Министерство образования Российской Федерации

457

Математический факультет

Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ по курсу «Дифференциальные уравнения»

Методические указания

для студентов 2 курса д/о математического факультета

Составители:
О.А. Лобанова
И.Н.Прядко

ВОРОНЕЖ 2001

Данное пособие предназначено для студентов математических специальностей и представляет собой задания к лабораторным работам по курсу "Дифференциальные уравнения". Каждое задание состоит из 30 вариантов. Разработка содержит все основные виды уравнений, систем и различных задач по всему курсу и может служить основой для выяснения усваивания студентами практических знаний по дифференциальным уравнениям.

При подборке заданий использовалась приведенная ниже литература. Некоторые задачи являются новыми.

Литература

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высш. школа, 1978. — 287 с.
2. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Вышейш. школа, 1987. — 318 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1992. — 127 с.

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Различные дифференциальные уравнения первого порядка

Основные виды уравнений: уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним; однородные уравнения и приводящиеся к ним; линейные уравнения; уравнения Бернулли; уравнения в полных дифференциалах; уравнения, не разрешенные относительно производной.

Задание: Определить тип и решить каждое дифференциальное уравнение первого порядка.

Вариант 1

1. $(2t+3x-1)dt = (5-4t-6x)dx$;
2. $xy' = e^y + 2y'$;
3. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$;
4. $x^2y' - 2xy = 3y$;
5. $y' - 1 = e^{x+2y}$;
6. $e^{-y}(1+y') = 1$;
7. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;
8. $(1+y^2)dx + xydy = 0$;
9. $yy' = -\frac{2x}{\cos y}$;
10. $5e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x)\frac{dy}{\cos^2 y} = 0$;
11. $\ln\cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0$;
12. $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)y^2dy = 0$;
13. $yy' + xe^y = 0$;
14. $\operatorname{tg} y dx - x\ln x dy = 0$;
15. $(1-x^2)y' - 2xy^2 = xy$;
16. $y\sin\frac{x}{2}dx - \cos\frac{x}{2}dy = 0$;
17. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$;
18. $(x+x^2)y' - (1+2x)y = 1+2x$;
19. $(xy - 3x + 5y - 15)dx + (xy - 2x + y - 2)dy = 0$;
20. $y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$;
21. $y\ln y dx + xdy = 0$;
22. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$;
23. $e^x\sin^3 y + (1+e^{2x})y'\cos y = 0$;
24. $y^2\sin x dx + \cos^2 x\ln y dy = 0$;
25. $x^2 + xy' = 3x + y'$;
26. $y'(3x^2-2x) - y(6x-2) = 0$;
27. $(x-1)(y^2-y+1)dx = (y+1)(x^2+x+1)dy$;
28. $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 y = 1$;
29. $x^2y' + \cos 2y = 1$;
30. $y' + \sin(x-y) = \sin(x+y)$.

Вариант 2

1. $y \sin x + y' \cos x = 1;$
2. $2x^3 + y = xy';$
3. $x(x-1)y' + 2xy = 1;$
4. $y' - 1 = \frac{y}{x(x+1)};$
5. $xy' - 2y = -2x^2;$
6. $y' + 2xy = e^{-x^2};$
7. $xy' - 2y = x^3 \cos x;$
8. $x^2 + xy' = y;$
9. $y' - 2xy = 2xe^{x^2};$
10. $y' - y \sin x = \sin x \cos x e^{-\cos x};$
11. $y' - 2xy = -2x;$
12. $y' + y \cos x = e^{-\sin x};$
13. $y' - y \cot x = 2x - \frac{x^2 \cos x}{\sin x};$
14. $xy' - (y + x^2 \sin x) = 0;$
15. $x^3 y' + 3x^2 y = 2;$
16. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x;$
17. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5;$
18. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x;$
19. $(2te^x + x^4)x' = xe^x;$
20. $(t - 2tx - x^2)x' + x^2 = 0;$
21. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x};$
22. $y' x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x;$
23. $y' - ye^x = 2xe^{e^x};$
24. $y' + xe^x y = e^{(1-x)e^x};$
25. $y' \cos x - y \sin x = 2x;$
26. $y' + y \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x + 1;$
27. $y'(2y \ln y + y - x) = y;$
28. $(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy)y' = 1;$
29. $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2};$
30. $x^2 y' \cos \frac{1}{x} - y \sin \frac{1}{x} = -1.$

Вариант 3

1. $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y;$
2. $xy' = 2\sqrt{y} \cos x - 2y;$
3. $y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2-1};$
4. $xyy' = y^2 + x;$
5. $2xy' - y = -y^3 \sin x;$
6. $y' - y^4 \cos x = y \operatorname{tg} x;$
7. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}};$
8. $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y};$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{(1 + x^2)y} \cdot \operatorname{arctg} x;$
10. $xy' + y = y^2 x;$
11. $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y} e^x;$
12. $2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y};$
13. $(2t^2 x \ln x - t)x' = x;$

14. $x' - x^2 e^t = -2x;$
15. $xx' + t = \frac{t^2 + x^2}{2t};$
16. $tx^2 x' - x^3 = \frac{1}{3} t^4;$
17. $(x^3 + e^y)y' = 3x^2;$
18. $y' + 2xy = y^2 e^{x^2};$
19. $2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x;$
20. $xy' + y = y^2 \ln x;$
21. $3y^2 y' + 16x = 2xy^3;$
22. $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \cot x;$
23. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y;$
24. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1};$
25. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y;$
26. $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{\frac{2}{3}};$
27. $2(y - 2xy - x^2 \sqrt{y}) + x^2 y' = 0;$
28. $(x^2 + y^2 + 1)y' + xy = 0;$
29. $y + (x - 2\sqrt{\frac{x}{y}})y' = 0;$
30. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}.$

Вариант 4

1. $y^2 + x^2 y' = xyy';$
2. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0;$
3. $x^2(dy - dx) = (x + y) y dx;$
4. $y'(x^3 + y^2 x) - y^3 = 0;$
5. $2x^2 y' = x^2 + y^2;$
6. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2};$
7. $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x};$
8. $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2};$
9. $xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2};$
10. $xy' = y(\ln y - \ln x);$
11. $y' \sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x};$
12. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0;$
13. $xy' = y \sin^2 \ln \frac{y}{x} + y;$
14. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} + x \sin \frac{y}{x};$
15. $xdy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx = 0;$
16. $\left(y^4 - 2x^3 y\right) dx + \left(x^4 - 2xy^3\right) dy = 0;$
17. $\frac{dt}{t^2 - tx + x^2} = \frac{dx}{2x^2 - tx};$
18. $txx' = \sqrt{t^4 - x^4} + x^2;$
19. $xyy' - y^2 = (x^2 + y^2)\frac{x}{y - x};$
20. $\left(x^2 y + xy^2\right) dx + \left(y^3 - x^3\right) dy = 0;$
21. $\left(5xy + 2y^2\right) dx = -\left(y^2 + 4xy + 3x^2\right) dy;$
22. $xy' = y + \sqrt{y^2 - 4x^2};$
23. $\frac{dx}{x^2 + 5y^2 + xy} = \frac{dy}{y^2 - 4xy};$
24. $y' = \frac{x + 2y}{-5x};$
25. $y' = 3e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$
26. $xy' = y + x \cos^2 \frac{y}{x};$

27. $2xyy' = x\sqrt{y^2 - x^2} + 2y^2$;

28. $\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\frac{1}{y^2}dy + \frac{2x}{y^3}dx = 0$;

29. $\frac{1}{y^2} + \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)\cdot\frac{x}{y^3}y' = 0$;

30. $z + x - \frac{x^2}{2z}z' - xz' = 0$.

Вариант 5

1. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$;

2. $y + xy^3 + (x^2y^2 + 2x)y' = 0$;

3. $x + y - 2 + (1 - x)y' = 0$;

4. $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$;

5. $(x + 4)dx + (2x - 3y + 5)dy = 0$;

6. $2y'(xy^2 - x^2) = y^3$;

7. $yy' + xy = x^3$;

8. $(x + y)dx + (x - y - 2)dy = 0$;

9. $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$;

10. $4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$;

11. $(x + y^3)dx + 3(y^3 - x)y^2dy = 0$;

12. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$;

13. $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$;

14. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$;

15. $y\left(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1}\right)dx + 2xdy = 0$;

16. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;

17. $(x + 2y + 1)dx - (x - 3)dy = 0$;

18. $(x + y - 1)dx - (x - y - 1)dy = 0$;

19. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$;

20. $xyy' - y^2 = x^4$;

21. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$;

22. $2(x^5 + 2x^3y - y^2x)dx + (y^2 + 2x^2y - x^4)dy = 0$;

23. $(x - y^2)dx + 2xydy = 0$;

24. $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$;

25. $(x - y + 3)dx + (3x + y + 1)dy = 0$;

26. $(5x - 7y + 1)dy + (x + y - 1)dx = 0$;

27. $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$;

28. $\left(1 + \sqrt{\frac{y^2}{x} - 1}\right)dx - 2ydy = 0$;

29. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

30. $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$.

Вариант 6

1. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2 - \frac{1}{y})dy = 0$;

2. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$;

3. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$;

4. $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$;

5. $(e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0$;

6. $\frac{y^2}{x}dx + (y + 2y\ln x)dy = 0$;

7. $\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$;

8. $2x\cos ydx + (\cos y - x^2\sin y)dy = 0$;

9. $\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$;

10. $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$;

11. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\cdot dy = 0$;

12. $(3x^2y + y^3 + e^x)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$;

13. $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xy\cdot dy = 0$;

14. $x(2x^2 + y^2) + e^x + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$;

15. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3 + \sin y)dy = 0$;

16. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$;

17. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$;

18. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$;

19. $\left(3x^2\mathrm{tg}\, y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$;

20. $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$;

21. $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$;

22. $(3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0$;

23. $y\cos xdx + (2y - \sin x)dy = 0$;

24. $\left(\frac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(-\frac{x^2}{2y^2} + 2xy + y\right)dy = 0$;

25. $\left(\frac{2x}{y^3} + x\right)dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$;

26. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy = 0$;

27. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{1}{x}\right)dx - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}dy = 0$;

28. $\frac{y + \sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)\cdot dy = 0$;

29. $\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} + (\sqrt{1 + x^2} + x^2 - \ln x)y' = 0$;

30. $\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx = \frac{x^2+y^2}{xy^2}dy$.

Вариант 7

1. $2y' + y = \ln y'$;

2. $xy' + y = \ln y'$;

3. $3y'^4 = y' + y$;

4. $2xy' - y = \sin y'$;

5. $y = 2xy' + \ln y'$;

6. $y = 1.5xy' + e^{y'}$;

7. $y - xy' = y'^2$;

8. $y = y'\ln y'$;

9. $y = (y'-1)e^{y'}$;

10. $y + xy' = y'^2$;

11. $y = 2xy' - y'^2$;

12. $y = xy'^2 - 2y'^3$;

13. $y = x(1+y') + y'^2$;

14. $y = xy' + y' - y'^2$;

15. $y = xy' - e^{y'}$;

16. $y'^3 + (3x-6)y' = 3y$;

17. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$;

18. $2y' = x + \ln y'$;

19. $y = y'^2 - xy' + 0.5x^2$;

20. $xy'^2 = y - y'$;

21. $3y'^3 - xy' + 1 = 0$;

22. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$;

23. $y'^2 - 4xy' + 2y + 2x^2 = 0$;

24. $y = 0.5y'^2 + \ln y'$;

25. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$;

26. $y = x + y'^2 - y'$;

27. $2y(y'+2) = xy'^2$;

28. $y = 0.5xy' + \frac{y'^2}{x^2}$;

29. $y = y' + \sin y' + \cos y'$;

30. $y = -xy' + y'^{\frac{5}{2}}$.

1.2 Интегрирующий множитель

Вид уравнения: уравнение, приводящееся к уравнению в полных дифференциалах путем умножения на интегрирующий множитель.

Задание: Найти интегрирующий множитель и решить полученное уравнение в полных дифференциалах.

1. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$;

2. $2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0$;

3. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$;

4. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$;

5. $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$;

6. $(x^4\ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$;

7. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos ydy = 0$;

8. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$;

9. $\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$;

10. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$;

11. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$;

12. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$;

13. $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$;

14. $x\left(4 + \frac{1}{x^2-y^2}\right)dx - y\left(4 - \frac{1}{x^2-y^2}\right)\cdot dy = 0$;

15. $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$;

16. $\left(2y + \frac{1}{(x+y)^2}\right)dx = -(3y+x)dy + \frac{1}{(x+y)^2}dy$;

17. $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy = 0$;

18. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$;

19. $\left(\frac{2}{y} + \frac{y}{x^3}\right)dx + \left(\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^2}\right)dy = 0$;

20. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$;

21. $\cos xdy + (\sin x + e^y)dx = 0$;

22. $(x^3 - xy^2 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$;

23. $(y + x^3)dy + (3x^5 - 3x^2y)dx = 0$;

24. $(y - xy^2\ln x)dx + xdy = 0$;

25. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$;

26. $ydx + \left(\frac{2y}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)dy = 0$;

27. $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$;

28. $\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x\right)dx - dy = 0$;

29. $\left(x + \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{y^3}{x}\right)dy = 0$;

30. $2xy^2dx + (x^2y + 1)dy = 0$.

1.3 Геометрические и физические задачи

Виды уравнений: все задачи данного раздела сводятся к уравнениям первого порядка, которые были указаны в пункте 1.1.

Задание: Решить следующие задачи, составив дифференциальное уравнение задачи и решив его.

1. Доказать, что кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через постоянную точку, есть окружность.

2. Доказать, что кривая, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

3. Найти кривые, для которых угловой коэффициент касательной в какой-либо точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

4. Найти кривые, для которых площадь Q, ограниченная кривой, осью Ox и двумя ординатами $X = 0$, $X = x$, является данной функцией от y: $Q = a^2\ln\frac{y}{x}$.

5. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

6. Найти кривую, проходящую через точку $M(1,3)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью OY.

7. Кривая проходит через точку $(1, 2)$. Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти эту кривую.

8. Найти кривую, проходящую через точку $(0, 1)$ и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке тангенс угла касательной к этой кривой равен удвоенному произведению координат точки касания.

9. Кривая проходит через точку $A(a, a)$ и обладает следующим свойством: если в любой точке $M(x, y)$ кривой провести касательную до пересечения с осью ординат, то площадь трапеции, образованной осями координат, касательной и ординатой точки касания, равна a^2. Найти уравнение указанной кривой.

10. Кривая проходит через начало координат. Середина отрезка ее нормали, заключенного между любой точкой кривой и осью абсцисс, лежит на параболе $y^2 = ax$. Составить уравнение указанной кривой.

11. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

12. Найти кривые, у которых расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

13. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

14. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

15. Найти кривые, обладающие тем свойством, что величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

16. Найти кривые, для которых произведение абсциссы какой-нибудь точки на величину отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

17. Найти кривые, для которых треугольник, образованный осью ординат, касательной и радиус-вектором точки касания, равнобедренный.

18. Найти кривые, у которых отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к отрезку, отсекаемому нормалью на оси абсцисс, есть величина постоянная, равная k.

19. Найти кривые, у которых отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси абсцисс, к радиусу-вектору точки касания есть величина постоянная, равная k.

20. Найти кривые, для которых треугольник, образованный нормалью с осями координат, был бы равновелик треугольнику, образованному осью абсцисс, касательной и нормалью.

21. Найти кривые, в каждой точке которых длина отрезка касательной равна длине отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс.

22. Найти кривые, касательная к которой отсекает на оси ординат отрезок, равный $1/n$-ой суммы координат точки касания.

23. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату ординаты точки касания.

24. Найти кривые, подкасательная которых есть среднее арифметическое координат точки касания.

25. Найти кривые, для которой сумма длин отрезков касательной и подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания.

26. Найти кривые, у которых поднормаль всюду равна p.

27. Найти кривые, для которых сумма длин отрезков нормали и поднормали есть величина постоянная, равная a.

28. Найти кривые, в каждой точке которых поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.

29. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ox, равен y^2/x.

30. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Oy, равен x^2/y.

2 Изоклины

Задание: Для заданного уравнения определить его область задания, область существования решения задачи Коши, изучить поле направлений, определяемое им (найти изоклины, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых.

1. $y' = y - x^2$;
2. $2(y + y') = x + 3$;
3. $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$;
4. $(y^2 + 1)y' = y - x$;
5. $y' = \frac{y-3x}{y+3x}$;
6. $y' = \frac{y}{x+y}$;
7. $x^2 + y^2 y' = 1$;
8. $(x^2 + y^2)y' = 4x$;
9. $y' = 2x(1 - y)$;
10. $y' = \frac{x+|x|}{y+|y|}$;
11. $y' = x - 2y - 1$;
12. $y' = 6x + y$;
13. $y' = 2x - y$;
14. $y' = \sin(x + y)$;
15. $y' = y - x^2 + 2x - 2$;
16. $y' = \frac{y-x}{y+x}$;
17. $y' = x + y$;
18. $y' = y - x$;
19. $y' = (y - 1)^2$;
20. $y' = \cos(x - y)$;
21. $y' = x^2 + 2x - y$;
22. $y' = \frac{y+1}{x-1}$;
23. $y' = \frac{x+y}{x-y}$;
24. $yy' = x - |x|$;
25. $xy' = 2y$;
26. $2y' = 3(y + x)$;
27. $y' = \frac{2xy}{1-x^2}$;
28. $y' = -y\sin x$;
29. $y' = \frac{\sqrt{y}}{x}$;
30. $y' = y\cos x$.

3 Дифференциальные уравнения высших порядков

3.1 Уравнения, допускающие понижение порядка

Основные виды уравнений: уравнения, не содержащие искомую функцию; уравнения, не содержащее независимую переменную; уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных.

Задание: Решить каждое дифференциальное уравнение путем понижения порядка.

1. $xyy' - xy'^2 - yy' = 0$;
2. $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$;
3. $y''^2 = 4(y' - 1)$;
4. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$;
5. $1 + y'^2 = 2yy''$;
6. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$;
7. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$;
8. $yy'' + y'^2 = 1$;
9. $2yy'' = y'^2 + y^2$;
10. $yy'' = y'^2 - y'^3$;
11. $y'^2 + 2yy'' = 0$;
12. $xy'' - 2y' = 2x^4$;
13. $xy'' + y' = 0$;
14. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$;

15. $x^2yy'' = (y - xy')^2$;
16. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$;
17. $xy'' = y' + x^2$;
18. $x \ln x y'' = y'$;
19. $xy''' - y'' = 0$;
20. $y'' = y'^2$;
21. $y'' = 1 + y'^2$;
22. $y'' = y'(1 + y')$;
23. $x^2y'' + xy' = 1$;
24. $y''(2y + 3) - 2y'^2$;
25. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$;
26. $x(y''y - y'^2) = yy' + xy^2$;
27. $yy'' - y'^2 = 0$;
28. $y'' - \frac{y'}{x-1} = (x - 1)x$;
29. $y'''(x - 1) - y'' = 0$;
30. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$.

3.2 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Вид уравнений: линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Задание: Решить уравнение.

1. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$;
2. $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = 0$;
3. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$;
4. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$:
5. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + y'' + y' + y = 0$;
6. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$;
7. $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$;
8. $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$;
9. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$;
10. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
11. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$;
12. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$;
13. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$;
14. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$;
15. $y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$;
16. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$;
17. $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0$;
18. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$;
19. $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$;
20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$;
21. $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$;
22. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$;
23. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$;
24. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$;

25. $y^{(4)} - 16y'' - 40y' - 25y = 0$;

26. $y^{(5)} + y^{(4)} - 5y''' - 7y'' - 10y' = 0$;

27. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' + 7y'' - 28y' - 20y = 0$;

28. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 8y''' - 10y'' - 25y' = 0$;

29. $y^{(4)} - 2y''' + 10y'' - 18y' + 9y = 0$;

30. $y^{(5)} - 5y^{(4)} + 10y''' - 20y'' + 24y' = 0$.

3.3 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью

Вид уравнений: линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

Задание: Решить уравнение, найдя его частные решения методом неопределенных коэффициентов.

1. $y^{(4)} - y''' = 4$;
2. $y^{(4)} + 2y'' + y = 8e^{-x}$;
3. $y^{(4)} - y = 6e^{2x}$;
4. $y^{(4)} + 4y'' = 5e^{x}$;
5. $y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$;
6. $y'' + 4y' + 3y = \cos x$;
7. $y'' - 4y' + 3y = \sin x$;
8. $y'' - 5y' + 6y = \sin 2x$;
9. $y'' - 4y' + 4y = x^2$;
10. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$;
11. $y'' - 2y' + y = x^3$;
12. $y'' + 8y' = 8x$;
13. $y'' + 2y' + 2y = x + 1$;
14. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$;
15. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$;
16. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$;
17. $y'' + y = 4x\cos x$;
18. $y'' - y' = e^{x}\sin x$;
19. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$;
20. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$;
21. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^{x}$;
22. $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$;
23. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$;
24. $y'' + 2y' + 2y = (5x+4)e^{x} + e^{-x}$;
25. $y'' - y' - 2y = e^{x} + e^{-2x}$;
26. $y'' - y = x + \sin x$;
27. $y''' - y'' = 1 + e^{x}$;
28. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$;
29. $y'' + y = e^{x} + \cos x$;
30. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2x} - 4\sin 2x$.

3.4 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Вид уравнений: линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Задание: Решить уравнение, найдя его частные решения методом вариации произвольных постоянных.

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$;
2. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$;
3. $y'' - y' = \frac{1}{e^x+1}$;
4. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^{x}$;
5. $y''' + y' = \frac{1}{\cos x}$;
6. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$;
7. $y'' + y = \operatorname{tg} x$;
8. $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$;
9. $y'' - y = \frac{2e^x}{1-e^x}$;
10. $y'' + y = \frac{1}{1+\cos^2 x}$;
11. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$;
12. $y'' + y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$;
13. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x^2}$;
14. $y'' - 6y' + 9y = \frac{2e^{3x}}{x}$;
15. $y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{x^2}$;
16. $y'' + 2y' + y = xe^{x} + \frac{1}{xe^x}$;
17. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \sqrt{x^{-3}}$;
18. $y'' - 2y' + y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$;
19. $y'' + y = (\cos x)^{-\frac{3}{2}}$;
20. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{1+x}$;
21. $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3}e^{x}$;
22. $y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$;
23. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$;
24. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x\cos x}}$;
25. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x\sin x}$;
26. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$;
27. $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$;
28. $y'' - 2y' = 4x^2e^{x^2}$;
29. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+3}$;
30. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

3.5 Уравнения Эйлера

Вид уравнений: уравнения Эйлера.

Задание: Решить уравнение.

1. $x^2y'' - xy' = -x$;
2. $x^3y'' + x^2y' + xy = 2x\sin\ln x$;

3. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$;

4. $x^2y'' - 2xy' + y = 6x\ln x$;

5. $x^2y'' + xy' + 2y = x(6 - \ln x)$;

6. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$;

7. $x^2y'' - xy' - 3y = -16x^{-1}\ln x$;

8. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x$;

9. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 5x^2 - x$;

10. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$;

11. $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 6\ln x$;

12. $x^3y'' - x^2y' - 3xy = -16\ln x$;

13. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x$;

14. $x^2y'' + 3xy' + y = 4x$;

15. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$;

16. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$;

17. $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$;

18. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = 2\sin\ln\frac{1}{x+1}$;

19. $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$;

20. $(x+5)^2y'' + (x+5)y' - y = (x+5)^3$;

21. $(2x+1)^2y'' - 2y = \sin\ln(2x+1)$;

22. $x^2y'' - xy' + y = \ln^2 x + \ln x$;

23. $(x-1)^2y'' + 3(x-1)y' + y = (x-1)\ln(x-1)$;

24. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 3\ln x$;

25. $(x+1)^2y'' + 5(x+1)y' + 13y = 5\cos\ln(x+1)$;

26. $x^2y'' + xy' + 4y = 2x^{-2}$;

27. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 5x^2$;

28. $(x+5)^2y'' - 2y = 2\ln^2(x+5)$;

29. $(x-3)^2y'' - (x-3)y' + 2y = -(x-3)\ln(x-3)$;

30. $(x-2)^2y'' - (x-2)y' - 3y = -10\cos\ln(x-2)$.

4 Системы дифференциальных уравнений

4.1 Линейные однородные системы

Задание: Решить однородную систему.

1. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -4x + 4y, \\ z' = -2x + y + 2z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 2x + 6y - 15z, \\ y' = x + y - 5z, \\ z' = x + 2y - 6z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 9x - 6y - 2z, \\ y' = 18x - 12y - 3z, \\ z' = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x + 6y - 15z, \\ y' = x + 3y - 5z, \\ z' = x + 2y - 4z. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -4y, \\ y' = x - 4y, \\ z' = x - 2y - 2z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 12x - 6y - 2z, \\ y' = 18x - 9y - 3z, \\ z' = 18x - 9y - 3z. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 2z, \\ y' = 5x - 7y + 3z, \\ z' = 6x - 9y + 4z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2z, \\ y' = 6x - 4y + 4z, \\ z' = 4x - 4y + 5z. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x - 3y + 3z, \\ y' = -2x - 6y + 13z, \\ z' = -x - 4y + 8z. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 7x - 12y + 6z, \\ y' = 10x - 19y + 10z, \\ z' = 12x - 24y + 13z. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x - 3y + 4z, \\ y' = 4x - 7y + 8z, \\ z' = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 3y, \\ z' = 3x + 3z. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 6x - 3y + 2z, \\ z' = 8x - 6y + 5z. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z, \\ y' = x - 4y + 9z, \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 4x - y - z, \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = x - y + 2z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = -y + 2z. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = y - 2z - x, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y + 4z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x + y - z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = 2x + 2y + z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + y, \\ z' = -x + z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -2x + y + 2z, \\ y' = -x + 2z, \\ z' = -2x + 3z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = y + 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3z, \\ z' = 3y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2x + 3y, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = x - 3y + 3v, \\ y' = -2x - 6y + 13v, \\ z' = -3y + z + 3v, \\ v' = -x - 4y + 8v. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + 5z - 3v, \\ v' = 4x - y + 3z - v. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2v, \\ y' = 4x - 5y - 2z + 4v, \\ z' = 3z - 2v, \\ v' = 2z - v. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 3x - y + z - 7v, \\ y' = 9x - 3y - 7z - v, \\ z' = 4z - 8v, \\ v' = 2z - 4v. \end{cases}$

4.2 Линейные неоднородные системы

Вид уравнений: линейные неоднородные системы.

Задание: Решить систему, найдя общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов.

1. $\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + 3y + e^{-t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{-2t}, \\ y' = -5x - 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{t}, \\ y' = -2x + 2y + 5e^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = -x + y + 2e^{t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2y + \sin t, \\ y' = -x + 2y - 2\cos t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 4x - y + \cos t, \\ y' = 5x - \sin t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -2x + 3\sin t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 5y - 4\cos t, \\ y' = -x - 4y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = y - \cos t, \\ y' = -x + \sin t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + e^{t}, \\ y' = 4x + 5y + 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 4t - 1, \\ y' = x - 2y + t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = t^2 - y, \\ y' = x + t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 8y - x + 8te^{3t}, \\ y' = x + y - e^{3t}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x - 3y + 3e^{t}, \\ y' = y + 3x - \sin 3t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -x - 5y + 8e^{2t}, \\ y' = x + y + 3\cos t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x - y + e^{3t}, \\ y' = y - 4x + 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x + y + \sin t, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x + y + te^{t}, \\ y' = 3x + 4y + e^{t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + y + \cos 2t, \\ y' = -2x + y + \sin 2t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 3x - y + 10e^{t}, \\ y' = 4x - y + 6e^{t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -3x + 2y + \cos t, \\ y' = -2x + y + 2\sin t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 5x + 3y + te^{t}, \\ y' = -3x - y + 2e^{t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = x - 2y + 2\cos t, \\ y' = 2x - 3y + 2\sin t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 4te^{t}, \\ y' = 4x - y + 2e^{t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = x + y + 2t, \\ y' = 2x + 6e^{-t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 2y - x + 10\cos t, \\ y' = 4y - 3x + e^{2t}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 2y - 4x - \sin + 5\cos t, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = x + 3y + 8t^2, \\ y' = -3x + 7y. \end{cases}$

5 Теорема Коши – Пикара

Задание: Для данной задачи Коши проверить выполнение условий теоремы Коши – Пикара (глобальной или локальной), построить три последовательных приближения и оценить последовательность приближений.

1. $\begin{cases} \dot x = t\sin t, & x(1) = 1, \\ \dot y = tx; & y(1) = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot x = \operatorname{tg} t + y, & x(0) = 1, \\ \dot y = e^t + 4y; & y(0) = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot x = x - 1 + e^t, & x(0) = 0, \\ \dot y = \frac{t}{\cos^2 t}; & y(0) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot x = e^{2t} + 5x - y, & x(0) = 1, \\ \dot y = 6y - x; & y(0) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot x = y + t^2, & x(0) = 0, \\ \dot y = 4x + t\sin 3t; & y(0) = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot x = \sin t, & x(1) = 1, \\ \dot y = x; & y(1) = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot x = 1 + t\sin t, & x(\pi) = 2\pi, \\ \dot y = y + e^{2t}; & y(\pi) = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot x = 3x + 8y, & x(0) = 6, \\ \dot y = -x - 3y; & y(0) = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot x = -3x - 4y, & x(0) = 1, \\ \dot y = -2x - 5y; & y(0) = 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot x = y + t, & x(0) = 2, \\ \dot y = x - t; & y(0) = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot x_1 = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 4, \\ \dot x_2 = x_1 - 5\sin t; & x_2(0) = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot x_1 = t^2 - x_2, & x_1(1) = 1, \\ \dot x_2 = t + x_1; & x_2(1) = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot x = t\sin y, & x(1) = 1, \\ \dot y = tx; & y(1) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \ddot y = \operatorname{tg} x + z, & y(0) = 1, \\ \dot z = e^x + 14z; & z(0) = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot x = 4x - 5y + 4t, & x(0) = 0, \\ \dot y = t + x - 2y; & y(0) = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot x = -y + \sin t, & x(0) = \pi, \\ \dot y = x + \cos t; & y(0) = 2\pi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot x = 3 - 2y, & x(1) = 3, \\ \dot y = 2x - 2t; & y(1) = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot x = -t^2 + 2y - x, & x(0) = 1, \\ \dot y = -x - 4y; & y(0) = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot y = \operatorname{arctg}(z - 1), & y(0) = 0, \\ \dot z = \frac{t}{\cos^2 t}; & z(0) = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot x_1 = -x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot x_2 = 2(x_1 + x_2); & x_2(0) = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot x = x + 5y, & x(0) = 2, \\ \dot y = -x - 3y - t; & y(0) = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot y = x + y^2, & y(0) = 0, \\ \dot z = 2z - 2x^2 - 3; & z(0) = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot x = t^2 + y, & x(1) = 2, \\ \dot y = -x + t; & y(1) = -1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot y = \sin z, & y(1) = 1, \\ \dot z = y; & z(1) = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot x = 6y - t\sin t, & x(0) = 1, \\ \dot y = -x + 2y; & y(0) = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot x = t^3 - y, & x(1) = 0, \\ \dot y = x + y; & y(1) = -1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot y = 1 + t\sin y, & y(\pi) = 2\pi, \\ \dot z = x + 1; & z(\pi) = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot x = x + \sin t, & x(0) = 2, \\ \dot y = -2y + x; & y(0) = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot x = e^t + 2y, & x(0) = 0, \\ \dot y = -y + x; & y(0) = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot x = y + \sin t, & x(0) = 0, \\ \dot y = \cos t - y + x; & y(0) = \pi. \end{cases}$

6 Теория устойчивости

6.1 Устойчивость по первому приближению

Задание: Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0$, $y = 0$ следующих систем дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} \dot x = e^x - \cos 5y, \\ \dot y = \sin 2x - \ln(1 + y). \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot x = \ln(1 + 3x) - \cos y + e^{x^2}, \\ \dot y = \sin 2x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot x = 2x - \ln(1 + y + \sin x), \\ \dot y = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot x = -\sin(x + 3y), \\ \dot y = 4x + \ln(1 - y). \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot x = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot y = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot x = -2x + 8\sin^2 y, \\ \dot y = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot x = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot y = -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right). \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot x = 3x - 22\sin y + x^2 - y^3, \\ \dot y = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot x = -10x + 4e^y - 4\cos y^2, \\ \dot y = 2e^x - 2 - y + x^4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot x = 7x + 2\sin y - y^4, \\ \dot y = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot x = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3 y, \\ \dot y = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot x = \frac{5}{2}xe^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot y = 2x + ye^{-\frac{y^2}{2}} - y^4\cos x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot x = \frac{3}{4}\sin x - 7y(1 - y)^{\frac{1}{3}} + x^3, \\ \dot y = \frac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot x = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot y = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{14}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot x = 5x + y\cos y - \frac{x^3}{3}, \\ \dot y = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot x = \frac{5x}{1+x^2} - 3ye^y + 20, \\ \dot y = 32\cos y - \sin x + 12y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot x = 7x^3 - 10e^x + \sqrt{y^2 + y + 1}, \\ \dot y = 10\cos 2x - 3y + x^4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}\frac{x-2y}{y+1} - 3e^x, \\ \dot{y} = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y+1}} + 4x^5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4y^2-1} - \operatorname{tg} 2x, \\ \dot{y} = 3x - 10y^4 + y\cos y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 \sin y - 5y + e^{x^2}\frac{1}{x+1}, \\ \dot{y} = 4x\cos x - \operatorname{arctg} 3y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg} x \cos y - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \frac{7}{\cos} + 4\sqrt{x+y+16}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1+x+y) - 6\sin y + 8x, \\ \dot{y} = \sqrt{x+\frac{1}{4}} - 2\sin(x+y) + 23. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = \cos xy + 10\frac{x-2}{y+1}, \\ \dot{y} = e^{x^2+3x} + \operatorname{arctg}(x+y) + 2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{(1-x^2+y^2)2x}{(x+1)^2+y^2} + xy, \\ \dot{y} = \frac{1-x^2+y^2}{2} - 4x^2y + \sin(x+y). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y^2+4} - 3\sin x + e^{x+y}, \\ \dot{y} = 3xy^5 + \cos(y-x) + y + 3x. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 2\ln(x+y+4) - e^x x + \frac{y}{2}, \\ \dot{y} = \sin(y^3-y) + \frac{1}{5}x - 2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 6\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{y^3+1} + y, \\ \dot{y} = \sin^2 4x + e^{x^2+y}x - \sqrt{y+1}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 4\ln(x^2+5x+20) - x^3y^2 - 25y, \\ \dot{y} = \sin 2x \cos y - 3\operatorname{arctg} y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\cos x - \sqrt{4x+3y^3+4}, \\ \dot{y} = \frac{e^{x^2}}{y-4} + 25 + 6\sin x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{x+y} - \sqrt{x^2+3x+1} - 24y^3, \\ \dot{y} = \ln(x-4) + 5\cos(x+y) - \sin(x-y). \end{cases}$

6.2 Критерий устойчивости Рауса — Гурвица и критерий Михайлова

Задание: Исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения с помощью критериев Рауса — Гурвица и Михайлова.

1. $y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0;$
2. $3y^{(4)} + 2y''' + y'' + 4y' + 2y = 0;$
3. $2y^{(4)} + y''' + 3y'' + 2y' + 5y = 0;$
4. $4y^{(4)} + y''' + 2y'' + 5y' + 3y = 0;$
5. $y^{(4)} + 3y''' + y'' + 3y' + 4y = 0;$
6. $5y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + y' + y = 0;$
7. $2y^{(4)} + 6y''' + 9y'' + 6y' + 2y = 0;$
8. $y^{(4)} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0;$
9. $y^{(4)} + y''' + 4y'' + y' + y = 0;$
10. $3y^{(4)} + 2y''' + y'' + y' + 3y = 0;$

11. $5y^{(4)} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0;$
12. $4y^{(4)} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0;$
13. $y^{(4)} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0;$
14. $y^{(4)} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0;$
15. $y^{(4)} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0;$
16. $y^{(4)} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0;$
17. $2y^{(4)} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0;$
18. $3y^{(4)} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0;$
19. $y^{(4)} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0;$
20. $y^{(4)} + y''' + y' + y = 0;$
21. $2y^{(4)} + 11y''' + 21y'' + 16y' + 4y = 0;$
22. $2y^{(4)} + 9y''' + 32y'' + 54y' + 20y = 0;$
23. $6y^{(4)} + 29y''' + 45y'' + 24y' + 4y = 0;$
24. $y^{(4)} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0;$
25. $y^{(4)} + y''' + 4y'' + y' + y = 0;$
26. $y^{(5)} + 13y^{(4)} + 43y''' + 51y'' + 40y' + 12y = 0;$
27. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0;$
28. $y^{(5)} + y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = 0;$
29. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + 2y = 0;$
30. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y''' + 2y'' + y' + 2y = 0.$

6.3 Особые точки

Задание: Определить тип особых точек и исследовать их на устойчивость для следующих систем дифференциальных уравнений, сделать рисунок.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -7x - 6y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \dot{y} = 7x - 3y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = 4x + 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 3y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = 5x - 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 5y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 3y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + 7y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 6x - y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 3y, \\ \dot{y} = 5x - 4y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 9y, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y, \\ \dot{y} = -5x + 2y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 9y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y, \\ \dot{y} = 20x - 9y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 6y, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 10x + 9y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

Составители: Лобанова Ольга Александровна
Прядко Ирина Николаевна
Редактор Тихомирова О.А.

Заказ№ 410 от 4.10 2001г. Тир. 50 экз. Лаборатория оперативной полиграфии ВГУ