28 (1992), № 8, 1346–1351.

[117] Я.И. Уманский. О существовании решений одного класса эволюционных включений на замкнутом множестве. I. *Дифф. уравнения.* 30 (1994), № 7, 1139–1147.

[118] Я.И. Уманский. О существовании решений одного класса эволюционных включений на замкнутом множестве. II. *Дифф. уравнения.* 30 (1994), № 12, 2188–2190.

[119] В.В. Федорчук, В.В. Филиппов. *Общая топология. Основные конструкции.* Изд–во Моск. ун–та, М., 1988.

[120] О.П. Филатов, М.М. Хапаев. *Усреднение систем дифференциальных включений.* Изд–во Моск. ун–та, М., 1998.

[121] А.Ф. Филиппов О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., ас- трон., физ., хим.* № 2 (1959), 25–32.

[122] А.Ф. Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. *Матем. сб.* 51 (1960), № 1, 99–128.

[123] А.Ф. Филиппов. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью. *Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.* № 3 (1967), 16–26.

[124] А.Ф. Филиппов. О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений. *Мат. заметки.* 10 (1971), № 19, 307–313.

[125] А.Ф. Филиппов. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* Наука, М., 1985.

[126] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Мир, М., 1970.

[127] В.Л. Хацкевич. *Математическое моделирование процессов динамики и управления в экономике.* Центрально–Чернозем. кн. издат., Воронеж, 2003.

[128] Л. Шварц. *Анализ. Т. 1.* Мир, М., 1972.

[129] И. Экланд, Р. Темам. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* Мир, М., 1979.

[130] Р. Энгелькинг. *Общая топология.* Мир, М., 1986.

[131] J. Andres, L. Górniewicz. *Topological fixed point principles for boundary value problems.* Kluwer, Dordrecht, 2003.

[132] G. Anichini. Approximate selections for nonconvex set valued mappings. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7) 4 (1990), no. 2, 313–326.

[133] G. Anichini, G. Conti, P. Zecca. Approximation of nonconvex set valued mappings. *Boll. Un. Mat. Ital.* C (6) 4 (1985), no. 1, 145–154.

[134] G. Anichini, G. Conti, P. Zecca. A further result on the approximation of nonconvex set valued mappings. *Boll. Un. Mat. Ital.* C (6) 4 (1985), no. 1, 155–171.

[135] G. Anichini, G. Conti, P. Zecca. Approximation and selection for nonconvex multifunctions in infinite-dimensional spaces. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7) 4 (1990), no. 2, 410–422.

[136] G. Anichini, P. Zecca. Multivalued differential equations in Banach space. An application to control theory. *J. Optimization Theory Appl.* 21 (1977), no. 4, 477–486.

[137] J. Appell. Multifunctions of two variables: examples and counterexamples. *Topology in nonlinear analysis (Warsaw, 1994)*, Banach Center Publ., 35, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996, 119–128.

[138] J. Appell, E. De Pascale, H.T. Nguyen, P.P. Zabreiko. Multi-valued superpositions. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 345 (1995), 1–97.

[139] J.P. Aubin. *Viability theory.* Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1991.

[140] J.P. Aubin, A. Cellina. *Differential inclusions. Set–valued maps and viability theory.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1984.

[141] J.P. Aubin, H. Frankowska. *Set-valued analysis.* Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1990.

[142] A. Augustynowicz, Z. Dzedzej, B.D. Gelman. The solution set to BVP for some functional-differential inclusions. *Set-Valued Anal.* 6 (1998), no. 3, 257–263.

[143] R.J. Aumann. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* 12 (1965), 1–12.

[144] R. Bader. The periodic problem for semilinear differential inclusions in Banach spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 39 (1998), no. 4, 671–684.

[145] R. Bader. On the semilinear multi-valued flow under constraints and the periodic problem. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 41 (2000), no. 4, 719–734.

[146] R. Bader, G. Gabor, W. Kryszewski. On the extension of approximations for set-valued maps and the repulsive fixed points. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7), 10 (1996), no. 2, 399–416.

[147] R. Bader, B.D. Gel'man, M. Kamenskii, V. Obukhovskii. On the topological dimension of the solutions sets for some classes of operator and differential inclusions. *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.* 22 (2002), no. 1, 17–32.

[148] R. Bader, M. Kamenskii, V. Obukhovskii. On some classes of operator inclusions with lower semicontinuous nonlinearities. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 17 (2001), no. 1, 143–156.

[149] R. Bader, W. Kryszewski. Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally ∞-connected values on arbitrary ANR's. *Set-Valued Anal.* 2 (1994), no. 3, 459–480.

[150] R. Bader, W. Kryszewski. On the solution sets of differential inclusions and the periodic problem in Banach spaces. *Nonlinear Anal.* 54 (2003), no. 4, 707–754.

[151] A. Baskakov, V. Obukhovskii, P. Zecca. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces. *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.* 23 (2003), 53–74.

[152] H. Ben-El-Mechaiekh, W. Kryszewski. Equilibria of set-valued maps on nonconvex domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* 349 (1997), no. 10, 4159–4179.

[153] N.M. Benkafadar, B.D. Gel'man. Generalized local degree for multi-valued mappings. *Internat. J. of Math., Game Theory and Algebra.* 10(2000), no. 5, 413–434.

[154] C. Berge. *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.* 2nd ed., Dunod, Paris, 1966.

[155] F.S. De Blasi. Characterizations of certain classes of semicontinuous multifunctions by continuous approximations. *J. Math. Anal. Appl.* 106 (1985), no. 1, 1–18.

[156] F.S. De Blasi, L. Górniewicz, G. Pianigiani. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions. *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods.* 37 (1999), no. 2, 217–243.

[157] F.S. De Blasi, J. Myjak. On the solutions sets for differential inclusions. *Bull. Acad. Polon. Sci. Math.* 33 (1985), no. 1-2, 17–23

[158] F.S. De Blasi, J. Myjak. On continuous approximations for multifunctions. *Pacific J. Math.* 123 (1986), no. 1, 9–31.

[159] H.F. Bohnenblust, S. Karlin. On a theorem of Ville. Contribution to the theory of games, I. *Ann. Math.Studies.* 1950, Princeton, 155–160. Русский перевод: Х.Ф. Боненбласт, С. Карлин. Об одной теореме Вилля. *Бесконечные антагонистич. игры.* М., 1963, 489–496.

[160] A. Bressan. On differential relations with lower continuous right-hand side. An existence theorem. *J. Differential Equations.* 37 (1980), no. 1, 89–97.

[161] A. Bressan. On the qualitative theory of lower semicontinuous differential inclusions. *J. Differential Equations* 77 (1989), no. 2, 379–391.

[162] A. Bressan. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: a unified approach. *Nonlinear controllability and optimal control*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 133, Dekker, New York, 1990, 21–31.

[163] A. Bressan. Differential inclusions without convexity: a survey of directionally continuous selections. *World Congress of Nonlinear Analysts '92, Vol. I–IV (Tampa, FL, 1992).* de Gruyter, Berlin, 1996, 2081–2088.

[164] A. Bressan, A. Cellina, G. Colombo. Upper semicontinuous differential inclusions without convexity. *Proc. Amer. Math. Soc.* 106 (1989), no. 3, 771–775.

[165] A. Bressan, G. Colombo. Extensions and selections of maps with decomposable values. *Studia Math.* 90 (1988), no. 1, 69–86.

[166] A. Bressan, V. Staicu. On nonconvex perturbations of maximal monotone differential inclusions. *Set-Valued Anal.* 2 (1994), no. 3, 415–437.

[167] F.E. Browder. On a generalization of the Schauder fixed point theorem. *Duke Math. J.* 26 (1959), 291–303.

[168] F.E. Browder. The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces. *Math. Ann.* 177 (1968), 283–301.

[169] F.E. Browder. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces. *Nonlinear functional analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVIII, Part 2, Chicago, Ill., 1968).* Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.

[170] J. Bryszewski. On a class of multi-valued vector fields in Banach spaces. *Fund. Math.* 97 (1977), no. 2, 79–94.

[171] C. Castaing. Sur les multi-applications mesurables. *Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnell.* 1 (1967), no. 1, 91–126.

[172] C. Castaing. Sur les équations différentielles multivoques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B.* 263(1966), A63–A66.

[173] C. Castaing, M. Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions.* Lect. Notes in Math. 580, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

[174] A. Cellina. A theorem on the approximation of compact multivalued mappings. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8).* 47 (1969), 429–433. (1970).

[175] A. Cellina. Approximation of set valued functions and fixed point theorems. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 82 (1969), 17–24.

[176] A. Cellina. The role of approximation in the theory of multivalued mappings. *Differential Games and Related Topics.* (Proc. Internat. Summer School, Varenna, 1970) North-Holland, Amsterdam, 1971, 209–220.

[177] A. Cellina, A. Lasota. A new approach to the definition of topological degree for multi-valued mappings. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), 47 (1969), 434–440 (1970).

[178] K.C. Chang. The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities. *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), no. 2, 117–146.

[179] K.C. Chang. Free boundary problems and the set-valued mappings. *J. Differential Equations* 49 (1983), no. 1, 1–28.

[180] G. Conti, V. Obukhovskii, P. Zecca. On the topological structure of the solution set for a semilinear functional-differential inclusion in a Banach space. *Topology in nonlinear analysis (Warsaw, 1994).* Banach Center Publ., 35, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996, 159–169.

[181] G. Conti, V. Obukhovskii, P. Zecca. The topological degree theory for a class of noncompact multimaps. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 178 (2000), 103–113.

[182] G. Conti, J. Pejsachowicz. Fixed point theorems for multivalued weighted maps. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 126 (1980), 319–341 (1981).

[183] J.-F. Couchouron, M. Kamenski. An abstract topological point of view and a general averaging principle in the theory of differential inclusions. *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods.* 42 (2000), no. 6, 1101–1129.

[184] J.-F. Couchouron, M. Kamenski, R. Precup. A nonlinear periodic averaging principle. *Nonlinear Anal.* 54 (2003), no. 8, 1439–1467.

[185] H. Covitz, S.B. Nadler, Jr. Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces. *Israel J. Math.* 8 (1970), 5–11.

[186] R. Cross. *Multivalued linear operators.* Marcel Dekker, New York, 1998.

[187] J.L. Davy. Properties of the solution set of a generalized differential equation. *Bull. Austral. Math. Soc.* 6 (1972), 379–398.

[188] G. Debreu. Integration of correspondences. *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1.* Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967, 351–372.

[189] K. Deimling. Cone-valued periodic solutions of ordinary differential equations. *Applied nonlinear analysis (Proc. Third Internat. Conf., Univ. Texas, Arlington, Tex., 1978).* Academic Press, New York-London, 1979, 127–142.

[190] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1985.

[191] K. Deimling. *Multivalued differential equations.* Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[192] Z. Ding, A.G. Kartsatos. Nonresonance problems for differential inclusions in separable Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), no. 8, 2357–2365.

[193] R. Dragoni, J.W. Macki, P. Nistri, P. Zecca. *Solution sets of differential equations in abstract spaces.* Longman, Harlow, 1996.

[194] Z. Dzedzej. Fixed point index theory for a class of nonacyclic multivalued maps. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 253 (1985), 1–53.

[195] Z. Dzedzej, B.D. Gelman. Dimension of solution set for differential inclusions. *Demonstratio Math.* 26 (1993), № 1, 149–158.

[196] S. Eilenberg, D. Montgomery. Fixed point theorems for multivalued transformations. *Amer. J. Math.* 68 (1946), 214–222.

[197] G. Eisenack, C. Fenske. *Fixpunkttheorie.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1978.

[198] I. Ekeland, M. Valadier. Representation of set-valued mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 35 (1971), 621–629.

[199] K. Fan. Fixed–point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 38 (1952), 121–126.

[200] K. Fan. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem. *Math. Ann.* 142 (1961), no. 3, 305–310.

[201] A. Favini, A. Yagi. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* Marcel Dekker, New York, 1999.

[202] A. Fryszkowski. Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps. *Studia Math.* 76 (1983), no. 2, 163–174.

[203] M. Furi, M. Martelli. A degree for a class of acyclic-valued vector fields in Banach spaces. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 1 (1974), 301–310 (1975).

[204] D. Gabor, W. Kryszewski. A coincidence theory involving Fredholm operators of nonnegative index. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 15 (2000), no.1, 43–59.

[205] G. Gabor. On the acyclicity of fixed point sets of multivalued maps. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 14 (1999), no. 2, 327–343.

[206] G. Gabor. Strict equilibria of multi-valued maps and common fixed points. *Z. Anal. Anwend.* 23 (2004), no. 1, 95–113.

[207] B.D. Gel'man. Generalized degree of multi-valued mappings. *Lect. Notes in Math.* 1520 (1992), Springer–Verlag, 173–192.

[208] B.D. Gel'man. On topological dimension of a set of solutions of functional inclusions. *Differential Incl. and Optim. Control, Lect. Notes in Nonlin. Anal.*, 2 (1998), 163–178.

[209] K. Glashoff, J. Sprekels. An application of Glicksberg's theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats. *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), no. 3, 477–486.

[210] I.L. Glicksberg. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.* 3 (1952), № 1, 170–174. Русский перевод: И.Л. Гликсберг. Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша. *Бесконечные антагонистич. игры.* М., 1963, 497-503.

[211] Yu.E. Gliklikh, A.V. Obukhovskii. On a two-point boundary value problem for second-order differential inclusions on Riemannian manifolds. *Abstr. Appl. Anal.* 2003, no. 10, 591–600.

[212] B. Glodde, H.-D. Niepage. *Einführung in die mengenwertige Analysis und die Theorie der Kontingentgleichungen.* Seminarberichte, 41. Humboldt Universität, Sektion Mathematik, Berlin, 1981.

[213] K. Goebel, W.A. Kirk. *Topics in metric fixed point theory.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[214] C. Gori, V. Obukhovskii, M. Ragni, P. Rubbioni. Existence and continuous dependence results for semilinear functional differential inclusions with infinite delay. *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods.* 51 (2002), no. 5, 765–782.

[215] L. Górniewicz. *Topological fixed point theory of multivalued mappings.* Kluwer, Dordrecht–Boston–London, 1999.

[216] L. Górniewicz, A. Granas, W. Kryszewski. On the homotopy method in the fixed point index theory of multi-valued mappings of compact absolute neighborhood retracts. *J. Math. Anal. Appl.* 161 (1991), no. 2, 457–473.

[217] L. Górniewicz, Z. Kucharski. Coincidence of k-set contraction pairs. *J. Math. Anal. Appl.* 107 (1985), no. 1, 1–15.

[218] L. Górniewicz, P. Nistri, V. Obukhovskii. Differential inclusions on proximate retracts of Hilbert spaces. *Internat. J. Non–Linear Differential Equat. Theory, Methods, Appl.* 3 (1997), 13–26.

[219] L. Górniewicz, S. Plaskacz. Periodic solutions of differential inclusions in R^n. *Boll. Un. Mat. Ital.* A (7), 7 (1993), no. 3, 409–420.

[220] S. Graf. Selected results on measurable selections. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* (2) 1982, 87–122.

[221] A. Granas. Sur la notion du degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* 7 (1959), no. 4, 191–194.

[222] A. Granas. Theorem on antipodes and theorems on fixed points for a certain class of multi-valued mappings in Banach spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* 7 (1959), no. 5, 271–275.

[223] A. Granas, J. Dugundji. *Fixed point theory.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[224] A. Granas, J.W. Jaworowski. Some theorems on multi-valued mappings of subsets of the Euclidean space. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. sci. math., astron. et phys.* 7 (1959), no. 5, 277–283.

[225] J. Gwinner. On fixed points and variational inequalities—a circular tour. *Nonlinear Anal.* 5 (1981), no. 5, 565–583.

[226] G. Haddad, J.-L. Lasry. Periodic solutions of functional-differential inclusions and fixed points of σ-selectionable correspondences. *J. Math. Anal. Appl.* 96 (1983), no. 2, 295–312.

[227] O. Hadžić. *Fixed point theory in topological vector spaces.* Univerzitet u Novom Sadu, Institut za Matematiku, Novi Sad, 1984.

[228] F. Hiai, H. Umegaki. Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions. *J. Multivariate Anal.* 7 (1977), no. 1, 149–182.

[229] C.J. Himmelberg. Measurable relations. *Fund. Math.* 87 (1975), 53–72.

[230] C.J. Himmelberg, M.Q. Jacobs, F.S. Van Vleck. Measurable multifunctions, selectors, and Filippov's implicit functions lemma. *J. Math. Anal. Appl.* 25 (1969), 276–284.

[231] C.J. Himmelberg, F.S. Van Vleck. A note on the solution sets of differential inclusions. *Rocky Mountain J. Math.* 12 (1982), no. 4, 621–625.

[232] S. Hu, N.S. Papageorgiou. *Handbook of multivalued analysis. Vol. I. Theory.* Kluwer, Dordrecht, 1997.

[233] S. Hu, N.S. Papageorgiou. *Time-dependent subdifferential evolution inclusions and optimal control.* Mem. Amer. Math. Soc. 133 (1998), no. 632.

[234] S. Hu, N.S. Papageorgiou. *Handbook of multivalued analysis. Vol. II. Applications.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[235] M. Hukuhara. Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.* 10 (1967), 43–66.

[236] M. Hukuhara. Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.* 10 (1967), 205–223.

[237] M.Q. Jacobs. Remarks on some recent extensions of Filippov's implicit functions lemma. *SIAM J. Control.* 5 (1967), 622–627.

[238] M.Q. Jacobs. Measurable multivalued mappings and Lusin's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1968), 471–481.

[239] S. Kakutani. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Math. J.* 8 (1941), 457–459.

[240] M. Kamenskii, P. Nistri. An averaging method for singularly perturbed systems of semilinear differential inclusions with C_0-semigroups. *Set-Valued Anal.* 11 (2003), no. 4, 345–357.

[241] M.I. Kamenskii, P. Nistri, V.V. Obukhovskii, P. Zecca. Optimal feedback control for a semilinear evolution equation. *J. Optim. Theory Appl.* 82 (1994), no. 3, 503–517.

[242] M.I. Kamenskii, P. Nistri, P. Zecca. On the periodic solutions problem for parabolic inclusions with a large parameter. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 8 (1996), no. 1, 57–77.

[243] M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii. On periodic solutions of differential inclusions with unbounded operators in Banach spaces. *Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.* 21 (1991), no. 1, 173–191.

[244] M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii. Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces. *Nonlinear Anal.* 20 (1993), no. 7, 781–792.

[245] M. Kamenski, V. Obukhovski, P. Zecca. On the translation multioperator along the solutions of semilinear differential inclusions in Banach spaces. *Canad. Appl. Math. Quart.* 6 (1998), no. 2, 139–155.

[246] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. On semilinear differential inclusions with lower semicontinuous nonlinearities. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 178 (2000), 235–244.

[247] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces.* Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.

[248] N. Kikuchi. Control problems of contingent equation. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A* 3 (1967/1968), 85–99.

[249] N. Kikuchi. On some fundamental theorems of contingent equations in connection with the control problems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A* 3 (1967/1968), 177–201.

[250] N. Kikuchi. On contingent equations satisfying the Carathéodory type conditions. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A* 3 (1967/1968), 361–371.

[251] M. Kisielewicz. *Differential inclusions and optimal control.* Kluwer, Dordrecht; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.

[252] E. Klein, A.C. Thompson. *Theory of correspondences. Including applications to mathematical economics.* Wiley, New York, 1984.

[253] S. Kornev, V. Obukhovskii. On some developments of the method of integral guiding functions. *Functional Differential Equat.* 12 (2005), no. 3–4, 303–310.

[254] W. Kryszewski. Topological and approximation methods of degree theory of set-valued maps. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 336 (1994), 1–101.

[255] W. Kryszewski. *Homotopy properties of set-valued mappings.* Univ. N. Copernicus Publishing, Toruń, 1997.

[256] W. Kryszewski. Topological structure of solution sets of differential inclusions: the constrained case. *Abstr. Appl. Anal.* 2003, no. 6, 325–351.

[257] Z. Kucharski. A coincidence index. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 24 (1976), no. 4, 245–252.

[258] Z. Kucharski. Two consequences of the coincidence index. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 24 (1976), no. 6, 437–444.

[259] K. Kuratowski. Les fonctions semi-continues dans 1'éspace des ensembles fermés. *Fund. Math.* 18 (1931), 148-159.

[260] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski. A general theorem on selectors. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13 (1965), 397–403.

[261] A. Lasota, Z. Opial. An application of the Kakutani—Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13 (1965), № 11–12, 781–786.

[262] A. Lasota, Z. Opial. Fixed–point theorems for multi–valued mappings and optimal control problems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 16 (1968), № 8, 645–649.

[263] A. Lasota, Z. Opial. An approximation theorem for multi-valued mappings. *Podstawy Sterowania* 1 (1971), № 1, 71-75.

[264] J.-M. Lasry, R. Robert. Degré topologique pour certains couples de fonctions et applications aux équations diffe'rentielles multivoques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 283 (1976), no. 4, Aii, A163–A166.

[265] J.-M. Lasry, R. Robert. Acyclicité de l'ensemble des solutions de certaines équations fonctionnelles. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 282 (1976), no. 22, Aii, A1283–A1286.

[266] J.-M. Lasry, R. Robert. *Analyse non lineaire multivoque.* Publ. no. 7611. Centre de Recherche de Mathem. de la Decis. Ceremade, Univ. de Paris, Dauphine, 1977.

[267] S. Lojasiewicz, Jr. The existence of solutions for lower semicontinuous orientor fields. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* 28 (1980), no. 9-10, 483–487 (1981).

[268] T.–W. Ma. Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 92 (1972), 1–43.

[269] J.W. Macki, P. Nistri, P. Zecca. Measurable and directionally continuous selections for the control of uncertain systems. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems.* 2 (1996), no. 4, 397–409.

[270] L. Malaguti. Monotone trajectories of differential inclusions in Banach spaces. *J. Convex Anal.* 3 (1996), no. 2, 269–281.

[271] A. Marchaud. Sur les champs continus de demi–cônes convexes et leurs intégrales. *C. R. Acad. Sci. Paris* 199 (1934), n. 23, 1278–1280.

[272] A. Marchaud. Sur les champs de demi–cônes et equations differentielles du premier ordre. *Bull. Soc. Math. France.* 62 (1934), 1–38.

[273] A. Marchaud. Sur les champs continus de demi–cônes convexes et leurs integrales. *Comp. Math.* 3 (1936), n. 1, 89–127.

[274] A. Marchaud. Sur les champs de demi–cônes convexes. *Bull. Sci. Math.* 62 (1938), 229–240.

[275] J. T. Markin. A fixed point theorem for set valued mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), 639–640.

[276] E. Michael. Continuous selections, I. *Ann. Math.* 63 (1956), № 2, 361-381.

[277] E. Michael. A survey of continuous selections. *Lect. Notes in Math.* 171, Springer–Verlag, Berlin, 1970, 54–58.

[278] E. Michael. Continuous selections avoiding a set. *Topology Appl.* 28 (1988), no. 3, 195–213.

[279] M.D.P. Monteiro Marques. *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[280] S.B. Nadler, Jr. Multi-valued contraction mappings. *Pacific J. Math.* 30 (1969), 475–488.

[281] J. von Neumann. *Ü*ber ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsaltzes. *Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, 8. 1935-36.* Leipzig–Wien, 1937, 73–83.

[282] P. Nistri, V.V. Obukhovskii, P. Zecca. On the solvability of systems of inclusions involving noncompact operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 342 (1994), no. 2, 543–562.

[283] P. Nistri, V. Obukhovskii, P. Zecca. Viability for feedback control systems in Banach spaces via Carathéodory closed-loop controls. *Differential Equations Dynam. Systems* 4 (1996), no. 3-4, 367–378.

[284] V. Obukhovskii, P. Rubbioni. On a controllability problem for systems governed by semilinear functional differential inclusions in Banach spaces. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 15 (2000), no. 1, 141–151.

[285] V. Obukhovskii, T. Starova. On stability of fixed points of multivalued maps. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 17 (2001), no. 1, 133–141.

[286] V. Obukhovskii, P. Zecca. On some properties of dissipative functional differential inclusions in a Banach space. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 15 (2000), no. 2, 369–384.

[287] V. Obukhovskii, P. Zecca. A Kneser type property for the solution set of a semilinear differential inclusion with lower semicontinuous nonlinearity. *Set valued mappings with applications in nonlinear analysis.* Ser. Math. Anal. Appl., 4, Taylor and Francis, London, 2002, 369–381.

[288] V. Obukhovskii, P. Zecca. On boundary value problems for degenerate differential inclusions in Banach spaces. *Abstr. Appl. Anal.* 2003, no. 13, 769–784.

[289] V. Obukhovskii, P. Zecca, V. Zvyagin. On coincidence index for multivalued perturbations of nonlinear Fredholm maps and some applications. *Abstr. Appl. Anal.* 7 (2002), no. 6, 295–322.

[290] V. Obukhovskii, P. Zecca, V.Zvyagin. Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 23 (2004), no. 2, 323–337.

[291] C. Olech. A note concerning set-valued measurable functions. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13 (1965), 317–321.

[292] C. Olech. Existence of solutions of non-convex orientor fields. *Boll. Un. Mat. Ital. (4).* 11 (1975), no. 3, suppl., 189–197.

[293] N.S. Papageorgiou. On multivalued evolution equations and differential inclusions in Banach spaces. *Comment. Math. Univ. St. Paul.* 36 (1987), no. 1, 21–39.

[294] N.S. Papageorgiou. Boundary value problems for evolution inclusions. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 29 (1988), no. 2, 355–363.

[295] N.S. Papageorgiou. On multivalued semilinear evolution equations. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7), 3 (1989), no. 1, 1–16.

[296] N.S. Papageorgiou. Boundary value problems and periodic solutions for semilinear evolution inclusions. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 35 (1994), no. 2, 325–336.

[297] T. Parthasarathy. *Selection theorems and their applications.* Lecture Notes in Mathematics, 263. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.

[298] A. Petruşel, G. Moţ. *Multivalued analysis and mathematical economics.* House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2004.

[299] W.V. Petryshyn, P.M. Fitzpatrick. A degree theory, fixed point theorems, and mapping theorems for multivalued noncompact mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.* 194 (1974), 1–25.

[300] S. Plaskacz. Periodic solutions of differential inclusions on compact subsets of R^n. *J. Math. Anal. Appl.* 148 (1990), no. 1, 202–212.

[301] S. Plaskacz. On the solution sets for differential inclusions. *Boll. Un. Mat. Ital.* A (7), 6 (1992), no. 3, 387–394.

[302] A. Pliś. Remark on measurable set-valued functions. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), 857–859.

[303] A. Pliś. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 11 (1963) 369–370.

[304] A. Pliś. Measurable orientor fields. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13 (1965), 565–569.

[305] A. Pliś. On trajectories of orientor fields. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13 (1965), 571–573.

[306] T. Pruszko. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. *Nonlinear Anal.: TMA* 5 (1981), no. 9, 959–970.

[307] D. Repovš, P.V. Semenov. *Continuous selections of multivalued mappings.* Kluwer, Dordrecht, 1998.

[308] B. Ricceri. Une propriété topologique de l'ensemble des points fixes d'une contraction multivoque á valeurs convexes. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 81 (1987), no. 3, 283–286 (1988).

[309] B. Ricceri. On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 325 (1997), no. 1, 65–70.

[310] R.T. Rockafellar. Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. *J. Math. Anal. Appl.* 28 (1969), 4–25.

[311] R.T. Rockafellar. Integral functionals, normal integrands and measurable selections. *Lecture Notes in Math.* 543, Springer, Berlin, 1976, 157–207.

[312] E. Roxin. Stability in general control systems. *J. Differential Equations.* 1 (1965), no.2, 115–150.

[313] E. Roxin. On generalized dynamical systems defined by contingent equations. *J. Differential Equations.* 1 (1965), no.2, 188–205.

[314] E. Roxin. On stability in control systems. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control* 3 (1965), 357–372.

[315] I.A. Rus. *Generalized contractions and applications.* Cluj University Press, Cluj–Napoca, 2001.

[316] L.E. Rybiński. An application of the continuous selection theorem to the study of the fixed points of multivalued mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 153 (1990), no. 2, 391–396.

[317] L.E. Rybiński. *Continuous selections and variational systems.* Wyżsa Szkola Inżyner., Instytut Matem., Zielona Góra, 1992.

[318] J. Saint-Raymond. Points fixes des multiapplications á valeurs convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 298 (1984), no. 4, 71–74.

[319] J. Saint-Raymond. Points fixes des contractions multivoques. *Fixed point theory and applications (Marseille, 1989).* Pitman Res. Notes Math. Ser., 252, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, 359–375.

[320] G.V.Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[321] M. Srebrny. *Measurable selectors of* PCA *multifunctions with applications.* Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1984), no. 311.

[322] E. Tarafdar, S.K. Teo. On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 28 (1979), no. 2, 139–173.

[323] A. Vanderbauwhede. On a modified degree theory for multivalued mappings. *Simon Stevin.* 50 (1976/77), no. 2, 65–86.

[324] T. Ważewski. Systèmes de commande et équations au contingent. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), no. 3, 151–155.

[325] T. Ważewski. Sur une condition équivalente *à* l'équation au contingent. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 9 (1961), no. 12, 865–867.

[326] J.R.L. Webb. On degree theory for multivalued mappings and applications. *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 9 (1974), 137–158.

[327] R. Węgrzyk. Fixed-point theorems for multivalued functions and their applications to functional equations. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 201 (1982), 1–28.

[328] S.A. Williams. An index for set-valued maps in infinite-dimensional spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 31 (1972), 557–563.

[329] G.X.–Z. Yuan. *KKM theory and applications in nonlinear analysis.* Marcel Dekker, New York, 1999.

[330] S.K. Zaremba. Sur une extension de la notion d'equation differentielle *C.R. Acad. Sci. Paris.* 199 (1934), n. 10, 545–548.

[331] S.K. Zaremba. Sur les equations au paratingent. *Bull. Sci. Math.* 60 (1936), n. 2, 139–160.

[332] P. Zecca. Soluzioni periodiche per un'equazione d'evoluzione multivoca. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)* 15 (1978), no. 1, 140–146.

[333] P. Zecca, P.L. Zezza, Nonlinear boundary value problems in Banach spaces for multivalue differential equations on a noncompact interval. *Nonlinear Anal.* 3 (1979), no. 3, 347–352.

[334] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems.* Springer-Verlag, New York, 1986.

Предметный указатель