Федеральное агентство по образованию

ВОРОНЕЖСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Материалы к первой аттестации

Учебное пособие для вузов

ВОРОНЕЖ 2006

Утверждено научно-методическим советом математического факультета, протокол №3 от 23.11.2006 г.

Составители: **Леженина И.Ф., Петрова Л.П., Прядко И.Н., Садовский Б.Н.**
Рецензент: **Смагина Т.И.**

Пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов математического факультета.

Для специальности 010101 (010100) – Математика и направления 010200 (511200) – Математика. Прикладная математика

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Пример: $xydx + (1+x)dy = 0$.

Решение:

Перенесём первое слагаемое в правую часть равенства $(1+x)dy = -xydx$ и разделим обе части равенства на $(1+x)y$: $\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1+x}$. Перейдя к интегральному уравнению $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{xdx}{1+x}$, получим общее решение $\ln|y| = -x + \ln|1+x| + C$, или в более простой записи $\frac{y}{1+x} = Ce^{-x}$, $C \neq 0$. Решив алгебраическое уравнение $(1+x)y = 0$, находим частные решения $x = -1$ и $y = 0$. Второе из них $y = 0$ входит в общее при $C = 0$. Поэтому в результате решение уравнения можно записать в виде общего решения $\underline{y = C(1+x)e^{-x}}$ и одного частного $\underline{x = -1}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;
2. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$;
3. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;
4. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$;
5. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$;
6. $y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(2) = 0$;
7. $2x^2yy' + y^2 = 2$;
8. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

2. Уравнения $y' = f(ax+by+c)$, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax+by+c$

Пример: $(x+y)^2 y' = 4$.

Решение:

В этом примере выражение $ax+by+c = x+y$, поэтому, введя замену $z = x+y,\ y' = z'-1$, получаем $z^2(z'-1) = 4$ или $z' = \frac{z^2+4}{z^2}$. Разделив переменные и интегрируя полученное уравнение $\int\frac{z^2}{z^2+4}dz = \int dx$, получим общее решение $z - 2\,\mathrm{arctg}\dfrac{z}{2} = x + c$, или с первоначальной переменной $y - 2\,\mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{2} = C$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $y' = \cos(x - y - 2)$;
2. $y' = (2x + y)^2 + 2$;
3. $y' + 1 = \dfrac{1}{\ln(x+y)}$;
4. $y' - y = 2x - 3$;
5. $(x + 2y)\,y' = 1;\ y(0) = -1$;
6. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$;
7. $y' = (4x + y - 3)^2$;
8. $y' = \mathrm{tg}(y - 2x)$.

3. Однородные уравнения

Пример: $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

Проверка:

Сначала проверим, является ли данное уравнение однородным, заменив в нём x на kx и y на ky – $(kx)y' = (ky) + \sqrt{(kx)^2 - (ky)^2}$. Нетрудно видеть, что при делении обеих частей равенства на k получается исходное уравнение.

Решение:

Поскольку уравнение однородно, то замена $y = t\,x,\ \ y' = t'x + t$ должна привести его к уравнению с разделяющимися переменными: $x(t'x + t) = tx + \sqrt{x^2 - t^2x^2}$. Приведя подобные и разделив обе части равенства на x, получаем уравнение с разделяющимися переменными $t'x = \sqrt{1 - t^2}$. Поделив его части на $x\sqrt{1-t^2}$ и проинтегрировав их $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dx}{x}$, получаем общее решение $\arcsin t = \ln|x| + C$, а из уравнения $x\sqrt{1-t^2} = 0$ – частные решения $t = \pm 1$. Возвращаясь к исходной переменной y, окончательно выписываем решение

$\arcsin\dfrac{y}{x} = \ln|x| + C,\ \ y = x,\ \ y = -x$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0$;
2. $x^2y' = xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}$;
3. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$;
4. $(x + 2y)\,dx + x\,dy = 0$;
5. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;
6. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;

7. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;

8. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

4. Уравнения $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, приводящиеся к однородным перенесением начала координат в точку пересечения прямых

Пример: $(x+y+2)dx + (x-y+4)dy = 0$.

Решение:

Найдём точку $(-3;1)$ пересечения прямых $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$ и введём замену $x = x_1 - 3,\ y = y_1 + 1$, для которой $dx_1 = dx,\ dy_1 = dy$ $\quad (x_1 = x+3,\ y_1 = y-1)$.
Получаем однородное уравнение $(x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 - y_1)dy_1 = 0$, для которого замена $y_1 = t\,x_1,\ dy_1 = x_1\,dt + t\,dx_1$ приводит к уравнению с разделяющимися уравнениями
$(x_1 + t\,x_1)dx_1 + (x_1 - t\,x_1)(x_1\,dt + t\,dx_1) = 0$, или $x_1(t-1)dt = (1 + 2t - t^2)dx_1$. Разделим на $x_1(1 + 2t - t^2)$ и проинтегрируем обе части равенства : $\int \dfrac{1-t}{t^2 - 2t - 1}dt = \int \dfrac{dx_1}{x_1}$,

$\int \dfrac{1-t}{(t-1)^2 - 2}dt = \ln|x_1| + C$, $\quad -\dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt(t-1)^2}{(t-1)^2 - 2}dt = \ln|x_1| + C$. Наконец, получаем общее решение $-\dfrac{1}{2}\ln\left|t^2 - 2t - 1\right| = \ln|x_1| + C$. Избавляемся от логарифмов: $x_1\sqrt{\left|t^2 - 2t - 1\right|} = C,\ C \neq 0$. Из равенства $x_1(1 + 2t - t^2) = 0$ находим частные решения $x_1 = 0,\ \ t = 1 \pm \sqrt{2}$, входящие в общий ответ при $C = 0$.
Возвращаясь к исходным переменным, получим
$\underline{(y-1)^2 - 2(x+3)(y-1) - (x+3)^2 = C}$, или $\underline{y^2 - x^2 - 2xy - 4x - 8y = C}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $(2x + y + 5)y' = 3x + 6$;
2. $(x+y)dx + (y - x + 2)dy = 0$;
3. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;
4. $y' = \dfrac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$;
5. $y' = \dfrac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$;
6. $y' = \dfrac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$;
7. $y' = \dfrac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$;
8. $y' = \dfrac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$.

5. Линейные уравнения первого порядка

Уравнению $y' = a(x)y + b(x)$ соответствует общее решение

$y = e^{\int\limits_0 a(x)dx}\left(\int\limits_0 b(x)e^{-\int\limits_0 a(x)dx}dx + C\right)$. Ноль под знаком интеграла означает, что берется одна (любая) из первообразных.

Пример: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Решение:

Выразив из уравнения y', определяем $a(x) = -2x$, $b(x) = 2xe^{-x^2}$, которые подставляем в общий вид решения $y = e^{-x^2}\left(\int\limits_0 2xe^{-x^2}e^{x^2}dx + C\right) = e^{-x^2}\left(x^2 + C\right)$, и находим общее решение $\underline{y = e^{-x^2}\left(x^2 + C\right)}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $y' + y\cos x + \sin x\cos x = 0$;
2. $(x+1)dy - \left(2y + (x+1)^4\right)dx = 0$;
3. $y = x(y' - x\cos x)$;
4. $xy' - 2y = 2x^4$;
5. $(2x+1)y' = 4x + 2y$;
6. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$;
7. $\left(xy + e^x\right)dx - xdy = 0$;
8. $y'(x\sin y + 2\sin 2y) = 1$;
9. $\left(xy + e^y\right)dy - ydx = 0$;
10. $y^2dx + (xy+1)dy = 0$;
11. $2y\left(y^2 + x\right)dy = dx$;
12. $\left(x + y^2\right)dy = ydx$;
13. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy$;
14. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$;
15. $(1 - 2xy)y' = y(y-1)$.

6. Уравнения Бернулли

Общий вид: $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Решается делением на y^α с последующей заменой $z = y^{1-\alpha}$.

Пример: $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$

Решение: Данное уравнение является уравнением Бернулли относительно переменной x: $x' = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{y+1}{3}x^{-2}$. (Степень $n = -2$ меньше нуля, поэтому функция $x = 0$ не является решением уравнения). Замена $z = x^{1-n} = x^3$ приводит его к линейному уравнению: $3x^2x' = x^3 + y + 1$, $\quad z' = z + y + 1$. Вычисляем решение:

$z = e^{\int\limits_0 dy}\left(\int\limits_0 (y+1)e^{-\int\limits_0 dy}dy + C\right) = e^y\left(C - e^{-y}(y+2)\right) = Ce^y - y - 2$. Возвращаемся к переменной x: $\underline{x^3 = Ce^y - y - 2}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $xy' + y = y^2 \ln x$;
2. $3y^2y' - 2y^3 = x + 1$;
3. $(x+1)(yy' - 1) = y^2$;
4. $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$;
5. $2y^2dy = (xy + x^3)dy$;
6. $y'\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{x}\right) = 1$;
7. $dx + (2x - x^2e^y)dy = 0$;
8. $1 = \dfrac{3y^2}{y^3 + x + 1}y'$.

7. Уравнения в полных дифференциалах

Пример: $\dfrac{1 - \ln xy}{x^2}dx + \left(\dfrac{1}{xy} + \cos y\right)dy = 0$.

Проверка:

Сначала проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах, вычислив и сравнив частные производные множителей при дифференциалах переменных: $\left(\dfrac{1 - \ln xy}{x^2}\right)'_y = \left(\dfrac{1}{xy} + \cos y\right)'_x = -\dfrac{1}{x^2y}$.

Решение:

Проинтегрировав второе слагаемое левой части уравнения, найдём функцию $F(x, y)$, дифференциал которой совпадает с правой частью:

$F(x, y) = \dfrac{1}{x}\ln y + \sin y + C(x)$. Неизвестную функцию $C(x)$ найдём из равенства F_x' множителю при dx исходного уравнения

$F_x' = -\dfrac{1}{x^2}\ln y + C'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\ln x - \dfrac{1}{x^2}\ln y$, откуда $C'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\ln x$ и

$C(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Решение уравнения записывается в виде $\underline{\dfrac{1}{x}\ln xy + \sin y = C}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $\left(x + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$;

2. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy=0$;

3. $y+xy'+\dfrac{1+y'}{x+y}=0$;

4. $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$;

5. $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0$;

6. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$;

7. $3x^2\left(1+\ln y\right)dx-\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy=0$.

8. Уравнения, не разрешённые относительно производной

Пример: $y=x+y'-\ln y'$.

Решение:

Введём параметр $p=y'$. Тогда исходное уравнение принимает вид $y=x+p-\ln p$ (*). Беря полный дифференциал и заменяя dy на $p\,dx$, получим $p\,dx=dx+dp-\dfrac{dp}{p}$. Решением этого уравнения является $x=\ln p+C$. Подставим это решение в равенство (*): $y=\ln p+C+p-\ln p=p+C$. Таким образом, получаем решение в параметрическом виде: $\begin{cases}x=\ln p+C\\ y=p+C\end{cases}$. В данном случае можно исключить параметр: $\underline{y=e^{x-C}+C}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $\left(y'\right)^2-2y'x+y=0$;
2. $x\left(1+y'\right)+\left(y'\right)^2=y$;
3. $yy'=2x\left(y'\right)^2+1$;
4. $xy'+y=\ln y'$;
11. $xyy''-x\left(y'\right)^2=yy'$

5. $\sqrt{\left(y'\right)^2+1}+xy'-y=0$;
6. $\ln y'+2\left(xy'-y\right)=0$;
7. $y=xy'+\dfrac{1}{2y'}$;
8. $y=xy'-\sqrt{y'}$.

9. Уравнения, допускающие понижение порядка

Пример 1: $xy''+y'=0$.

Решение:

Положим $z = y'$. Тогда исходное уравнение принимает вид $xz' + z = 0$, откуда $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, приходим к решению $z = \frac{C_1}{x}$. Возвращаясь к первоначальной переменной, получаем уравнение $y' = \frac{C_1}{x}$, решением которого является $\underline{y = C_1 \ln|x| + C_2}$.

Пример 2: $2yy'' = y'^2 + 1$.

Решение:

Так как в уравнение не входит независимая переменная x, то будем считать y новой независимой переменной, а $y' = p(y)$ функцией этой новой переменной. Тогда $y'' = pp'$ и уравнение принимает вид $2ypp' = p^2 + 1$. Решением этого уравнения является $p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, из чего получаем уравнение $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Решая его, получим $\underline{4(C_1 y - 1) = C_1^2 (x + C_2)}$.

Найти решения следующих уравнений:

1. $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$;
2. $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$;
3. $y''' = (y'')^2$;
4. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;
5. $yy'' = (y')^2$;
6. $1 + (y')^2 = 2yy''$;
7. $yy'' = (y')^2 + y'$;
8. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

10. Теоретические вопросы

1. Определение ОДУ.
2. Определение решения ОДУ, следования, эквивалентности
3. Определение интеграла ОДУ, полного интеграла и общего решения.
4. Утверждение об уравнении с разделенными переменными.
5. Решение ЛОУ1 методом разделения переменных.
6. Функция $\Phi_{t_0}(t)$ и ее свойства.
7. Утверждение об общем решении ЛОУ1.
8. Свойства решений ЛУ1.
9. Пример уравнения с «составными» решениями.
10. Частное и общее решение ЛНУ1.
11. Оператор сдвига по траекториям ЛУ1.
12. Утверждение о различных трактовках.
13. Определение уравнения в полных дифференциалах (УПД) и потенциальной функции (ПФ).
14. Утверждение об интегрировании УПД.

15.Признак полного дифференциала и алгоритм нахождения ПФ.
16.Уравнение RLCE-контура.
17.Второй закон Ньютона.
18.Механический гармонический осциллятор.
19.Уравнение маятника.
20.Математическая модель биологической системы «хищник-жертва».

Литература

1.Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 176с.
2. Дифференциальные уравнения. План лабораторных занятий : методические указания / сост. И.Ф.Леженина [и др.] – Воронеж : ЛОП ИПЦ ВГУ, 2006. – 8 с.

Учебное издание.
Дифференциальные уравнения. Материалы к первой аттестации
Учебное пособие для вузов
Составители:
Леженина ИринаФедоровна,
Петрова Любовь Петровна,
Прядко Ирина Николаевна,
Садовский Борис Николаевич.
Редактор Бунина Т.Д.