Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

конспекты лекций вопросы и задачи

Дифференциальные уравнения

часть 1

Элементарная теория

пособие для студентов специальности 02.03.01

Воронеж
2015

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
25 ноября 2015 года
Протокол № 0500-10

Составители: Прядко И.Н., Петрова Л.П.

Пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и
операторных уравнений математического факультета
Воронежского госуниверситета

Рекомендуется для студентов 2-го курса
дневного отделения

Оглавление

Введение

В основу этих конспектов положен многолетний труд двух замечательных людей и незаурядных широко известных математиков Садовского Бориса Николаевича и Ахмерова Рустяма Рафаэловича, доброй памяти которых с нежностью и любовью мы посвящаем свой скромный вклад в эту работу.

Учебное пособие состоит из четырёх частей и рекомендуется для изучения курса дифференциальных уравнений студентами математического факультета.

1. Элементарная теория

1.1. Основные понятия и уравнения с разделяющимися переменными

1.1.1. Примеры.

Рассмотрим ряд примеров уравнений, содержащих независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной вместе с производной или дифференциалами.

а) $y' = x^2$. Решением этого уравнения является любая функция вида $y = \frac{x^3}{3} + c$, где c - произвольная константа.
Это уравнение можно также записать «в дифференциалах»:

$$dy = x^2 dx.$$

б) Замечательным свойством функции $y = e^x$ является то, что она совпадает со своей производной; это свойство записывается в виде «обыкновенного дифференциального уравнения» (ОДУ)

$$y' = y,$$

решениями которого, наряду с e^x, будут все функции семейства $y = ce^x$.

в) С учетом механического смысла второй производной (ускорение) уравнение прямолинейного равноускоренного движения записывается в форме

$$\ddot{x} = a,$$

где $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.
Решим это дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} = a \Leftrightarrow \dot{x} = at + c_1 \Leftrightarrow x = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

где c_2 – координата в начальный момент $c_2 = x(0) = x_0$,
c_1 – начальная скорость $c_1 = \dot{x}(0) = v_0$.

г) $\ddot{x} + x = 0$.
Решениями этого уравнения являются функции $x = 0,\ x = \sin t,\ x = \cos t.$
Решением также будет и линейная комбинация этих функций:

$$x = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

В данном случае это частные производные по x и по y функции двух независимых переменных $u=u(x,y)$. Решением этого уравнения являются, например, функции $u=0,\ u=x+y+c$. Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими функциями.

е) $\dot{x}(t)=x(t-1)$.
Решением является, например, функция $x\equiv 0$.

Последние два уравнения не являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. д) – дифференциальное уравнение с частными производными, е) – дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

Задачи. 1) Придумайте как можно больше решений уравнения из примера е).

2) Имеет ли это уравнение решения вида $x=\lambda t$, если да, то при каких значениях λ?

ж) $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_2,\\ \dot{x}_2=x_1\end{cases}$ или $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$.

$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$ – векторная неизвестная функция.

Решениями этого уравнения являются функции

$$x=0=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

Все решения этого уравнения могут быть записаны, как мы покажем позже, в виде $x=c_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 – произвольные константы.

1.1.2. Определение ОДУ.

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ) называется равенство, связывающие значение (возможно векторное) неизвестной функции одного вещественного аргумента при произвольном значении этого аргумента с некоторыми производными этой функции при том же значении аргумента. *Порядком* ОДУ называют сумму старших порядков производных всех скалярных функций, входящих в данное уравнение.

Замечание 1. Как отмечено при разборе примеров (а), (в), производные в ДУ иногда выражают через дифференциалы:

$$y'=\frac{dy}{dx},\ \dot{x}=\frac{dx}{dt},\ dx=\dot{x}dt,\ \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\ d^2x=\ddot{x}dt^2.$$

Замечание 2. Систему нескольких ДУ с несколькими неизвестными функциями (см. пример (ж)) можно рассматривать как одно ДУ с векторной неизвестной функцией.

Замечание 3. Если в уравнение входят произвольные постоянные, то уравнение считается бесконечной совокупностью уравнений. Например, уравнение

$$\dot{x} = at + c_1$$

из примера (в) содержит параметр a и произвольную постоянную c_1; поэтому оно представляет бесконечную совокупность уравнений, зависящих от параметра a:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = at + 2, \\ \dot{x} = at + 1, \\ \dot{x} = at + e, \\ \ldots \end{array}\right.$$

Её решениями являются, например, функции

$$x = \frac{at^2}{2} + 2t + 1, x = \frac{at^2}{2} + t + 2 ,$$

а функция

$$x = \frac{t^2}{2}$$

не является; она будет решением лишь для значения параметра $a = 1$.

1.1.3. Определение решения ОДУ.

Определение. *Решением ОДУ* называется функция, обладающая следующими свойствами:

1. Её область определения есть промежуток вещественной оси, т.е. не сводящийся к единственной точке отрезок, полуинтервал или интервал, возможно, бесконечный в одну или обе стороны.
2. При её подстановке уравнение превращается в тождество относительно независимой переменной и, если уравнение содержит дифференциалы, то и относительно приращения независимой переменной.
3. Если в уравнение входят произвольные постоянные, то она должна удовлетворять уравнению при каких-нибудь значениях произвольных постоянных.

Условие 1 не всегда включается в определение решения, однако оно удобно, так как облегчает описание множества всех решений. Например, множество всех решений уравнения $y' = 0$ на промежутке J описывается формулой $y \equiv c$. Для множества, состоящего, скажем, из двух не пересекающихся интервалов J_1 и J_2, множество всех решений пришлось бы описывать сложнее $y \equiv \begin{cases} c_1 \text{ } при \text{ } x \in J_1, \\ c_2 \text{ } при \text{ } x \in J_2 \end{cases}$.

Примеры:

а) $y=\frac{x^3}{3}=:\hat{y}(x)$ – одно из решений (частное решение) уравнения «в дифференциалах» $dy=x^2dx$. Здесь и в дальнейшем мы различаем обозначение $\hat{y}$ функции и y – ее значения при (неопределенном) значении аргумента x.

1. $D(\hat{y})=\mathbb{R}$,
2. $d\left(\frac{x^3}{3}\right)=x^2dx$ при всех значениях x и dx.

б) $y=e^x$ – решение ОДУ $y'=y$.

1. $D(\hat{y})=\mathbb{R}$,
2. $\left(e^x\right)'=e^x$ при всех значениях x.

в) Рассмотрим уравнение $\dot{x}=at+c_1$, полученное из уравнения равноускоренного движения $\ddot{x}=a$. Здесь a - параметр, c_1 – произвольная постоянная. Функция $x=\frac{at^2}{2}+t$ является решением рассматриваемого уравнения.

1. $D(\hat{x})=\mathbb{R}$,
2. $\dot{x}=at+1$,
3. $c_1=1$.

г) Рассмотрим уравнение $\dot{x}=\frac{1}{t}$. Функция $x=\ln|t|$ не является его решением по приведённому нами определению, поскольку первое условие не выполнено $D(\ln|t|)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. А функции $x=\ln t$ и $x=\ln(-t)$ являются решениями данного уравнения, первое – на промежутке $(0,+\infty)$, а второе – на $(-\infty,0)$.

1.1.4. Определение следования и эквивалентности.

Определение. Если любое решение ОДУ1 удовлетворяет ОДУ2, то говорят, что ОДУ2 является *следствием* ОДУ1 (ОДУ1$\Rightarrow$ОДУ2).

Рассмотрим пример:

$$\ddot{x}+x=0.$$

Домножив обе части уравнения на $\dot{x}$, получим:

$$\ddot{x}\cdot\dot{x}+\dot{x}\cdot x=0.$$

Поскольку

$$\ddot{x}\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{x}^2}{dt},\quad \dot{x}x=\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt}, \tag{1}$$

получаем далее:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right)=0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}\right)=0$, откуда $\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}=c$, где c – произвольная константа.

Стрелка под знаком равенства в (1) используется как обозначение того, что равенство справедливо лишь при условии, что его правая часть определена (т.е., в данном случае, если вторая производная существует).

Таким образом, $\ddot{x}+x=0 \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}=c$. Верно ли обратное? Нет, так как функция $x\equiv 1$ является решением уравнения $\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}=c$ с константой $c=\frac{1}{2}$, но не является решением уравнения $\ddot{x}+x=0$.

Определение. Если ОДУ1$\Rightarrow$ОДУ2 и ОДУ2$\Rightarrow$ОДУ1, то говорят, что ОДУ1 *эквивалентно* ОДУ2 (ОДУ1 $\Leftrightarrow$ОДУ2).

Пример. Следующие уравнения, очевидно, эквивалентны между собой.
$\ddot{x}=0 \Leftrightarrow \dot{x}=c_1 \Leftrightarrow x=c_1t+c_2$.

1.1.5. Определение интеграла ОДУ и полного (общего) интеграла.

Определение. Если ОДУ1$\Rightarrow$ОДУ2 и порядок ОДУ1 больше порядка ОДУ2, то говорят, что ОДУ2 есть *интеграл* ОДУ1. Если при этом ОДУ2$\Rightarrow$ОДУ1 (т.е. ОДУ1 $\Leftrightarrow$ОДУ2), то интеграл называется *полным* (*общим*).

Часто в определении полного интеграла есть требование, чтобы порядок ОДУ2 равнялся нулю.

Пример:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-x_1.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на x_1, второе – на x_2 и сложим эти уравнения: $\dot{x}_1x_1+\dot{x}_2x_2=0$, или $x_1^2+x_2^2=c$. Последние уравнение является интегралом исходной системы, но не эквивалентно ей. Действительно, пара функций $x_1=x_2=1$ является решением последнего уравнения, но не удовлетворяет системе.

1.1.6. Определение общего решения (ОР).

Определение. Функция $x=\varphi(t,c)$ (возможно, векторная) от независимой переменной t и произвольной постоянной c (возможно, векторной) называется *общим решением* ОДУ, если выполнены следующие условия:

1. При любом конкретном значении c она является решением этого уравнения.

2. Для любого решения ОДУ существует такое значение c, при котором оно совпадает с $\varphi(t,c)$ на своей области определения.

Пример.

$y = ce^x$ – общее решение уравнения $y' = y$.

Общее решение является частным видом полного интеграла уравнения (разрешенным относительно неизвестной функции).

1.1.7. Виды уравнений первого порядка.

Выделим и обозначим следующие виды ОДУ первого порядка.

$$F(t,x,\dot{x}) = 0$$

– уравнение, не разрешенное относительно производной.

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad \text{(НС)}$$

– нормальная система.

$$g(t,x)\cdot\dot{x} = h(t,x). \qquad (gh)$$

Это уравнение почти разрешено относительно производной. Если разделить на $g(t,x)$, то получится (НС), но это не всегда будет эквивалентным переходом.

$$g(t,x)dx = h(t,x)dt, \qquad (ghd)$$

$$g(t,x)dx + h(t,x)dt = 0. \qquad (ghd \leftarrow)$$

$$g(x)dx = h(t)dt \qquad \text{(УРП)}$$

– уравнение с разделенными переменными. Это частный случай (ghd).

1.1.8. Уравнение с разделенными переменными.

Теорема (об УРП). Пусть функции $g(x)$ и $h(t)$ на своих областях определения имеют первообразные $G(x)$ и $H(t)$, соответственно. Тогда уравнение с разделенными переменными эквивалентно уравнению

$$G(x) = H(t) + c, \qquad (GHd)$$

рассматриваемому в классе дифференцируемых функций. Другими словами, уравнение (GHd) есть полный интеграл (УРП).

Доказательство. Приведём цепочку следующих эквивалентных утверждений.

$x = \varphi(t)$ – решение (GHd) $\quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

1. $D(\varphi) = I$ – промежуток в $\mathbb{R}$ (по условию 1 определения решения ОДУ),
2. φ дифференцируема (по предположению теоремы),
3. $G[\varphi(t)] - H(t) = c$ при некотором значении c и любом $t \in I$ (по условиям 2 и 3 определения решения ОДУ).

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1.\ D(\varphi)=I - \text{ промежуток в } \mathbb{R}\ , \\ 2.\ \varphi \text{ дифференцируема }, \\ 3.\ \dfrac{d}{dt}\left\{G\left[\varphi(t)\right]-H(t)\right\}=0 \text{ для } t\in I. \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1.\ D(\varphi)=I - \text{ промежуток в } \mathbb{R}\ , \\ 2.\ G'\left[\varphi(t)\right]\cdot\dot{\varphi}(t)-H'(t)=0 \text{ для } t\in I. \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1.\ D(\varphi)=I - \text{ промежуток в } \mathbb{R}\ , \\ 2.\ g\left[\varphi(t)\right]\cdot\dot{\varphi}(t)-h(t)=0 \text{ для } t\in I. \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1.\ D(\varphi)=I - \text{ промежуток в } \mathbb{R}\ , \\ 2.\ g\left[\varphi(t)\right]d\varphi(t)=h(t)dt \text{ для } t\in I. \end{array}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x=\varphi(t)$ – решение (УРП).

1.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1.2.1. Общий вид.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид

$\dot{x}=a(t)x+b(t)$, называют *линейным*, (ЛУ)

если выполнено *условие на коэффициенты*:

$a(t),b(t)$ – непрерывные на промежутке $I\subset\mathbb{R}$ функции. (УК)

Соответствующее ему уравнение

$\dot{x}=a(t)x$ называют *линейным однородным уравнением.* (ЛОУ)

Пример. Уравнение

$$y'=y,$$

где y – неизвестная функция, и подразумевается, что отсутствующая в нём x – независимая переменная, коэффициент $a(x)\equiv 1$, является (ЛОУ). Его можно считать также частным видом (ЛУ) с $b(x)\equiv 0$. Как уже отмечалось, общее решение этого уравнения – $y=ce^{x}$.

1.2.2. Решение (ЛОУ) методом разделения переменных

Найдём решения (ЛОУ), приведя его к виду (УРП)

$$\dot{x}=a(t)x \Leftrightarrow dx=a(t)xdt \Leftarrow \frac{dx}{x}=a(t)dt\,.$$

Последнее уравнение в этом ряду есть (УРП), но оно не эквивалентно предыдущим, так как функция $x\equiv 0$ является решением двух первых и не является решением третьего уравнения.

По теореме об (УРП) общее решение уравнения $\frac{dx}{x}=a(t)dt$ можно выписать, найдя первообразные левой и правой частей равенства. $\ln|x|$ – первообразная левой части, а через $A(t)$ обозначим первообразную правой части. Приравнивая первообразные $\ln|x|=A(t)+c$, выразим x: $|x|=e^{A(t)}\cdot e^{c}$ и, обозначив $e^{c}=c_1$ ($c_1>0$), избавимся от модуля: $x=\pm c_1 e^{A(t)}$. А введя обозначение $\pm c_1=c_2$ $(c_2\neq 0)$, получим общее решение (УРП) на $\mathbb{R}$ в виде $x=c_2 e^{A(t)}$. Присоединим к этому выражению тождественно нулевое решение (ЛОУ), сняв ограничение $c_2\neq 0$. Итак, имеем из

$$x=c_2 e^{A(t)} \tag{2}$$

следует (ЛОУ).

1.2.3. Функция $\Phi_{t_0}(t)$ и её свойства

Определение. Для непрерывной на промежутке $I\subset\mathbb{R}$ функции $a(t)$ и $t_0\in I$ определим функцию $\Phi_{t_0}(t)$ равенством $\Phi_{t_0}(t)=e^{\int_{t_0}^{t}a(s)ds}$.

Утверждение (о свойствах $\Phi_{t_0}(t)$).

1. $\Phi_{t_0}(t_0)=1$.
2. $\frac{d}{dt}\Phi_{t_0}(t)=a(t)\Phi_{t_0}(t)$. Это означает, что $\Phi_{t_0}(t)$ есть одно из решений (ЛОУ).
3. $\Phi_{t_1}(t)\cdot\Phi_{t_0}(t_1)=\Phi_{t_0}(t)$.
4. $\Phi_{t_0}(t)\neq 0$ и $\left(\Phi_{t_0}(t)\right)^{-1}=\Phi_{t}(t_0)$.

Доказательство. Первое свойство очевидно выполнено из-за равенства нулю определённого интеграла с совпадающими верхним и нижним пределами интегрирования.

Для доказательства свойства 2 воспользуемся результатом пункта 1.2.2, заметив, что $\Phi_{t_0}(t)=e^{A(t)-A(t_0)}=e^{-A(t_0)}\cdot e^{A(t)}$ и, следовательно, является решением (ЛОУ) при $c_2=e^{-A(t_0)}$.

Третье и четвёртое свойства следуют из определения $\Phi_{t_0}(t)$ и свойств определённого интеграла

$$\Phi_{t_1}(t)\cdot\Phi_{t_0}(t_1)=e^{\int_{t_1}^{t}a(s)ds}\cdot e^{\int_{t_0}^{t_1}a(s)ds}=e^{\int_{t_0}^{t_1}a(s)ds+\int_{t_1}^{t}a(s)ds}=e^{\int_{t_0}^{t}a(s)ds}=\Phi_{t_0}(t),$$

$$\Phi_{t_0}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \neq 0 \text{ и } \left(\Phi_{t_0}(t)\right)^{-1} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = e^{\int_{t}^{t_0} a(s)ds} = \Phi_{t_1}(t_0).$$

1.2.4. Общее решение (ЛОУ)

Утверждение (об ОР (ЛОУ)). При выполнении (УК) следующая формула задает ОР (ЛОУ):

$$x = \Phi_{t_0}(t) \cdot c \ . \tag{3}$$

Доказательство.

1) Покажем, что (3) является решением.

$$\frac{d}{dt}\Phi_{t_0}(t) \cdot c = \left\langle по\, 2 - му\ свойству \right\rangle = a(t)\Phi_{t_0}(t) \cdot c,$$

т.е. (3) удовлетворяет (ЛОУ).

2) Пусть $\varphi(t)$ – решение (ЛОУ). Покажем, что $\varphi(t)$ представима в виде $\varphi(t) = \Phi_{t_0}(t) \cdot c$. Докажем существование такого c, положив

$c = \dfrac{\varphi(t)}{\Phi_{t_0}(t)}$ (можем делить на $\Phi_{t_0}(t)$, так как по 4-му свойству $\Phi_{t_0}(t) \neq 0$).

Проверим, что c не зависит от t, т.е. является константой. Для этого вычислим её производную:

$$c' = \frac{\dot{\varphi}(t)\Phi_{t_0}(t) - \varphi(t)\dot{\Phi}_{t_0}(t)}{\Phi_{t_0}^2(t)} = \frac{a(t)\varphi(t)\Phi_{t_0}(t) - \varphi(t)a(t)\Phi_{t_0}(t)}{\Phi_{t_0}^2(t)} \equiv 0 .$$

Следовательно, $c \equiv const$.

1.2.5. Свойства решений (ЛУ)

Введем обозначение: $E(b)$ – множество всех решений (ЛУ) с функцией $b(t)$ в правой части, определенных на I.

Утверждение (о решениях (ЛУ)). Выполнены следующие свойства решений (ЛУ):

1) Если $\psi_1 \in E(b_1)$, $\psi_2 \in E(b_2)$, то $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \in E(c_1b_1 + c_2b_2)$; в частности, разность любых решений (ЛУ) с одной и той же функцией b является решением соответствующего (ЛОУ), а линейная комбинация любых решений (ЛОУ) есть решение (ЛОУ), т.е. множество $E(0)$ является линейным пространством.
2) Если $\psi \in E(b)$, то справедливо равенство $E(b) = E(0) + \psi$; поэтому общее решение неоднородного линейного уравнения может быть получено как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения:

$$x_{он} = x_{оо} + x_{чн}.$$

Доказательство.

1) Введём обозначения: $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Покажем, что $\psi \in E\left(c_1b_1 + c_2b_2\right)$, т.е. $\psi'(t) = a(t)\psi(t) + b(t)$, где $b(t) = c_1b_1(t) + c_2b_2(t)$.

Действительно,

$$\psi'(t) = c_1\psi_1'(t) + c_2\psi_2'(t) = c_1\left[a(t)\psi_1(t) + b_1(t)\right] + c_2\left[a(t)\psi_2(t) + b_2(t)\right]$$
$$= a(t)\left[c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)\right] + \left[c_1b_1(t) + c_2b_2(t)\right] = a(t)\psi(t) + b(t).$$

Следовательно, $\psi \in E\left(c_1b_1 + c_2b_2\right)$.

Если $\psi_1 \in E(b)$, $\psi_2 \in E(b)$, то $\psi_1 - \psi_2 \in E(b-b) = E(0)$, т.е. разность любых двух решений (ЛУ) с одной и той же функцией b является решением соответствующего (ЛОУ).

Если $\varphi_1 \in E(0)$, $\varphi_2 \in E(0)$, то $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in E\left(c_1 0 + c_2 0\right) = E(0)$, т.е. линейная комбинация решений (ЛОУ) есть решение (ЛОУ).

2) Пусть $\bar{\psi} \in E(b)$. Требуется доказать, что $\bar{\psi} \in E(0) + \psi$ или, что то же, $\bar{\psi} - \psi \in E(0)$. Это выполнено в силу свойства 1).

Покажем теперь, что любой элемент из $E(0) + \psi$ принадлежит множеству $E(b)$. Пусть $\bar{\psi} \in E(0) + \psi$, это означает, что $\bar{\psi} = \varphi + \psi$, где $\varphi \in E(0)$, $\psi \in E(b)$. Следовательно, по свойству 1): $\bar{\psi} \in E(0 + b) = E(b)$.

x_{oo} по определению общего решения есть функция от двух переменных: $x_{oo}(t) = \varphi(t,c)$. Пусть $x_{чн}$ – некоторое решение (ЛУ). При любом конкретном значении $c = c_0$ функция $\bar{\psi}(t) = \varphi(t,c_0) + x_{чн} \in E(0 + b) = E(b)$, т.е. является решением (ЛУ).

Пусть теперь $\bar{\psi} \in E(b)$ – произвольное решение неоднородного уравнения, тогда по свойству 1) $\bar{\psi} - x_{чн} \in E(0)$, т.е. $\left(\bar{\psi} - x_{чн}\right)(t) = \varphi(t,c_1)$ при некотором значении $c = c_1$. Следовательно, $\bar{\psi}(t) = \varphi(t,c_1) + x_{чн}(t)$.

Задачи. 1) Доказать, что решение (ЛУ) при выполнении (УК) обладает следующим свойством единственности: если решения φ и ψ совпадают в некоторой точке $t = t_0$, то они совпадают всюду на общей части их областей определения.

2) Показать, что при выполнении (УК) общее решение (ЛОУ) можно записать в виде $x_{oo}(t) = \varphi(t)\cdot c$, где $\varphi \in E(0)$, $\varphi(t) \neq 0$ (в виде (2)).

1.2.6. Оператор сдвига по траекториям (ЛУ)

Определение. Оператор $g_{t_0}^t$, определяемый для каждой пары значений $t_0, t \in I$ формулой $g_{t_0}^t x_0 =: \Phi_{t_0}(t) \cdot x_0 + \Phi_{t_0}(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s) ds$ (ОС), называется *оператором сдвига (ОС) по траекториям* (ЛУ) *за время от* t_0 *до* t.

Утверждение (о решении задачи Коши для (ЛУ)). При выполнении (УК) функция $x(t) = g_{t_0}^t x_0$ является решением (ЛУ), которое при $t = t_0$ принимает значение x_0:

Замечание 1. У дифференциального уравнения бесконечно много решений. Для (ЛУ) среди них обязательно найдется решение *задачи Коши,* т.е. решение, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, которое называют *начальным условием* (НУ).

Доказательство. Покажем, что $g_{t_0}^t x_0$ удовлетворяет (ЛУ) по переменной t:

$$\frac{d}{dt} g_{t_0}^t x_0 = a(t)\Phi_{t_0}(t) x_0 + a(t)\Phi_{t_0}(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s) ds + \Phi_{t_0}(t)\left(\Phi_{t_0}(t)\right)^{-1} b(t) =$$

$$a(t)\left[\Phi_{t_0}(t) \cdot x_0 + \Phi_{t_0}(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s) ds\right] + b(t) = a(t) g_{t_0}^t x_0 + b(t).$$

Итак, $g_{t_0}^t x_0$ - решение (ЛУ).

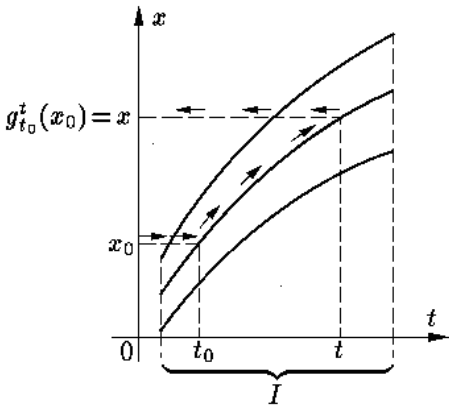
Проверим выполнение начального условия. При $t = t_0$:

$$g_{t_0}^{t_0} x_0 = \Phi_{t_0}(t_0) x_0 + \Phi_{t_0}(t_0) \int\limits_{t_0}^{t_0} \left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s) ds = 1 \cdot x_0 + 0 = x_0.$$

Замечание 2. При $b(t) \equiv 0$ и оператор сдвига по траекториям (ЛОУ) (и соответствующее решение) принимает вид

$$g_{t_0}^t x_0 = \Phi_{t_0}(t) x_0.$$

Замечание 3. Геометрическая интерпретация оператора сдвига.



Замечание 4. Формулу для оператора сдвига по траектории (ЛУ) можно записать ещё в виде

$$g_{t_0}^t x_0 = \Phi_{t_0}(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_s(t) b(s)ds \tag{ОС}$$

в силу справедливости следующей цепочки равенств

$$\Phi_{t_0}(t)\int_{t_0}^{t}\left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s)ds = \int_{t_0}^{t}\Phi_{t_0}(t)\left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s)ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\Phi_{t_0}(t)\Phi_s(t_0) b(s)ds = \int_{t_0}^{t}\Phi_s(t) b(s)ds.$$

Замечание 5. Частное решение ЛНУ (линейного неоднородного уравнения – (ЛУ) с $b(t)\not\equiv 0$) можно найти *методом вариации произвольной постоянной*. Этот метод заключается в том, что в выражении общего решения соответствующего однородного уравнения

$$x_{oo} = \Phi_{t_0}(t)\cdot c$$

полагают c не постоянной, а новой неизвестной функцией от t:

$$x_{чн} = \Phi_{t_0}(t)\cdot c(t)$$

и в таком виде находят частное решение подстановкой в (ЛНУ) следующим образом.

$$\dot{\Phi}_{t_0}(t)\cdot c(t) + \Phi_{t_0}(t)\cdot \dot{c}(t) = a(t)\Phi_{t_0}(t)\cdot c(t) + b(t),$$

$$a(t)\Phi_{t_0}(t)\cdot c(t) + \Phi_{t_0}(t)\cdot \dot{c}(t) = a(t)\Phi_{t_0}(t)\cdot c(t) + b(t),$$

$$\Phi_{t_0}(t)\cdot \dot{c}(t) = b(t),$$

$$\dot{c}(t) = \left(\Phi_{t_0}(t)\right)^{-1}\cdot b(t),$$

$$c(t) = \int_{t_0}^{t}\left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s)ds + c_1.$$

Поскольку мы ищем частное решение, положим $c_1 = 0$. Итак, получили частное решение

$$x_{чн} = \Phi_{t_0}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s)\,ds .$$

Это совпадает со вторым слагаемым в формуле для оператора сдвига (ОС).

1.2.7. Два частных вида (ЛУ).

1) В случае постоянного первого коэффициента $a(t) = a = const$

$$\Phi_{t_0}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a\,ds} = e^{a(t-t_0)} \quad \text{и} \quad g_{t_0}^{t} x_0 = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} b(s)\,ds .$$

2) В случае постоянства обоих коэффициентов $a(t) = a = const$, $b(t) = b = const$

$g_{t_0}^{t} x_0 = e^{a(t-t_0)} x_0 + \dfrac{b}{a}\left(e^{a(t-t_0)} - 1\right)$ и $-\dfrac{b}{a}$ – частное решение.

1.3. Уравнения в полных дифференциалах

1.3.1. Симметричные уравнения и их различные трактовки.

Рассмотрим уравнение:

$$g(t,x)\,dx + h(t,x)\,dt = 0 . \qquad (ghd \leftarrow)$$

Оно симметрично по отношению к t и x.

Уравнение

$$G(x) = H(t) + c \qquad (GHd)$$

также симметрично относительно t и x.

Будем рассматривать подобные симметричные уравнения в общем виде:

$$F(t, dt, x, dx, c) = 0 . \qquad (s)$$

Возможны три трактовки переменных этого уравнения:

1. Обычная (s_x): x – неизвестная функция, t – независимая переменная.
2. Обратная (s_t): t – неизвестная функция, x – независимая переменная.
3. Симметричная (s_{xt}): x и t – две неизвестные функции от некоторого аргумента s, не участвующего в уравнении.

1.3.2. Связи решений симметричного уравнения в различных трактовках.

Утверждение (о решениях симметричного уравнения).

1) Если $x = \varphi(t)$ – решение (s_x), то пара функций $x = \varphi(s), t = s$ – решение (s_{xt}), т.е., решив (s_x), мы найдём некоторое решение (s_{xt}). Аналогично утверждение формулируется для (s_t).

2) Если $x = \varphi(s), t = \psi(s)$ – решение (s_{xt}) и $\psi'(s) \neq 0$ при всех $s \in D(\psi)$, то функция $x = \varphi\left[\psi^{-1}(t)\right]$ – решение (s_x). Аналогично – для (s_t).

3) Если $x=\varphi(t)$ – решение (s_x) и $\varphi'(t)\neq 0$, то $t=\varphi^{-1}(x)$ – решение (s_t). Аналогично – для (s_t).
4) Если уравнение
$$\bar{F}(t,dt,x,dx,c)=0 \qquad (\bar{s})$$
следует из уравнения (s) в смысле симметричной трактовки решений ($(s_{xt})\Rightarrow(\bar{s}_{xt})$), то это следование верно также в двух других трактовках ($(s_x)\Rightarrow(\bar{s}_x)$ и $(s_t)\Rightarrow(\bar{s}_t)$).

Доказательство.

1) Пусть $x=\varphi(t)$ – решение (s_x), тогда $F\big(t,dt,\varphi(t),\dot{\varphi}(t)dt,c\big)=0$ при некотором значении c и любых $t\in D(\varphi)$ и $dt\in\mathbb{R}$. Сделаем замену $t=s,\ dt=ds$, получим: $F\big(s,ds,\varphi(s),\dot{\varphi}(s)ds,c\big)=0$ при том же значении c и любых $s\in D(\varphi)$ и $ds\in\mathbb{R}$. Следовательно, пара функций $x=\varphi(s),\, t=s$ является решением уравнения (s_{xt}).
2) Пусть $x=\varphi(s),\, t=\psi(s)$ – решение (s_{xt}) и $\psi'(s)\neq 0$, тогда
$$F\big(\psi(s),\psi'(s)ds,\varphi(s),\varphi'(s)ds,c\big)=0 \qquad (3)$$
выполнено для всех $ds\in\mathbb{R}$, $s\in D(\psi)=D(\varphi)=:I$ и некоторого c. Покажем, что функция $x=\bar{\varphi}(t)=\varphi\big(\psi^{-1}(t)\big)$ определена на промежутке $J=\psi(I)$ и является решением уравнения (s_x).

Во-первых, производная функции ψ на промежутке I всюду строго положительна или всюду строго отрицательна, так как иначе по теореме Дарбу (*определённая на промежутке производная функции вместе с любыми двумя своими значениями* $a<b$ *принимает и все промежуточные значения* $a<c<b$ *на этом промежутке*) она бы принимала в некоторой точке нулевое значение, что противоречит условию. Следовательно, ψ строго монотонна на I. Отсюда и из непрерывности ψ вытекает, что множество J значений этой функции есть (не вырождающийся в точку) промежуток. Далее, по теореме об обратной функции ψ^{-1} определена на J, множество ее значений есть промежуток I и
$$\big(\psi^{-1}(t)\big)'=\frac{1}{\psi'(s)}\ \text{, где } s=\psi^{-1}(t).$$
Таким образом, функция $x=\bar{\varphi}(t)$ действительно определена на промежутке J и
$$dx=\bar{\varphi}(t)dt=\varphi'(\tau)\big|_{\tau=\psi^{-1}(t)}\cdot\big(\psi^{-1}(t)\big)'=\varphi'(s)\frac{1}{\psi'(s)}dt=\varphi'(s)\frac{1}{\psi'(s)}\psi'(s)ds\,.$$

Покажем, что для любых $t \in J, dt \in \mathbb{R}$ и c из (3) выполнено (s_x). Используя связь переменных $s = \psi^{-1}(t)$ (или $t = \psi(s)$) и их дифференциалов $ds = \dfrac{dt}{\psi'(s)}$ (или $dt = \psi'(s)ds$), получаем

$$F(t,dt,x,dx,c) = F(\psi(s),\psi'(s)ds,\varphi(s),\varphi'(s)ds,c) = 0 \text{ в силу (3).}$$

3) Пусть $x = \varphi(t)$ – решение (s_x), тогда из утверждения (1) следует, что пара функций $x = \varphi(s)$, $t = s$ – решение (s_{xt}) и $\varphi'(s) \neq 0$ на $D(\varphi)$ по условию утверждения. Тогда по утверждению 2) функция $t = \varphi^{-1}(x)$ является решением обратного уравнения. Здесь использовать утверждение 2) следует в варианте, относящемся к обратной трактовке.
4) Пусть $(s_{xt}) \Rightarrow (\overline{s}_{xt})$, покажем, что $(s_x) \Rightarrow (\overline{s}_x)$. Пусть $x = \varphi(t)$ – решение (s_x), тогда по утверждению (1) $x = \varphi(s)$, $t = s$ – решение (s_{xt}) и, следовательно, решение $(\overline{s}_{xt})$. Тогда по утверждению 2) функция $x = \overline{\varphi}(t) = \varphi\left[\psi^{-1}(t)\right] = \varphi(t)$ является решением $(\overline{s}_x)$.

1.3.3. Определения уравнения в полных дифференциалах (УПД) и потенциальной функции (ПФ).

Определение. Уравнение ($ghd \leftarrow$)

$$g(t,x)dx + h(t,x)dt = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах* (УПД), если существует такая дифференцируемая функция двух переменных $\Phi(t,x)$, что левая часть данного уравнения совпадает с её дифференциалом:

$$d\Phi(t,x) = g(t,x)dx + h(t,x)dt .$$

Другими словами

$$g(t,x) = \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}, \; h(t,x) = \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}.$$

Функция $\Phi(t,x)$ при этом называется *потенциальной функцией* (ПФ) данного уравнения.

Примеры.

1. УРП (см. 1.1.7 и 1.1.8) есть УПД.

УРП: $g(x)dx = h(t)dt$, g и h имеют первообразные G и H, соответственно, на своих областях определения. Функция $\Phi(t,x) = G(x) - H(t)$ является потенциальной функцией данного уравнения. Действительно,

$$d\Phi(t,x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial t}dt = g(x)dx - h(t)dt .$$

2. $\Phi(t,x) = x^3 + tx^2 + t^4$. $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2 + 2tx$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = x^2 + 4t^3$.

Следовательно, $\left(3x^2 + 2tx\right)dx + (x^2 + 4t^3)dt = 0$ – УПД.

1.3.4. Полный интеграл УПД.

Теорема (об интегрировании УПД). Если $\left(ghd \leftarrow\right)$ есть УПД с потенциальной функцией $\Phi(t,x)$, то следующее уравнение есть его полный интеграл:

$$\Phi(t,x) = c \qquad (\Phi d)$$

(буква d означает, что последнее уравнение рассматривается только в классе дифференцируемых функций $t = \psi(s)$, $x = \varphi(s)$).

Доказательство. Следующая цепочка эквивалентных переходов показывает, что пара функций $t = \psi(s)$, $x = \varphi(s)$ удовлетворяет $\left(\Phi d\right)$ в том и только том случае, когда она удовлетворяет $\left(ghd \leftarrow\right)$.

$t = \psi(s)$, $x = \varphi(s)$ – решение (Φd) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$D(\psi) = D(\varphi) = I$ – промежуток вещественной оси, φ', ψ' существуют и всюду на I и при некотором значении c равенство $\Phi\left[\psi(s),\ \varphi(s)\right] = c$ справедливо для любого $s \in I$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

φ, ψ дифференцируемы на I и $\dfrac{d}{ds}\Phi\left[\psi(s),\ \varphi(s)\right] = 0$ при всех $s \in I$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left.\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}\right|_{\substack{t=\psi(s),\\ x=\varphi(s)}} \cdot \psi'(s) + \left.\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}\right|_{\substack{t=\psi(s),\\ x=\varphi(s)}} \cdot \varphi'(s) = 0} \quad \Leftrightarrow$$

(по определению потенциальной функции)

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{h\left[\psi(s),\varphi(s)\right]\psi'(s) + g\left[\psi(s),\varphi(s)\right]\varphi'(s) = 0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{h\left[\overset{t}{\psi(s)},\ \overset{x}{\varphi(s)}\right]\overbrace{\psi'(s)ds}^{dt}+g\left[\overset{t}{\psi(s)},\ \overset{x}{\varphi(s)}\right]\overbrace{\varphi'(s)ds}^{dx}=0} \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad t=\psi(s),\ x=\varphi(s)$ – решение $(ghd\leftarrow)$.

1.3.5. Признак полного дифференциала и алгоритм нахождения потенциальной функции (ПФ).

Утверждение (признак УПД). Предположим, что функции $g(t,x)$ и $h(t,x)$ уравнения $(ghd\leftarrow)$ непрерывны на прямоугольнике $I_1\times I_2$ (I_1,I_2 – промежутки вещественной оси) вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

Тогда для того чтобы $(ghd\leftarrow)$ было УПД, необходимо и достаточно, чтобы на этом прямоугольнике выполнялось равенство

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}. \qquad \text{(п УПД)}$$

При этом ПФ находится с помощью алгоритма, который будет описан в доказательстве.

Доказательство.

(необходимость) Предположим, что $(ghd\leftarrow)$ есть (УПД). Это означает, что у него есть ПФ. Обозначим её $\Phi(t,x)$. Тогда

$$g(t,x)=\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x} \quad \text{и} \quad h(t,x)=\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t\partial x}, \quad \frac{\partial h(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial x\partial t}.$$

По условию эти частные производные непрерывны. Если вторые смешанные частные производные существуют и непрерывны, то они равны (см. курс математического анализа). Следовательно, справедливо (п УПД).

(достаточность) Пусть выполнены предварительные условия и (п УПД). Найдем ПФ, тем самым докажем, что $(ghd\leftarrow)$ есть (УПД).

По определению (ПФ), $\dfrac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}=g(t,x)$. Это ОДУ с независимой переменной x и параметром t. Интегрированием по x получаем:

$$\Phi(t,x)=\int\limits_{x_0}^{x} g(t,\xi)d\xi+c(t).$$

Продифференцируем это равенство по t и учтем, что $\dfrac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}=h(t,x)$.

$$h(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x} g(t,\xi)d\xi+\dot{c}(t).$$

По правилу Лейбница дифференцирования определенного интеграла по параметру (см. курс математического анализа), если функции $g(t,\xi)$ и $\dfrac{\partial g(t,\xi)}{\partial t}$ непрерывны в некотором прямоугольнике, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x} g(t,\xi)d\xi=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial g(t,\xi)}{\partial t}d\xi.$$

Поэтому

$$h(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial g(t,\xi)}{\partial t}d\xi+\dot{c}(t).$$

По (п УПД) $\dfrac{\partial g(t,\xi)}{\partial t}=\dfrac{\partial h(t,\xi)}{\partial \xi}$, следовательно,

$$h(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial h(t,\xi)}{\partial \xi}d\xi+\dot{c}(t)=h(t,x)-h(t,x_0)+\dot{c}(t).$$

Поэтому $\dot{c}(t)=h(t,x_0)$. Следовательно $c(t)=\int_{t_0}^{t} h(\tau,x_0)d\tau+c_1$. Положим $c_1=0$, поскольку нас интересуют не все ПФ, а какая-нибудь одна из них.

$$\Phi(t,x)=\int_{x_0}^{x} g(t,\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t} h(\tau,x_0)d\tau. \qquad \text{(ф ПФ)}$$

Таким образом, мы получили формулу для ПФ, где x_0,t_0 – произвольные фиксированные точки промежутков I_1, I_2.

1.3.6. Пример.

$\left(3x^2+2xt\right)dx+\left(x^2+4t^3\right)dt=0$ (см. 1.3.3.)

$\dfrac{\partial(3x^2+2xt)}{\partial t}=2x$, $\dfrac{\partial(x^2+4t^3)}{\partial x}=2x$.

(п УПД) выполнено, следовательно, это УПД. Вычисляя по формуле (ф ПФ) потенциальную функцию, примем для простоты $x_0=t_0=0$

$$\Phi(t,x)=\int_{0}^{x}\left(3\xi^2+2\xi t\right)d\xi+\int_{0}^{t}\left(0^2+4\tau^3\right)d\tau=\left(\xi^3+\xi^2 t\right)\Big|_0^x+\tau^4\Big|_0^t=x^3+x^2t+t^4.$$

По теореме об интегрировании УПД (1.3.4.) полный интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$x^3+tx^2+t^4=c.$$

1.3.7. Об интегрирующем множителе (пример).

Рассмотрим уравнение

$$\left(3+\frac{2t}{x}\right)dx+\left(1+\frac{4t^3}{x^2}\right)dt=0.$$

Проверим, является ли это уравнение УПД:

$$\frac{\partial\left(3+\frac{2t}{x}\right)}{\partial t}=\frac{2}{x},\quad \frac{\partial\left(1+\frac{4t^3}{x^2}\right)}{\partial x}=-\frac{8t^3}{x^3}.$$

(п УПД) не выполнено.

Определение. Для уравнения $(ghd\leftarrow)$ $g(t,x)dx+h(t,x)dt=0$ функцию $\mu(t,x)$ называют *интегрирующим множителем*, если при умножении на неё обеих частей этого уравнения получим (УПД)

$$\mu(t,x)\cdot g(t,x)dx+\mu(t,x)\cdot h(t,x)dt=0.$$

В общем случае задача поиска интегрирующего множителя не тривиальна, однако в некоторых частных случаях легко удаётся найти μ от одной переменной:

$\mu(t,x)=\mu(x)$ не зависит от t,

$\mu(t,x)=\mu(t)$ не зависит от x.

Пусть μ не зависит от t, тогда по (п УПД)

$$\frac{\partial\mu(x)g(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial\mu(x)h(t,x)}{\partial x}, \text{ откуда}$$

$$\mu(x)\cdot\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}=\mu'(x)\cdot h(t,x)+\mu(x)\cdot\frac{\partial h(t,x)}{\partial x} \text{ или}$$

$$\mu'(x)=\mu(x)\cdot\left(\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\right)/\,h(t,x).$$

μ должно быть решением последнего дифференциального уравнения, и его легко найти в случае, когда дробь $\left(\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\right)/\,h(t,x)$ не зависеть от t, так как при этом уравнение является (ОЛУ). Аналогично, если μ не зависит от x, то оно удовлетворяет уравнению $\mu'(t)=\mu(t)\cdot\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}\right)/\,g(t,x)$ и легко отыскивается, если дробь $\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}\right)/\,g(t,x)$ не зависит от x.

Возвращаемся к исходной задаче:
$\left(\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial h(t,x)}{\partial x}\right)/\,h(t,x)=\left(\frac{2}{x}+\frac{8t^3}{x^3}\right)/\left(\frac{x^2+4t^3}{x^2}\right)=\frac{2}{x}$ – не зависит от t.

Находим интегрирующий множитель, как решение уравнения
$\mu'(x)=\frac{2}{x}\cdot\mu(x)$. $\mu(x)=x^2$ – одно из решений и интегрирующий множитель исходного уравнения. Умножая обе части уравнения на x^2, получим:

$$\left(3x^2+2xt\right)dx+\left(x^2+4t^3\right)dt=0.$$

Это уравнение (являющееся следствием нашего) мы решали в предыдущем пункте и получили его полный интеграл

$$x^3+tx^2+t^4=c.$$

Для исходного уравнения необходимо исключить из него нулевое решение, добавив условие $x\neq 0$.

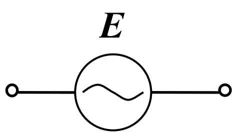
1.4. Примеры математического моделирования

1.4.1. Линейные элементы электрической цепи.

R [Ом] – параметр сопротивления (активного сопротивления), $u=Ri$ – закон Ома (здесь и далее u – напряжение на элементе, i – ток в элементе);

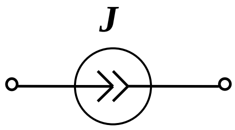
L [Гн] – индуктивность, $L\frac{di}{dt}=u$ – уравнение индуктивности;

C [Ф] – ёмкость, $C\frac{du}{dt}=i$ – уравнение ёмкости;



– источник напряжения,

напряжение на нём $u=E(t)$ – известная заданная функция;



– источник тока,

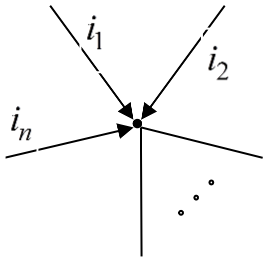
в котором ток $i = J(t)$ – известная заданная функция.

Оба идеальных источников имеют условное отличие между собой, которое заключается в выборе одного из двух равенств $u = E(t)$ или $i = J(t)$ в зависимости от топологии цепи таким образом, чтоб не возникало противоречий в получаемой системе уравнений (см. теорию электрических цепей).

1.4.2. Законы Кирхгофа.

Для описания работы электрической цепи помимо уравнений её элементов необходимо учитывать топологию соединений элементов с помощью следующих двух законов Кирхгофа.

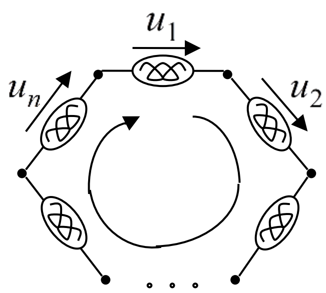
I.



$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

Первый закон, или закон тока: **сумма всех входящих в узел** (выходящих из узла) **цепи токов равна нулю.**

II.

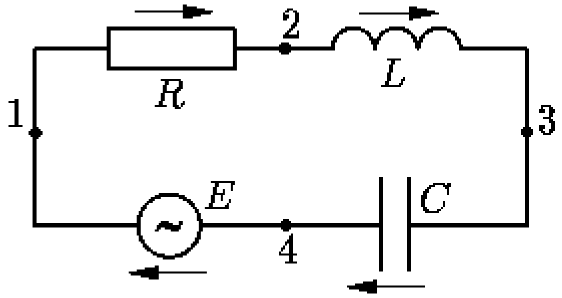


$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$$

Второй закон, закон напряжений: **сумма напряжений в замкнутом контуре при согласованном выборе ориентации элементов контура в любой момент времени равна нулю.**

1.4.3. Уравнение $RLCE$ - контура.

Рассмотрим следующую электрическую цепь, составленную из сопротивления, индуктивности, ёмкости и источника напряжения.



Анализ цепи начинается с выбора положительного направления для измерения токов и напряжений на всех элементах цепи.

По второму закону Кирхгофа для единственного контура этой цепи:

$u_R + u_L + u_C + u_E = 0$.

Из первого закона Кирхгофа для всех четырёх узлов имеем:

$i_R = i_L = i_C = i_E := i$.

Воспользуемся уравнениями элементов:

$u_R = Ri,\ u_L = L\dfrac{di}{dt},\ C\dfrac{du_C}{dt} = i,\ u_E = E(t)$ и положим $E(t) = -A\cos\omega_0 t$.

Обозначим $u_C =: u$ и подставим в уравнение второго закона Кирхгофа выражения напряжений сопротивления, индуктивности и источника ЭДС, получим систему уравнений $RLCE$-контура:

$$\begin{cases} Ri + \dfrac{Ldi}{dt} + u = A\cos\omega_0 t, \\ C\dfrac{du}{dt} = i. \end{cases}$$

Второе уравнение продифференцируем по t: $C\dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{di}{dt}$. Подставим в первое уравнение системы выражения тока и его производной:

$RC\dfrac{du}{dt} + LC\dfrac{d^2u}{dt^2} + u = A\cos\omega_0 t$ или, разделив на LC, получим $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{1}{LC}A\cos\omega_0 t$.

Обозначим $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}},\ \dfrac{R}{L} = 2\delta$. Тогда

$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega^2 u = \omega^2 A\cos\omega_0 t$ – это уравнение колебательного контура; функция изменения значения тока в каждом элементе цепи вычисляется из уравнения конденсатора $i = C\dot{u}$, а напряжения на сопротивлении и индуктивности вычисляются из уравнений этих элементов.

1.4.4. Математическая модель биологической системы “хищник-жертва” (В.Вольтерра).

Рассмотрим классическую модель «хищник-жертва» сосуществования в некоторой области только двух видов животных, именуемых «хищник» и «жертва». Предполагается, что «жертва» не имеет ограничения в растительной пище, а «хищник» питается исключительно «жертвой».

Введем обозначения численностей животных в данном ареале в момент t:

N_1 – численность “жертвы”;

N_2 – численность “хищника”.

Если бы “хищника” не было, то скорость роста “жертвы” была бы пропорциональна её численности:

$$\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1.$$

Если хищник имеется, то коэффициент прироста ε_1 уменьшается на величину, пропорциональную количеству “хищника”:

$$\dot{N}_1 = \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2\right) N_1.$$

Если бы “жертвы” не было, а были бы только “хищники”, то скорость изменения численности “хищника” была бы отрицательной:

$$\dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2,\ \varepsilon_2 > 0.$$

Если появляются “жертвы”, то

$$\dot{N}_2 = \left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1\right) N_2.$$

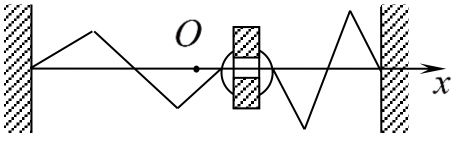
Итак, уравнения системы “хищник-жертва” имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2\right) N_1, \\ \dot{N}_2 = \left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1\right) N_2. \end{cases}$$

N_1, N_2 – численности “жертвы” и “хищника” в момент t. Для удобства моделирования они считаются произвольными вещественными, а не целыми.

1.4.5. Механический гармонический осциллятор.

Гармонический осциллятор – это грузик на гладком стержне, поддерживаемый с двух сторон пружинками. Ось x направим вдоль стержня с нулём в точке равновесия сил воздействия пружин на груз.



Пусть масса груза $m = const$, ускорение груза при движении (с учётом физического смысла производной) равно $\ddot{x}$. На груз действует сила упругости $F = -kx$. По второму закону Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

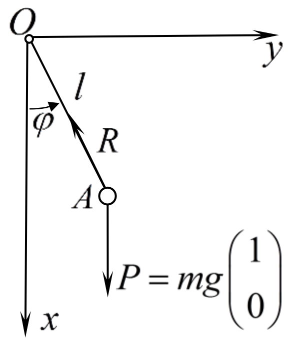
Здесь мы предполагаем, что трения между грузом и стержнем нет.

Введем обозначение $\frac{k}{m}=\omega^2$, тогда

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0.$$

$x=\cos\omega t,\ x=\sin\omega t$ – два линейно независимых решения этого уравнения.
Позже будет показано, что $x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ – общее решение ($c_1,\ c_2$– произвольные константы).

1.4.6. Уравнение маятника.



Невесомый стержень OA длины l свободно вращается в неподвижной вертикальной плоскости вокруг (неподвижной) точки O, точка A несет груз (маятник) массы m. Требуется найти уравнение движения груза.
Выберем декартову систему координат так, как показано на рисунке (всё движение происходит в плоскости, поэтому мы не рассматриваем третью координату). Введём обозначения:
$r=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ – вектор положения маятника на плоскости;

$v=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}$ – вектор скорости маятника; $a=\begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\end{pmatrix}$ – вектор ускорения маятника;

F – сила, действующая на маятник, состоит из веса P (направленного вертикально вниз) и силы реакции стержня R (направленной вдоль стержня):

$$F=P+R.$$

По второму закону Ньютона:

$$ma=P+R.$$

$$P=mg\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ R=|R|\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix},$$

$$r=l\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}\Rightarrow v=\dot{r}=l\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}\Rightarrow a=l\ddot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}+l\dot{\varphi}^2\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$ml\ddot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}+ml\dot{\varphi}^2\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}=mg\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+|R|\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\-\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Скалярно умножив обе части на вектор $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$, получим:

$$ml\ddot{\varphi}+0=-mg\sin\varphi+0,$$

или

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

Обозначим $\frac{g}{l}=\omega^2$.ч

Получим $\ddot{\varphi}+\omega^2\sin\varphi=0$ – уравнение маятника.

При малых φ $\sin\varphi\sim\varphi$ имеем уравнения малых колебаний маятника: $\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0$. Данное уравнение есть уравнение гармонических колебаний (правда, другого процесса см.1.4.5).

1.5. О приближенных методах решения дифференциальных уравнений

1.5.1. Об интегрировании ОДУ в квадратурах.

Выражение общего решения или полного интеграла через элементарные функции и интегралы от них называют интегрированием данного ОДУ в квадратурах (термин "квадратура" в данной ситуации означает взятие неопределенного интеграла, а "интегрирование" — нахождение полного интеграла). Интегрирование в квадратурах допускают лишь уравнения некоторых простейших типов. Большинство же ОДУ можно решать только приближенно или исследовать их качественными методами, то есть методами, позволяющими выяснять свойства решений без явного их отыскания. Качественные и приближенные методы составляют основное содержание современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Здесь мы рассмотрим два простейших приближенных метода, которые, помимо своей чисто прикладной ценности, полезны еще тем, что позволяют связать с основными понятиями теории обыкновенных дифференциальных уравнений систему простых наглядных представлений.

1.5.2. Геометрическая интерпретация ОДУ.

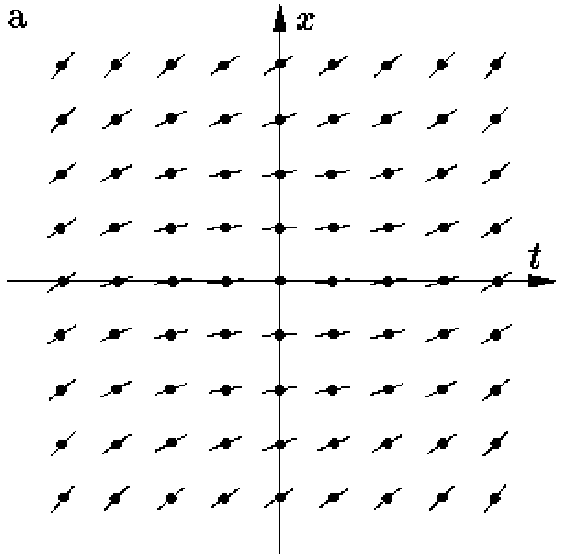
Определение. Графики решений $x=\varphi(t)$ скалярного ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной

$$x'=f(t,x), \qquad \text{(НС)}$$

называются его *интегральными кривыми*.

В геометрических терминах уравнение (НС) выражает следующий факт: *кривая на (t,x)-плоскости является его интегральной кривой в том и только том случае, когда в любой точке (t_0,x_0) этой кривой она имеет касательную с угловым коэффициентом* $k=f(t_0,x_0)$.

Таким образом, зная правую часть уравнения (НС), мы можем заранее построить касательные ко всем интегральным кривым во всех точках: для этого каждой точке (t_0,x_0) нужно сопоставить проходящую через нее прямую с угловым коэффициентом $k=f(t_0,x_0)$. Полученное соответствие между точками плоскости и проходящими через них прямыми называется *полем направлений уравнения* (НС). Конечно, фактически поле направлений можно построить лишь в виде достаточно густой сетки отрезков с отмеченными на них точками (см. рис.а). После этого задача построения интегральных кривых становится похожей на отыскание нужного пути в большом парке, снабженном густой сетью стрелок-указателей (рис. б).



1.5.3. Метод изоклин.

Определение. *Изоклиной* называют кривую на плоскости, вдоль которой угловой коэффициент $k = f\left(t_0, x_0\right)$ (НС) сохраняет постоянное значение.

Построение поля направлений значительно облегчается предварительным нахождением и построением изоклин. Уравнение изоклин имеет вид

$$f\left(t, x\right) = k$$

вдоль изоклин отрезок, принадлежащий полю направлений, переносится параллельно своему первоначальному положению: переход к другой изоклине осуществляется изменением k и построением отрезка с новым угловым коэффициентом.

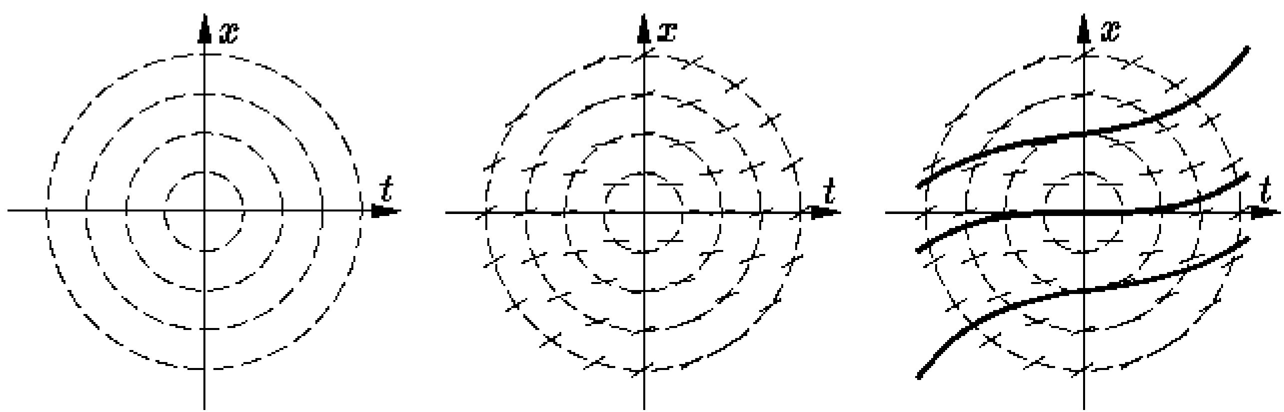
Например, для уравнения

$$x' = t^2 + x^2$$

изоклины описываются уравнением

$$t^2 + x^2 = k$$

Это – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. На



рисунке изображен процесс последовательного построения изоклин, поля направлений и интегральных кривых.

Метод изоклин как средство эскизного представления интегральных кривых сохраняет свое значение и в нынешнюю эпоху бурного развития компьютерного моделирования и вычислительных методов.

1.5.4. Метод ломаных Эйлера.

Метод ломаных применяется для приближенного нахождения значений $x_i = \varphi(t_i)$ решения φ на некоторой *сетке* значений аргумента t: $t_0, t_1 = t_0 + \tau, t_2 = t_1 + \tau, \ldots, t_n = t_{n-1} + \tau,$ τ – заданное положительное число, называемое *шагом сетки*. В применении к уравнению (НС) этот метод заключается в следующем. В точке $t = t_{n-1}$ (НС) принимает вид

$$x'_{i-1} = f\left(t_{i-1}, x_{i-1}\right).$$

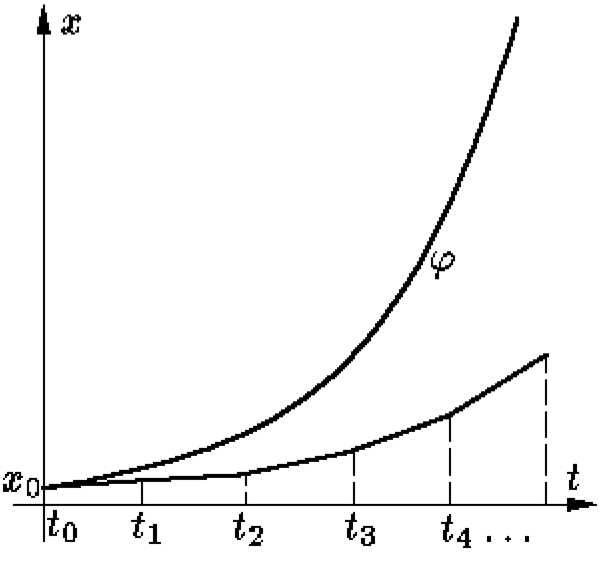
Заменим здесь приближенно x'_{i-1} конечно-разностным отношением

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} \approx f\left(t_{i-1}, x_{i-1}\right)$$

и выразим x_i:

$$x_i \approx x_{i-1} + \tau f\left(t_{i-1}, x_{i-1}\right).$$

Если $x_0 = \varphi(t_0)$ задать произвольно, то полученная рекуррентная формула позволяет приближенно найти значения $x_1, x_2, \ldots .$



Возвращаясь к образу парка со стрелками-указателями, метод ломаных Эйлера можно представлять себе так (см. рис.): из точки $(t_0,\, x_0)$ мы движемся, сообразуясь с указателем, помещенным в этой точке в течение "τ секунд". Придя (через время τ) в точку $(t_1,\, x_1)$, мы меняем направление, пользуясь указателем в этой точке; через время τ мы приходим в точку $(t_2,\, x_2)$, опять меняем направление, и т. д.

Конечно, точность этого метода нуждается в специальном обосновании, которое мы проводить не будем. Кажется весьма правдоподобным (и оказывается в широких предположениях об $f(t,\, x)$ верным) тот факт, что при $\tau \to 0$ погрешность метода ломаных Эйлера стремится к нулю на любом конечном промежутке изменения t.

В отличие от метода изоклин, метод ломаных Эйлера применим и к уравнениям более высокого порядка. Например, для уравнения

$$x'' = f\left(t, x, x'\right)$$

он принимает вид

$$\frac{\dfrac{x_i - x_{i-1}}{\tau} - \dfrac{x_{i-1} - x_{i-2}}{\tau}}{\tau} = f\left(t_{i-1}, x_{i-1}, \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{\tau}\right).$$

Из этого приближенного равенства нужно выразить x_i через x_{i-1}, x_{i-2} и t_{i-1}. Заметим, что для использования получившейся рекуррентной формулы нужно задать не только $x_0 = \varphi\left(t_0\right)$, но и $x_1 = \varphi\left(t_1\right)$ (или $\varphi'\left(t_0\right)$ в разностной записи).

Это наводит на следующую догадку, которая впоследствии будет доказана: для выделения определенного решения скалярного уравнения m-го порядка достаточно задать в некоторой точке t_0 значение самого решения и его производных до порядка $m-1$ включительно.

Определение. Система

$$\begin{aligned}
&x^{(m)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}\right),\\
&x\left(t_0\right) = x_0,\\
&x'\left(t_0\right) = x_1,\\
&\ldots\\
&x^{(m-1)}\left(t_0\right) = x_{m-1}
\end{aligned}$$

называется *начальной задачей* , или *задачей Коши*.

Упомянутая выше гипотеза заключается в том, что при естественных предположениях относительно f она имеет единственное решение.

В качестве примера решим методом Эйлера задачу Коши

$$x' = ax, \ x\left(0\right) = x_0 \ \ (a, x_0 - \text{параметры}).$$

Фиксируем $t \neq 0$ и положим $\tau = \dfrac{t}{n}$, ($n \in \mathrm{N}$).

Тогда

$$x_i \approx x_{i-1} + \tau a x_{i-1} = \left(1 + \frac{at}{n}\right) x_{i-1} \approx \left(1 + \frac{at}{n}\right)^i x_0.$$

Следовательно,

$$x\left(t\right) \approx x_n \approx \left(1 + \frac{at}{n}\right)^n x_0$$

Полученное приближенное значение при $n \to \infty$ стремится к функции $e^{at}x_0$, которая, как легко проверить, является точным решением рассматриваемой задачи Коши.

1.6. Материалы к экзамену

1.6.1. Вопросы.

1. Определение ОДУ.
2. Определение решения ОДУ.
3. Определение следования и эквивалентности ОДУ.
4. Определение интеграла и полного интеграла ОДУ.
5. Определение общего решения ОДУ.
6. Теорема об уравнении с разделенными переменными.
7. Утверждение об общем решении ЛОУ.
8. Свойства решений ЛУ.
9. Оператор сдвига по траекториям ЛУ (определение и формулировка утверждения о решении задачи Коши для (ЛУ) с доказательством).
10. Утверждение о решениях симметричного уравнения (в различных трактовках).
11. Определение УПД и ПФ.
12. Теорема об интегрировании УПД.
13. Признак полного дифференциала и алгоритм нахождения ПФ.
14. Интегрирующий множитель (определение и пример).
15. Уравнение колебательного контура.
16. Математическая модель системы «хищник-жертва».
17. Уравнение механического гармонического осциллятора.
18. Уравнение маятника.
19. Метод изоклин (описание и пример). Определения интегральной кривой и изоклины.
20. Метод ломаных Эйлера (описание и пример).

1.6.2. Задачи.

1. Является ли функция $\varphi(t)=|t|$ решением ОДУ $t\,x' = x$ на промежутке $[-1,\ 1]$?
2. Пусть функции $x=\varphi(t)$ и $x=\psi(t)$ являются решениями уравнения $x' = f(t,x)$ на отрезках $[-1,\ 0]$ и $[0,\ 1]$, соответственно, и $\varphi(0)=\psi(0)$. Является ли функция
$$x=\begin{cases}\varphi(t), \text{ если } t\in[-1,0],\\ \psi(t), \text{ если } t\in[0,1]\end{cases}$$
решением этого уравнения на отрезке $[-1,\ 1]$?

3. Верно ли следующее утверждение: если уравнение $x' = f(t, x)$ есть следствие уравнения $x' = g(t, x)$, то любой интеграл первого уравнения является интегралом второго?
4. Верно ли следующее утверждение: если уравнение $x' = f(t, x)$ есть следствие уравнения $x' = g(t, x)$, то любое решение первого уравнения является решением второго? А наоборот?
5. Как выглядят изоклины уравнений $x' = g(x)$ и $x' = f(t)$?
6. Если $x = \varphi_1(t)$ и $x = \varphi_2(t)$ – решения уравнения $x' = |x|$, а $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, то является ли функция $x = \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t)$ решением этого уравнения?
7. Найдите все решения уравнения $x' = 2\sqrt{|x|}$.
8. Являются ли уравнения $\frac{dx}{dt} = x$ и $x\frac{dt}{dx} = 1$ эквивалентными в обычной и симметричной трактовках?
9. Приведите пример функции, удовлетворяющей уравнению $x''dx + \omega^2 x dx = 0$, но не являющейся решением уравнения $x'' + \omega^2 x = 0$, $(\omega^2 \neq 0)$.
10. Если уравнения $g_1(t,x)dx + h_1(t,x)dt = 0$ и $g_2(t,x)dx + h_2(t,x)dt = 0$ являются на $\mathbb{R}^2$ УПД, то можно ли утверждать, что уравнение $\left[g_1(t,x) + g_2(t,x)\right]dx + \left[h_1(t,x) + h_2(t,x)\right]dt = 0$ также есть УПД?
11. Если ОДУ имеет интеграл вида $t^2 + x^2 = C$, то можно ли утверждать, что любое решение этого ОДУ ограничено?
12. Может ли функция $x = \sin t$ быть решением уравнения вида $\dot{x} = f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$? А на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

Литература

1. Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н. Очерки по ОДУ. http://www.bsadovskiy.ru
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984, 271с.
3. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966, 332 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971, 312с.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980, 232 с.

6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : [учебное пособие для физ.-мат. фак. ун-тов] / И.Г. Петровский . М. : Физматлит, 2009 . 207 с.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г.Петровский. М. : Московский университет, 1984. 295 с.
8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф.Филиппов. М.; Ижевск : 2002, 174 с.
9. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 540 с.

Составители: Прядко Ирина Николаевна,
Петрова Любовь Петровна

Редакция авторов