Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

конспекты лекций вопросы и задачи

Дифференциальные уравнения

часть 3

Линейные уравнения

пособие для студентов специальностей

02.03.01, 01.03.04, 01.05.01 и 10.05.04

Воронеж
2018

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
25 апреля 2018 года
Протокол № 0500-04

Составители: Прядко И.Н., Петрова Л.П.

Пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и
операторных уравнений математического факультета
Воронежского госуниверситета

Рекомендуется для студентов 2-го курса
дневного отделения

Оглавление

3. Линейные уравнения

3.1. Введение в теорию линейных систем ОДУ

3.1.1. Общий вид линейных систем.

Определение. *Линейной (неоднородной) системой обыкновенных дифференциальных уравнений* называют систему следующего вида

$\dot{x} = A(t)x + b(t)$ или более подробно

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \qquad \text{(ЛС), или (ЛНС)}$$

Будем предполагать, что для (ЛС) выполнено условие на коэффициенты

$$a_{ij}(t), b_i(t) \text{ *непрерывны на промежутке* } I \subset \mathbb{R}, \qquad \text{(УК)}$$

и $x \in \mathbb{K}^n$, где $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ *или* $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$.

Определение. *Линейной однородной системой* (ЛОС), соответствующей (ЛС), называют систему

$$\dot{x} = A(t)x. \qquad \text{(ЛОС)}$$

3.1.2. Теорема существования и единственности. *Пусть выполнены* (УК). *Тогда* (ЛС) *имеет на* I *единственное решение, удовлетворяющее начальному условию*

$$x(t_0) = x_0 \quad \left(t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{K}^n\right). \qquad \text{(НУ)}$$

Это следует из теоремы Коши–Пикара для (НС) с (НУ) с переменным коэффициентом Липшица, так как выполнение её условий, очевидно, гарантирует линейность системы и (УК).

3.1.3. Простейшие свойства решений.

Введём обозначения, аналогичные тем, что мы вводили для линейных уравнений первого порядка: $E(b)$ – множество всех решений (ЛС) с функцией $b(t)$, определенных на промежутке I; в частности, $E(0)$ – множество всех решений (ЛОС).

Утверждение. *Множества решений* (ЛС) и (ЛОС) *обладают такими же свойствами, как и множества решений* (ЛУ) *и* (ЛОУ):

1. *Если* $\psi_1 \in E(b_1)$, $\psi_2 \in E(b_2)$, *то* $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \in E(c_1b_1 + c_2b_2)$; *в частности, разность любых решений* (ЛС) *с одной и той же функцией* b *является решением соответствующей* (ЛОС), *а линейная комбинация любых решений* (ЛОС) *есть решение* (ЛОС), *т.е. множество* $E(0)$ *является линейным пространством*;

2. *Если* $\psi \in E(b)$, *то справедливо равенство* $E(b) = E(0) + \psi$ *; поэтому общее решение* (ЛНС) *может быть получено как сумма общего решения соответствующей* (ЛОС) *и любого частного решения* (ЛНС): $x_{он} = x_{оо} + x_{чн}$.

Доказательство, проведённое в 1.2.5 для (ЛУ), остаётся верным и в этом многомерном случае.

3.1.4. Теорема об ОС для ЛОС. *При выполнении* (УК) оператор сдвига (ОС) *для* (ЛОС) *является невырожденным линейным отображением (мономорфизмом) пространства* $\mathbb{K}^n$ *в себя.*

Доказательство. 1. Покажем линейность (ОС), т.е. выполнение равенства $g_{t_0}^t(\alpha x_0 + \beta \breve{x}_0) = \alpha g_{t_0}^t x_0 + \beta g_{t_0}^t \breve{x}_0$ для произвольных значений $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ и $x_0,\ \breve{x}_0 \in \mathbb{K}^n$. Действительно, левая часть равенства по переменной t – решение (ЛОС) по свойству 2 (ОС). В правой части равенства функции $g_{t_0}^t x_0,\ g_{t_0}^t \breve{x}_0$ переменной t – тоже решения ЛОС и их линейная комбинация $\alpha g_{t_0}^t x_0 + \beta g_{t_0}^t \breve{x}_0$ по свойству 1 пункта 3.1.3 вместе с ними. При $t = t_0$ левая и правая части принимают (по свойству 1 оператора сдвига) одинаковое значение $\alpha x_0 + \beta \breve{x}_0$. Следовательно, они равны при всех t (по утверждению о единственности решения задачи Коши теоремы Коши - Пикара).

2. Теперь покажем невырожденность (ОС): $g_{t_0}^t x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, т.е. $g_{t_0}^t x_0 = 0$ только в случае, когда $x_0 = 0$. Действительно, в равенстве $g_{t_0}^t x_0 = 0$ обе части являются решениями ЛОС (тождественно нулевая функция, очевидно, удовлетворяет системе $\dot{x} = A(t)x$). Их значения равны при некотором t, как утверждает равенство $g_{t_0}^t x_0 = 0$, поэтому в силу единственности это равенство справедливо при любом $t \in \mathbb{R}$ и в частности при $t = t_0$: $g_{t_0}^{t_0} x_0 = 0$. Последнее равенство по первому свойству (ОС) означает, что $x_0 = 0$.

3.1.5. Замечание о разрешающем операторе ЛОС.

Определение (РО). *Разрешающий оператор* (РО) (ЛОС) *в точке* t_0 сопоставляет значению $x_0 \in \mathbb{K}^n$ решение задачи (ЛОС) с начальным условием (НУ)

$$\left(G_{t_0} x_0\right)(t) := g_{t_0}^t x_0 .$$

Утверждение. G_{t_0} *есть невырожденное линейное отображение пространства* $\mathbb{K}^n$ *в пространство* $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{K}^n\right)$ *непрерывных на* I *функций со значениями в* $\mathbb{K}^n$.

Это непосредственно вытекает из утверждения об (ОС) и определения разрешающего оператора.

3.2. Фундаментальные системы решений и фундаментальные матрицы

3.2.1. Теорема о структуре множества решений ЛОС. *Пусть выполнены* (УК). *Тогда*:

1. *Множество* $E(0)$ *всех определенных на* I *решений* (ЛОС) *есть* n*-мерное подпространство пространства* $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}^1\left(I, \mathbb{K}^n\right)$ *непрерывно дифференцируемых на* I *функций со значениями в* $\mathbb{K}^n$*;*
2. *Для того чтобы набор* $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \subset E(0)$ *решений* (ЛОС) *был базисом пространства* $E(0)$*, достаточно, чтобы набор их значений* $\varphi(t_0) = \{\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), ..., \varphi_n(t_0)\} \subset \mathbb{K}^n$ *в какой-нибудь точке* $t_0 \in I$ *был линейно независим, и необходимо, чтобы он был линейно независим в любой точке* $t_0 \in I$.

Доказательство. 1. $E(0) \subset \mathbb{C}^1$, так как любая функция $\varphi \in E(0)$ удовлетворяет тождеству $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$, из которого следует, что она непрерывно дифференцируема, т.е. принадлежит $\mathbb{C}^1$. Далее, $E(0)$ есть подпространство, так как линейные комбинации решений (ЛОС) являются решениями (ЛОС) (см. 3.1.3). Наконец, $E(0)$ является образом пространства $\mathbb{K}^n$ при невырожденном линейном отображении G_{t_0} – разрешающем операторе (ЛОС), а такие отображения сохраняют размерность. Следовательно, $E(0)$ имеет размерность n.

2. Первая часть утверждения («достаточно») вытекает из того, что набор решений φ есть образ набора значений $\varphi(t_0)$ при мономорфизме G_{t_0}. Вторая часть («необходимо») вытекает из того, что обратный оператор к линейному невырожденному всегда существует и сам является невырожденным. Это применимо и к $\left(G_{t_0}\right)^{-1}$.

3.2.2. Определение фундаментальной системы решений ЛОС, фундаментальной матрицы (фм) и нормальной фундаментальной матрицы (нфм).

Определение. Любой базис $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ пространства $E(0)$ называется *фундаментальной системой решений* (ЛОС) (фср), а соответствующая матрица, столбцы которой составлены из векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1n} & \varphi_{2n} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *фундаментальной матрицей* (фм). Фундаментальная матрица Φ называется *нормальной в точке* $t_0 \in I$ (нфм), и обозначается $\Phi_{t_0}(t)$, если ее значение в этой точке есть единичная матрица: $\Phi_{t_0}(t_0) = \mathrm{I}$.

(Обозначения! I – единичная матрица, I – промежуток вещественной оси).

Пример 1. Функция $\Phi_{t_0}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ (см. 1.2.3) для (ЛОУ) $\dot{x} = a(t)x$ представляет (фср) и одновременно (фм), нормальную в точке t_0 (здесь $n = 1$).

Пример 2. Для двумерной (ЛОС)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

в пункте 1.1.1, ж) были найдены два решения:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Они образуют (фср), поскольку, например, при $t = 0$ их значения линейно независимы:

$$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому их значения линейно независимы и при любом $t = t_1$:

$$C_1 \begin{pmatrix} -\sin t_1 \\ \cos t_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t_1 \\ \sin t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ C_1 = C_2 = 0.$$

Это следует из утверждения «необходимо» в теореме 3.2.1, но легко доказывается и непосредственно (докажите).

Пример 3. Функции $\sin t$ и $\cos t$, как известно, линейно независимы:

$$C_1 \sin t + C_2 \cos t \equiv 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Поэтому они не могут быть обе решениями одного и того же линейного однородного уравнения первого порядка, так как размерность множества решений этого уравнения по первому утверждению теоремы 3.2.1 равна 1.

Пример 4. Вектор-функции

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 1 \end{pmatrix},\ \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

не могут быть обе решениями одной и той же двумерной (ЛОС). Действительно, сами они линейно независимы, поскольку линейно независимы их первые координаты, а их значения в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$ линейно зависимы – это противоречило бы утверждению «необходимо» теоремы 3.2.1.

3.2.3. Утверждение об общем решении ЛОС и ОС. *При выполнении* (УК) *общее решение* (ЛОС) *и* (ОС) *по траекториям этой системы задаются, соответственно, формулами:*

$$\begin{aligned} x_{oo} &= \Phi(t)C \quad \left(C \in \mathbb{K}^n\right), \\ g_{t_0}^t x_0 &= \Phi_{t_0}(t)x_0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Эти формулы непосредственно следуют из определений (фм), (нфм) и (ОС).

3.2.4. Утверждение о матричном уравнении.
Наряду с (ЛОС) рассмотрим матричное однородное уравнение

$$\dot{X} = A(t)X\,. \qquad \text{(МОУ)}$$

Неизвестная функция $X = X(t)$ принимает значения в пространстве $(n \times n)$-матриц с элементами из $\mathbb{K}$.

Утверждение (о МОУ). *Утверждается, что решения* (МОУ) *с отличными от нуля определителями, и только они, являются фундаментальными матрицами* (ЛОС). *При этом если определитель решения* (МОУ) *отличен от нуля при одном каком-нибудь значении* t, *то он не равен нулю при любом* t.

Доказательство. Заметим, что матричная функция $X = \Phi(t)$ является решением (МОУ) в том и только том случае, когда ее столбцы $\left[\Phi(t)\right]_j$ удовлетворяют (ЛОС). Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left[\Phi(t)\right]_j = \left[\frac{d}{dt}\Phi(t)\right]_j = \left[A(t)\Phi(t)\right]_j = A(t)\left[\Phi(t)\right]_j.$$

Поэтому справедливость доказываемого утверждения вытекает из того факта, что линейная независимость столбцов матрицы эквивалентна отличию от нуля ее определителя.

3.2.5. Лемма о дифференцировании произведения матриц и обратной матрицы. *Пусть* $A(t), B(t)$ − *прямоугольные матрицы с дифференцируемыми элементами, причем «ширина» первой равна «высоте» второй. Тогда для вычисления производной от произведения справедлива привычная формула:*

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)B(t)\big) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t).$$

Для обратимой квадратной матрицы $G(t)$ *с дифференцируемыми элементами формула дифференцирования обратной матрицы имеет вид:*

$$\frac{d}{dt}G^{-1}(t) = -G^{-1}(t)\dot{G}(t)G^{-1}(t).$$

Задача. Докажите эти утверждения.

3.2.6. Утверждение о решениях и ОС для ЛНС. *При выполнении* (УК) *частное решение* (ЛНС)*, принимающее в точке* t_0 *нулевое значение, вычисляется по формуле:*

$$x_{чн}=\int_{t_0}^{t}\Phi_s(t)b(s)\,ds=\hat{g}_{t_0}^{t}0. \tag{*}$$

Поэтому общее решение и оператор сдвига для (ЛНС) *задаются формулами:*

$$\begin{aligned} x_{он}&=\Phi(t)C+\int_{t_0}^{t}\Phi_s(t)b(s)\,ds,\\ \hat{g}_{t_0}^{t}x_0&=\Phi_{t_0}(t)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_s(t)b(s)\,ds. \end{aligned} \tag{**}$$

Доказательство. Равенство $x_{чн}(t_0)=0$ очевидно. Проверим, что $x_{чн}$ удовлетворяет (ЛС), вычислив её производную. Но перед этим напомним правило дифференцирования интеграла по переменной, входящей, как в верхний предел интегрирования, так и в подынтегральную функцию:

$$\left(\int_{t_0}^{t}f(t,s)\,ds\right)'=f(t,t)+\int_{t_0}^{t}f_t{}'(t,s)\,ds. \tag{пд}$$

(т.к. $\dfrac{\int_{t_0}^{t+\Delta t}f(t+\Delta t,s)\,ds-\int_{t_0}^{t}f(t,s)\,ds}{\Delta t}=\dfrac{\int_{t}^{t+\Delta t}f(t+\Delta t,s)\,ds}{\Delta t}+\int_{t_0}^{t}\dfrac{\left(f(t+\Delta t,s)-f(t,s)\right)}{\Delta t}ds=$

$=\dfrac{F(t+\Delta t,t+\Delta t)-F(t+\Delta t,t)}{\Delta t}+\int_{t_0}^{t}\dfrac{\left(f(t+\Delta t,s)-f(t,s)\right)}{\Delta t}ds,$ *где* $F_s'(t,s)=f(t,s)$)

Итак, $\dot{x}_{чн}(t)\overset{(\text{пд})}{=}\Phi_t(t)b(t)+\int_{t_0}^{t}\dfrac{d}{dt}\Phi_s(t)b(s)\,ds\overset{\left(\substack{\Phi-\text{решение}\\ \text{матричного}\\ \text{уравнения}}\right)}{=}b(t)+\int_{t_0}^{t}A(t)\Phi_s(t)b(s)\,ds=$

$=A(t)x_{чн}(t)+b(t).$

Теперь первая формула (**) вытекает из равенства $x_{он}=x_{оо}+x_{чн}$ и (*), а вторая – из первой и определения оператора сдвига.

3.2.7. Утверждение о множестве всех фундаментальных матриц и способ построения нормальной в точке (фм).

Пусть $\Phi(t)$ *– какая-нибудь* (фм) *данной* (ЛОС)*. Тогда множество всех ее* (фм) *описывается формулой*

$$\Psi(t)=\Phi(t)P,$$

где P *пробегает множество всех невырожденных постоянных* $(n\times n)$*-матриц. Из* $\Phi(t)$ *можно получить нормальную в* t_0 (фм) *по формуле:*

$$\Phi_{t_0}(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0).$$

Задача. Докажите это утверждение.

3.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

3.3.1. Пример.

Функция $\Phi_0(t)=e^{\int_0^t a(s)ds}$ представляет (фср) и одновременно (одномерную) (нфм), нормальную в точке $t_0=0$, для скалярного (ЛОУ)) $\dot{x}=a(t)x$ – см. 3.2.2, пример 1. Если уравнение автономно, т.е. $a(t)=a=const$, то эту (нфм) можно записать в виде функционального ряда:

$$\Phi_0(t)=e^{at}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k t^k}{k!}.$$

Оказывается, что аналогичный ряд представляет (нфм) для линейной автономной однородной системы любой размерности:

$$\dot{x}=Ax, \qquad \text{(ЛАОС)}$$

$x\in\mathbb{K}^n, A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}, a_{ij}\in\mathbb{K}$.

3.3.2. Теорема о (нфм) ЛАОС. *Матричный степенной ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}=:e^{At}$$

сходится при любом $t\in\mathbb{R}$*, причем на любом отрезке сходимость равномерна. Сумма этого ряда* e^{At} *является фундаментальной матрицей* (ЛАОС), *нормальной в точке* $t_0=0$.

Другими словами, матричная экспонента e^{At} является решением следующей матричной задачи Коши:

$$\dot{X}=AX, \qquad \text{(МУ)}$$
$$X(0)=\mathrm{I}. \qquad \text{(МНУ)}$$

Замечание. Каждый элемент матрицы $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$ при фиксированном значении t мажорируется числовым сходящимся радом $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k|t|^k}{k!}=e^{\|A\|^k|t|}$ с нормой матрицы $\|A\| = \max\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \left\{ |a_{ij}| \right\}$. Поэтому ряд в определении e^{At} сходится равномерно на любом конечном промежутке.

Напомним, что нормальная фундаментальная матрица определяет оператор сдвига:

$$g^t x_0 = e^{At} x_0 .$$

Отсюда и из свойств оператора сдвига вытекает, что:

$$e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As};$$
$$\det e^{At} \neq 0 \ \text{и} \ \left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}. \qquad (*)$$

3.3.3. Дополнительное свойство матричной экспоненты.

Утверждение. *Если матрицы A и B перестановочны ($AB = BA$), то*

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} . \qquad (**)$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы левая часть доказываемого равенства есть решение матричной задачи

$$\dot{X} = (A+B)X , \qquad (+)$$
$$X(0) = \mathrm{I} . \qquad (++)$$

Для правой части условие (++) тоже, очевидно, выполнено:

$$e^{A\cdot 0} e^{B\cdot 0} = \mathrm{I}\cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} .$$

Поэтому если доказать, что правая часть удовлетворяет тому же матричному уравнению (+), то доказываемое равенство будет вытекать из утверждения о единственности решения задачи Коши. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At} e^{Bt}\right) =$$

/по правилу дифференцирования произведения матриц и предыдущей теореме/

$$= \left(\frac{d}{dt} e^{At}\right) e^{Bt} + e^{At} \left(\frac{d}{dt} e^{Bt}\right) = A e^{At} e^{Bt} + e^{At} B e^{Bt} =$$

/воспользуемся определением матричной экспоненты и условием перестановочности матриц A и B/

$$= A e^{At} e^{Bt} + \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k t^k}{k!}\right) B e^{Bt} = A e^{At} e^{Bt} + B \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k t^k}{k!}\right) e^{Bt} = (A+B) e^{At} e^{Bt} .$$

Дополнительное свойство матричной экспоненты доказано.

3.3.4. Вычисление экспоненты жордановой клетки.

Вычисление суммы матричного ряда, определяющего матричную экспоненту, в общем случае затруднительно. В этом пункте мы рассмотрим один частный случай, который, однако, дает важную информацию о виде (фм) и в общем случае.

Итак, предположим, что матрица A размерности r имеет вид *жордановой клетки*:

$$A=\lambda \mathrm{I}+\mathrm{I}^{(1)};$$

здесь $\lambda \in \mathbb{K}$, I – единичная матрица, $\mathrm{I}^{(1)}$ – матрица, полученная из I сдвигом диагонали из единиц на одну позицию вправо-вверх. Например, при $r=3$:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В этом частном случае

$$e^{At}=e^{\left(\lambda \mathrm{I}+\mathrm{I}^{(1)}\right)t}=e^{\lambda \mathrm{I} t}e^{\mathrm{I}^{(1)}t}.$$

Первый сомножитель в правой части есть просто диагональная матрица:

$$e^{\lambda \mathrm{I} t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k \mathrm{I}^k t^k}{k!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!}\right)\cdot \mathrm{I}=e^{\lambda t}\,\mathrm{I}.$$

При вычислении второго сомножителя нужно принять во внимание, что $\left(\mathrm{I}^{(1)}\right)^k=\mathrm{I}^{(k)}$ – матрица, получаемая из единичной сдвигом единичной диагонали на k позиций вправо-вверх (при $k \ge r$ $\mathrm{I}^{(k)}$ – нулевая матрица). Поэтому

$$e^{\mathrm{I}^{(1)}t}=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\mathrm{I}^{(k)}t^k}{k!}\quad\left(\mathrm{I}^{(0)}:=\mathrm{I}\right).$$

Для рассмотренного выше примера трехмерной жордановой клетки

$$e^{At}=e^{\lambda t}\,\mathrm{I}\sum_{k=0}^{2}\frac{\mathrm{I}^{(k)}t^k}{k!}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, *экспонента жордановой клетки вычисляется по формуле:*

$$e^{\left(\lambda \mathrm{I}+\mathrm{I}^{(1)}\right)t}=e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\mathrm{I}^{(k)}t^k}{k!}.$$

3.3.5. Теорема о (фср) (ЛАОС).

Напомним, что по теореме Жордана любая комплексная квадратная матрица A подобна некоторой блочно-диагональной матрице J, состоящей из жордановых клеток, т.е. представляется в виде:

$$A=PJP^{-1}.$$

При возведении A в степень получаем:

$$A^k=PJP^{-1}\cdot PJP^{-1}\cdot\ldots\cdot PJP^{-1}=PJ^kP^{-1}.$$

Поэтому матричные экспоненты e^{At} и e^{Jt} тоже подобны с той же преобразующей матрицей P:

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Умножим обе части этого равенства справа на P:

$$e^{At}P = Pe^{Jt}.$$

Напомним, что умножение фундаментальной матрицы справа на невырожденную квадратную матрицу дает снова фундаментальную матрицу (см. 3.2.7). Поэтому Pe^{Jt} вместе с e^{At} является одной из (фм) рассматриваемой (ЛАОС). Вычисления, проведенные в предыдущем пункте, дают возможность подробно описать вид столбцов матрицы Pe^{Jt}, т.е. вид одной из (фср) (ЛАОС). Это позволяет практически находить (фср) методом неопределенных коэффициентов.

Теорема утверждает, что (ЛАОС) *имеет фундаментальную систему (комплексных) решений вида*

$$\varphi_{kl}(t) = e^{\lambda_k t} Q_{kl}(t), \qquad \text{(ФСР)}$$

где

λ_k *– собственное значение матрицы* A *алгебраической кратности* r_k, $k = 1,\dots p$,

$Q_{kl}(t)$ *– многочлен степени* $\le r_k - 1$ *с векторными коэффициентами,* $l = 1,\dots,r_k$.

Многочлены $Q_{kl}(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисление собственных значений:

$$|A - \lambda \mathrm{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 3 =: \lambda_1, \\ \lambda = -1 =: \lambda_2. \end{array} \right.$$

Вид (фср):

$$\varphi_{11}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \ \varphi_{21}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Нахождение a, b, c, d:

$$\frac{d}{dt}e^{3t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{3t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2a + 3b \\ 3b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ 3b = a \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}e^{-t}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -c = 2c + 3d \\ -d = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = c \\ -d = c \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$$

Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы:

$$\varphi_{11}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_{21}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{oo} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=x\end{cases};\ \begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=1=:\lambda_1(r_1=2).$$

$$\varphi_{11}(t),\varphi_{12}(t)=e^t\left[\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}t\right]$$

Методом неопределенных коэффициентов ищем два линейно независимых набора коэффициентов.

$$\varphi_{11}(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\varphi_{12}(t)=e^t\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}t\right],\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{oo}=e^t\begin{pmatrix}C_1+C_2+C_2t\\ C_1+C_2t\end{pmatrix}.$$

3.3.6. Теорема о выделении вещественной (фср). *Пусть элементы матрицы* A *в* (ЛАОС) *вещественны, и пусть найдена фундаментальная система комплексных решений, состоящая из нескольких вещественных функций и какого-то числа пар комплексно сопряженных функций. Если в этой системе каждую пару комплексно сопряженных решений заменить вещественной и мнимой частью этой пары, то получится фундаментальная система вещественных решений.*

Задача. Покажите, что получаемая таким образом система вещественных решений тоже является базисом.

Пример. Система $\begin{cases}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x\end{cases}$ имеет вещественную матрицу $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найдём её собственные значения: $\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm i$.

Тогда фундаментальная система комплексных решений:

$$\varphi_{11}(t)=e^{it}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=(\cos t+i\cdot\sin t)\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix};$$

$$\varphi_{21}(t)=\bar{\varphi}_{11}(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}-i\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система вещественных решений:

$$\psi_1(t)=\mathrm{Re}\,\varphi_{11}(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\ \psi_2(t)=\mathrm{Im}\,\varphi_{11}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Вещественное общее решение:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_{oo}=C_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

3.4. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

3.4.1. Утверждение о сведение к системе. *Рассматривается уравнение*

$$y^{(n)}+\alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\ldots+\alpha_0(t)y=\beta(t). \qquad \text{(ЛУ}n\text{)}$$

Предполагается, что

коэффициенты $\alpha_j(t), \beta(t)$ *непрерывны на промежутке* $I\subset\mathbb{R}$. (УКУ*n*)

Утверждается, что с учетом замены неизвестной функции

$$\begin{cases} y=x_1, \\ y'=x_2, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}=x_n \end{cases}$$

уравнение (ЛУn) *эквивалентно системе*

$$\dot{x}=A^*(t)x+b^*(t), \qquad \text{(ЛС*)}$$

где

$$A^*(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_0(t) & -\alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & \ldots & -\alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \; b^*(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

(см. 2.2.3).

Для любой достаточное число раз дифференцируемой функции $\psi: I\to \mathrm{K}$ положим

$$J^{(n-1)}\psi := \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \\ \ldots \\ \psi^{(n-1)} \end{pmatrix} -$$

эта вектор-функция называется *джетом*, или *струей порядка* $n-1$ функции ψ. Сформулированное выше утверждение об «эквивалентности с учетом замены…» означает, во-первых, что для любого решения ψ (ЛУ*n*) вектор-функция $\varphi=J^{(n-1)}\psi$ является решением (ЛС*). Во-вторых, для любого решения $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ (ЛС*) функция $\psi=P_1\varphi:=\varphi_1$ – решение (ЛУ*n*).

Задача. Проведите доказательство этого утверждения.

3.4.2. Теорема существования и единственности. *При выполнении* (УКУ*n*) *уравнение* (ЛУ*n*) *имеет на промежутке* I *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям*

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \qquad \text{(НУ}n\text{)}$$

$\left(t_0 \in I,\ y_i \in \mathrm{K}\ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)\right)$.

Задача. Докажите эту теорему.

3.4.3. Свойства решений.
Обозначим через $E^*(\beta)$ множество всех определенных на промежутке I решений (ЛУ*n*) с функцией $\beta(t)$ в правой части. Тогда справедливы утверждения, аналогичные свойствам решений ЛС (см. 3.1.3).

Задача. Сформулируйте это утверждение и покажите, что доказательство из пункта 1.2.5 остаётся для него в силе.

3.4.4. Утверждение о структуре множества решений (ЛОУ*n*). *При выполнении* (УКУ*n*) *множество* $E^*(0)$ *всех определенных на* I *решений линейного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_0(t) y = 0. \qquad \text{(ЛОУ}n\text{)}$$

есть n*-мерное подпространство пространства* $C^n = C^n(I, \mathbb{K})$ *– всех* n *раз непрерывно дифференцируемых функций* $\hat{y} : I \to \mathbb{K}$. *Набор* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *решений этого уравнения образует базис пространства* $E^*(0)$ (фср), *если при некотором* $t = t_0$ *отличен от нуля определитель Вронского (вронскиан) этого набора:*

$$W\left[\varphi(t_0)\right] = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \ldots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \ldots & \varphi_n'(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi^{(n-1)}{}_1(t_0) & \varphi^{(n-1)}{}_2(t_0) & \ldots & \varphi^{(n-1)}{}_n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определитель Вронского любого базиса пространства $E^*(0)$ *отличен от нуля в любой точке промежутка* I.

Это утверждение вытекает из теоремы о структуре множества решений (ЛОС). Достаточно заметить, что введенный в 3.4.1 линейный оператор проектирования P_1 на множестве $E(0)$ решений (ЛОС*) – невырожденный, и его образ совпадает с $E^*(0)$

(и лежит в C^n). При этом решения $\psi_1,...,\psi_n$ (ЛУn) линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы решения $J^{(n-1)}\psi_1,...,J^{(n-1)}\psi_n$ соответствующей (ЛОС*).

Задача. Проведите полное доказательство утверждения.

Пример. В пункте 1.4.5 для уравнения гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

были подобраны два решения: $x = \cos\omega t$ и $x = \sin\omega t$, и было высказано утверждение (под вопросом), что общее решение можно записать в виде их линейной комбинации с произвольными коэффициентами. Тот факт, что эти две функции являются решениями, проверяется непосредственной подстановкой в уравнение. Факт линейной независимости (известный из курса линейной алгебры) в данной ситуации может быть просто установлен путем вычисления вронскиана:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ (\cos\omega t)' & (\sin\omega t)' \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix} = \omega \neq 0$$

(в этом случае вронскиан не зависит от t). Итак, найденные два решения действительно образуют (фср), так что любое решение действительно является их линейной комбинацией.

3.4.5. Утверждение об общем решение (ЛНУп). *При выполнении (УКУп) одно из решений линейного неоднородного уравнения можно выразить через фундаментальную систему решений $\psi = (\psi_1,...,\psi_n)$ соответствующего однородного уравнения и правую часть β по формуле:*

$$y_{чн} = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \int_{t_0}^{t} \frac{A_{nk}(s)}{W(s)} \beta(s)\,ds;$$

здесь $A_{nk}(s)$ – алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя Вронского $W(s)$.Поэтому общее решение линейного неоднородного уравнения можно представить в виде:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \left(c_k + \int_{t_0}^{t} \frac{A_{nk}(s)}{W(s)} \beta(s)\,ds \right).$$

Доказательство. Частное решение (ЛУn) можно найти как первую координату частного решения соответствующей линейной системы (ЛС*), которое вычисляется по формуле (*) в 3.2.6

$$y_{чн} = P_1 x_{чн};\; x_{чн} = \int_{t_0}^{t} \Phi_s(t) b^*(s)\,ds = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b^*(s)\,ds.$$

В качестве фигурирующей здесь фундаментальной матрицы Φ возьмем матрицу, столбцами которой являются джеты функций ψ_k, входящих в данную (фср) ψ однородного уравнения.

$$\varphi_1 = J^{(n-1)}\psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1' \\ \dots \\ \psi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \varphi_n = J^{(n-1)}\psi_n = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_n' \\ \dots \\ \psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}; \ \Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n \\ \psi_1' & \psi_2' & \dots & \psi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n-1)} & \psi_2^{(n-1)} & \dots & \psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Первая координата произведения матрицы $\Phi(t)$ на вектор-столбец $\int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b^*(s)\, ds$ есть скалярное произведение первой строки этой матрицы на этот столбец.

$$P_1 x_{чн} = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left[\Phi^{-1}(s) b^*(s) \right]_k ds$$

Принимая во внимание специальный вид вектора $b^*(s)$ и используя известное правило вычисления элементов обратной матрицы, окончательно получаем:

$$y_{чн} = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left[\Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \beta(s) \end{pmatrix} \right]_k ds = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left(\Phi^{-1}(s) \right)_{kn} \beta(s)\, ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{A_{nk}(s)}{W(s)} \beta(s)\, ds.$$

Пример. Если на грузик гармонического осциллятора действует дополнительная сила $F(t)$ (в направлении стержня), то движение описывается неоднородным уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \quad \left(= \frac{1}{m} F(t) \right).$$

Общее решение этого уравнения в силу сформулированной теоремы можно записать в виде (возьмем $t_0 = 0$):

$$x_{он} = \left(c_1 + \int\limits_0^t \frac{A_{21}(s)}{W(s)} f(s)\, ds \right) \cos \omega t + \left(c_2 + \int\limits_0^t \frac{A_{22}(s)}{W(s)} f(s)\, ds \right) \sin \omega t =$$

/вронскиан равен ω и, очевидно, $A_{21} = -\sin \omega t,\ A_{22} = \cos \omega t$/

$$= c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t \left(-\sin\omega s \cdot \cos\omega t + \cos\omega s \cdot \sin\omega t\right) f(s)\, ds =$$

$$= c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s) \sin\omega(t-s)\, ds.$$

3.4.6. Теорема о (фср) (ЛАОУ*n*). *Для линейного автономного однородного уравнения*

$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_0 y = 0 \qquad \text{(ЛАОУn)}$$

(коэффициенты не зависят от t*) фундаментальную систему решений можно находить следующим образом. Нужно составить так называемое характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

и найти (если удастся) все его различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *и их кратности* $r_1, r_2, \ldots, r_m$*. После этого (фср) выписывается в явном виде:*

$$\varphi_{kl}(t) = e^{\lambda_k t} t^{l-1} \quad \left(k = 1, \ldots, m;\ l = 1, \ldots, r_k\right).$$

Задача. Докажите теорему.

Пример. Для уравнения колебательного контура (см. 1.4.3)

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2 A\cos\omega_0 t$$

характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0.$$

Найдя его корни

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\,, \qquad (*)$$

мы можем (при $\delta \neq \omega$) выписать фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2} t}. \qquad (**)$$

Если же $\delta = \omega$, то у характеристического уравнения один корень $\lambda_1 = -\delta$ кратности 2; поэтому (фср) будет иметь вид:

$$\varphi_1(t) = e^{-\delta t},\ \varphi_2(t) = t e^{-\delta t}.$$

При $\delta < \omega$ корни комплексные:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \overline{\omega} i \quad \left(\overline{\omega} := \sqrt{\omega^2 - \delta^2},\ i = \sqrt{-1}\right).$$

По аналогии с теоремой о выделении вещественной (фср) для систем (3.3.6) можно (для уравнения с вещественными коэффициентами) по комплексной (фср)

$$\varphi_{1,2}(t) = e^{-\delta t}\left(\cos\overline{\omega} t \pm i \sin\overline{\omega} t\right)$$

построить вещественную:

$$\psi_1(t)=\mathrm{Re}\,\varphi_1(t)=e^{-\delta t}\cos\bar{\omega}t,\ \psi_2(t)=\mathrm{Im}\,\varphi_1(t)=e^{-\delta t}\sin\bar{\omega}t\,.$$

3.4.7. Замечание о виде частного решения неоднородного уравнения со специальной правой частью.

Для неоднородного уравнения колебательного контура из предыдущего примера можно теперь найти частное решение по формуле, указанной в 3.4.5. Однако если правая часть линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$P(t)\,e^{\gamma t},$$

где $P(t)$ – многочлен от переменной t и γ – комплексное число, то всегда существует частное решение вида $t^r Q(t)\,e^{\gamma t}$, где $Q(t)$ – многочлен той же степени, что и $P(t)$, а r есть кратность числа γ как корня характеристического уравнения ($r=0$, если γ корнем не является). Многочлен $Q(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов, причем вычисления оказываются зачастую более простыми, чем при использовании формулы из 3.4.5.

Правая часть уравнения колебательного контура имеет вид

$$\omega^2 A\cos\omega_0 t=\omega^2 A\,\mathrm{Re}\,e^{i\omega_0 t},$$

причем число $\gamma=i\omega_0$ не является корнем характеристического уравнения (считаем, что $\delta>0$). Поэтому для уравнения с правой частью $\omega^2 A\,e^{i\omega_0 t}$ по указанному выше рецепту можно найти комплексное частное решение вида $z_{чн}=B\,e^{i\omega_0 t}$ $(B\in\mathbb{C})$. Поскольку коэффициенты исходного уравнения вещественны, вещественная часть $u_{чн}=\mathrm{Re}\,z_{чн}$ найденного комплексного решения будет, как нетрудно видеть, решением данного уравнения. Аккуратные вычисления дают:

$$u_{чн}=\mathrm{Re}(z_{чн})=\frac{\omega^2 A\left(\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos\omega_0 t+2\delta\,\omega_0\sin\omega_0 t\right)}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(2\delta\,\omega_0\right)^2}.$$

3.5. Примеры краевых задач

Начальная задача играет в теории обыкновенных дифференциальных уравнений особенно важную роль, однако наряду с ней изучаются и другие: *краевые задачи, задача о периодических решениях, задача об ограниченных решениях* и т. п. Здесь мы рассмотрим два примера.

3.5.1. Пример краевой задачи на собственные значения.

Для однородной краевой задачи

$$x''+\lambda x=0\,, \qquad (*)$$

$$x(0)=0,\ x(\pi)=0 \qquad (**)$$

требуется найти все значения λ (*собственные значения*), при которых она имеет ненулевые решения, а также сами эти ненулевые решения (*собственные функции*) (нулевое решение есть при любом λ, оно нас в данном случае не интересует). Равенства (**) называются *краевыми условиями,* так как они задаются на концах отрезка $[0, \pi]$.

Найдем общее решение уравнения (*) отдельно в трех случаях: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

В первом случае характеристическое уравнение (неизвестную обозначим μ, поскольку буква λ «занята») принимает вид $\mu^2 = 0$; его единственный корень $\mu_1 = 0$ имеет кратность $r_1 = 2$. Поэтому (фср) можно составить из функций $\psi_1 = e^{0\cdot t} = 1$ и $\psi_2 = te^{0\cdot t} = t$; общее решение записывается в виде $x_{oo} = C_1 + C_2 t$. Ни одна из функций такого вида, кроме нулевой, не обращается в ноль одновременно в точках 0 и π. Следовательно, $\lambda = 0$ не есть собственное значение.

Во втором случае $(\lambda > 0)$ уравнение можно записать в виде $x'' + \omega^2 x = 0$ $\left(\omega = \sqrt{\lambda}\right)$. Его общее решение, как показано в 3.4.4, имеет вид:

$$x_{oo} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t .$$

Краевые условия накладывают на коэффициенты следующие ограничения:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,\ x(\pi) = 0 \Rightarrow \sin \omega \pi = 0$$

($C_2 \neq 0$ и $\omega \neq 0$), поскольку собственная функция должна быть ненулевой. Все положительные значения ω, удовлетворяющие последнему равенству – это натуральные числа. Итак, *найден бесконечный набор собственных значений* $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$*; им соответствуют собственные функции* $x = \sin nt$.

Наконец, в третьем случае ($\lambda < 0$) общее решение уравнения имеет вид

$$x_{oo} = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t} .$$

Краевые условия дают:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1;\ x(\pi) = 0 \Rightarrow C_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Таким образом, в этом случае, как и в первом, краевая задача не имеет ни каких других решений кроме ненулевых решений. Итак, *задача не имеет отличных от тождественного нуля решений, кроме тех, которые найдены во втором случае.*

3.5.2. Пример неоднородной краевой задачи и функции Грина.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$x'' = f(t), \qquad (+)$$

левая часть которого совпадает с левой частью (*) при (не собственном) значении $\lambda = 0$. Будем решать уравнение (+) с теми же краевыми условиями (**). Общее решение рассматриваемого уравнения находится двукратным интегрированием:

$$x=\int_0^t\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau+C_1t+C_2.$$

Из краевых условий получаем: $x(0)=0\Rightarrow C_2=0;$

$$x(\pi)=0\Rightarrow C_1=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau.$$

Итак, *поставленная краевая задача имеет единственное решение*:

$$x=\int_0^t\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau-\frac{t}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau.$$

Часто решение краевой задачи бывает удобно представить в виде

$$x=\int_0^\pi G(t,s)f(s)ds\ .$$

Функцию $G:[0,\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$ в таком представлении называют *функцией Грина данной краевой задачи*. Для нахождения функции Грина предварительно преобразуем полученное выше выражение следующим образом:

$$x=\int_0^t\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau-\frac{t}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau=\frac{\pi-t}{\pi}\int_0^t\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau-\frac{t}{\pi}\int_t^\pi\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau.$$

Первое слагаемое в правой части вычисляем «по частям»:

$$\frac{\pi-t}{\pi}\int_0^t\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau=\left|\begin{matrix}u=\int_0^\tau f(s)ds,\ du=f(\tau)d\tau,\\ dv=d\tau,\ v=\tau\end{matrix}\right|=\frac{\pi-t}{\pi}\left\{\left[\tau\int_0^\tau f(s)ds\right]_0^t-\int_0^t\tau f(\tau)d\tau\right\}=$$

$$=\frac{\pi-t}{\pi}\left\{t\int_0^t f(s)ds-\int_0^t s\,f(s)ds\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^t(t-\pi)s\,f(s)ds+\frac{\pi-t}{\pi}t\int_0^t f(s)ds.$$

Второе аналогично:

$$-\frac{t}{\pi}\int_t^\pi\int_0^\tau f(s)ds\,d\tau=-\frac{t}{\pi}\left\{\left[\tau\int_0^\tau f(s)ds\right]_t^\pi-\int_t^\pi\tau f(\tau)d\tau\right\}=$$

$$=-\frac{t}{\pi}\left\{\pi\int_0^\pi f(s)ds-t\int_0^t f(s)ds-\int_t^\pi s\,f(s)ds\right\}=\frac{1}{\pi}\int_t^\pi(s-\pi)t\,f(s)ds-$$

$$-\frac{t}{\pi}(\pi-t)\int_0^t f(s)ds.$$

Получаем

$$x=\frac{1}{\pi}\int_0^t (t-\pi)s\, f(s)ds+\frac{\pi-t}{\pi}t\int_0^t f(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_t^\pi (s-\pi)t\, f(s)ds-\frac{t}{\pi}(\pi-t)\int_0^t f(s)ds=$$

$$=\int_0^t \frac{(t-\pi)s}{\pi} f(s)ds+\int_t^\pi \frac{(s-\pi)t}{\pi} f(s)ds$$

Итак, *единственное решение задачи (+), (**) выражается через функцию Грина*:

$$x=\int_0^\pi G(t,s)\, f(s)ds,\ \ G(t,s)=\begin{cases}(t-\pi)s/\pi \ \ при\ \ s\le t,\\ (s-\pi)t/\pi \ \ при\ \ s>t.\end{cases}$$

3.6. Материалы к экзамену

3.6.1. Вопросы.

1. Теорема существования и единственности для ЛС.
2. Теорема об ОС для ЛОС со следствием о разрешающем операторе.
3. Теорема о структуре множества решений ЛОС.
4. Определение (фср) ЛОС, (фм) и (нфм).
5. Утверждение о решениях и ОС для ЛС.
6. Теорема о (нфм) ЛАОС (экспонента матрицы).
7. Дополнительное свойство матричной экспоненты (свойства матричной экспоненты).
8. Экспонента жордановой клетки.
9. Теорема о (фср) ЛАОС.
10. Теорема о выделении вещественных решений.
11. Сведение уравнения *n*-го порядка к системе.
12. Общее решение ЛНУ*n*.
13. Теорема о (фср) ЛАОУ*n*.
14. Краевая задача на собственные значения (формулировка результата).
15. Пример функции Грина для неоднородной краевой задачи.

3.6.2. Задачи.

1. Почему равенство

$$g_{t_0}^t\begin{pmatrix}x_{01}\\ x_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t-t_0}\left(x_{01}-1\right)+1\\ e^{t-t_0}x_{02}\end{pmatrix}$$

не может определять оператор сдвига по траекториям линейной однородной системы, для которой выполнены УК?

2. Найдите $G_1(1)$ для уравнения $x'=t\,x$.

3. Одним из решений уравнения

$$x' = x + \cos t - t(\cos t + \sin t)$$

является функция $x = t\cos t$. Найдите общее решение этого уравнения.

4. Является ли матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

фундаментальной для системы $x_1' = x_2,\ x_2' = -x_1$? А для системы $x_1' = -x_2,\ x_2' = x_1$?

5. Может ли матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

быть фундаментальной для какой-нибудь линейной однородной системы на всей вещественной оси? Может ли она быть фундаментальной на промежутке $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$?

6. Могут ли матрицы-функции

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

быть фундаментальными для одной и той же (ЛОС) на каком-либо промежутке?

7. Докажите, что задача Коши

$$t^2 x'' + t x' + x = 0,$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1$$

имеет единственное решение на любом промежутке, не содержащем точку 0.

8. Верно ли, что краевая задача

$$x'' + x = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0$$

имеет единственное решение?

3.6.3. Приложение.

Греческий алфавит:

Αα	Альфа	**Νν**	Ню
Ββ	Бета	**Ξξ**	Кси
Γγ	Гамма	**Οο**	Омикрон
Δδ	Дельта	**Ππ**	Пи
Εε	Эпсилон	**Ρρ**	Ро
Ζζ	Дзета	**Σσς**	Сигма
Ηη	Эта	**Ττ**	Тау
Θθ	Тета	**Υυ**	Ипсилон
Ιι	Йота	**Φφ**	Фи
Κκ	Каппа	**Χχ**	Хи
Λλ	Лямбда	**Ψψ**	Пси
Μμ	Мю	**Ωω**	Омега

Литература

1. Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н. Очерки по ОДУ. http://www.bsadovskiy.ru
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984, 271с.
3. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966, 332 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971, 312с.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980, 232 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : [учебное пособие для физ.-мат. фак. ун-тов] / И.Г. Петровский .— М. : Физматлит, 2009 .— 207 с. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г.Петровский. - М. : Московский университет, 1984. - 295 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф.Филиппов. - М.; Ижевск : 2002, 174 с.
8. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.-540 с.

Составители: Петрова Любовь Петровна,
Прядко Ирина Николаевна

Редакция авторов