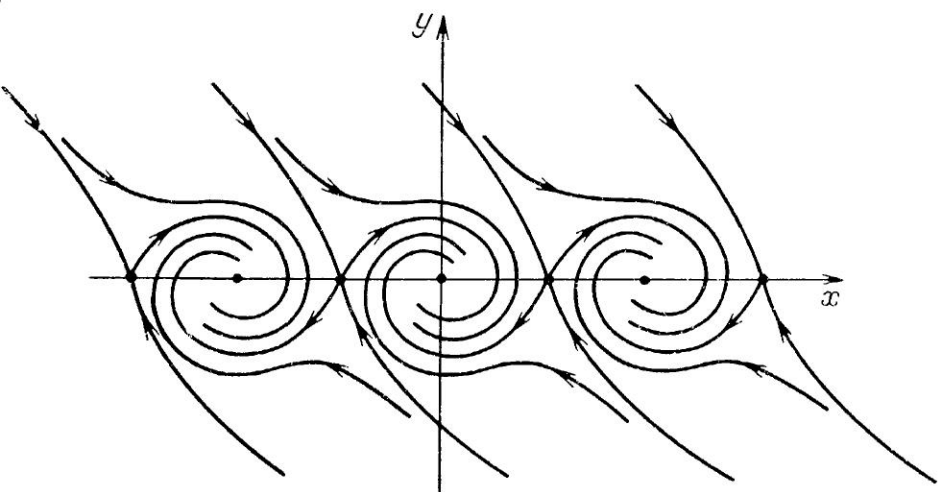


В. В. Амелькин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
В ПРИЛОЖЕНИЯХ



В. В. Амелькин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
В ПРИЛОЖЕНИЯХ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.161.6

А61

УДК 517.91 (023)

Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.—160 с.

Книга популярно знакомит с возможностями использования обыкновенных дифференциальных уравнений при изучении реальных явлений и процессов. Приемы составления дифференциальных уравнений, а также некоторые методы их качественного исследования иллюстрируются задачами, возникающими в различных областях знаний.

Для школьников старших классов, преподавателей, студентов, для специалистов нематематических профессий, использующих математику в своей работе.

Табл. 15. Ил. 97. Библиогр. 8 назв.

Рецензент

доктор физико-математических наук *М. В. Федорюк*

А $\frac{1702050000-031}{053 (02)-87}$ 38-87

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1987

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
-----------------------	---

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ И ИХ РЕШЕНИЙ

Чей кофе более горячий?	9
Стационарный тепловой поток	11
Случай в заповеднике	13
Истечение жидкости из сосудов. Водяные часы	18
Эффективность рекламы	20
Спрос и предложение	21
Химические реакции	22
Дифференциальные модели в экологии	24
Одна задача математической теории эпидемий	28
Кривая погони	33
Модели боевых действий	35
Почему маятниковые часы не являются точными?	44
Циклоидальные часы	46
Задача о брахистохроне	51
Среднее арифметическое, среднее геометрическое и дифференциальное уравнение	54
О полете тела, брошенного под углом к горизонту	57
Невесомость	59
Законы Кеплера движения планет	61
Прогиб балок	68
Транспортировка леса	71

КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Кривые с постоянным направлением магнитной стрелки	80
Зачем инженеру знать теоремы существования и единственности?	84
Динамическая интерпретация дифференциальных уравнений второго порядка	91
Консервативные системы в механике	95
Устойчивость точек равновесия и периодических движений	103
Энергетические функции	107
Простые состояния равновесия	111

Движение тела единичной массы под действием линейных пружин в среде с линейным трением	114
Адиабатический поток идеального газа в канале переменного диаметра	119
Точки равновесия высшего порядка	123
Преобразование обратными радиусами и однородные координаты	127
Поток идеального газа во вращающемся канале постоянного диаметра	130
Изолированные замкнутые траектории	138
Периодические режимы в электрических цепях	145
Кривые без контакта	150
Список литературы	153

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальное уравнение является одним из основных математических понятий. Дифференциальное уравнение — это уравнение для отыскания функций, производные которых (или дифференциалы) удовлетворяют некоторым наперед заданным условиям. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального явления или процесса, называют *дифференциальной моделью* этого явления или процесса. Понятно, что дифференциальные модели — это частный случай того множества математических моделей, которые могут быть построены при изучении окружающего нас мира. При этом необходимо отметить, что существуют и различные типы самих дифференциальных моделей. Мы будем рассматривать лишь модели, описываемые так называемыми *обыкновенными дифференциальными уравнениями*, одной из характерных особенностей которых является то, что неизвестные функции в этих уравнениях зависят только от одной переменной.

В процессе построения обыкновенных дифференциальных моделей (да и не только их) важное, а подчас и первостепенное значение имеет знание законов той области науки, с которой связана природа изучаемой задачи. Так, например, в механике это могут быть законы Ньютона, в теории электрических цепей — законы Кирхгофа, в теории скоростей химических реакций — закон действия масс и т. д.

Конечно, на практике приходится иметь дело и с такими случаями, когда неизвестны законы, позволяющие составить дифференциальное уравнение, и поэтому необходимо прибегать к различным предположениям (гипотезам), касающимся протекания процесса при малых изменениях параметров — переменных. К дифференциальному уравнению тогда приводит предельный переход. При этом, если окажется, что результаты исследования полученного дифференциального уравнения как математической модели согласуются с опытными данными, то это и будет означать, что высказанная гипотеза правильно отражает истинное положение вещей *).

Работая над книгой, автор ставил перед собой две цели. Первая из них заключалась в том, чтобы на примерах (в основном содержательных, а не чисто иллюстративных) из различных областей знаний показать возможности использования обыкновенных дифференциальных уравнений в процессе познания окружающей нас действительности. Конечно, рассмотренные примеры далеко не охватывают тот круг вопросов, которые могут быть решены с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Но, во-первых, «никто не обнимет необъятного», а во-вторых, уже и приведенные примеры дают представление о той роли, которую играют обыкновенные дифференциальные уравнения при решении практических задач.

Вторая цель — познакомить читателя с простейшими приемами и методами исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, характерными для *качественной теории дифференциальных уравнений*. Дело в том, что лишь в редких случаях удается решить дифференциальное уравнение в так называемой *замкнутой форме*, т. е. представить решение в виде аналитической формулы, использующей конечное число простейших операций над элементарными функциями. И это тогда, когда известно, что дифферен-

*) Более подробно о математических моделях можно прочитать, например, в увлекательных книгах А. Н. Тихонова, Д. П. Костомарова «Рассказы о прикладной математике» (М.: Наука, 1979) и Н. Н. Моисеева «Математика ставит эксперимент» (М.: Наука, 1979).

циальное уравнение решение имеет! Другими словами, оказывается, что решения дифференциальных уравнений в своем многообразии таковы, что для их представления в замкнутой форме конечного числа аналитических операций недостаточно. Такая ситуация схожа с имеющей место в теории алгебраических уравнений: в случае алгебраических уравнений первой и второй степеней их решения могут быть легко получены в радикалах; если обратиться к уравнениям третьей и четвертой степеней, то решения в радикалах еще могут быть получены, но формулы становятся весьма сложными; что же касается алгебраического уравнения общего вида степени выше четвертой, то решение такого уравнения в радикалах, вообще говоря, уже не может быть получено.

Возвращаясь к дифференциальным уравнениям, отметим, что если для представления их решений пользоваться бесконечными рядами того или иного вида, то удастся решить значительно больше уравнений, чем в замкнутой форме. Но, к сожалению, часто бывает так, что наиболее существенные и интересные свойства решений никак нельзя выявить из вида полученных рядов. Более того, даже если удастся решить дифференциальное уравнение и в замкнутой форме, то далеко не всегда такое решение можно проанализировать, ибо полученная зависимость между различными параметрами часто оказывается весьма и весьма сложной.

Таким образом, становится очевидной необходимость в приемах и методах, которые позволяли бы, не решая самих дифференциальных уравнений, все же получать необходимые сведения о тех или иных свойствах решений. Так вот, такие приемы и методы существуют, и они и составляют содержание качественной теории дифференциальных уравнений, в основе которой лежат общие теоремы о существовании и единственности решений, о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров. Частичное обсуждение роли теорем существования и единственности решений проводится в параграфе «Зачем инженеру знать теоремы

существования и единственности?». Что же касается качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений вообще, то, начиная с работ А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова (конец XIX-го века), в которых были заложены ее основы, она интенсивно развивается и ее методы широко используются в процессе познания окружающей нас действительности.

Автор благодарен профессорам Ю. С. Богданову и М. В. Федорюку за полезные советы и замечания, высказанные в процессе работы над книгой.

В. В. Амелькин

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ И ИХ РЕШЕНИЙ

Чей кофе более горячий?

Анатолий и Владимир заказали в кафе кофе и сливки. Когда им одновременно подали по чашке одинаково горячего кофе и сливки, они поступили следующим образом. Анатолий добавил в кофе немного сливок, накрыл чашку бумажной салфеткой и вышел позвонить по телефону. Владимир сразу же накрыл чашку бумажной салфеткой, а добавил то же количество сливок только через 10 мин, когда вернулся Анатолий, и они начали пить кофе вместе. Кто же пил более горячий кофе?

Задачу будем решать с учетом естественных предположений, которые отражают физическое содержание происходящих процессов и заключаются в следующем. Считаем, что теплообмен через поверхность стола и салфетки намного меньше теплообмена через боковые стенки чашек; температура пара в чашке над поверхностью жидкости равна температуре жидкости.

Выведем сначала соотношение, показывающее, как с течением времени изменялась температура кофе в чашке Владимира до смешивания кофе со сливками.

В соответствии с принятыми допущениями на основе известного закона физики количество теплоты, полученное воздухом от чашки Владимира, определяется соотношением

$$dQ = \eta \frac{T - \theta}{l} s dt, \quad (1)$$

где T — температура кофе в момент времени t , θ — температура воздуха в кафе, η — теплопроводность материала чашки, l — толщина стенок чашки, s — площадь боковой поверхности стенок чашки. С другой стороны, количество

теплоты, отданное кофе, находим из равенства

$$dQ = -cm dT, \quad (2)$$

где c — удельная теплоемкость кофе, m — масса кофе в чашке. Рассматривая теперь вместе уравнения (1) и (2), приходим к уравнению

$$\eta \frac{T-\theta}{t} s dt = -cm dT,$$

которое, разделяя переменные, можно переписать в виде

$$\frac{dT}{T-\theta} = -\frac{\eta s}{lcm} dt. \quad (3)$$

Обозначая начальную температуру кофе через T_0 и интегрируя дифференциальное уравнение (3), находим, что

$$T = \theta + (T_0 - \theta) e^{-\frac{\eta s}{lcm} t}. \quad (4)$$

Формула (4) и есть аналитическое описание закона, по которому изменялась температура кофе в чашке Владимира до смешивания кофе со сливками.

Посмотрим теперь, какой будет закон изменения температуры кофе после того, как Владимир добавил в чашку сливки. Для этого воспользуемся уравнением теплового баланса, которое в нашем случае запишется в виде

$$cm(T - \theta_b) = c_1 m_1 (\theta_b - T_1), \quad (5)$$

где θ_b — температура смеси в момент времени t , T_1 — температура сливок, c_1 — удельная теплоемкость сливок, m_1 — масса сливок, добавленная в кофе.

Из уравнения (5) находим, что

$$\theta_b = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T. \quad (6)$$

Принимая во внимание равенство (4), формулу (6) можно переписать в виде

$$\theta_b = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} \left[\theta + (T_0 - \theta) e^{-\frac{\eta s}{lcm} t} \right]. \quad (7)$$

Равенство (7) и задает закон изменения температуры кофе после добавления в чашку Владимира сливок.

Для вывода закона изменения температуры кофе в чашке Анатолия снова воспользуемся уравнением теплового баланса, которое в данном случае принимает вид

$$cm(T_0 - \theta_0) = c_1 m_1 (\theta_0 - T_1), \quad (8)$$

где θ_0 — температура смеси. Из равенства (8) получаем, что

$$\theta_0 = \frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0.$$

А тогда, воспользовавшись уравнением (4), где роль начальной температуры играет уже θ_0 , а произведение cm заменяется суммой $cm + c_1 m_1$, окончательно получаем, что закон изменения температуры θ_A кофе в чашке Анатолия аналитически задается формулой

$$\theta_A = \theta + \left[\frac{c_1 m_1}{cm + c_1 m_1} T_1 + \frac{cm}{cm + c_1 m_1} T_0 - \theta \right] e^{-\frac{\eta s}{l(cm + c_1 m_1)} t}. \quad (9)$$

Таким образом, для ответа на поставленный в задаче вопрос остается лишь обратиться к формулам (7) и (9) и провести численные расчеты, имея в виду, что $c_1 \approx 3,9 \times 10^3$ Дж/(кг·К), $c \approx 4,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $\eta \approx 0,6$ В/(м·К), и полагая для определенности $m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг, $m = 8 \cdot 10^{-2}$ кг, $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $\theta = 20^\circ\text{C}$, $T_0 = 80^\circ\text{C}$, $s = 11 \cdot 10^{-3}$ м², $l = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Вычисления показывают, что более горячий кофе пил Анатолий.

Стационарный тепловой поток

Прежде всего напомним, что о стационарном тепловом потоке говорят в том случае, когда температура тела в каждой точке со временем не меняется.

При решении задач, физическое содержание которых связано с влиянием тепловых потоков, существенную роль играют так называемые изотермические поверхности.

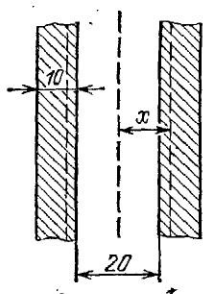


Рис. 1

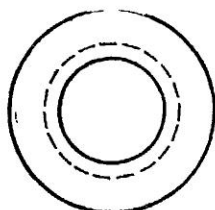


Рис. 2

Для пояснения рассмотрим, например, теплопроводную трубу (рис. 1) диаметром 20 см, сделанную из однородного материала и защищенную покрытием из магнезии толщиной 10 см. Предположим, что температура трубы равна 160°C ,

а внешнее покрытие имеет температуру, равную 30°C . Тогда интуитивно ясно, что существует поверхность, сечение которой на рис. 2 показано пунктиром, в каждой точке которой температура будет одной и той же, например, равной 95°C . Пунктирная кривая на рис. 2 называется *изотермической кривой*, соответствующая же ей поверхность называется *изотермической поверхностью*. В общем случае изотермические кривые могут иметь самый разнообразный вид, что, в частности, связано с нестационарностью теплового потока и неоднородностью материала. В рассматриваемом нами случае изотермическими кривыми (поверхностями) будут концентрические окружности (цилиндры).

Выведем закон распределения температуры внутри покрытия и найдем количество теплоты, выделенное трубой на участке длиной 1 м в течение суток, если коэффициент теплопроводности $k=1,7 \cdot 10^{-4}$.

Для этого воспользуемся законом теплопроводности Фурье, согласно которому *количество теплоты, излучаемое в единицу времени телом, находящимся в неизменном тепловом состоянии, температура T которого в каждой точке есть функция только одной координаты x , находится по формуле*

$$Q = -kF(x) \frac{dT}{dx} = \text{const}, \quad (10)$$

где $F(x)$ — площадь сечения, перпендикулярного направлению распространения тепла, k — коэффициент теплопроводности.

Из условий задачи следует, что в рассматриваемом случае $F(x) = 2\pi x l$, где l — длина трубы, см, x — радиус основания цилиндрической поверхности, расположенной внутри внешнего цилиндра. А тогда на основании формулы (10) приходим к равенствам

$$\int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \int_{10}^{20} \frac{dx}{x}, \quad (11)$$

$$\int_{160}^T d\tau = -\frac{Q}{0,00017 \cdot 2\pi l} \int_{10}^x \frac{d\xi}{\xi}. \quad (12)$$

Интегрируя соотношения (11) и (12), получаем, что

$$\frac{160 - T}{130} = \frac{\ln 0,1x}{\ln 2} = \frac{\lg 0,1x}{\lg 2}.$$

Отсюда

$$T = 591,8 - 431,8 \lg x.$$

Последней формулой и задается закон распределения температуры внутри покрытия. Как видим, длина трубы здесь никакой роли не играет.

Чтобы ответить на второй вопрос, обратимся к уравнению (11). Тогда при $l = 100$ см получаем, что

$$Q = \frac{130 \cdot 0,00017 \cdot 2\pi \cdot 100}{\ln 2} = \frac{200\pi \cdot 130 \cdot 0,00017}{0,69315},$$

а поэтому количество теплоты, выделенное в течение суток, равно $24 \cdot 60 \cdot 60Q = 726852$ Дж.

Случай в заповеднике

При обходе заповедника два егеря обнаружили тушу убитого дикого кабана. Ее осмотр показал, что выстрел браконьера был точным и кабан убит наповал. Рассудив, далее, что браконьер должен вернуться за добычей, егеря решили дожидаться его, укрывшись недалеко от того места, где лежала туша. Вскоре показались два человека, прямо направлявшиеся к убитому животному. Задержавшие неизвестные всячески отрицали свою причастность к браконьерству. Однако у егерей уже были косвенные улики их виновности, но для ее полного доказательства следовало еще уточнить время, когда был убит кабан.

Это удалось сделать с помощью закона излучения тепла. Покажем какими соображениями можно было при этом пользоваться.

Согласно закону излучения тепла скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-a), \quad (13)$$

где x — температура тела в момент времени t ; a — температура воздуха; k — положительный коэффициент пропорциональности.

Решение задачи связано с исследованием соотношения, получающегося в результате интегрирования дифференциального уравнения (13). При этом следует учитывать, что после того, как кабан был убит, температура воздуха могла оставаться неизменной, а могла и меняться с течением времени. В первом случае интегрирование дифференциального уравнения (13) с разделяющимися переменными приводит к равенству

$$\ln \frac{x-a}{x_0-a} = -kt, \quad x \neq a, \quad (14)$$

где x_0 — температура тела в момент времени $t=0$. А тогда если в момент задержания неизвестных температура туши кабана x была равна 31°C , а спустя час составляла 29°C , то, считая, что в момент выстрела в кабана его температура была $x = 37^\circ\text{C}$, а температура воздуха $a = 21^\circ\text{C}$, можно, полагая $t=0$ временем задержания неизвестных, определить и время выстрела. Так, воспользовавшись имеющимися данными, из соотношения (14) получим, что

$$k = \ln \frac{31-21}{29-21} = \ln 1,25 = 0,22314. \quad (15)$$

Подставляя теперь в формулу (14) значение k из равенства (15) и значение $x=37$, находим

$$t = -\frac{1}{0,22314} \ln \frac{37-21}{31-21} = -\frac{1}{0,22314} \ln 1,6 = -2,10630.$$

Иначе говоря, между моментом выстрела и тем моментом, когда неизвестные были задержаны, прошло 2 часа и 6 минут.

В том случае, когда температура воздуха меняется со временем, закон охлаждения тела запишется в виде линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} + kx = ka(t), \quad (16)$$

где $a(t)$ — температура воздуха в момент времени t .

Для иллюстрации одного из методов определения момента времени, когда был убит кабан, предположим, что в момент задержания неизвестных температура туши кабана была равна 30°C . Пусть известно также, что в день случившегося температура воздуха падала в течение каждого часа после полудня на 1°C и в момент обнаружения туши была равна 0°C . Предположим, далее, что через час после обнаружения температура туши стала равной 25°C , а температура воздуха понизилась до -1°C . Если теперь принять за момент выстрела браконьера $t=0$ и считать, что в этот момент $x_0=37^\circ\text{C}$, то, полагая время обнаружения убитого кабана $t=t^*$, получим $a(t)=t^*-t$.

Интегрируя теперь уравнение (16), придем к соотношению

$$x = \left(37 - t - \frac{1}{k} \right) e^{-kt} + t^* - t + \frac{1}{k}.$$

Далее, имея в виду, что $x=30$ при $t=t^*$ и $x=25$ при $t=t^*+1$, из последнего равенства получаем соотношения

$$\begin{aligned} \left(37 - t^* - \frac{1}{k}\right) e^{-kt^*} + \frac{1}{k} &= 30, \\ \left(37 - t^* - \frac{1}{k}\right) e^{-k(t^*+1)} + \frac{1}{k} &= 26, \end{aligned}$$

которые позволяют вывести уравнение относительно k , а именно уравнение

$$\left(30 - \frac{1}{k}\right) e^{-k} - 26 + \frac{1}{k} = 0. \quad (17)$$

К уравнению (17) можно прийти, исходя и из других начальных предпосылок. Действительно, примем за $t=0$ время обнаружения убитого кабана, тогда $a(t)=-t$, и мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} + kx = -kt \quad (18)$$

(с начальным условием $x_0=30$ при $t=0$), из которого требуется найти x как явную функцию t .

Решая уравнение (18), получаем, что

$$x = \left(30 - \frac{1}{k}\right) e^{-kt} - t + \frac{1}{k}. \quad (19)$$

Полагая в последнем соотношении $t=1$ и $x=25$, мы и приходим к уравнению (17), позволяющему численно решить исходную задачу.

Действительно, как известно, уравнение (17) не может быть алгебраически разрешено относительно k . Вместе с тем оно легко решается численными методами нахождения корней трансцендентных уравнений, в частности, методом последовательных приближений Ньютона. Метод Ньютона, как и другие методы последовательных приближений, является способом, посредством которого грубая оценка истинного значения корня используется для получения более точных его оценок. При этом процесс продолжается до тех пор, пока не достигается желаемая точность.

Чтобы показать, как пользоваться методом Ньютона, приведем уравнение (17) к виду

$$30k - 1 + (1 - 26k) e^k = 0, \quad (20)$$

а уравнение (19), полагая в нем $x=-37$, — к виду

$$(37k-1+kt)e^{kt}-30k+1=0. \quad (21)$$

Последние два уравнения — это уравнения вида

$$(ax+b)e^{\lambda x}+cx+d=0. \quad (22)$$

Если теперь левую часть уравнения (22) обозначить через $\varphi(x)$, то дифференцирование по x дает следующие равенства:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (\lambda ax + \lambda b + a)e^{\lambda x} + c, \\ \varphi''(x) &= (\lambda^2 ax + \lambda^2 b + 2\lambda a)e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

А тогда метод Ньютона нахождения корня уравнения (22) состоит в том, что если для i -го приближения x_i выполняется неравенство

$$\varphi(x_i)\varphi''(x_i) > 0,$$

то следующее приближение x_{i+1} находится по формуле

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\varphi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Для непосредственного вычисления корня (с точностью, например, до 10^{-6}) с помощью микрокалькулятора «Электроника БЗ-34» составим программу:

ПЗ; ИПЗ; ИП6; ×; Fe^x; П4; ИПА; ИПЗ; ×; ИПВ; +; ×;

П5; ИПС; ИПЗ; ×; +; ИПД; +; ПО; С/П; ИПА;

ИП4; ×; П4; ИП5; ИП6; ×; ИП4; +; П5; ИПС; +;

П1; С/П; ИП5; ИП4; +; ИП6; ×; П2; С/П; ИПЗ; ИПО; ИП1; ÷; —; ПЗ; С/П; В/О.

Эта программа использует регистры памяти 0—6 и А, В, С, D, назначение которых видно из следующей таблицы:

Регистры памяти	A	B	C	D	6	0	1	2	3	4	5
Содержание	a	b	c	d	λ	φ	φ'	φ''	x_i	$e^{\lambda x}$	$(ax+b)e^{\lambda x}$

Нахождение корня осуществляется в следующей последовательности:

1) занести в регистры памяти А, В, С, D и 6 коэффициенты уравнения (22) в соответствии с последней таблицей;

2) набрать приближенное (начальное) значение корня $x_i(x_0)$ и нажать клавишу «В/О»;

и далее:

3) С/П; Выписать значение $\varphi(x_i)$;

4) С/П; Выписать значение $\varphi'(x_i)$;

5) С/П; Выписать значение $\varphi''(x_i)$;

6) С/П; Выписать следующее приближение x_{i+1} ;

7) Повторить процедуру, начиная с пункта 3).

Отметим здесь, что вычисление заканчивается в том случае, когда приближения x_i и x_{i+1} содержат требуемое количество одинаковых значащих цифр.

Используя эту общую процедуру, обратимся к уравнению (20). Для его левой части $\varphi(k)$ дифференцирование по k приводит к равенству

$$\varphi'(k) = 30 - (25 + 26k)e^k.$$

А тогда нетрудно проверить, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) < 0$, $\varphi'(0) > 0$. Таким образом, функция φ возрастает в малой окрестности начала координат, а затем убывает до отрицательного значения при $k=1$. Отсюда следует, что на интервале $(0, 1)$ существует корень уравнения $\varphi(k) = 0$. Беря в качестве начального приближения $k_0 = 0,5$ и учитывая, что в нашем случае $a = -26$, $b = 1$, $c = 30$, $d = -1$, $\lambda = 1$, в соответствии с написанной выше программой приходим к таблице

n	k_n	$\varphi(k_n)$	$\varphi'(k_n)$	$\varphi''(k_n)$
0	0,5	-5,784655	-32,651408	-105,5
1	0,322835	-1,525956	-16,118043	-82,0
2	0,228162	-0,351424	-8,859807	-71,5
3	0,188497	-0,055194	-6,103385	-67,5
4	0,179453	-0,002747	-5,497019	-66,6
5	0,178953	-0,000008	-5,463736	-66,5
6	0,178952	0		

Окончательный шаг в решении задачи заключается в подстановке вычисленного значения $k_6 \approx k \approx 0,178952$ в уравнение (21) и решении последнего относительно t (времени когда был убит кабан). Чтобы воспользоваться описанной выше схемой, обозначим левую часть уравнения (21) через $g(t)$. А тогда, выбирая в качестве t_0 значение $t_0 = -1$ и имея в виду, что в данном случае $a = k$, $b = 37k - 1$, $c = 0$, $d = -30k + 1$, $\lambda = k$, получаем таблицу

n	t_n	$g(t_n)$	$g'(t_n)$	$g''(t_n)$
0	-1,0	0,181972	0,963962	0,19
1	-1,188775	0,003505	0,927054	0,19
2	-1,192556	0,000001	0,926329	0,19
3	-1,192558	0,0000002	0,926329	0,19
4	-1,192558	-0,0000003		

Из полученных результатов следует, что кабан был убит приблизительно за 1 час и 12 минут до обнаружения его егерями.

Истечение жидкости из сосудов. Водяные часы

Приводимые ниже две задачи иллюстрируют связь между их физическим содержанием и геометрией.

Предварительно остановимся на некоторых общих теоретических выводах. Итак, рассмотрим сосуд (рис. 3), площадь горизонтального сечения которого является произвольной функцией расстояния сечения от дна сосуда. Пусть

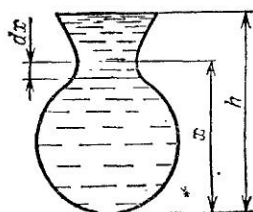


Рис. 3

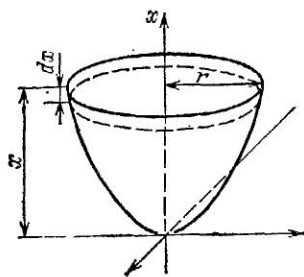


Рис. 4

высота уровня жидкости в сосуде в начальный момент времени $t = 0$ равна h метров. Пусть, далее, площадь сечения на высоте x равна $S(x)$, а площадь отверстия на дне сосуда есть s .

Известно, что скорость истечения жидкости v в тот момент, когда высота ее уровня равна x , определяется равенством $v = k\sqrt{2gx}$, где $g = 9,8$ м/с², k — коэффициент скорости истечения жидкости из отверстия.

На бесконечно малом промежутке времени dt истечение жидкости можно считать равномерным, а потому за время dt вытечет столбик жидкости, высота которого $v dt$ и пло-

щадь сечения s , что в свою очередь вызовет понижение уровня жидкости в сосуде на $-dx$.

В результате этих рассуждений приходим к дифференциальному уравнению

$$ks \sqrt{2gx} dt = -S(x) dx, \quad (22)$$

которое можно переписать в виде

$$dt = -\frac{S(x)}{ks \sqrt{2gx}} dx. \quad (23)$$

Решим теперь следующую задачу. Цилиндрический резервуар с вертикальной осью высотой 6 м и диаметром 4 м имеет на дне круглое отверстие радиусом $1/12$ м. Требуется установить зависимость уровня воды в резервуаре от времени t , а также определить время, в течение которого вытечет вся вода.

По условиям задачи $S(x) = 4\pi$, $s = 1/144$. Так как для воды $k = 0,6$, то уравнение (23) примет вид

$$dt = -\frac{217,152}{\sqrt{x}} dx.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, приходим к соотношению

$$t = 434,304 \sqrt{x},$$

которое и дает искомую зависимость уровня воды от времени t . Если теперь в последнем равенстве положить $x = 6$, то получим, что вся вода вытечет из резервуара приблизительно через 18 минут.

Вторая задача состоит в следующем. Известно, что древние водяные часы представляли собой чашу (рис. 4), из которой через небольшое отверстие на дне вытекала вода. Такие часы использовались в греческих и римских судах для хронометрирования речей адвокатов, чтобы не допускать слишком долгих выступлений. Требуется найти форму водяных часов, при которой уровень воды убывал бы в чаше с постоянной скоростью.

Задача легко решается с помощью выведенного выше уравнения (23), которое мы только перепишем в виде

$$\sqrt{x} = -\frac{S(x)}{ks \sqrt{2g}} \frac{dx}{dt}. \quad (24)$$

Именно, учитывая, что чашу можно рассматривать как поверхность вращения, в соответствии с обозначениями на

рис. 4 из уравнения (24) получаем, что

$$\sqrt{x} = -\frac{\pi r^2}{k_s \sqrt{2g}} a, \quad (25)$$

где $a = v_x = \frac{dx}{dt}$ — проекция скорости свободной поверхности жидкости на ось x , которая по условию задачи есть величина постоянная. Возведя обе части уравнения (25) в квадрат, приходим к уравнению

$$x = cr^4, \quad (26)$$

где $c = a^2 \pi^2 / (2gk^2 s^2)$. Последнее означает, что форма поверхности водяных часов получается вращением кривой (26) вокруг оси x .

Эффективность рекламы

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция B , о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь x покупателей. Пред-

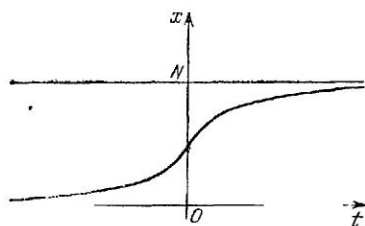


Рис. 5

положим далее, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно считать, что

после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции B пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало N/γ человек, то приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \quad (27)$$

с начальными условиями $x = N/\gamma$ при $t = 0$. В уравнении (27) коэффициент k — это положительный коэффициент пропорциональности. Интегрируя уравнение (27), находим, что

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N-x} = kt + C.$$

Полагая $Nc = C_1$, приходим к равенству

$$x/(N-x) = Ae^{Nkt}, \quad \text{где} \quad A = e^{C_1}.$$

Если последнее уравнение разрешить относительно x , то получим соотношение

$$x = N \frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt} + 1} = \frac{N}{1 + Pe^{-Nkt}}, \quad (28)$$

где $P = 1/A$.

В экономической литературе уравнение (28) обычно называют *уравнением логистической кривой*.

Если учесть теперь начальные условия, то уравнение (28) переписется в виде $x = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}$.

На рис. 5 схематически изображена логистическая кривая при $\gamma = 2$. В заключение отметим, что к уравнению (27) сводится, в частности, задача о распространении технологических новшеств.

Спрос и предложение

Как известно, спрос и предложение — экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена. При этом спрос — представленная на рынке потребность в товарах, а предложение — продукт, который есть на рынке или может быть доставлен на него. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается в единстве спроса и предложения и их объективном стремлении к соответствию.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени крестьянин продает на рынке фрукты (например, яблоки), причем продает их после уборки урожая, с недельными перерывами. Тогда при имеющихся у крестьянина запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожи-

дастся ее падение, то предложение увеличится тем больше, чем бóльшим предполагается понижение цены в дальнейшем.

Если обозначить через p цену на фрукты в наступающей неделе, а через p' — так называемую *тенденцию формирования цены* (производную цены по времени), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задается линейной зависимостью, математически описываемой соотношением $y = ap' + bp + c$, где a, b, c — некоторые вещественные постоянные. А тогда если, например, в рассматриваемой задаче цена на фрукты вначале составляла 1 р. за 1 кг, через t недель она была уже $p(t)$ р. за 1 кг, а спрос q и предложение s определялись соответственно соотношениями

$$q = 4p' - 2p + 39, \quad s = 44p' + 2p - 1,$$

то для того чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо выполнение равенства

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Отсюда приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{p-10} = -10 dt.$$

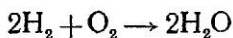
Интегрируя, находим, что $p = Ce^{-10t} + 10$. Если же учесть начальные условия $p=1$ при $t=0$, то окончательно получаем

$$p = -9e^{-10t} + 10. \quad (29)$$

Таким образом, если требовать, чтобы между спросом и предложением все время сохранялось равновесие, необходимо, чтобы цена изменялась в соответствии с формулой (29).

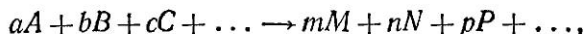
Химические реакции

Химическое уравнение показывает, как в процессе взаимодействия одних веществ образуется другое вещество. Так, например, уравнение



показывает, что в результате взаимодействия двух молекул водорода и одной молекулы кислорода получаются 2 молекулы воды.

В общем случае химическое уравнение записывается в виде



где A, B, C, \dots — молекулы взаимодействующих веществ, M, N, P, \dots — молекулы веществ, полученных в результате химической реакции, а постоянные a, b, c, \dots , \dots, m, n, p, \dots — положительные целые, указывающие на число молекул, принимающих участие в реакции.

Скорость, с которой образуется новое вещество, называется *скоростью реакции*. Действующая же масса или концентрация реагирующего вещества описывается количеством молей этого вещества в единице объема.

Одним из основных законов теории скоростей химических реакций является закон действующих масс, согласно которому *скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции*.

Решим следующую задачу. Два жидких химических вещества A и B объемом 10 и 20 литров соответственно в процессе химической реакции образуют новое жидкое химическое вещество C . Считая, что температура в процессе реакции не меняется, а также что из каждого двух объемов вещества A и одного объема вещества B образуется три объема вещества C , определить количество вещества C в произвольный момент времени t , если за 20 мин его образуется 6 л.

Обозначим через x объем (в литрах) вещества C , образовавшегося к моменту времени t (в часах). Тогда из условий задачи следует, что к этому моменту времени в химическую реакцию вступило $2x/3$ литров вещества A и $x/3$ литров вещества B . Последнее означает, что к указанному моменту осталось $10 - \frac{2x}{3}$ литров вещества A и $20 - \frac{x}{3}$ литров вещества B . Таким образом, в соответствии с законом действующих масс приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = K \left(10 - \frac{2x}{3} \right) \left(20 - \frac{x}{3} \right),$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x),$$

где k — постоянная пропорциональности ($k=2K/9$). При этом следует иметь в виду, что так как в начальный момент времени $t=0$ вещества C еще не было, то можно считать, что в этот момент времени $x=0$. Что же касается момента времени $t=1/3$, то здесь уже $x=6$.

Итак, решение исходной задачи свелось к решению так называемой краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = k(15-x)(60-x), \quad x(0) = 0, \quad x(1/3) = 6.$$

Для ее решения проинтегрируем сначала последнее дифференциальное уравнение с учетом начального условия $x(0)=0$. В результате получим соотношение

$$(60-x)/(15-x) = 4e^{15kt}.$$

Теперь, так как $x=6$ при $t=1/3$, то, подставляя эти значения переменных в последнее равенство, находим, что $e^{15k} = 3/2$. А тогда

$$(60-x)/(15-x) = 4(e^{15k})^{3t} = 4(3/2)^{3t},$$

т. е. $x=15(1-(2/3)^{3t})/(1-(1/4)(2/3)^{3t})$. Последнее равенство и определяет количество вещества C , образовавшегося в результате реакции к моменту времени t .

Сделаем следующее замечание. Из практических соображений понятно, что в процессе химической реакции 10 л вещества A и 20 л вещества B может образоваться вещество C лишь конечного объема. Вместе с тем формальное рассмотрение полученной зависимости x от t показывает, что при конечном значении t , а именно в случае, когда $(2/3)^{3t}=4$, переменная x обращается в бесконечность. Этот факт, однако, не противоречит практическим соображениям, ибо последнее равенство возможно только при отрицательном значении t , а процесс химической реакции рассматривается лишь при $t \geq 0$.

Дифференциальные модели в экологии

Экология изучает взаимоотношение человека и вообще живых организмов с окружающей средой. Основным объектом экологии является эволюция популяций.

Ниже описываются дифференциальные модели популяций, которые связаны с размножением или вымиранием последних, а также с сосуществованием различных видов животных в ситуации «хищник — жертва»*).

*) Murray J. D. Some simple mathematical models in ecology// Math. Spectrum.— 1983—1984.— V. 16, № 2.— P. 48—54.

Пусть $x(t)$ — число особей в популяции в момент времени t . Тогда если A — число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, а B — число особей, умирающих в единицу времени, то с достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения x со временем задается формулой

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \quad (30)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы описать зависимость A и B от x . Простейшим случаем является ситуация, когда

$$A = ax, \quad B = bx, \quad (31)$$

где a и b — коэффициенты рождения и смерти особей в единицу времени соответственно. С учетом равенств (31) дифференциальное уравнение (30) переписывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x. \quad (32)$$

Полагая, что в момент времени $t = t_0$ число особей в популяции есть $x = x_0$, из уравнения (32) находим

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

Из полученного равенства следует, что если $a > b$, то при $t \rightarrow \infty$ число особей $x \rightarrow \infty$. С другой стороны, если $a < b$, то $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и популяция становится вымирающей.

Хотя приведенная модель является упрощенной, она все-таки в ряде случаев соответствует действительности. Практически же все модели, которые описывают реальные явления и процессы, нелинейны, и вместо дифференциального уравнения (32) следует рассматривать уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

где $f(x)$ — нелинейная функция, например, уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = ax - bx^2,$$

где

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Полагая, что $x = x_0$ при $t = t_0$, из последнего уравнения

находим, что

$$x(t) = \frac{x_0 a/b}{x_0 + [a/b - x_0] e^{-a(t-t_0)}}. \quad (33)$$

Отсюда видно, что при $t \rightarrow \infty$ число особей в популяции $x(t) \rightarrow a/b$. При этом возможны два случая: $a/b > x_0$ и $a/b < x_0$.

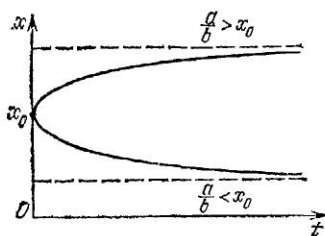


Рис. 6

Различие между этими случаями хорошо видно из рис. 6. Отметим, что соотношение (33) описывает, в частности, популяции фруктовых вредителей и некоторых видов бактерий.

Если рассматривается несколько сосуществующих видов, например, больших и малых рыб, где малые рыбы являются кормом для больших, то, состав-

ляя дифференциальные уравнения для каждого вида, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим более подробно двухвидовую модель «хищник — жертва», которая впервые была построена Вольтерра для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море, имеющих один и тот же период, но отличающихся по фазе.

Пусть x — число больших рыб-хищников, которые питаются малыми рыбами-жертвами, число которых обозначим через y . Тогда число рыб-хищников будет расти до тех пор, пока у них будет достаточно пищи, т. е. малых рыб-жертв, но в конце концов наступит ситуация, когда корма не будет хватать и в результате число больших рыб начнет уменьшаться. Это приведет к тому, что с некоторого момента число малых рыб снова начнет увеличиваться. Это будет способствовать новому росту числа больших особей, и цикл снова повторится. Модель, построенная Вольтерра, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \quad (34)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx - dxy, \quad (35)$$

где a, b, c, d — положительные константы.

В уравнении (34) для больших рыб слагаемое bxy выражает зависимость прироста больших рыб от численности

малых рыб. В уравнении же (35) слагаемое $-dxu$ выражает уменьшение числа малых особей в зависимости от численности больших.

Для удобства исследования последних двух уравнений введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$u(\tau) = \frac{d}{c} x, \quad v(\tau) = \frac{b}{a} y, \quad \tau = ct, \quad \alpha = a/c.$$

В результате дифференциальные уравнения (34) и (35) примут вид

$$u' = \alpha u(v-1), \quad v' = v(1-u), \quad (36)$$

где $\alpha > 0$, а штрих обозначает дифференцирование по τ .

Предположим, что в некоторый момент времени $\tau = \tau_0$ число особей обоих видов известно, т. е.

$$u(\tau_0) = u_0, \quad v(\tau_0) = v_0. \quad (37)$$

Заметим, что в дальнейшем мы интересуемся только положительными решениями. Выявим связь между u и v . Для этого, разделив первое уравнение из системы (36) на второе и затем проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение, найдем, что

$$\alpha v + u - \ln v^\alpha u = \alpha v_0 + u_0 - \ln v_0^\alpha u_0 = H,$$

где H — постоянная, определяемая начальными условиями (37) и параметром α .

На рис. 7 показан вид графиков u как функции v при различных значениях H . Как видно из этого рисунка, в плоскости (u, v) имеются только замкнутые кривые. Предположим теперь, что начальные значения u_0 и v_0 задаются точкой A на траектории, соответствующей значению $H = H_3$. Поскольку $u_0 > 1$, $v_0 < 1$, то первое уравнение из системы (36) показывает, что переменная u вначале убывает. Аналогичный факт имеет место и для переменной v . Далее, когда переменная u достигает значения, равного единице, то $v' = 0$ и затем в течение длительного времени τ переменная v будет возрастать. Когда же $v = 1$, то $u' = 0$ и затем уже возрастать начинает переменная u . Таким образом, как переменная u , так и переменная v пробегает замкнутую траекторию. А это означает, что решения являются функциями, периодическими по времени. При этом максимум u

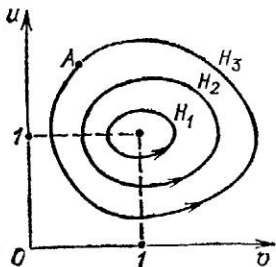


Рис. 7

не попадает на максимум v , т. е. колебания в популяции происходят в разных фазах. Типичный график зависимости u и v от времени τ показан на рис. 8 (в случае $v_0 > 1$, $u_0 < 1$).

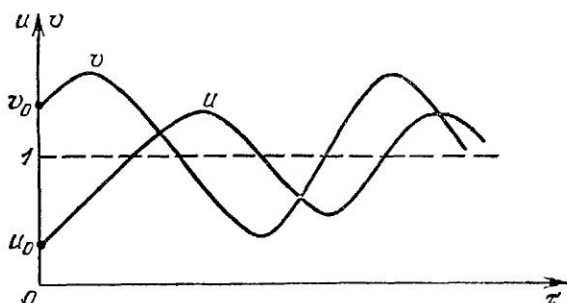


Рис. 8

В заключение отметим, что изучение сообществ, взаимодействующих более сложным образом, дает более интересные практические результаты. Так, например, если две популяции конкурируют в борьбе за один и тот же источник питания (третья популяция), то можно показать, что один из видов начнет вымирать. При этом понятно, что если этим видом окажется источник питания, то такая же участь постигнет и два других вида.

Одна задача математической теории эпидемий

Рассмотрим одну из дифференциальных моделей, которая встречается в теории эпидемий. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, подразделяется на три группы. В первую из них включаются особи, которые восприимчивы к некоторой конкретно имеющейся в виду болезни, но здоровы. Число таких особей в момент времени t будем обозначать через $S(t)$. Во вторую группу объединяются особи, которые являются инфекционными — они сами больны и являются источником распространения болезни. Число таких особей в популяции в момент времени t обозначим через $I(t)$. Наконец, третья группа — это особи, которые здоровы и обладают иммунитетом к данной болезни. Число таких особей в момент времени t обозначается через $R(t)$. Таким образом,

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (38)$$

Предположим далее, что в случае, когда число инфекционных особей превосходит некоторое фиксированное

число I^* , скорость изменения числа восприимчивых к болезни особей будет пропорциональна числу самих восприимчивых особей. Что же касается скорости изменения числа инфекционных, но выздоравливающих особей, то ее будем считать пропорциональной числу инфекционных особей. Понятно, что эти предположения упрощают реальную ситуацию, но в ряде случаев они отражают существо дела. В связи с первым предположением будем считать, что когда число инфекционных особей $I(t) > I^*$, то они способны заражать восприимчивых к болезни особей. Последнее означает, что принимается во внимание факт изоляции (до некоторого момента времени) инфекционных особей (карантин или нахождение вдали от восприимчивых к болезни особей). Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{если } I(t) > I^*, \\ 0, & \text{если } I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (39)$$

Теперь, поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая в конце концов заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между вновь заболевшими особями и теми, которые уже выздоравливают. Итак,

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{если } I(t) > I^*, \\ -\beta I, & \text{если } I(t) \leq I^*. \end{cases} \quad (40)$$

Постоянные пропорциональности α и β будем называть коэффициентами заболеваемости и выздоровления соответственно.

Наконец, скорость изменения числа выздоравливающих особей задается уравнением $\frac{dR}{dt} = \beta I$.

Для того чтобы решения соответствующих уравнений определялись однозначно, необходимо задать начальные условия. Для простоты предположим, что в момент времени $t=0$ в популяции нет особей с иммунитетом к болезни, т. е. $R(0)=0$, и что первоначально число инфекционных особей равно $I(0)$. Далее предположим, что коэффициенты заболеваемости и выздоровления равны, т. е. $\alpha=\beta$ (случай неравенства этих коэффициентов предлагается для рассмотрения читателю). В результате приходим к необходимости рассмотрения двух случаев.

С л у ч а й 1. Ч и с л о $I(0) \leq I^*$. В этом случае с ростом времени особи в популяции не будут подвергаться

заражению болезнью, поскольку в этом случае $dS/dt=0$ и, значит, в соответствии с уравнением (38) и условием $R(0)=0$, для всех t справедливо равенство

$$S(t) = S(0) = N - I(0).$$

Рассматриваемый случай соответствует той ситуации, когда довольно много инфекционных особей оказываются в изоляции. В этом случае из уравнения (40) приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I.$$

Отсюда $I(t) = I(0)e^{-\alpha t}$ и, значит,

$$R(t) = N - S(t) - I(t) = I(0)[1 - e^{-\alpha t}].$$

На рис. 9 графически показано изменение числа особей с ростом t в каждой из трех групп.

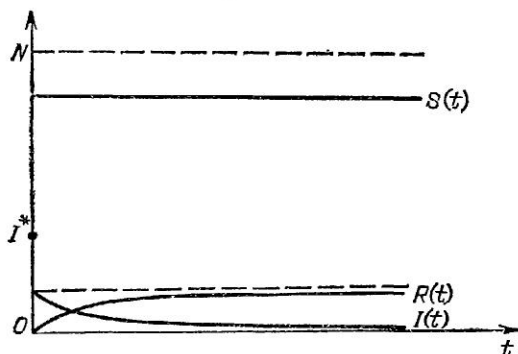


Рис. 9

С л у ч а й 2. Ч и с л о $I(0) > I^*$. В этом случае должен существовать интервал $0 \leq t < T$, для всех значений t которого справедливо неравенство $I(t) > I^*$, ибо по смыслу задачи I как функция t должна быть функцией непрерывной. Отсюда следует, что для всех t из промежутка $[0, T)$ болезнь будет распространяться на восприимчивых к ней особей. Таким образом, из уравнения (39) следует, что

$$S(t) = S(0)e^{-\alpha t}$$

для $0 \leq t < T$.

Подставляя значение $S(t)$ из последнего равенства в уравнение (40), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S(0)e^{-\alpha t}. \quad (41)$$

Если теперь умножить обе части уравнения (41) на $e^{\alpha t}$, то это уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt} (I e^{\alpha t}) = \alpha S (0).$$

Отсюда $I e^{\alpha t} = \alpha S (0) t + C$ и, значит, множество всех решений уравнения (41) задается соотношением

$$I (t) = C e^{-\alpha t} + \alpha S (0) t e^{-\alpha t}. \quad (42)$$

Полагая здесь $t=0$, получаем $C=I(0)$, и, таким образом, уравнение (42) принимает вид

$$I (t) = [I (0) + \alpha S (0) t] e^{-\alpha t} \quad (43)$$

для $0 \leq t < T$.

Дальнейшие исследования мы свяжем с нахождением конкретного значения T и нахождением того момента времени t_{\max} , при котором число инфекционных особей оказывается максимальным.

Ответ на первый вопрос важен с той точки зрения, что в момент времени T заражаемость восприимчивых к болезни особей прекращается. Если обратиться к уравнению (43), то из предыдущего следует, что при $t=T$ его правая часть принимает значение I^* , т. е.

$$I^* = [I (0) + \alpha S (0) T] e^{-\alpha T}. \quad (44)$$

Но

$$S (T) = \lim_{t \rightarrow \infty} S (t) = S (\infty)$$

есть число восприимчивых особей, которые избегают заболевания и для которых справедлива такая цепочка равенств:

$$S (T) = S (\infty) = S (0) e^{-\alpha T}.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{S (0)}{S (\infty)}. \quad (45)$$

Таким образом, если мы сможем указать явное значение для $S(\infty)$, то тем самым мы сможем использовать уравнение (45) для предсказания времени прекращения эпидемии. Подставляя тогда значение T из соотношения (45) в уравнение (44), получим равенство

$$I^* = \left[I (0) + S (0) \ln \frac{S (0)}{S (\infty)} \right] \frac{S (\infty)}{S (0)},$$

или
$$\frac{I^*}{S (\infty)} = \frac{I (0)}{S (0)} + \ln \frac{S (0)}{S (\infty)},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{I^*}{S(\infty)} + \ln S(\infty) = \frac{I(0)}{S(0)} + \ln S(0). \quad (46)$$

Поскольку I^* и все члены в правой части уравнения (46) известны, мы можем использовать это уравнение для определения $S(\infty)$.

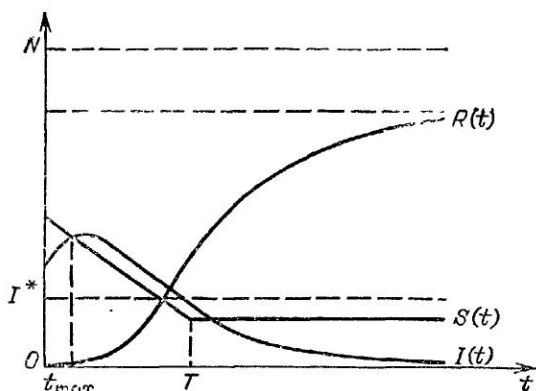


Рис. 10

Чтобы ответить на второй вопрос, обратимся к уравнению (43), из которого, в соответствии с поставленным вопросом, приходим к равенству

$$\frac{dI}{dt} = [\alpha S(0) - \alpha I(0) - \alpha^2 S(0) t] e^{-\alpha t} = 0.$$

Отсюда время t_{\max} , за которое I достигает максимального значения, задается соотношением

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{I(0)}{S(0)} \right].$$

Если теперь подставить значение t_{\max} из последнего равенства в уравнение (43), то получаем, что

$$I_{\max} = S(0) e^{-[1 - I(0)/S(0)]} = S(t_{\max}).$$

Полученное равенство показывает, в частности, что в момент времени t_{\max} число восприимчивых к болезни особей совпадает с числом инфекционных особей.

Когда же $t > T$, то восприимчивые особи уже не становятся инфекционными и

$$I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)}.$$

На рис. 10 схематически показано, как с течением времени изменяется число особей в каждой из трех рассматриваемых групп.

Кривая погони

Приведем один из примеров использования дифференциальных уравнений для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Пусть, например, миноносец охотится за подводной лодкой в густом тумане. В какой-то момент времени туман поднимается и подводная лодка оказывается обнаруженной на поверхности воды на расстоянии 3 миль от миноносца. Скорость миноносца вдвое больше скорости подводной лодки. Требуется определить траекторию (кривую погони), по которой должен следовать миноносец, чтобы он прошел точно над подводной лодкой, если последняя сразу же погружилась после ее обнаружения и ушла на полной скорости прямым курсом в неизвестном направлении.

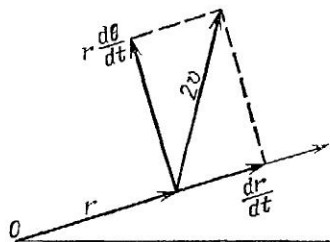


Рис. 11

Для решения сформулированной задачи введем полярные координаты r, θ таким образом, чтобы полюс O находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось r проходила через точку, в которой в момент обнаружения подводной лодки был миноносец (рис. 11). Дальнейшие рассуждения основаны на следующих соображениях. Прежде всего миноносцу надо занять такую позицию, чтобы он и подводная лодка находились на одном расстоянии от полюса O . Затем миноносец должен двигаться вокруг полюса O по такой траектории, чтобы оба движущихся объекта все время находились на одинаковом расстоянии от точки O . Только в этом случае миноносец, обходя вокруг полюса O , пройдет над подводной лодкой. Из вышесказанного следует, что сначала миноносец должен идти прямым курсом к точке O до тех пор, пока он не окажется на том же расстоянии x от полюса O , что и подводная лодка.

Очевидно, что расстояние x можно найти либо из уравнения

$$\frac{x}{v} = \frac{3-x}{2v},$$

либо из уравнения

$$\frac{x}{v} = \frac{3+x}{2v},$$

где v — скорость подводной лодки, а $2v$ — скорость миноносца. Решая последние уравнения, находим, что либо расстояние x равно одной, либо трем милям.

Теперь, если «встречи» не произошло, то миноносец должен в дальнейшем двигаться вокруг полюса O (по направлению движения часовой стрелки или против), удаляясь от последнего со скоростью подводной лодки v . Разложим скорость миноносца $2v$ на две составляющие: радиальную v_r и тангенциальную v_T (рис. 11).

Радиальная составляющая — это скорость, с которой миноносец удаляется от полюса O , т. е.

$$v_r = \frac{dr}{dt}.$$

Тангенциальная составляющая — это линейная скорость вращения миноносца относительно полюса. Она, как известно, равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , т. е.

$$v_T = r \frac{d\theta}{dt}.$$

Но так как $v_r = v$, то

$$v_T = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v.$$

Итак, решение исходной задачи сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v,$$

которая в свою очередь может быть сведена к одному уравнению $\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}}$ исключением переменной t .

Решая последнее дифференциальное уравнение, получаем, что

$$r = Ce^{\theta/\sqrt{3}},$$

где C — произвольная постоянная.

Учитывая теперь, что миноносец начинает движение вокруг полюса O с полярной оси r на расстоянии x миль от точки O , т. е. учитывая, что $r=1$ при $\theta=0$ и $r=3$ при $\theta=-\pi$, приходим к выводу, что в первом случае $C=1$, а во втором $C = 3e^{\pi/\sqrt{3}}$. Таким образом, чтобы выполнить свою

задачу, миноносец должен пройти две или шесть миль прямым курсом по направлению к месту обнаружения подводной лодки, а затем двигаться либо по спирали $r = e^{0/V\sqrt{z}}$, либо по спирали $r = 3e^{(0+\pi)/V\sqrt{z}}$.

Модели боевых действий

Во время первой мировой войны английский инженер и математик Ф. У. Ланчестер построил несколько математических моделей ведения воздушных сражений. Затем эти модели были обобщены и распространены на случаи боевых действий регулярных войск, партизанских соединений, а также как тех, так и других одновременно. Эти три модели мы и рассмотрим ниже.

Итак, пусть в боевых действиях участвуют две противоборствующие стороны x и y . Их численный состав в момент времени t , где t измеряется в днях, начиная с первого дня боевых действий, обозначим через $x(t)$ и $y(t)$ соответственно. В дальнейшем именно численность сторон будет играть определяющую роль в построении упомянутых выше моделей. Дело в том, что практически трудно указать критерии, которые учитывали бы при сравнении противоборствующих сторон еще и степень боевой готовности и вооруженности, уровень и опыт командирского состава, моральный дух и многие, многие другие факторы.

Мы предположим также, что $x(t)$ и $y(t)$ изменяются непрерывно и, более того, что они дифференцируемы как функции времени. Конечно, эти предположения являются упрощением реальной ситуации, поскольку $x(t)$ и $y(t)$ — это целые числа. Но вместе с тем понятно, что при достаточно большом численном составе каждой из противоборствующих сторон увеличение численности на одного или двух человек дает с практической точки зрения бесконечно малую величину по сравнению с уже имеющимся наличным составом. Поэтому можно считать, что за малые промежутки времени численный состав также изменяется на малые количества (не целые). Этих соглашений, конечно, недостаточно для того, чтобы выписать конкретные формулы для $x(t)$ и $y(t)$ как функций t . Однако можно указать ряд факторов, которые позволяют описать скорость изменения численности противоборствующих сторон. Именно, обозначим через OLR величину, выражающую скорость, с которой сторона x несет потери от болезней и других факторов, не связанных с непосредственными боевыми действиями. Далее, пусть CLR — скорость, с которой сторона x несет

потери от непосредственных столкновений в процессе боевых действий со стороны y . Наконец, через RR обозначим скорость подхода подкреплений к силам стороны x . Тогда ясно, что общая скорость изменения $x(t)$ задается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(OLR + CLR) + RR. \quad (47)$$

Аналогичное уравнение имеет место и для $y(t)$. Задача теперь состоит в том, чтобы указать соответствующие формулы для введенных выше величин OLR , CLR и RR и затем исследовать построенные дифференциальные уравнения. Полученные выводы позволят ответить на вопрос о вероятном победителе.

В дальнейшем используем следующие обозначения: a , b , c , d , g , h — неотрицательные постоянные, характеризующие степень влияния различных факторов на потери в живой силе обеих сторон x и y ; $P(t)$ и $Q(t)$ — члены, учитывающие возможность подхода подкреплений силам x и y в течение дня; x_0 , y_0 — численный состав сил x и y перед началом боевых операций. Выпишем три модели*), построенные Ланчестером. Первая из них относится к описанию боевых действий между регулярными войсками, и она имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t).$$

В дальнейшем эту систему будем называть дифференциальной системой типа (А).

Вторая модель

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t)$$

описывает боевые действия между партизанскими соединениями. Ее мы будем называть дифференциальной системой типа (В). Наконец, третья модель, которую будем называть дифференциальной системой типа (С) и которая

*) В статье Coleman C. S. «Combat models» (Differential equation models.— New York e.a., 1983.— P. 109—131) приведены конкретные примеры боевых действий, причем показано, как они согласуются с рассматриваемыми дифференциальными моделями.

имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cx(t) - dy(t) + Q(t),\end{aligned}$$

описывает смешанный тип боевых действий, в которых принимают участие как регулярные части, так и партизанские соединения.

Каждое из выписанных выше дифференциальных уравнений выражает скорость изменения численного состава противоборствующих сторон в зависимости от действия различных факторов и имеет вид (47). Потери в живой силе, которые не связаны с непосредственными боевыми действиями и которые определяются членами $-ax(t)$ и $-dy(t)$, дают возможность выписать постоянные относительные скорости потерь (в отсутствие боевых действий и подкреплений) посредством уравнений

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -a, \quad \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -d.$$

Если в моделях Ланчестера присутствуют лишь члены, соответствующие только подкреплениям и потерям, не связанным с боевыми действиями, то это означает, что последние вообще отсутствуют. Наличие же членов $-by(t)$, $-cx(t)$, $-gx(t)y(t)$ и $-hx(t)y(t)$ означает уже, что боевые действия имеют место.

Рассматривая дифференциальную систему типа (А), предположим, во-первых, что каждая из противоборствующих сторон находится в зоне действия огневых средств другой стороны, а во-вторых, что огонь ведется только по живой силе, непосредственно участвующей в боевых действиях. При таких предположениях Ланчестер предлагает для подразделений регулярных войск стороны x ввести член $-by(t)$, который отражал бы боевые потери. Коэффициент b будет тогда указывать на эффективность боевых действий стороны y . Таким образом, уравнение

$$\frac{1}{y} \frac{dx}{dt} = -b$$

показывает, что постоянная b — это единица измерения средней эффективности каждой единицы боевых сил стороны y . Подобное объяснение можно дать и члену $-cx(t)$. Понятно, что совсем непросто вычислить коэффициенты эффективности b и c . Один из путей здесь — рассматривать

эти коэффициенты в виде

$$b = r_y p_y, \quad c = r_x p_x, \quad (48)$$

где r_y и r_x — коэффициенты огневой мощи сторон y и x соответственно, а p_y и p_x — это вероятности того, что каждый из выстрелов со стороны y и x соответственно окажется метким.

Отметим далее, что члены, которые соответствуют боевым потерям в дифференциальной системе типа (А), являются линейными. Что же касается систем типа (В), то здесь аналогичные члены уже являются нелинейными и объясняется это следующим. Пусть боевые силы партизан численностью $x(t)$ человек занимают некоторую территорию R , оставаясь невидимыми для противника. И хотя противник держит под огнем территорию R , он не может знать эффективности своих действий. При этом весьма правдоподобно, что потери партизанских подразделений x пропорциональны, с одной стороны, числу $x(t)$ на R , а с другой — числу $y(t)$ боевых сил противника. Таким образом, член, который соответствует потерям партизанских соединений x , имеет вид $-gx(t)y(t)$, где коэффициент эффективности боевых действий стороны y , вообще говоря, более труден для оценки, чем коэффициент b в первом равенстве (48). Однако для его определения мы можем использовать коэффициент огневой мощи r_y , а также принять во внимание рассуждения Ланчестера, согласно которым вероятность меткого выстрела со стороны y прямо пропорциональна так называемой территориальной эффективности A_{ry} одного выстрела со стороны y и обратно пропорциональна площади A_x территории R , занимаемой силами x . Через A_{ry} здесь обозначается площадь, которую занимает один из партизан. Таким образом, вероятные формулы для определения g и h таковы:

$$g = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}, \quad h = r_x \frac{A_{rx}}{A_y}. \quad (49)$$

Ниже рассмотрим более подробно каждую из приведенных выше трех дифференциальных моделей.

С л у ч а й А. Дифференциальные системы типа (А). Квадратичный закон. Предположим, что регулярные войска двух противостоящих сил ведут боевые действия в той упрощенной ситуации, когда потери, не связанные с такими действиями, отсутствуют. А тогда если обе стороны не получают еще и подкреплений, то математическая модель сводит-

ся к дифференциальной системе

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx. \quad (50)$$

Разделив второе уравнение на первое, получим, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}. \quad (51)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (51), приходим к равенству

$$b[y^2(t) - y_0^2] = c[x^2(t) - x_0^2]. \quad (52)$$

Соотношение (52) и объясняет, почему система (50) соответствует модели с квадратичным законом. Если обозначить через K постоянную $by_0^2 - cx_0^2$, то уравнение

$$by^2 - cx^2 = K, \quad (53)$$

полученное из равенства (52), задает гиперболу (пару прямых, если $K=0$), и мы можем более точно классифицировать систему (50). Именно такую систему можно назвать дифференциальной системой с гиперболическим законом.

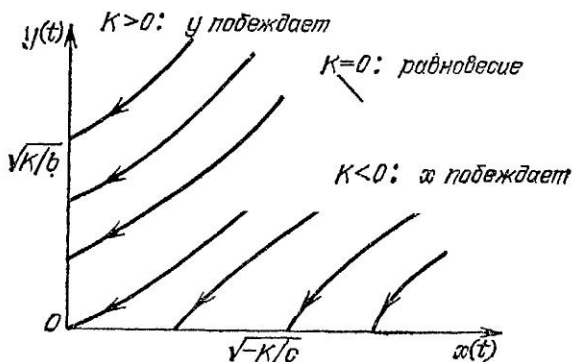


Рис. 12

На рис. 12 изображены гиперболы для различных значений K , при этом по очевидным соображениям рассматривается лишь первый квадрант ($x \geq 0, y \geq 0$). Стрелки на кривых указывают направление изменения численности сил с течением времени.

Чтобы ответить на вопрос, кто побеждает в построенной модели (50), условимся, прежде всего, говорить, что побеждает сторона y (соответственно x), если она первой уничтожает боевые силы стороны x (соответственно y). Так, в

нашем случае побеждает сторона y , если $K > 0$, ибо в соответствии с уравнением (53) переменная y никогда не может обратиться в нуль, в то время как при значении $y(t) = \sqrt{K/b}$ переменная x обращается в нуль. Таким образом, чтобы победили силы y , им необходимо стремиться достичь такой ситуации, при которой $K > 0$, т. е. когда

$$by_0^2 > cx_0^2. \quad (54)$$

Из равенств (48) следует, что неравенство (54) можно переписать в виде

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x p_x}{r_y p_y}. \quad (55)$$

Левая часть неравенства (55) показывает, что изменения в отношении сил y_0/x_0 дают преимущество одной из сторон в соответствии с квадратичным законом! Так, например, изменение в отношении сил от $y_0/x_0=1$ до $y_0/x_0=2$ дает четырехкратное преимущество силам y . Отметим далее, что уравнение (53) определяет соотношение между силами противоборствующих сторон, не учитывая явно время. Чтобы вывести формулы, которые учитывали бы явно и время, поступим следующим образом. Продифференцируем по t первое из уравнений системы (50), а затем воспользуемся вторым уравнением этой же системы. В результате придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx = 0. \quad (56)$$

Используя тогда в качестве начальных условий соотношения

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -by_0,$$

решение уравнения (56) получим в виде

$$x(t) = x_0 \cos \beta t - \gamma y_0 \sin \beta t, \quad (57)$$

где $\beta = \sqrt{bc}$, $\gamma = \sqrt{b/c}$.

Подобным образом получаем, что

$$y(t) = y_0 \cos \beta t - \frac{x_0}{\gamma} \sin \beta t. \quad (58)$$

На рис. 13 показаны графики функций, заданных уравнениями (57) и (58) в случае, когда $K > 0$ (т. е. когда $by_0^2 > cx_0^2$ или когда $\gamma y_0 > x_0$).

В заключение отметим, что для победы сил стороны y не обязательно, чтобы число y_0 было больше числа x_0 . Требуется лишь выполнение неравенства $\gamma y_0 > x_0$.

Случай В. Дифференциальные системы типа (В).
 Лине́йный закон. Уравнения динамики, моделирующие боевые действия двух противоборствующих сторон, могут быть легко решены, если, как и в предыдущем случае,

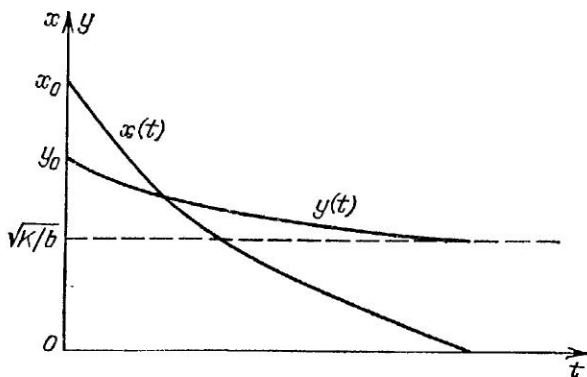


Рис. 13

исключаются потери, не связанные с боевыми действиями, и ни одна из сторон не получает подкреплений. При таких ограничениях дифференциальная система типа (В) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \quad \frac{dy}{dt} = -hxy. \quad (59)$$

Разделив второе уравнение из системы (59) на первое, получим простое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g},$$

интегрирование которого приводит к равенству

$$g[y(t) - y_0] = h[x(t) - x_0]. \quad (60)$$

Линейная зависимость, выраженная соотношением (60), и объясняет, почему нелинейная система (59) соответствует модели с линейным законом ведения боя. Равенство (60) можно переписать в виде

$$gy - hx = L, \quad (61)$$

где $L = gy_0 - hx_0$. Отсюда, в частности, следует, что если $L > 0$, то в результате боевых действий побеждает сторона y . Если же $L < 0$, то победителем будет сторона x

На рис. 14 дана геометрическая интерпретация линейной функциональной зависимости (61) при различных значениях L .

Рассмотрим более подробно ситуацию, при которой побеждает одна из сторон. Пусть таковой будет сторона

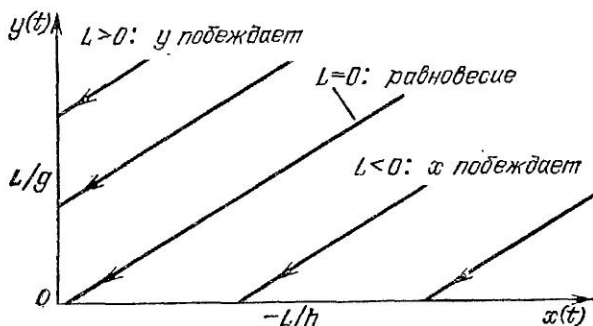


Рис. 14

y . Тогда, как мы уже знаем, должно выполняться неравенство $gy_0 - hx_0 > 0$, которое перепишем в виде

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{h}{g}.$$

Если же теперь обратиться к формулам (49), то условие победы стороны y выразится в виде неравенства

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{r_x A_{rx} A_x}{r_y A_{ry} A_y}. \quad (62)$$

Таким образом, стратегия сил y состоит в том, чтобы сделать максимальным отношение y_0/x_0 и минимальным отношение A_x/A_y . С практической точки зрения неравенство (62) лучше рассматривать в виде

$$\frac{A_y y_0}{A_x x_0} > \frac{r_x A_{rx}}{r_y A_{ry}}.$$

Итак, мы видим, что произведения $A_y y_0$ и $A_x x_0$ являются в определенном смысле критическими величинами.

Отметим, наконец, что на основании равенства (61) из системы (59) нетрудно вывести формулы, показывающие, как силы обеих сторон изменяются с течением времени.

С л у ч а й С. Дифференциальные системы типа (С). Параболический закон. В модели (С) партизанские силы противостоят регулярным частям. Мы снова сделаем упрощающие предположения, заключающиеся в том, что обе

противоборствующие стороны не обеспечиваются подкреплениями и не несут потерь, не связанных с непосредственными боевыми действиями. В этом случае имеем дифференциальную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \quad \frac{dy}{dt} = -cx, \quad (63)$$

где $x(t)$ — силы партизан, а $y(t)$ — силы регулярных войск. Разделив второе уравнение системы (63) на первое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy}.$$

Интегрируя его в соответствующих пределах, приходим к соотношению

$$gy^2(t) = 2cx(t) + M, \quad (64)$$

где $M = gy_0^2 - 2cx_0$. Таким образом, дифференциальная система (63) соответствует модели с параболическим законом ведения боевых действий. При этом, если $M < 0$, то побеждают партизаны, а если $M > 0$, то они терпят поражение.

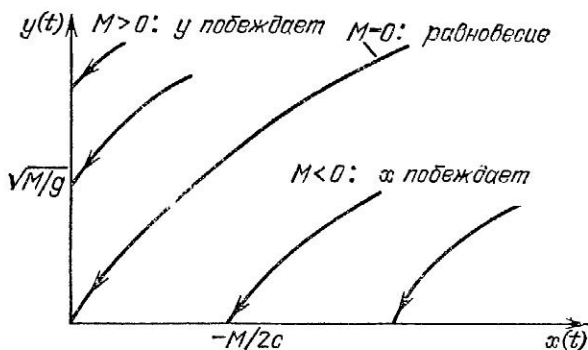


Рис. 15

На рис. 15 схематически изображены параболы, определяемые уравнением (64) при различных значениях M . Опыт показывает, что регулярные части могут нанести поражение партизанским соединениям только в случае, когда отношение y_0/x_0 значительно больше единицы. Основываясь же на параболическом законе ведения боевых действий и учитывая условие $M > 0$, приходим к выводу, что победа регулярных сил будет гарантирована, если выполняется

неравенство $\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2c}{g} \frac{1}{x_0}$, которое с учетом формул (48) и (49) можно переписать в виде

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > 2 \frac{r_x}{r_y} \frac{A_x p_x}{A_y} \frac{1}{x_0}.$$

Почему маятниковые часы не являются точными?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим идеализированную модель маятниковых часов, состоящую из стержня длиной l и гири массой m на его конце (масса стержня предполагается такой, что ее можно не принимать в расчет по сравнению с массой гири) (рис. 16). Если гирию отклонить на угол α и затем отпустить, то в соответствии с законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg(l \cos \theta - l \cos \alpha), \quad (65)$$

где v — скорость движения гири, а g — ускорение силы тяжести.

Рассматривая только малые отклонения гири от положения равновесия, всегда можно считать, что длина дуги, по которой гирия отклоняется от положения равновесия на угол θ , определяется равенством $s = l\theta$. А в этом случае $v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$ и соотношение (65) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{l}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g(\cos \theta - \cos \alpha). \quad (66)$$

Учитывая теперь, что θ убывает с возрастанием t (для малых t), уравнение (66) можно переписать в виде

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}.$$

А тогда если T — период колебаний маятника, то

$$\frac{T}{4} = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}},$$

или

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}. \quad (67)$$

Как видно из последней формулы, период колебаний маятника зависит от угла α . Этот факт и является основной причиной того, что маятниковые часы не точные, ибо практически гиря всякий раз отклоняется в крайнее положение на угол, отличный от α .

Обращаясь к формуле (67), заметим, что ее можно переписать и в более простом виде. Действительно, так как

$$\cos 0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

то

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad (68)$$

где $k = \sin \frac{\alpha}{2}$.

Заменим теперь переменную θ на переменную φ , полагая $\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi$. Из последнего равенства следует, что когда θ возрастает от 0 до α , то φ возрастает от 0 до $\pi/2$, причем

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \varphi d\varphi,$$

или

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Последнее соотношение дает возможность формулу (68) переписать в виде

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F(k, \pi/2),$$

где функцию

$$F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

называют эллиптическим интегралом первого рода, в отличие от эллиптических интегралов второго рода, имеющих вид

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Эллиптические интегралы не могут быть вычислены в элементарных функциях, и поэтому дальнейшее обсуждение задачи о маятнике мы свяжем с другим подходом, который будет рассматриваться при исследовании консервативных систем в механике. Здесь мы лишь отметим, что исходным пунктом в дальнейших исследованиях будет дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k \sin \theta = 0, \quad k = \sqrt{g/l},$$

которое получается из уравнения (66) дифференцированием по t .

Циклоидальные часы

Мы выяснили, что часы с обыкновенным (круговым) маятником не могут идти точно. Поэтому возникает естественный вопрос: существует ли какой-либо другой маятник, время качания которого не зависело бы от размаха? Впервые эта задача была поставлена и решена еще в XVII в. Ниже приводится ее решение, но предварительно обратимся к выводу уравнения одной замечательной кривой, которую Галилей назвал *циклоидой* (от греческого *kykloides* — кругообразный, круглый).

Под циклоидой понимается плоская кривая, представляющая собой траекторию точки, лежащей на окружности круга (называемого производящим кругом), катящегося без скольжения по прямой линии.

Пусть этой прямой линией является ось абсцисс (рис. 17), а радиус производящего круга равен r . Предположим, что в начальном положении вычерчивающая циклоиду точка находится в начале координат, а после того как круг повернется на угол θ , она займет положение M . Тогда, исходя из геометрических построений, получаем, что

$$x = OS = OP - SP, \quad y = MS = CP - CN.$$

Но

$$OP = \widehat{MP} = r\theta, \quad SP = MN = r \sin \theta, \quad CP = r, \quad CN = r \cos \theta.$$

Поэтому параметрически циклоида задается уравнениями

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta). \quad (69)$$

Если из уравнений (69) исключить параметр θ , то в прямоугольной системе координат Oxy уравнение циклоиды примет вид

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Из самого способа образования циклоиды следует, что она должна состоять из конгруэнтных арок, каждая из которых соответствует полному обороту производящего круга *). Отдельные арки соединяются в точках, в которых они имеют общую вертикальную касательную. Эти точки, называемые *точками возврата* циклоиды, соответствуют самым

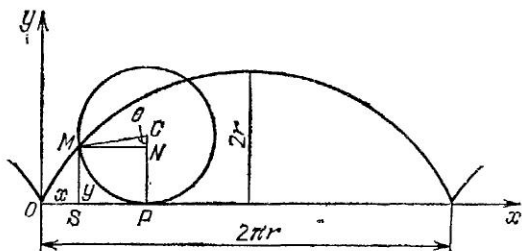


Рис. 17

низким положениям той точки на окружности катящегося круга, которая описывает циклоиду. Самые высокие положения этой точки находятся посередине между точками возврата и называются *вершинами* циклоиды. Отрезок же прямой линии между двумя соседними точками возврата, длина которого равна $2\pi r$, называется *основанием* арки циклоиды.

Для циклоиды имеют место, например, такие свойства:
а) *площадь, ограниченная аркой циклоиды и ее основанием, равна утроенной площади производящего круга (теорема Галилея);*

б) *длина одной арки циклоиды равна четырем диаметрам производящего круга (теорема Рена).*

Последний результат особенно неожиданный: ведь даже для вычисления длины такой простой кривой, как окружность, пришлось вводить иррациональное число π , вычислить которое не так просто, а длина арки циклоиды выражается через радиус (диаметр) целым числом! Циклоида обладает и многими другими интересными свойствами, имеющими исключительное значение для физики и техники. В частности, профили зубьев шестерен, очертание многих типов эксцентриков, кулачков и иных деталей машин имеют форму именно циклоиды.

Обратимся теперь к задаче, решение которой позволило нидерландскому ученому Х. Гюйгенсу сконструировать в

*) Много интересного о циклоиде и родственных ей кривых можно почерпнуть, например, из книги Г. Н. Бермана «Циклоида» (М.: Наука, 1980).

1673 г. точные часы. Эта задача заключается в построении в вертикальной плоскости такой кривой, чтобы время, необходимое для спуска по ней до фиксированного горизонта тяжелой материальной точки, находящейся в начальный момент времени $t=t_0$ в состоянии покоя, не зависело от исходного положения точки на этой кривой. Как показал Гюйгенс, такой изохронной (от греческого *isos* — равный, одинаковый и *chronos* — время), или таухронной, кривой оказалась циклоида.

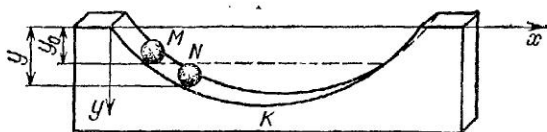


Рис. 18

Практически решение этой задачи можно провести следующим образом. Предположим, что на торцевой стороне вертикально поставленной доски вырезан желоб в форме циклоиды (рис. 18). Не учитывая трение, попытаемся определить время, в течение которого металлический шарик скатится из точки M до низшей точки K вырезанного желоба.

Пусть x_0, y_0 — координаты исходного положения шарика, т. е. точки M , а θ_0 — соответствующее ей значение параметра. Когда шарик скатится из положения M в некоторое положение N (θ), то он снизится по вертикали на расстояние h , которое в силу второго уравнения (69) определится следующим образом:

$$h = y - y_0 = r(1 - \cos \theta) - r(1 - \cos \theta_0) = r(\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Мы знаем, что скорость падающего тела находится по формуле

$$v = \sqrt{2gh},$$

где g — ускорение силы тяжести. В нашем случае последняя формула примет вид

$$v = \sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)}.$$

С другой стороны, так как скорость — это производная пути s по времени T , то приходим к соотношению

$$\frac{ds}{dT} = \sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)}.$$

Для циклоиды $ds = 2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta$, и поэтому последнее дифференциальное уравнение эквивалентно такому:

$$dT = \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}.$$

Интегрируя это уравнение в соответствующих пределах, получаем, что

$$T = \int_0^{\pi} \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr (\cos \theta_0 - \cos \theta)}} = -2 \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\pi} \frac{d \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \pi \sqrt{r/g}.$$

Таким образом, время T , в течение которого шарик скатится из положения M в положение K , определяется по формуле

$$T = \pi \sqrt{r/g},$$

показывающей, что период T не зависит от θ_0 , т. е. период не зависит от исходного положения M шарика, и поэтому очевидно, что два шарика, начавшие одновременно скатываться по желобу из точек M и N , окажутся в точке K в один и тот же момент времени.

Так как мы условились трение не учитывать, то шарик, скатившись в точку K , будет по инерции продолжать движение и через указанный последней формулой промежуток времени поднимется до точки M_1 , находящейся на одной высоте с точкой M . Прделав затем обратный путь, шарик и осуществит движение так называемого *циклоидального маятника* с периодом колебания

$$T_0 = 4\pi \sqrt{r/g}. \quad (70)$$

Отличительным свойством циклоидального маятника по сравнению с обычным (круговым) является то, что период его колебаний не зависит от амплитуды.

Покажем теперь, как можно заставить обычный круговой маятник двигаться таутохронно, не прибегая к желобу и подобным ему приспособлениям с большим трением. Для этого достаточно изготовить шаблон (например, из дерева), состоящий из двух одинаковых полуарок циклоиды, имеющих общую точку возврата (рис. 19). Шаблон укрепляется вертикально, а в точке возврата O привязывается шарик

на нити, длина которой равна удвоенному диаметру производящего круга циклоиды.

Шарик, отклоненный в произвольную точку M , начнет совершать колебания, период которых не будет зависеть от выбора точки M . Даже если под влиянием трения и сопротивления воздуха размах колебаний будет уменьшаться,

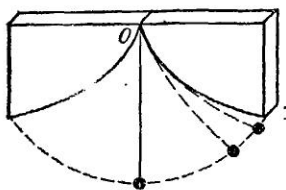


Рис. 19

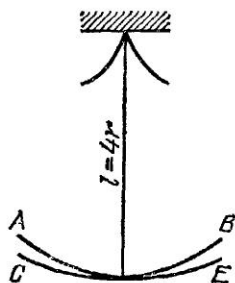


Рис. 20

время колебания маятника останется неизменным! Для кругового маятника, движущегося по дуге окружности, свойство изохронности практически приблизительно удовлетворяется для небольших амплитуд, когда дуга окружности незначительно отклоняется от дуги циклоиды.

Рассмотрим в качестве примера малые колебания маятника по дуге AB циклоиды (рис. 20). Если эти колебания очень малы, то влияние направляющего шаблона практически не ощущается и маятник раскачивается почти как обыкновенный круговой маятник с длиной нити, равной $4r$. Путь AB циклоидального маятника практически не будет отличаться от пути CE кругового маятника с длиной нити, равной $4r$. Поэтому период малых колебаний кругового маятника с длиной нити $l=4r$ практически одинаков с периодом колебаний циклоидального маятника.

Если теперь в формуле (70) положить $r=l/4$, то период малых колебаний кругового маятника можно выразить через длину его нити l :

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Последняя формула выводится (исходя из других соображений) в школьном курсе физики.

В заключение заметим, что циклоида является единственной кривой, двигаясь по которой тяжелая материальная точка совершает изохронные колебания.

Задача о брахистохроне

Задача о брахистохроне (от греческого *brachistos* — кратчайший и *chronos* — время), или о кривой скорейшего спуска, была поставлена швейцарским математиком И. Бернулли в 1696 г. и заключалась в следующем.

В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 21), не лежащие на одной вертикали. Требуется среди всех кривых, проходящих через указанные точки, найти такую, спускаясь по которой под действием силы тяжести, материальная точка скатится из точки A в точку B за кратчайшее время.

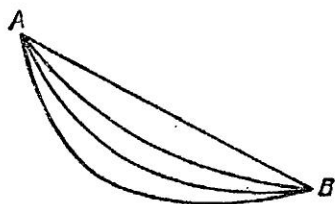


Рис. 21

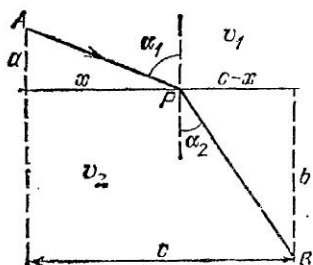


Рис. 22

Эта задача решалась лучшими математиками разных времен и была решена как самим И. Бернулли, так и Г. В. Лейбницем, И. Ньютоном, Г. Лопиталем, Я. Бернулли. Задача знаменита тем, что, помимо значимости ее решения с точки зрения естественнонаучной, она стала источником идей совершенно новой области математики — вариационного исчисления.

Решение задачи о брахистохроне можно связать с решением другой задачи, возникающей в оптике. Обратимся к рис. 22, на котором схематически изображен луч света, падающий из точки A в точку P со скоростью v_1 , а затем проходящий в более плотной среде от точки P до точки B с меньшей скоростью v_2 . Полное время T , требуемое для прохождения луча света от точки A до точки B , определяется, очевидно, из равенства

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Если предположить, что луч света проходит от точки A до точки B по указанному пути за минимальное время T , то

производная $\frac{dT}{dx} = 0$. А тогда

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}},$$

или $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$. Последнее равенство выражает известный закон преломления Снеллиуса, который был первоначально открыт экспериментально в форме $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = a$, где $a = \text{const}$.

Высказанное предположение о том, что луч света проходит от точки A до точки B за минимальное время, называется *принципом Ферма наименьшего времени*. Значение этого принципа заключается не только в том, что он дает рациональную основу для вывода закона Снеллиуса, но, в частности, и в том, что он может быть применен для нахождения траектории луча света, когда последний проходит через среду переменной плотности, вообще говоря, не по отрезкам прямых.

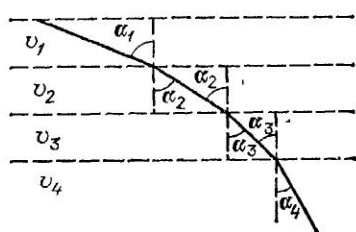


Рис. 23

Для примера рассмотрим рис. 23, на котором изображена слоистая среда.

В каждом отдельном слое скорость света постоянна, но она убывает при переходе от вышележащего слоя к нижележащему. Падающий луч света при переходе от слоя к слою преломляется все больше и больше по направлению к вертикали. Применяв закон Снеллиуса к границам между слоями, получим

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \frac{\sin \alpha_4}{v_4}.$$

Допустим теперь, что толщина слоев неограниченно уменьшается, а число слоев неограниченно растет. Тогда в пределе скорость света убывает непрерывно, и мы заключаем (рис. 24), что

$$\frac{\sin \alpha}{v} = a, \quad (71)$$

где $a = \text{const}$. Подобная ситуация наблюдается (с определенными оговорками) в случае падающего на землю луча солнца, когда он замедляет скорость при прохождении через атмосферу с возрастающей плотностью.

Обращаясь теперь к задаче о брахистохроне, введем систему координат в вертикальной плоскости так, как это показано на рис. 25, и представим себе, что шарик (подобно лучу света) способен выбрать себе такую траекторию спуска из точки A в точку B , чтобы время спуска было наименьшим.

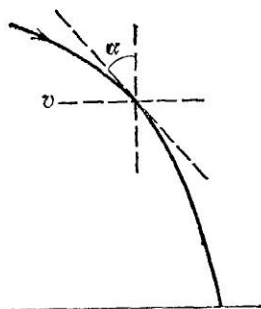


Рис. 24

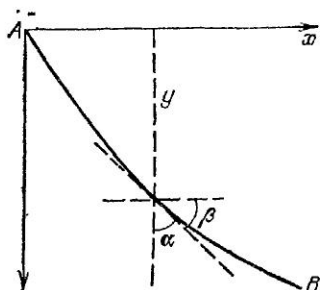


Рис. 25

Тогда, как это следует из предыдущих рассуждений, имеет место формула (71).

Исходя из принципа сохранения энергии, получаем, что скорость, достигнутая шариком на заданном уровне, зависит только от потери потенциальной энергии при достижении этого уровня, а не от вида траектории, по которой скатывается шарик. Это означает, что $v = \sqrt{2gy}$.

С другой стороны, геометрические построения показывают, что

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Комбинируя тогда равенство (71) с последними двумя соотношениями, получаем

$$y [1 + (y')^2] = C. \quad (72)$$

Уравнение (72) и есть дифференциальное уравнение брахистохроны. Покажем сейчас, что брахистохрой может быть циклоида, и только она. Действительно, так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то, разделив переменные в уравнении (72), придем к уравнению вида

$$dx = \left(\frac{y}{C - y} \right)^{1/2} dy.$$

Введем теперь новую переменную φ , полагая

$$\left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Тогда

$$y = C \sin^2 \varphi, \quad dy = 2C \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \\ dx = \operatorname{tg} \varphi dy = 2C \sin^2 \varphi d\varphi = C(1 - \cos 2\varphi) d\varphi.$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к соотношению

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_1,$$

где, в силу начальных условий, $x=y=0$ при $\varphi=0$ и постоянная $C_1=0$.

Итак,

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y = C \sin^2 \varphi = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Полагая здесь $C/2=r$, $2\varphi=\theta$, приходим к стандартным параметрическим уравнениям циклоиды (69). Удивительная кривая циклоида — она является не только изохроной, но и брахистохроной!

Среднее арифметическое, среднее геометрическое и дифференциальное уравнение

Рассмотрим следующую любопытную задачу, которая впервые была решена немецким ученым К. Ф. Гауссом.

Пусть m_0 и n_0 — два произвольных положительных числа ($m_0 > n_0$). Составим из них два других числа m_1 и n_1 , являющихся для m_0 и n_0 соответственно средним арифметическим и средним геометрическим. Другими словами, положим

$$m_1 = \frac{m_0 + n_0}{2}, \quad n_1 = \sqrt{m_0 n_0}.$$

Поступая с m_1 и n_1 так же, как с m_0 и n_0 , полагаем

$$m_2 = \frac{m_1 + n_1}{2}, \quad n_2 = \sqrt{m_1 n_1}.$$

Продолжая этот процесс и дальше, получаем две числовые последовательности $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), которые, как нетрудно показать, являются последовательностями сходящимися. Ставится вопрос: чему равна разность пределов этих последовательностей?

Приведем принадлежащее немецкому математику К. В. Борхардту изящное решение этой задачи, связанное с построением линейного дифференциального уравнения второго порядка. Итак, пусть a — искомая разность. Очевидно, что a зависит от m_0 и n_0 . Аналитически этот факт выразим записью $a=f(m_0, n_0)$, где f — некоторая функция. Из определения числа a вытекает также, что $a=f(m_1, n_1)$. Теперь, если умножить m_0 и n_0 на одно и то же число k , то каждое из введенных чисел $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$, не исключая и a , также приобретет множителем число k . Последнее означает, что a является однородной функцией первой степени относительно m_0 и n_0 и, следовательно,

$$a = m_0 f(1, n_0/m_0) = m_1 f(1, n_1/m_1).$$

Полагая $n_0/m_0=x$, $n_1/m_1=x_1, \dots$ и обозначая $1/f(1, n_0/m_0)$ через y , а $1/f(1, n_1/m_1)$ через y_1, \dots , находим

$$y = y_1 \frac{m_0}{m_1} = \frac{2y_1}{1+x}. \quad (73)$$

Так как x_1 связано с x уравнением

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x},$$

то получаем, что

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1-x}{(1+x)^2 \sqrt{x}} = \frac{(x_1-x_1^3)(1+x)^2}{2(x-x^3)}.$$

Уравнение же (73) приводит к следующему соотношению:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2} y_1 + \frac{2}{1+x} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx}.$$

Заменяя здесь производную $\frac{dx_1}{dx}$ ее значением из предыдущего равенства и освобождаясь от знаменателя $x-x^3$, получаем соотношение

$$(x-x^3) \frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-1)}{1+x} y_1 + (1+x)(x_1-x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по x , найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{d \left[(x-x^3) \frac{dy}{dx} \right]}{dx} &= 2y_1 \frac{d \left[\frac{x(x-1)}{1+x} \right]}{dx} + \frac{2x(x-1)}{1+x} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} + \\ &+ (x_1-x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1} + (1+x) \frac{d}{dx_1} \left[(x_1-x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1} \right] \frac{dx_1}{dx}. \end{aligned}$$

Элементарными преобразованиями последнее равенство приводится к такому:

$$\frac{d}{dx} \left[(x-x^3) \frac{dy}{dx} \right] - xy = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}} \left\{ \frac{d}{dx_1} \left[(x_1-x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1} \right] - x_1 y_1 \right\}.$$

Если в последнем уравнении заменить x на x_1 , то x_1 перейдет в x_2 . Если затем заменить x_1 на x_2 , то x_2 перейдет в x_3 и т. д. Поэтому, полагая

$$\frac{d}{dx} \left[(x-x^3) \frac{dy}{dx} \right] - xy = a^*(y),$$

придем к равенству

$$a^*(y) = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}} \frac{1-x_1}{(1+x_1)\sqrt{x_1}} \frac{1-x_2}{(1+x_2)\sqrt{x_2}} \dots \dots \frac{1-x_n}{(1+x_n)\sqrt{x_n}} a^*(y_n).$$

Если теперь устремить n к ∞ , то $1-x_n$ будет стремиться к 0, и, таким образом, придем к тому, что

$$a^*(y) = 0.$$

А это означает, что y удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x-x^3) \frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0. \quad (74)$$

Заметив теперь, что

$$a = f(m_0, n_0) = y \frac{f^2(m_0, n_0)}{m_0},$$

нетрудно указать и значение этого числа. Действительно, исходя из того, что y обязано быть постоянным решением уравнения (74), находим, что таковым является только $y=0$. Таким образом, разность пределов последовательностей $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ равна 0.

Дифференциальное уравнение (74) интересно не только тем, что оно позволило исходную задачу свести к очевидной, но и тем, что это уравнение имеет непосредственную связь с решением задачи о вычислении периода малых колебаний кругового маятника.

Как было показано, период малых колебаний кругового маятника находится по формуле

$$T = 4 \sqrt{l/g} F(k, \pi/2),$$

где

$$F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Так вот, оказывается, что если $0 \leq k < 1$, то

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} k^{2n} \right),$$

где

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2} x^{2n}$$

есть решение дифференциального уравнения (74).

О полете тела, брошенного под углом к горизонту

Пусть тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Требуется вывести уравнения движения тела, пренебрегая силами сопротивления.

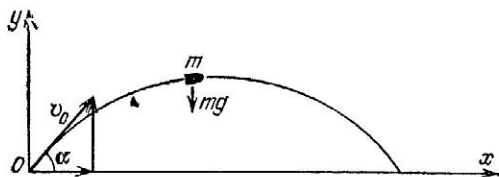


Рис. 26

Выберем оси координат так, как показано на рис. 26. В произвольном положении M на тело массой m действует лишь одна сила — его вес $P=mg$. Поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси x и y запишутся в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Сокращая на m , получаем уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (75)$$

Начальные же условия движения тела таковы:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha \quad \text{при } t = 0. \quad (76)$$

Интегрируя уравнения (75) с учетом начальных условий (76), приходим к выводу, что уравнения движения тела задаются формулами

$$x = (v_0 \cos \alpha) t, \quad y = (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2. \quad (77)$$

Из уравнений (77) можно сделать ряд выводов о характере движения брошенного тела. Например, можно ответить на вопросы: каково время полета тела до его падения на землю, каково расстояние полета по горизонтали, какова максимальная высота летящего тела, какова траектория полета тела?

На первый вопрос можно ответить, найдя значение t , при котором $y=0$. Из второго уравнения (77) видно, что это будет тогда, когда

$$t \left[v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2} \right] = 0, \quad \sim$$

т. е. когда либо $t=0$, либо $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$. Второе значение и дает ответ на первый вопрос.

Чтобы ответить на второй вопрос, вычислим значение x при значении t , равном времени полета. Из первого уравнения (77) получаем, что расстояние полета по горизонтали задается формулой

$$\frac{(v_0 \cos \alpha) (2v_0 \sin \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что расстояние будет наибольшим, когда $2\alpha=90^\circ$, т. е. $\alpha=45^\circ$. В этом случае расстояние будет равно v_0^2/g .

Ответ на третий вопрос мы сразу же получим, если укажем условие максимальности y . Но это означает, что в той точке, где y максимально, производная $\frac{dy}{dt}=0$. Учитывая же, что

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

приходим к равенству $-gt + v_0 \sin \alpha = 0$, откуда

$$t = (v_0 \sin \alpha)/g.$$

Подставляя теперь полученное значение t во второе уравнение (77), находим, что максимальная высота равна $v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g)$.

На четвертый вопрос ответ уже получен выше. А именно, траекторией полета будет парабола, так как уравнения (77) — это параметрическое задание параболы, которая в

декартовых координатах запишется в виде

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} \sec^2 \alpha.$$

Невесомость

Состояние невесомости может быть достигнуто различными способами, хотя оно (вольно или невольно) и ассоциируется с «плаванием» космонавтов в кабине космического корабля.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть человек весом P находится в кабине пассажирского лифта, движущегося вниз с ускорением $\omega = \alpha g$, где $0 < \alpha < 1$, а g — ускорение силы тяжести. Требуется определить давление человека на дно кабины, а также ускорение лифта, при котором это давление отсутствует.

На человека в лифте действуют две силы (рис. 27): вес человека P и сила реакции дна кабины лифта Q (равная давлению человека на дно кабины). Дифференциальное уравнение движения человека запишется в виде

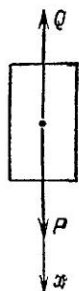


Рис. 27

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P - Q. \quad (78)$$

Так как $\frac{d^2x}{dt^2} = \omega = \alpha g$, $m = P/g$, то из уравнения (78) получаем соотношение

$$Q = P - m \frac{d^2x}{dt^2} = P(1 - \alpha). \quad (79)$$

Принимая, далее, во внимание, что $0 < \alpha < 1$, приходим к выводу, что $Q < P$. Итак, давление человека на дно кабины движущегося вниз лифта задается силой

$$Q = P(1 - \alpha).$$

В том же случае, когда кабина лифта поднимается вверх с ускорением $\omega = \alpha g$, где $0 < \alpha < 1$, давление человека на дно кабины определяется силой $Q = P(1 + \alpha)$. Выясним теперь, при каком ускорении лифта давление человека на дно кабины отсутствует. Для этого достаточно обратиться к равенству (79), положив $Q = 0$. В результате приходим к выводу, что $\alpha = 1$, т. е. для того, чтобы $Q = 0$, ускорение лифта обязано равняться ускорению силы тяжести.

Таким образом, при свободном падении лифта с ускорением силы тяжести g давление человека на дно кабины лифта

отсутствует. Именно это состояние и называют *состоянием невесомости*. При невесомости отсутствуют взаимные давления отдельных частей тела человека. Это вызывает у него необычные ощущения. При состоянии невесомости все точки тела имеют равные ускорения.

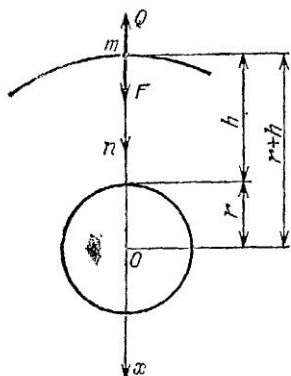


Рис. 28

Конечно, состояние невесомости может иметь место и не только при свободном падении. Для иллюстрации рассмотрим такую задачу.

Какова должна быть скорость космического корабля, движущегося вокруг Земли как искусственный спутник, чтобы человек находился в кабине в состоянии невесомости?

Задачу будем решать в предположении, что космический корабль движется по круговой орбите радиуса $r+h$, где r — радиус Земли, а h — высота полета космического корабля над поверхностью Земли. Из предыдущей задачи следует, что в состоянии невесомости давление на дно кабины космического корабля, а следовательно, и реакция Q дна кабины равны нулю. Итак, $Q=0$. Обратимся теперь к рис. 28. Ось x направлена вдоль главной нормали n круговой траектории космического корабля. Воспользовавшись дифференциальным уравнением движения материальной точки в проекции на главную нормаль, которое имеет вид

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{kn}$$

и где $\rho = r+h$, $\sum_{k=1}^n F_{kn} = F$, причем сила F направлена по главной нормали к траектории движения, приходим к уравнению

$$\frac{mv^2}{r+h} = F = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

или к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v^2}{r+h}.$$

Подставив значение $\frac{d^2x}{dt^2}$ из последней формулы в соотно-

шение (78), получим равенство

$$\frac{mv^2}{r+h} = P - Q. \quad (80)$$

Здесь сила P равна силе F притяжения к Земле, которая в соответствии с всемирным законом тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния $r+h$ до центра Земли, т. е.

$$F = \frac{km}{(r+h)^2},$$

где m — масса космического корабля, а постоянная k определяется из следующих соображений. На поверхности Земли, т. е. при $h=0$, сила притяжения $F=mg$. Из предыдущей формулы тогда получаем, что $k=gr^2$ и, таким образом,

$$P = F = \frac{mgr^2}{(r+h)^2},$$

где g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

Подставив теперь полученное значение P в формулу (80) и учтя тот факт, что $Q=0$, приходим к выводу, что требуемая в задаче скорость находится из равенства

$$v = r \sqrt{\frac{g}{r+h}}.$$

Законы Кеплера движения планет

В соответствии с законом всемирного тяготения любые два тела, находящиеся на расстоянии r друг от друга и имеющие массы m и M соответственно, притягиваются с силой

$$F = \frac{\gamma mM}{r^2}, \quad (81)$$

где γ — универсальная постоянная притяжения.

Основываясь на этом законе, опишем движение планет, считая, что m — масса планеты, движущейся вокруг Солнца, M — масса Солнца. Влияние других планет при этом учитывать не будем.

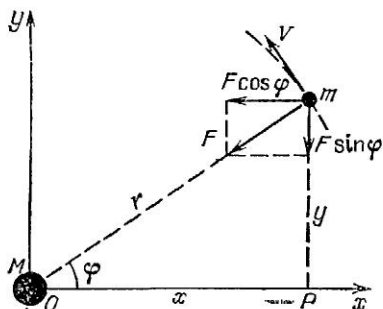


Рис. 29

Пусть (рис. 29) Солнце находится в начале координатной системы Oxy , а планета в момент времени t находится в точке

А с текущими координатами x , y . Сила притяжения F , действующая на планету, раскладывается на две составляющие: параллельную оси x , равную $F \cos \varphi$, и параллельную оси y , равную $F \sin \varphi$. Используя формулу (81) и второй закон динамики, получаем уравнения

$$m\ddot{x} = -F \cos \varphi = -\frac{\gamma mM}{r^2} \cos \varphi, \quad (82)$$

$$m\ddot{y} = -F \sin \varphi = -\frac{\gamma mM}{r^2} \sin \varphi. \quad (83)$$

Принимая же во внимание, что $\sin \varphi = y/r$, а $\cos \varphi = x/r$, уравнения (82) и (83) можно переписать в виде

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{r^3},$$

где постоянная $k = \gamma M$

Наконец, учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, приходим к дифференциальным уравнениям

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (84)$$

Далее, не умаляя общности рассуждений, можно считать, что выполняются следующие условия:

$$x = a, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = v_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (85)$$

Таким образом, задача свелась к исследованию уравнений (84) при начальных условиях (85). Исходя из специфики уравнений (84), удобно воспользоваться полярными координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. А тогда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - (r \sin \varphi) \dot{\varphi}, & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + (r \cos \varphi) \dot{\varphi}, \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2(\dot{r} \sin \varphi) \dot{\varphi} - (r \sin \varphi) \ddot{\varphi} - (r \cos \varphi) \dot{\varphi}^2, \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2(\dot{r} \cos \varphi) \dot{\varphi} + (r \cos \varphi) \ddot{\varphi} - (r \sin \varphi) \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Используя последние два равенства, дифференциальные уравнения (84) можно записать в виде

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi = -\frac{k \cos \varphi}{r^2}, \quad (87)$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi = -\frac{k \sin \varphi}{r^2}. \quad (88)$$

Умножая обе части уравнения (87) на $\cos \varphi$, уравнения (88) на $\sin \varphi$ и складывая результаты, находим, что

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -k/r^2. \quad (89)$$

Если же обе части уравнения (87) умножить на $\sin \varphi$, а уравнения (88) — на $\cos \varphi$ и из первого полученного соотношения вычесть второе, то получим уравнение

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \quad (90)$$

Что же касается начальных условий (85), то в полярных координатах они принимают вид

$$r = a, \quad \varphi = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = v_0/a \quad \text{при } t = 0. \quad (91)$$

Итак, исследование уравнений (84) при начальных условиях (85) свелось к исследованию уравнений (89) и (90) при начальных условиях (91). При этом можно заметить, что уравнение (90) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (92)$$

Но уравнение (92) дает нам равенство

$$r^2\dot{\varphi} = C_1, \quad (93)$$

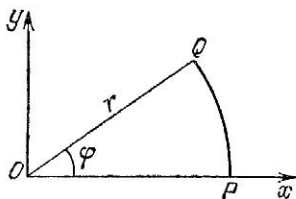


Рис. 30

где C_1 — постоянная, которая имеет интересную геометрическую интерпретацию. Именно, предположим, что тело (рис. 30) движется из точки P в точку Q по дуге \widehat{PQ} . Пусть S — площадь сектора, ограниченного отрезками OP , OQ и дугой \widehat{PQ} . Тогда из курса математического анализа известно, что

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi,$$

или $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Отсюда

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (94)$$

Производная же $\frac{dS}{dt}$ представляет собой так называемую *секториальную скорость*. А поскольку в силу равенства (93) величина $r^2\dot{\varphi}$ является постоянной, то отсюда следует,

что и секториальная скорость также постоянна. Но это в свою очередь означает, что тело движется таким образом, что радиус-вектор «заметает» равные площади за равные промежутки времени. Этот закон площадей и есть один из трех законов Кеплера. Полностью он формулируется следующим образом: *каждая из планет движется по плоской кривой относительно Солнца таким образом, что радиус-вектор, связывающий Солнце и планету, «заметает» равные площади за равные промежутки времени.*

Чтобы вывести следующий закон Кеплера, касающийся типа траекторий движения планет, вернемся к уравнениям (89) и (90), рассматриваемым при условиях (91). Из начальных условий (91), в частности, следует, что $r=a$, $\dot{\varphi}=v_0/a$ при $t=0$. А тогда из равенства (93) получаем $C_1=av_0$. Итак,

$$r^2\dot{\varphi} = av_0, \quad \text{или} \quad \dot{\varphi} = av_0/r^2. \quad (95)$$

Отсюда уравнение (89) принимает вид

$$\ddot{r} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Полагая здесь $\dot{r}=p$, последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dt} = p \frac{dp}{dr} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2},$$

или $p \frac{dp}{dr} = \frac{a^2v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}$. Разделяя переменные в последнем дифференциальном уравнении и интегрируя, получаем соотношение

$$\frac{p^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{2r^2} + C_2.$$

Поскольку $p=\dot{r}=0$ при $r=a$, то из последнего равенства имеем

$$C_2 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a}.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{2r^2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a},$$

или, если рассматривать только положительный квадратный корень, к дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(v_0 - \frac{2k}{a}\right) + \frac{2k}{r} - \frac{a^2v_0^2}{r^2}}. \quad (96)$$

Разделив теперь уравнение (96) на уравнение (95), находим, что

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^3 v_0^2}, \quad \beta = \frac{k}{a^2 v_0^2}.$$

Последнее уравнение интегрируется подстановкой $r=1/u$. В результате получаем

$$r = \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + e \cos(\varphi + C_3)},$$

где $e = \sqrt{\alpha + \beta^2 / \beta} = (a v_0^2 / k) - 1$. Постоянная C_3 определяется из условия $r=a$ при $\varphi=0$. Нетрудно проверить, что $C_3=0$.

Таким образом, окончательно получаем, что

$$r = \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + e \cos \varphi}. \quad (97)$$

Из аналитической геометрии известно, что (97) — это уравнение в полярных координатах конического сечения, имеющего эксцентриситет e . При этом возможны следующие случаи:

- 1) эллипс, если $e < 1$, т. е. $v_0^2 < 2k/a$;
- 2) гипербола, если $e > 1$, т. е. $v_0^2 > 2k/a$;
- 3) парабола, если $e = 1$, т. е. $v_0^2 = 2k/a$;
- 4) окружность, если $e = 0$, т. е. $v_0^2 = k/a$.

Из астрономических наблюдений следует, что для всех планет Солнечной системы величина v_0^2 всегда меньше, чем $2k/a$. Таким образом, приходим еще к одному закону Кеплера: *траектории планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

Отметим, что орбиты Луны и искусственных спутников Земли также являются эллипсами, но в большинстве случаев эти эллипсы близки к окружности, т. е. эксцентриситет e мало отличается от нуля.

Что же касается возвращающихся комет, таких как, например, комета Галлея, то они имеют орбиты в виде «вытянутых» эллипсов, у которых эксцентриситет хотя и меньше единицы, но очень близок к ней. В частности, комета Галлея появляется в зоне видимости Земли приблизительно через каждые 76 лет. Следующее ее появление произошло в конце 1985 — начале 1986 года.

Небесные тела, которые имеют параболические и гиперболические орбиты, могут наблюдаться лишь однажды, они никогда не возвращаются.

Выясним теперь физический смысл эксцентриситета e . Предварительно отметим, что компоненты \dot{x} и \dot{y} вектора скорости планеты V по осям x и y соответственно и величина v вектора V удовлетворяют равенству

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

которое с учетом формул (86) можно записать в виде

$$v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2.$$

Отсюда следует, что кинетическая энергия планеты массой m определяется по формуле

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2). \quad (98)$$

Потенциальная же энергия системы есть взятая со знаком «минус» величина работы, требуемой для передвижения планеты в бесконечность (где потенциальная энергия равна нулю), и, следовательно,

$$-\int_r^{\infty} \frac{km}{r^2} dr = \frac{km}{r} \Big|_r^{\infty} = -\frac{km}{r}. \quad (99)$$

Если теперь обозначить через E полную энергию системы, которая в силу закона сохранения энергии является величиной постоянной, то из формул (98) и (99) получаем, что

$$\frac{1}{2} m [r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] - \frac{km}{r} = E. \quad (100)$$

Полагая $\varphi=0$, из соотношений (97) и (100) имеем

$$r = \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + e},$$

$$\frac{mr^2 a^2 v_0^2}{2r^4} - \frac{km}{r} = E.$$

Исключая из последних двух равенств r , находим, что эксцентриситет

$$e = \sqrt{1 + E \frac{2a^2 v_0^2}{mk^2}}.$$

В результате уравнение орбиты планеты (97) принимает вид

$$r = \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + \sqrt{1 + E (2a^2 v_0^2 / mk^2)} \cos \varphi}.$$

Из последней формулы следует, что орбита будет эллипсом, гиперболой, параболой, окружностью, если соответственно

$E < 0$, $E > 0$, $E = 0$, $E = -mk^2/(2a^2v_0^2)$. Таким образом, характер орбиты планеты полностью определяется полной энергией E .

В частности, если бы планета, например Земля, могла получить извне толчок, позволивший бы увеличить полную энергию E до положительной величины, то Земля перешла бы на гиперболическую орбиту и покинула нашу Солнечную систему.

Обратимся теперь к третьему закону Кеплера, который касается периодов обращения планет вокруг Солнца. Исходя из предыдущего закона Кеплера, мы, естественно, ограничимся лишь случаем эллиптической орбиты, уравнение которой в декартовых координатах записывается, как известно, в виде

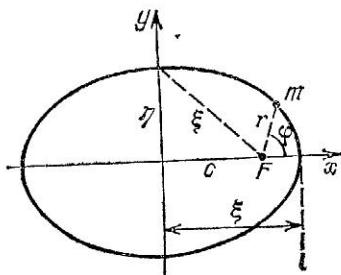


Рис. 31

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1,$$

где (рис. 31) эксцентриситет $e = C/\xi$, а $C^2 = \xi^2 - \eta^2$, так что

$$e^2 = (\xi^2 - \eta^2)/\xi^2,$$

или

$$\eta^2 = \xi^2 (1 - e^2). \quad (101)$$

Рассматривая теперь совместно равенства (97) и (101) и учитывая свойства эллипса, приходим к выводу, что

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + e} + \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 - e} \right) = \frac{a^2 v_0^2}{k(1 - e^2)} = \frac{a^2 v_0^2 \xi^2}{k \eta^2},$$

т. е.

$$\eta^2 = \frac{a^2 v_0^2 \xi}{k}. \quad (102)$$

Обозначим через T период обращения планеты, т. е. время, необходимое для одного полного оборота планеты по своей орбите. Тогда, поскольку площадь области, ограниченной эллипсом, равна $\pi \xi \eta$, на основании формул (94) и (95) приходим к выводу, что $\pi \xi \eta = \pi v_0 T / 2$. Наконец, принимая

во внимание равенство (102), находим, что

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \xi^2 \eta^2}{a^2 v_0^2} = \frac{4\pi^2}{k} \xi^3.$$

А это и есть формализованная запись третьего закона Кеплера: *квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших осей их орбит.*

Прогиб балок

Рассмотрим горизонтально расположенную балку AB (рис. 32) постоянного поперечного сечения, сделанную из однородного материала. Ось симметрии балки указана на рис. 32 пунктирной линией. Предположим, что под влиянием сил, которые действуют на балку в вертикальной плоскости, содержащей ось симметрии, балка прогибается (рис. 33).



Рис. 32



Рис. 33

Действующие силы могут быть обусловлены весом балки, внешне приложенной нагрузкой или как той, так и другой силами вместе. Понятно, что под действием сил ось симметрии будет искривляться. Обычно искривленную ось симметрии называют *упругой линией*. Определение формы этой линии играет важную роль в теории упругости.

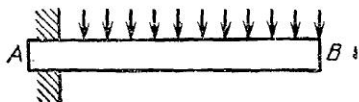


Рис. 34

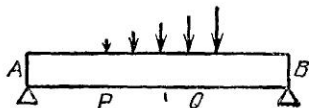


Рис. 35

Отметим, что существуют различные типы балок в зависимости от способов их крепления или опоры. Например, на рис. 34 изображена балка, у которой конец A жестко закреплен, а конец B свободен. Такая балка называется *консольной балкой*. На рис. 35 показана балка, лежащая свободно на опорах A и B . Еще один тип балок с опорами показан на рис. 36. Существуют и различные способы приложения внешних нагрузок. Например, на рис. 34 показана равномерно распределенная нагрузка. Конечно, па-

грузка может быть и переменной вдоль всей длины балки или некоторой ее части (рис. 35). На рис. 36 указан случай сосредоточенной нагрузки.

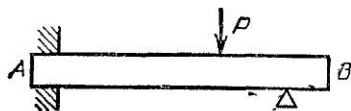


Рис. 36

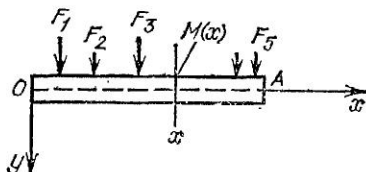


Рис. 37

Рассмотрим горизонтальную балку OA (рис. 37). Пусть ее ось симметрии (показанная на рисунке пунктиром) лежит на оси x , где за положительное направление выбирается направление вправо от точки O , являющейся началом координат. За положительное направление на оси y выберем направление вниз от точки O . Под действием внешних сил F_1, F_2, \dots (и веса балки, если он большой) ось симметрии искривляется в упругую линию, которая показана на рис. 38 пунктиром. Смещение y упругой линии от оси x называется прогибом балки в положении x . Таким образом, если известно уравнение упругой линии, то всегда можно указать и прогиб балки. Ниже мы покажем, как это может быть сделано практически.

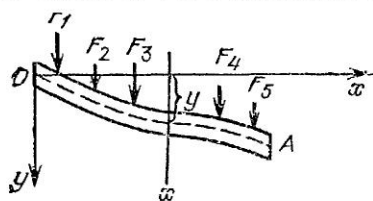


Рис. 38

Обозначим через $M(x)$ изгибающий момент в вертикальном поперечном сечении балки с координатой x . Изгибающий момент определяется как алгебраическая сумма моментов тех сил, которые действуют с одной стороны балки в положении x . При подсчете моментов будем считать, что силы, которые действуют на балку снизу вверх, дают отрицательные моменты, а силы, действующие сверху вниз, дают положительные моменты.

В сопротивлении материалов доказывается, что изгибающий момент в положении x связан с радиусом кривизны упругой линии соотношением

$$EJ \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = M(x), \quad (103)$$

где E — модуль упругости Юнга, который зависит от материала, J — момент инерции поперечного сечения балки в

положении x относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр тяжести этого поперечного сечения. Произведение EJ обычно называют *жесткостью при изгибе*; ее величину в дальнейшем будем считать постоянной.

Теперь, если предположить, что балка лишь слегка прогибается, что часто бывает на практике, то угловой коэффициент y' упругой линии будет очень мал, и поэтому вместо уравнения (103) можно рассматривать приближенное уравнение

$$EJy'' = M(x). \quad (104)$$

Чтобы показать, как на практике используется уравнение (104), рассмотрим следующую задачу. Горизонтальная однородная стальная балка длины l , свободно лежащая на

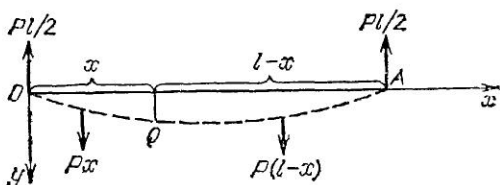


Рис. 39

двух опорах, прогибается под действием собственного веса, равного p кгс на единицу длины. Требуется найти уравнение упругой линии и максимальный прогиб балки.

На рис. 39 упругая линия показана пунктиром. Поскольку балка является двухопорной, то каждая из опор создает направленную вверх реакцию, равную половине веса балки (равную $pl/2$). Изгибающий момент $M(x)$ есть алгебраическая сумма моментов этих сил, действующих на балку с одной стороны от точки Q (рис. 39). Рассмотрим сначала действие сил слева от точки Q . На расстоянии x от точки Q сила $pl/2$ действует на балку снизу вверх и создает отрицательный момент. Сила же px , которая действует на балку сверху вниз на расстоянии $x/2$ от точки Q , создает положительный момент. Таким образом, суммарный изгибающий момент в точке Q задается формулой

$$M(x) = -\frac{pl}{2}x + px\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}. \quad (105)$$

Если же рассмотреть действие сил справа от точки Q , то в этом случае на расстоянии $(l-x)/2$ от точки Q на балку действует сверху вниз сила $p(l-x)$, которая создает положительный момент. Отрицательный же момент создает сила

$pl/2$, которая действует на балку снизу вверх на расстоянии $l-x$ от точки Q . Суммарный изгибающий момент подсчитывается в данном случае по формуле

$$M(x) = p(l-x) \frac{l-x}{2} - \frac{pl}{2}(l-x) = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}. \quad (106)$$

Как показывают формулы (105) и (106), изгибающие моменты в обоих случаях оказываются равными. Теперь, зная, как находится изгибающий момент, легко выписать и основное уравнение (104), которое в нашем случае принимает вид

$$EJy'' = \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2}. \quad (107)$$

Учитывая же, что на концах O и A балка не прогибается, для нахождения y из уравнения (107) воспользуемся условиями на концах балки:

$$y=0 \text{ при } x=0 \text{ и } y=0 \text{ при } x=l.$$

А тогда интегрирование уравнения (107) с учетом последних условий дает

$$y = \frac{p}{24EJ} (x^4 - 2lx^3 + l^3x). \quad (108)$$

Уравнение (108) является уравнением упругой линии. Формула (108) используется на практике для определения максимального прогиба. Так, в нашем конкретном случае, основываясь на соображениях симметрии (это можно сделать и прямыми вычислениями), находим, что максимальный прогиб будет при $x=l/2$ и равен он $5pl^4/(384EJ)$, где $E=21 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2$, $J=3 \cdot 10^4 \text{ см}^4$.

Транспортировка леса

При транспортировке спиленных деревьев на деревообрабатывающие предприятия лесовозы определенную часть пути обязательно проезжают по лесным дорогам. Обычно ширина лесной дороги такова, что по ней может проехать только один лесовоз. Для того чтобы встречные машины могли разъехаться, на дороге устраивают несколько разъездных участков. Не касаясь вопроса об оптимальном режиме движения, при котором нагруженные и пустые лесовозы должны встречаться именно на разъездных участках, выясним, насколько широким должен быть поворот дороги и по какой траектории водитель должен вести автомобиль на повороте, чтобы лесовоз мог перевозить, скажем, тридца-

симметричные стволы. При этом предполагается, что лесовоз имеет большую маневренность, позволяющую маневрировать на довольно ограниченном участке дороги.

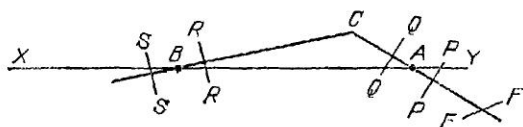


Рис. 40

Обычно лесовоз состоит из тягача и трейлера (прицепа), свободно сцепленных друг с другом. Тягач имеет один передний (ведущий) мост и два задних моста, над которыми устанавливается так называемый коник, состоящий из поворотной балки со стойками и круглой платформы, свободно вращающийся в горизонтальной плоскости относительно симметрично расположенной вертикальной оси. На коник одним из концов и укладываются стволы деревьев. Трейлер имеет только два задних моста, но также с присоединенным к ним коником, к которому крепятся свободные концы стволы деревьев. Шасси трейлера состоит из двух металличе-

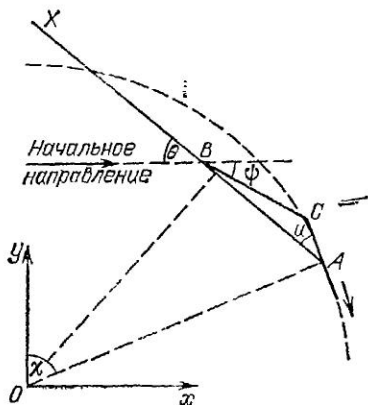


Рис. 41

ческих цилиндров, один из которых может входить внутрь другого. Шасси соединяет коник с осью, скрепляющей трейлер с тягачом. Таким образом, длина шасси может изменяться во время движения, а это позволяет тягачу и трейлеру двигаться независимо. Схематически лесовоз изображен на рис. 40. При этом точки A и B соответствуют осям коников, расположенным друг от друга на расстоянии h . Через XY обозначен ствол дерева, для которого $AX = \lambda h$. Точка C соответствует небольшой оси, которая скрепляет тягач с трейлером, причем $AC = ah$. Обычно $a = 0,3$; что же касается простейшего случая буксировки, то $a = 0$. Далее, FF — передняя ось тягача, PP и QQ — его задние оси, RR и SS — оси трейлера. Все оси имеют одну и ту же длину $2L$. Будем считать, что ширина лесовоза также равна $2L$. Что же касается ширины груза в хвостовой его части, то ее обозначим через $2W$. В дальнейшем нам придется поль-

заться этими обозначениями. При этом предполагается, что лесовоз имеет большую маневренность, позволяющую маневрировать на довольно ограниченном участке дороги. Обычно лесовоз состоит из тягача и трейлера (прицепа), свободно сцепленных друг с другом. Тягач имеет один передний (ведущий) мост и два задних моста, над которыми устанавливается так называемый коник, состоящий из поворотной балки со стойками и круглой платформы, свободно вращающийся в горизонтальной плоскости относительно симметрично расположенной вертикальной оси. На коник одним из концов и укладываются стволы деревьев. Трейлер имеет только два задних моста, но также с присоединенным к ним коником, к которому крепятся свободные концы стволы деревьев. Шасси трейлера состоит из двух металличе-

зоваться таким понятием, как *размах груза лесовоза*. Обычно под размахом груза понимают максимальное отклонение хвостовой его части (для простоты точки X) от траектории движения лесовоза. Будем считать, что дорога имеет ширину $2\beta h$ и что обычно поворот на дороге имеет вид дуги окружности радиуса h/α с центром в точке O (рис. 41). Для простоты предположим, что лесовоз входит в поворот таким образом, что тягач и трейлер располагаются на одной прямой линии; водитель при этом управляет лесовозом так, что точка A , соответствующая оси переднего коника, находится точно над средней линией дороги. Точка A на рис. 41 определяется углом χ , который тягач AC составляет с начальным направлением. При этом удобно задать систему координат Oxy так, чтобы ось абсцисс была параллельна выбранному начальному направлению, а ось ординат была ему перпендикулярна. В общей ситуации перевозимый лесовозом груз будет составлять с начальным направлением некоторый угол θ . Что же касается угла BAC на рис. 41, то, обозначая его через u , находим, что $u = \chi - \theta$. Обычно угол u называют углом *запаздывания лесовоза*. Требуемая полуширина дороги h , которая определяет размах груза лесовоза на повороте и которая называется *полушириной* дороги на внешней стороне поворота дороги, определяется алгебраической суммой $OX - OA + W$. Полуширина дороги на внутренней стороне поворота определяется уже алгебраической суммой $OA + L - OP$, где OP — перпендикуляр из точки O на AB .

Условимся, что при движении лесовоза его колеса либо вовсе не испытывают бокового скольжения, либо если оно есть, то оно мало. Это требование, в частности, означает, что средняя линия тягача AC является касательной к дуге окружности в точке A , так что OA есть перпендикуляр к AC , а угол χ задается движением точки A по дуге окружности. Заметим далее, что при строительстве дорог кривизна поворота дороги определяется углом N° , который соответствует приблизительно длине дуги поворота в 30 м. В наших обозначениях

$$N = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{30\alpha}{h}, \quad (109)$$

где h измеряется в метрах. Таким образом, для $h=9$ м и $\alpha=0,1$ получаем, что $N \approx 19^\circ$. Если же $h=12$ м, а $\alpha=1,0$, то $N \approx 142^\circ$. С точки зрения практики необходимо рассматривать лишь такие α , которые удовлетворяют условию

$0 < \alpha < 1$. Причем для увеличения маневренности лесовоза α должно быть по возможности большим.

Длина ствола транспортируемого дерева λh будет больше, чем h , но опять-таки, исходя из практических соображений, она не должна превосходить $3h$. Таким образом, значения λ изменяются в пределах $1 < \lambda < 3$. Относительно константы a предполагается, что $0 \leq a < 0,5$. Наконец, отметим, что величина h выбирается в каждом конкретном случае по-разному, но обычно ее значение колеблется в пределах 9—12 м.

Так как колеса тягача не испытывают бокового скольжения, то координаты точки A на рис. 41 определяются так:

$$x = \frac{h}{\alpha} \sin \chi, \quad y = \frac{h}{\alpha} \cos \chi.$$

Координаты точки B определяются так:

$$X = \frac{h}{\alpha} \sin \chi - h \cos \theta, \quad Y = \frac{h}{\alpha} \cos \chi + h \sin \theta. \quad (110)$$

При этом, так как колеса трейлера также не скользят, то точка B движется в направлении BC и

$$\frac{dY}{dX} = -\operatorname{tg} \psi, \quad (111)$$

где ψ —это угол, который BC составляет с начальным направлением. Далее, воспользовавшись равенством $\chi = u + \theta$, из треугольника ABC получаем цепочку равенств

$$\frac{\sin(\chi - \psi)}{h} = \frac{\sin(\theta - \psi)}{ah} = \frac{\sin u}{bh}, \quad (112)$$

где $0 < b < 1$, а ψ , θ , u является функциями χ . Если воспользоваться равенством (111), то на основании формул (110) получаем, что

$$\left(-\frac{h}{\alpha} \sin \chi + h \frac{d\theta}{d\chi} \cos \theta \right) \cos \psi + \left(\frac{h}{\alpha} \cos \chi + h \frac{d\theta}{d\chi} \sin \theta \right) \sin \psi = 0.$$

Упрощая последнее равенство, приходим к соотношению

$$\sin(\chi - \psi) = \alpha \frac{d\theta}{d\chi} \cos(\theta - \psi). \quad (113)$$

Если исключить из уравнения (113) переменную ψ при заданном a , воспользовавшись равенствами (112) и соотношением $\chi = u + \theta$, то, так как $\theta = 0$ при $\chi = 0$, придем*) к диф-

*) Taylor A. B. The Sweep of a Logging Truck//Math. Spectrum.— 1974—1975.— V. 7, №1.— P. 19—26.

ференциальному уравнению

$$\frac{du}{d\chi} = 1 - \frac{\sin u}{\alpha(1 - a \cos u)} \quad (114)$$

с начальным условием $u(0)=0$, где роль искомой функции играет угол запаздывания.

Подстановкой $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = v$ дифференциальное уравнение (114) может быть проинтегрировано в замкнутой форме. Однако получаемая при этом зависимость между переменными u и χ оказывается очень сложной, что, естественно, затрудняет исследование полученного соотношения. Вместе с тем уравнение (114) может быть легко проинтегрировано и исследовано численно. Воспользуемся, например, численным методом Рунге — Кутта второго порядка, суть которого состоит в следующем.

Для интегральной кривой $u = \varphi(\chi)$ дифференциального уравнения $du/d\chi = f(\chi, u)$, проходящей через точку (χ_0, u_0) , в равноотстоящих друг от друга точках $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots$ ($\chi_{i+1} - \chi_i = \Delta\chi > 0$) берутся значения u_0, u_1, u_2, \dots такие, что $u_i \approx \varphi_i(\chi)$, причем для последовательного определения u_1, u_2, \dots пользуются формулами

$$u_{i+1} = u_i + (k_1 + k_2)/2,$$

где

$$k_1 = f(\chi_i, u_i) \Delta\chi, \quad k_2 = f(\chi_i + \Delta\chi, u_i + k_1).$$

Для численного нахождения решения уравнения (114) с начальным условием $u(0)=0$ при помощи микрокалькулятора «Электроника БЗ-34» составим следующую программу:

В/О; ПД; С/П; ПП; 11; +; ПД; ИПВ; ИПА; +;
 ПВ; ПП; 22; ИПА; ×; 2; ÷; †; ИПС; +; ПС; В/О;
 ИПД; F sin; ИП9; ИПД; F cos; ×;
 ИП7; —; ÷; 1; +; В/О.

Эта программа использует регистры памяти 7—9 и А, В, С, Д, назначение которых видно из следующей таблицы:

Регистры памяти	7	8	9	А	В	С	Д
Содержание	α	a	αa	$\Delta\chi$	χ_i	u_i	u_{i+1}

Отметим, что для составления таблицы значений решения для конкретных значений α и a следует вычислить предельное значение C этого решения. Число C находится из

условия

$$\alpha(1-a \cos C) = \sin C,$$

которое приводит к формуле

$$C = \arcsin \frac{\alpha [1 - a \sqrt{1 - \alpha^2 + a^2 \alpha^2}]}{1 + a^2 \alpha^2}.$$

При этом, если $\alpha=1$, то $C=(\pi/2)-2 \operatorname{arctg} a$; если же $\alpha \ll 1$, то $C \approx \alpha(1-a)$. Предельное значение C аппроксимируется экспонентой, а именно,

$$C - u \approx e^{-\gamma \chi},$$

где $\gamma = \frac{\alpha(\cos C - a)}{\sin^2 C}$. Для малых a тогда γ довольно большое и оно приблизительно таково:

$$\gamma \approx \frac{1}{\alpha(1-a)}.$$

Если же $\alpha=1$, то

$$\gamma = \frac{a(1+a^2)}{1-a^2}.$$

В качестве шага $\Delta \chi$ изменения аргумента χ следует выбирать число, не превосходящее C . Это требование особенно

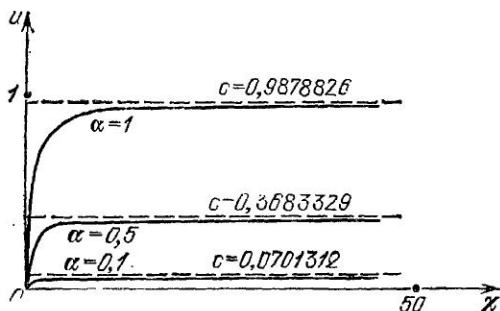


Рис. 42

важно при малых значениях α , а также в окрестности значения $\chi=0$. Непосредственные вычисления проводятся в следующем порядке:

α ; П7; a ; П8; \times ; П9; $\Delta \chi$; ПА; 0; ПВ; ПС; В/0;
С/П; $\underline{u_0}$; С/П; $\underline{u_1}$; С/П; $\underline{u_2}$; ...; С/П; $\underline{u_i}$; ...,

где черта указывает на показание табло после очередного нажатия клавиши С/П. Другими словами, черта указывает на очередное значение $u_i = u(\chi_i)$, где $\chi_i = i \Delta \chi$.

Результаты численного счета при $a=0,3$ графически изображены на рис. 42, и они показывают, как с увеличением угла χ изменяется угол запаздывания лесовоза. Для большей наглядности масштаб на осях u и χ выбран разным.

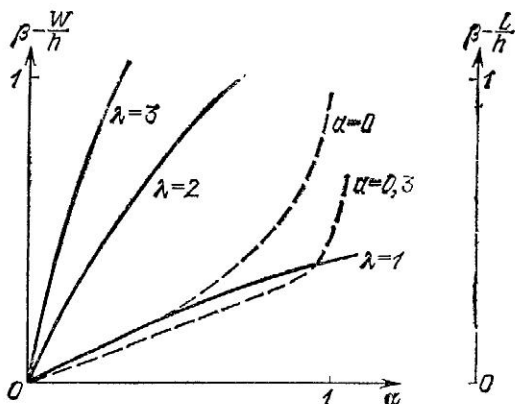


Рис. 43

Определим теперь размах груза лесовоза, воспользовавшись полушириной дороги на внешней стороне ее поворота, которая, как уже указывалось выше, задается алгебраической суммой $OX - OA + W$ (рис. 41). Прежде всего находим, что

$$OX^2 = \left(\frac{h}{\alpha} \sin \chi - \lambda h \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{h}{\alpha} \cos \chi + \lambda h \sin \theta \right)^2 =$$

$$= h^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \lambda^2 - 2 \frac{\lambda}{\alpha} \sin u \right).$$

Отсюда понятно, что размах груза убывает с возрастанием χ , поскольку возрастает угол запаздывания u . Таким образом, максимальная полуширина дороги βh определяется равенством

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{\alpha^2}} - \frac{1}{\alpha} + \frac{W}{h}.$$

На рис. 43 сплошные линии соответствуют графикам, связывающим переменные $\beta - \frac{W}{h}$ и α при различных значениях λ . Пунктирные же линии показывают, каким должно быть значение $\beta - \frac{L}{h}$ для необходимого «зазора» на внутренней стороне поворота дороги. При этом для любого

места нахождения лесовоза на повороте должно выполняться соотношение

$$\beta = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos u) + \frac{L}{h} < \frac{1}{\alpha} (1 - \cos C) + \frac{L}{h}. \quad (115)$$

Далее, так как значение C убывает с уменьшением a , то в простейшем случае буксировки, когда $a=0$, угол запаздывания оказывается наибольшим. В этом случае из соотношения (115) находим, что

$$\beta - \frac{L}{h} < \frac{1}{\alpha} (1 - \cos C) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}.$$

Остановимся теперь на тех выводах, которые следуют из проведенных выше рассуждений. Прежде всего приведем типичный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Если лесовоз с расстоянием между кониками в 12 м проходит поворот по дуге окружности радиуса 60 м, то $\alpha=0,2$, и тогда в соответствии с формулой (109) поворот составляет приблизительно 28° . Если при этом ширина лесовоза равна 2,4 м, а ширина связки груза в хвостовой части равна 1,2 м, то в случае длины стволов 24 м (от переднего коника) приходим к выводу, что $\lambda=2$, $W/h=0,05$, а $L/h=0,1$. Таким образом, из рис. 43 следует, что для любого значения a для внешней стороны поворота дороги $\beta=0,45$, а для внутренней стороны поворота $\beta=0,2$. Теоретически необходимая полуширина дороги на ее внешней стороне поворота тогда равна 5,4 м, а на внутренней стороне поворота — 2,4 м. Если лесовоз перевозит спиленные деревья длиной 14,4 м от переднего коника и шириной связки в хвостовой части, равной 1,8 м, то в этом случае $\lambda=1,2$. Значение β в этом случае оказывается одним и тем же как для внешней стороны поворота, так и для его внутренней стороны, и оно равно 0,22. Поэтому, как нетрудно видеть, необходимая полуширина дороги на ее внешней стороне поворота равна 2,64 м, а на внутренней стороне поворота, как и в предыдущем случае, она равна 2,4 м. Из проведенных рассуждений следует, что чем длиннее перевозимый груз, тем шире должна быть дорога на повороте. В частности, если сравнивать рассмотренные только что два случая, то увеличение длины перевозимых деревьев на 9,6 м требует расширения дороги на повороте на 2,76 м для того, чтобы водитель мог вести машину по кривой, длина которой на повороте приблизительно равна

длине средней линии дороги. Практика показывает, что водитель с малым опытом не может вести машину по такой кривой и для него полная ширина дороги на повороте должна быть по крайней мере равна 10,8 м (если он перевозит груз длиной 24 м) при ширине лесовоза в 2,4 м.

Развитая выше теория показывает, что размах груза наибольший, когда лесовоз въезжает в поворот, ибо в этом случае угол запаздывания увеличивается. Этот вывод имеет силу и в той ситуации, когда лесовоз въезжает с одного участка зигзагообразного поворота на другой его участок через точку перегиба. Результаты, которые графически изображены на рис. 43, соответствуют тому случаю, когда до въезда в поворот тягач и трейлер находятся на одной прямой. Если же имеется начальный угол запаздывания C_0 , обусловленный зигзагообразностью поворота, то в дифференциальном уравнении (114) начальное условие надо выбирать в виде $u(0) = -C_0$. В этом случае необходимая ширина дороги определяется формулой

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 \frac{\lambda}{\alpha} \sin C_0} - \frac{1}{\alpha} + \frac{W}{h}.$$

Обратим теперь внимание на то, что в случае простой буксировки, т. е. когда $a=0$, невозможно преодолеть поворот при $\alpha > 1$. Однако для сравнительно больших значений a значения $\alpha > 1$ уже возможны и они должны удовлетворять равенству $\alpha(1 - a \cos C) = \sin C$. Таким образом, α имеет максимальное значение $1/\sqrt{1-a^2}$ и для $a=0,5$ как экстремального практического значения $\alpha=1,25$.

В заключение отметим, что для значений $\alpha > 0,5$ значительная экономия ширины дороги достигается за счет увеличения значения a (рис. 43). При этом, если груз такой, что λ не намного больше, чем $\lambda=1$, то значение a выбирается таким, чтобы необходимая полуширина дороги на внутренней стороне любого поворота всегда была меньше, чем на его внешней стороне.

КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

При решении приведенных выше задач мы строили дифференциальные модели и ответы на поставленные вопросы получали после интегрирования дифференциальных уравнений. Однако, как уже указывалось в предисловии, подавляющее большинство дифференциальных уравнений не может быть проинтегрировано в замкнутой форме. Поэтому для исследования дифференциальных моделей реальных явлений и процессов приходится изыскивать методы, которые позволяли бы получать необходимую информацию, исходя из свойств самого дифференциального уравнения.

Ниже на конкретных примерах показывается, как при решении практических задач используются простейшие приемы и методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Кривые с постоянным направлением магнитной стрелки

Покажем, как при качественном интегрировании, т. е. при выяснении общей природы решений обыкновенных дифференциальных уравнений, можно воспользоваться одним их общим свойством, аналогом которого является, например, свойство магнитного поля на поверхности Земли, заключающееся в том, что на земной поверхности можно указать кривые, вдоль которых направление магнитной стрелки постоянно.

Итак, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (116)$$

где функция f предполагается однозначной и непрерывной по совокупности переменных x, y в некоторой области D

плоскости (x, y) . Каждой точке $M(x, y)$ из области D определения функции f дифференциальное уравнение (116) ставит в соответствие значение $\frac{dy}{dx}$ — угловой коэффициент K касательной к интегральной кривой в точке $M(x, y)$. Имея это в виду, говорят, что в каждой точке $M(x, y)$ области D дифференциальное уравнение (116) задает направление или линейный элемент. Совокупность же всех линейных элементов в D называют *полем направлений* или *полем линейных элементов*. Графически линейный элемент изображается отрезком, для которого $M(x, y)$ является внутренней точкой и который образует с положительным направлением оси x угол θ такой, что $K = \operatorname{tg} \theta = f(x, y)$. Отсюда следует, что геометрически дифференциальное уравнение (116) выражает тот факт, что *направление касательной в каждой точке интегральной кривой совпадает с направлением поля в этой точке*.

При построении поля направлений полезно использовать изоклины (от греческого *isos* — равный, одинаковый и *kline* — наклоняю), т. е. множества точек в плоскости (x, y) , в которых направление поля, задаваемое дифференциальным уравнением (116), одно и то же.

Если говорить об изоклинах магнитного поля на поверхности Земли, то ими являются кривые, в каждой точке которых направление магнитной стрелки одно и то же. Что же касается рассматриваемого дифференциального уравнения (116), то его изоклины задаются уравнением

$$f(x, y) = v,$$

где v — переменный действительный параметр.

Знание изоклин дает возможность приближенно выявить поведение интегральных кривых заданного дифференциального уравнения. Так, например, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

не интегрируемое в замкнутой форме. Из вида дифференциального уравнения следует, что семейство его изоклин задается уравнением

$$x^2 + y^2 = v, \quad v > 0,$$

т. е. изоклинами являются концентрические окружности радиуса \sqrt{v} с центром в начале координат, расположенные

в плоскости (x, y) . В данном случае в каждой точке изоклин угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, равен квадрату длины радиуса соответствующей окружности. Уже этой информации

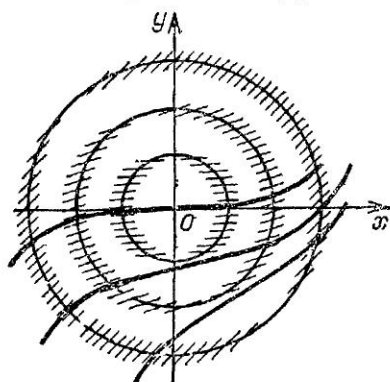


Рис. 44

достаточно, чтобы получить представление о поведении интегральных кривых рассматриваемого дифференциального уравнения (рис. 44).

Мы быстро пришли к конечной цели, так как приведенный пример сравнительно прост, но и в случае более сложных уравнений знание изоклин может оказаться полезным при решении поставленной задачи.

Рассмотрим геометрический метод интегрирования дифференциальных уравнений вида (116), основанный на использовании геометрических свойств кривых, заданных уравнениями

$$f(x, y) = 0, \quad (I_0)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y' = 0. \quad (L)$$

Уравнение (I_0) , т. е. уравнение изоклин нуля, задает кривые, в точках которых $\frac{dy}{dx} = 0$. Это означает, что точки указанных кривых могут оказаться для интегральных кривых исходного дифференциального уравнения точками максимума или минимума. Именно этим обстоятельством и руководствуются, выделяя из всего множества изоклин изоклину нуля.

Для большей точности построения интегральных кривых находят также множество их точек перегиба (если таковые существуют). Точки перегиба, как известно, следует искать среди тех точек, где $y'' = 0$. Используя уравнение (116), получаем, что

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} f(x, y).$$

Тогда кривые, заданные уравнением (L) , и будут возмож-

ными линиями точек перегиба *). Заметим, в частности, что *точка перегиба интегральной кривой — это точка касания интегральной кривой с изоклиной*.

Кривые экстремумов (точек максимума или минимума) и точек перегиба интегральных кривых разбивают область определения функции f на такие подобласти S_1, S_2, \dots, S_m , в которых первая и вторая производные решения дифференциального уравнения имеют определенные знаки. В каждом конкретном случае эти области и необходимо установить, что позволит дать схематическую картину поведения интегральных кривых.

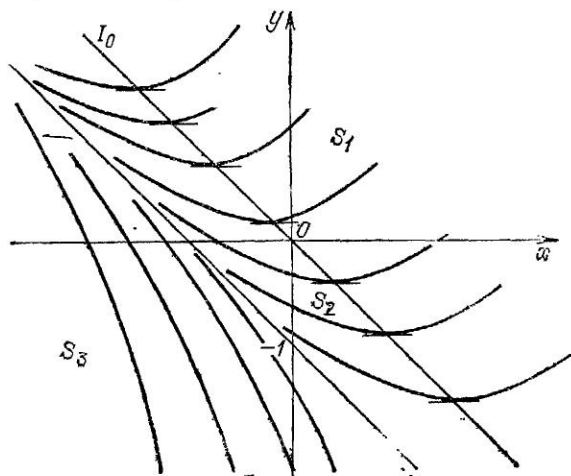


Рис. 45

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = x + y$.

Уравнение кривой (I_0) в данном случае имеет вид $x + y = 0$, или $y = -x$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что кривая (I_0) не является интегральной. Обращаясь же к кривой (L), уравнение которой $y + x + 1 = 0$, находим, что она уже оказывается интегральной и, таким образом, не есть линия точек перегиба.

Прямые (I_0) и (L) разбивают (рис. 45) плоскость (x, y) на три подобласти: $S_1 (y' > 0, y'' > 0)$ — справа от прямой (I_0); $S_2 (y' < 0, y'' > 0)$ — между прямыми (I_0) и (L); $S_3 (y' < 0,$

*) Предполагаем при этом, что интегральные кривые, заполняющие некоторую область, обладают тем свойством, что через каждую точку этой области проходит только одна интегральная кривая.

$y'' < 0$) — слева от прямой (L). На прямой (I_0) расположены точки минимумов интегральных кривых. Справа от прямой (I_0) интегральные кривые поднимаются вверх, слева опускаются вниз (на рис. 45 слева направо). Точек перегиба нет. Справа от прямой (L) кривые выпуклы вниз, слева — вверх. Поведение интегральных кривых в целом показано на рис. 45.

Заметим, что в данном случае интегральная прямая (L) является своего рода «разделительной» кривой — она отделяет одно семейство интегральных кривых от другого. Такие кривые обычно называют сепаратрисами (от латинского *separator* — отделитель).

Зачем инженеру знать теоремы существования и единственности?

Выше, говоря об изоклинах и линиях точек перегиба, мы молчаливо предполагали, что соответствующее дифференциальное уравнение имеет решение. Вопрос же о том, когда решение существует, когда оно единственно, решается так называемыми теоремами существования и единственности. Эти теоремы очень важны как для самой теории, так и для практики.

Теоремы существования и единственности имеют принципиальное значение, гарантируя законность применения качественных методов теории дифференциальных уравнений для решения задач естествознания и техники. Они являются обоснованием для создания новых методов и теорий. Часто доказательства самих теорем существования и единственности являются конструктивными, т. е. методы доказательства дают и методы приближенного отыскания решений с любой степенью точности. Таким образом, теоремы существования и единственности лежат в основе не только упоминавшейся выше качественной теории дифференциальных уравнений, но и в основе методов численного интегрирования.

К настоящему времени разработаны многочисленные методы численного решения дифференциальных уравнений. Хотя эти методы обладают тем недостатком, что всегда дают лишь какое-то конкретное решение, что сужает возможности их использования, они тем не менее широко используются на практике. Следует, однако, отметить, что численному интегрированию дифференциального уравнения обязательно должно предшествовать обращение к теоремам существования и единственности. И это необходимо делать для того,

чтобы избежать недоразумений или вообще неправильных выводов.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим два простых примера *), но предварительно приведем формулировки одного из вариантов теорем существования и единственности.

Теорема существования. Если в уравнении (116) функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области D плоскости (x, y) , то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует решение $y(x)$ начальной задачи **)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (117)$$

определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0 .

Теорема существования и единственности. Если в уравнении (116) функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области D плоскости (x, y) , причем она удовлетворяет в области D условию Липшица по переменной y , т. е.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < L|y_2 - y_1|,$$

где L — положительная постоянная, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y(x)$ начальной задачи (117), определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0 .

Теорема о продолжении. При выполнении условий теоремы существования или теоремы существования и единственности всякое решение уравнения (116) с начальными данными $(x_0, y_0) \in D$ может быть продолжено до точки, сколь угодно близкой к границе области D . При этом в первом случае продолжение, вообще говоря, будет не обязательно единственным, во втором же случае оно единственно.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется, используя численный метод интегрирования Эйлера с итерационной схемой $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ и шагом $h=0,1$, решить начальную задачу

$$y' = -x/y, \quad y(-1) = 0,21 \quad (118)$$

на отрезке $[-1,3]$.

*) Roberts C. E., Jr. Why teach existence and uniqueness theorems in the first course in ordinary differential equations?// Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.—1976.—V. 7, № 1.—Р. 41—44.

***) Если требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее некоторому начальному условию (в данном случае условию $y(x_0)=y_0$), то такая задача называется *начальной задачей*.

Заметим здесь, что к исследованию уравнения $y' = -x/y$ приводит, например, рассматриваемая на с. 96 консервативная система, состоящая из тела, которое совершает горизонтальные движения в вакууме под действием линейных пружин.

Решая начальную задачу (118) с помощью микрокалькулятора «Электроника БЗ-34», составляем сначала программу, которую запишем так:

ПП; 15; ИПД; ×; ИПВ; +; ПВ; ИПА; ИПД; +; ПА;

↔

XY; С/П; БП; 00; ИПА; ИПВ; ÷; /-;/; В/О.

Инструкция к программе такова: x_0 ; ПА; y_0 ; ПВ; h ; ПД; В/О; С/П; y_1 ; С/П; y_2 ; . . .

Результаты численного интегрирования приводят к следующей таблице:

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2
$y(x)$	0,21	0,686	0,817	0,915	0,992	1,052	1,100	1,136	1,163

x	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$y(x)$	1,180	1,188	1,188	1,180	1,163	1,137	1,102	1,056	1,000	0,930

x	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$y(x)$	0,844	0,737	0,601	0,418	0,131	-0,859	-0,696	-0,480

x	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
$y(x)$	-0,146	1,014	0,837	0,609	0,281	-0,465	0,007	-31,625

Графическая интерпретация полученных результатов показана на рис. 46.

Обратимся теперь к теореме существования. Для исследуемой начальной задачи (118) функция f , определяемая равенством $f(x, y) = -x/y$, определена и непрерывна во

всей плоскости (x, y) , за исключением точек оси абсцисс. Таким образом, в соответствии с теоремой существования существует решение $y(x)$ начальной задачи (118), определенное на некотором интервале, содержащем точку $x_0 = -1$, и это решение по теореме о продолжении может быть продолжено до значения $y(x)$, близкого к значению $y(x) = 0$.

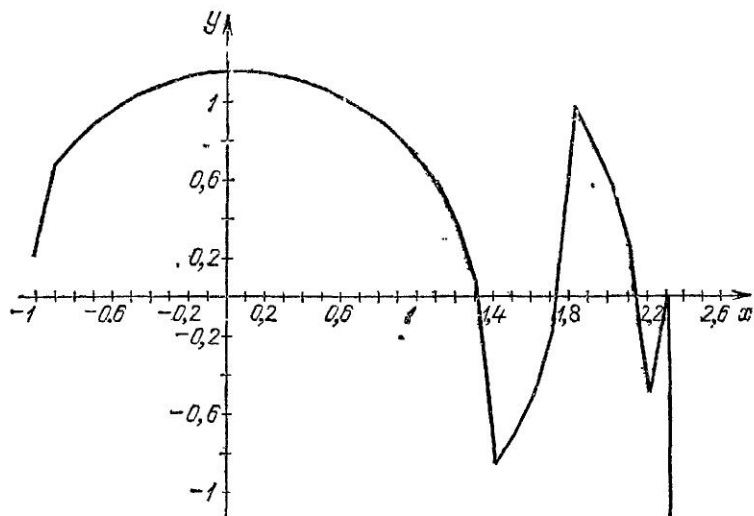


Рис. 46

В результате численного интегрирования получаем решение начальной задачи (118) на некотором интервале (a, b) , где $a < 1$, $1,3 < b < 1,4$. Однако, учитывая конкретный вид дифференциального уравнения, можно установить истинный промежуток существования решения начальной задачи (118). Действительно, так как в исходном уравнении переменные разделяются, то

$$\int_{0,21}^y \eta d\eta = - \int_{-1}^x \xi d\xi.$$

Интегрируя, получаем, что $y = \sqrt{1,0441 - x^2}$. Отсюда решение начальной задачи (118) существует только для $|x| < \sqrt{1,0441} \approx 1,0218$.

Итак, обращение к теореме существования (и к теореме о продолжении) позволило «отсечь» отрезок, на котором решение исходной начальной задачи заведомо не существует. Одно же только численное интегрирование приводит к оши-

бочному результату. Дело здесь в том, что при приближении решения $y=y(x)$ к оси x угол наклона кривой приближается к 180° . Поэтому пока аргумент x изменяется на величину 0,1, значение y успевает «перескочить» ось x , и мы попадаем на интегральную кривую, отличную от исходной. А это происходит потому, что метод Эйлера учитывает угол наклона только в текущей точке.

Еще более поучительным является следующий пример. Требуется, используя сначала метод Эйлера, а затем улучшенный метод Эйлера, с шагом $h=0,1$ и итерационной схемой $y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$, где $y_{i+1/2}=y_i+hf(x_i, y_i)/2$, решить начальную задачу

$$y' = 3x\sqrt[3]{y}, \quad y(-1) = -1 \quad (119)$$

на промежутке $[-1, 1]$.

Решая начальную задачу (119) с помощью микрокалькулятора «Электроника БЗ-34», составляем сначала программу численного интегрирования методом Эйлера. Программа такова:

П1; 15; ИПД; ×; ИПВ; +; ПВ; ИПА; ИПД; +; ПА;
↔
XY;

С/П; БП; 00; ИПВ; $Fx=0$; 19; В/О; Fx^2 ; ИПЗ;

↔
XY; Fx^2 ; ИПВ; ×; ИПД; ×; 3; ×; В/О.

Инструкция же к программе следующая: x_0 ; ПА; y_0 ; ПВ; h ; ПД; 3; /-/-; $F1/x$; ПЗ; В/О; С/П; y_1 ; С/П; y_2 ; ...

Результаты численного счета сведем в таблицу

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5
$y_1(x)$	-1,000	-0,700	-0,460	-0,275	-0,138	-0,045

x	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2
$y_1(x)$	-0,008	-0,016	0,007	-0,005	0,000	0,000	0,003

x	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_1(x)$	0,011	0,031	0,068	0,129	0,220	0,347	0,516	0,732

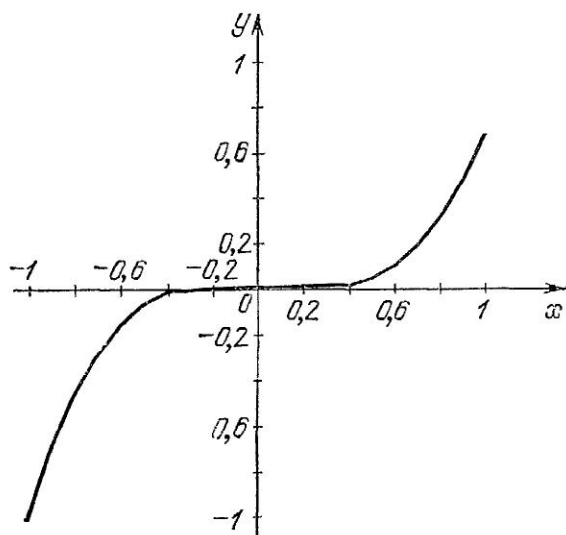


Рис. 47

Графически имеем картину, представленную на рис. 47

Что же касается улучшенного метода Эйлера, то здесь программа такая:

ПС; С/П; ПП; 29; ИПД; ×; ИПВ; +; ПС; ИПА; ИПД; +; ПА;

ПП; 29; ИПД; ×; 2; ×; ИПВ; +; ПВ; ИПА; ИПД; +; ПА;

↔
ХУ; БП; 00; ИПС; $Fx=0$; 33; В/О; Fx^2 ; ИПЗ; ХУ;
 Fx^y ;

ИПС; ×; ИПА; ×; 3; ×; В/О.

Инструкция к программе следующая: 3; /—/; $F1/x$; ПЗ; $h/2$; ПД; x_0 ; ПА; y_0 ; ПВ; В/О; С/П; С/П; y_1 ; С/П; y_2 ; . . .

Полученные числовые значения заносим в таблицу:

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5
$y_2(x)$	-1,000	-0,730	-0,514	-0,346	-0,219	-0,129
x	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1
$y_2(x)$	-0,068	-0,031	-0,012	-0,004	-0,002	-0,004

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$y_2(x)$	-0,013	-0,033	-0,071	-0,133	-0,225	-0,352

x	0,8	0,9	1,0
$y_2(x)$	-0,522	-0,739	-1,010

Графически получаем картину (рис. 48), отличную от картины, изображенной на рис. 47.

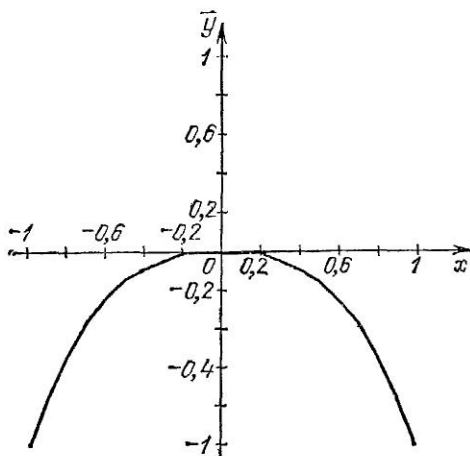


Рис. 48

Чтобы лучше разобраться в причине столь разительного расхождения в результатах, проинтегрируем исходную начальную задачу. Разделяя переменные, имеем

$$\int_{-1}^y \eta^{-1/3} d\eta = 3 \int_1^x \xi d\xi,$$

или, окончательно, $y = \pm x^3$. Отсюда уже можно заметить, что решение по методу Эйлера приближает функцию $y_1(x) = x^3$, а по улучшенному методу Эйлера — функцию

$$y_2(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 0, \\ -x^3, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

При этом как y_1 , так и y_2 являются решениями начальной задачи (119), а значит, для рассматриваемой на промежутке $[-1, 1]$ начальной задачи имеет место неединственность.

Обращаясь теперь к теореме существования и единственности, отметим прежде всего, что так как функция f , заданная равенством $f(x, y) = 3x\sqrt[3]{y}$, непрерывна во всей плоскости (x, y) , то из теоремы существования следует, что существует решение начальной задачи (119), определенное на некотором промежутке, содержащем точку $x_0 = -1$, и это решение по теореме о продолжении может быть продолжено на любой промежуток. Далее, поскольку $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xy^{-2/3}$,

то функция $f(x, y) = 3x\sqrt[3]{y}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y в любой области, не содержащей точки оси x . Если же область содержит точки оси x , то нетрудно показать, что в ней указанная выше функция условию Липшица уже не удовлетворяет. Поэтому из теоремы существования и единственности (и теоремы о продолжении) следует, что в данном случае решение начальной задачи может быть продолжено единственным образом по крайней мере до оси x . Но поскольку прямая $y=0$ является особой интегральной прямой для дифференциального уравнения $y' = 3x\sqrt[3]{y}$, то мы уже знаем, что как только y станет равным нулю, решение начальной задачи (119) не может быть единственным образом продолжено за точку $O(0, 0)$.

Итак, обращение в данном случае к теореме существования и единственности (и теореме о продолжении) позволило разобраться в результатах численного интегрирования. Именно, если речь идет о единственном на промежутке $[-1, 1]$ решении начальной задачи (119), то оно существует и определено лишь на отрезке $[-1, 0]$. В общем же случае таких решений несколько.

Динамическая интерпретация дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (120)$$

частным случаем которого является дифференциальное уравнение второго порядка, полученное на с. 46 при рассмотрении маятниковых часов, и представим простую динамическую систему, состоящую из частицы единичной

массы, которая движется по оси x (рис. 49) и на которую действует сила $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Тогда дифференциальное уравнение (120) — это уравнение движения частицы. Значениям x и $\frac{dx}{dt}$, в любой момент времени характеризующим состояние системы, соответствует точка на плоскости $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ (рис. 50), называемой *плоскостью состояний* или *фазовой*

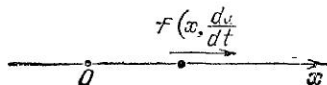


Рис. 49

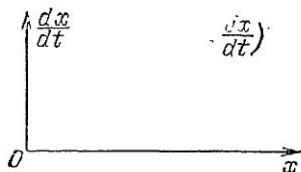


Рис. 50

плоскостью. Фазовая плоскость изображает совокупность всех возможных состояний рассматриваемой динамической системы. Каждому новому состоянию системы соответствуют различные точки фазовой плоскости. Таким образом, изменению состояний системы можно поставить в соответствие движение некоторой точки на фазовой плоскости. Такую точку называют *изображающей точкой*. Траектория изображающей точки называется *фазовой траекторией*, а скорость этой точки — *фазовой скоростью*.

Если ввести переменную $y = \frac{dx}{dt}$, то уравнение (120) можно свести к системе двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y). \quad (121)$$

При этом, если t рассматривать как параметр, то решением системы (121) является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, определяющих в фазовой плоскости (x, y) некоторую кривую (*фазовую траекторию*).

Можно показать, что система (121), как и более общая система вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (122)$$

где функции X и Y непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой области D , обладает тем свойст-

вом, что если $x(t)$, $y(t)$ — решение дифференциальной системы, то

$$x = x(t + C), \quad y = y(t + C), \quad (123)$$

где C — произвольная вещественная постоянная, также есть решение рассматриваемой дифференциальной системы. Решениям же (123) при всевозможных значениях C соответствует на фазовой плоскости (x, y) одна и та же фазовая траектория. Далее, если две фазовые траектории имеют общую точку, то они совпадают. При этом возрастанию или убыванию параметра t соответствует определенное движение изображающей точки по траектории. Иначе говоря, фазовая траектория является направленной или ориентированной кривой. В том случае, когда мы будем обращать внимание на этот факт, на соответствующих рисунках направление движения изображающих точек по траектории будет указываться стрелками.

Отметим далее, что системы вида (122) относятся к так называемым *автономным* или *стационарным дифференциальным системам*, т. е. системам обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых не зависят явно от времени t . Если же хотя бы в одном из уравнений, входящих в систему, правая часть зависит явно от времени t , то такая система уже называется *неавтономной* или *нестационарной*.

В связи с приведенной классификацией дифференциальных уравнений обратим внимание на следующий факт. Если решение $x(t)$ уравнения (120) является непостоянным периодическим решением, то на фазовой плоскости (x, y) ему соответствует простая замкнутая кривая, т. е. замкнутая кривая без самопересечений. Справедливо и обратное утверждение.

Далее, если дифференциальные системы вида (122) заданы во всей плоскости (x, y) , то, вообще говоря, фазовые траектории полностью покроют фазовую плоскость, не пересекаясь друг с другом. Если при этом окажется, что в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются равенства

$$X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0,$$

то траектория вырождается в точку. Такие точки называются *особыми точками*. В дальнейшем будут рассматриваться в основном лишь изолированные особые точки. Особая точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *изолированной*, если можно указать ее окрестность, в которой нет других особых точек, кроме самой точки $M_0(x_0, y_0)$.

С точки зрения физической интерпретации для уравнения (120) особой точкой будет точка $M_0(x_0, 0)$, в которой $y=0$ и $f(x_0, 0)=0$. Таким образом, в данном случае особая точка соответствует такому состоянию частицы единичной массы, в котором как скорость $\frac{dx}{dt}$, так и ускорение $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ одновременно равны нулю. Это означает, что частица находится в состоянии покоя или равновесия. В связи с последним обстоятельством особые точки называют еще *точками покоя* или *точками равновесия*.

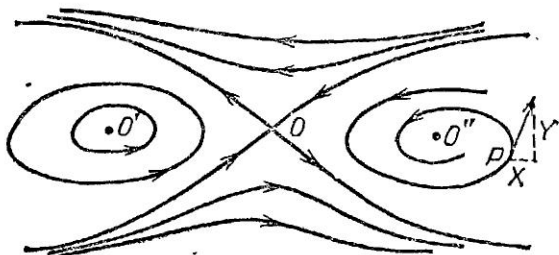


Рис. 51

Состояния равновесия физической системы характеризуют особенные ее состояния, и поэтому изучение типов особых точек занимает видное место в теории дифференциальных уравнений.

Впервые вопрос о классификации особых точек дифференциальных систем вида (122) был подробно рассмотрен известным русским ученым Н. Е. Жуковским в его магистерской диссертации «Кинематика жидкого тела» (1876). Этот вопрос возник в связи с изучением теории скоростей и ускорений жидкости. Названия же различных типов особых точек впервые были предложены французским математиком А. Пуанкаре.

Попытаемся теперь ответить на вопрос о том, какой физический смысл можно придать фазовым траекториям и особым точкам дифференциальных систем вида (122). Для наглядности введем двумерное векторное поле (рис. 51), определяемое функцией

$$V(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} — орты осей декартовых координат x и y соответственно. Это поле в любой точке $P(x, y)$ имеет компоненты:

горизонтальную $X(x, y)$ и вертикальную $Y(x, y)$. Поскольку $\frac{dx}{dt} = X(x, y)$, а $\frac{dy}{dt} = Y(x, y)$, то вектор, связанный с каждой неособой точкой $P(x, y)$, будет касаться в этой точке фазовой траектории.

Если переменную t интерпретировать как время, то вектор V можно представить как вектор скорости изображающей точки, движущейся вдоль траектории. Таким образом, можно считать, что вся фазовая плоскость заполнена изображающими точками и что каждая фазовая траектория представляет собой след движущейся изображающей точки. В результате приходим к аналогии с плоским движением несжимаемой жидкости. При этом, так как система (122) является автономной, то вектор V в каждой фиксированной точке $P(x, y)$ не изменяется со временем, и поэтому движение жидкости является стационарным, т. е. установившимся. Фазовые траектории тогда являются траекториями движущихся частиц жидкости, а особые точки O, O', O'' (рис. 51) представляют собой неподвижные частицы.

Наиболее характерными особенностями движения жидкости, показанного на рис. 51, являются: 1) наличие особых точек; 2) различное расположение траекторий вблизи особых точек; 3) устойчивость и неустойчивость особых точек, т. е. реализация двух возможностей: остаются ли с течением времени частицы жидкости в окрестности особой точки или они удаляются от особой точки в другую часть плоскости; 4) наличие замкнутых траекторий, которые в данном случае соответствуют периодическим движениям.

Указанные характерные особенности и составляют главную часть фазового портрета или полной качественной картины поведения фазовых траекторий системы общего вида (122). Поскольку, как уже указывалось выше, в общем случае дифференциальные уравнения не могут быть решены в замкнутой форме, то целью качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений вида (122) является по возможности наиболее полное построение фазового портрета непосредственно по функциям $X(x, y)$ и $Y(x, y)$.

Консервативные системы в механике

Из практики хорошо известно, что в любой реальной динамической системе энергия рассеивается. Рассеяние (*диссипация*) энергии обычно происходит в связи с наличием той или иной формы (вида) трения. Вместе с тем в некоторых конкретных случаях рассеяние энергии бывает на-

столько медленным, что им можно пренебречь, если ограничиться относительно непродолжительным отрезком времени. В таких случаях можно считать, что при рассмотрении конкретной физической системы имеет место закон сохранения энергии, а именно: сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна. Системы такого типа называют

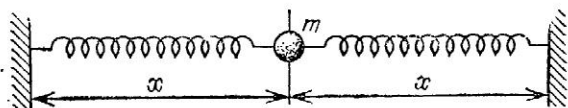


Рис. 52

консервативными. Таким образом, вращающийся земной шар может рассматриваться как консервативная система, если взять промежуток времени в несколько столетий. Если же изучать движение земного шара за несколько миллионов лет, то следует учитывать рассеяние энергии, связанное с приливо-отливным движением воды в океанах и морях.

Простейшим примером консервативной системы является система, состоящая из тела, которое совершает горизонтальные движения в вакууме под действием двух пружин (рис. 52). Если x обозначает смещение тела массой m из состояния равновесия, а сила, с которой пружины действуют на тело (*восстанавливающая сила*), пропорциональна смещению x , то уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad k > 0.$$

Пружины этого типа называются *линейными*, так как их восстанавливающая сила является линейной функцией x .

Если тело массой m движется в среде с сопротивлением и сопротивление (*демпфирующая сила*), действующее на это тело, пропорционально скорости движения, то уравнение движения такой неконсервативной системы будет

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad c > 0. \quad (124)$$

Здесь мы имеем линейное затухание, так как демпфирующая сила представляет собой линейную функцию скорости $\frac{dx}{dt}$.

Если f и g являются такими произвольными функциями, что $f(0)=0$, $g(0)=0$, то более общее уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + g \frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \quad (125)$$

можно интерпретировать как уравнение движения тела массой m под действием восстанавливающей $-f(x)$ и демпфирующей $-g \frac{dx}{dt}$ сил. В общем случае указанные силы нелинейны, и поэтому уравнение (125) можно рассматривать как основное уравнение нелинейной механики.

Кратко рассмотрим специальный случай нелинейной консервативной системы, которая описывается уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0, \quad (126)$$

где демпфирующая сила равна нулю и, следовательно, нет рассеяния энергии. От уравнения (126) можно перейти к автономной системе вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}. \quad (127)$$

Если теперь в системе (127) исключить время t , то получим дифференциальное уравнение траекторий системы на фазовой плоскости

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my}. \quad (128)$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$my \, dy = -f(x) \, dx. \quad (129)$$

Тогда, полагая, что $x = x_0$ при $t = t_0$, а $y = y_0$, после интегрирования уравнения (129) в пределах от t_0 до t получаем равенство

$$\frac{1}{2} my^2 - \frac{1}{2} my_0^2 = - \int_{x_0}^x f(\xi) \, d\xi,$$

которое можно переписать так:

$$\frac{1}{2} my^2 + \int_0^x f(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2} my_0^2 + \int_0^{x_0} f(x) \, dx. \quad (130)$$

Заметим, что $\frac{1}{2} my^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ есть формула кинетической энергии динамической системы, а

$$V(x) = \int_0^x f(\xi) \, d\xi \quad (131)$$

— формула ее потенциальной энергии. Таким образом, уравнение (130) выражает закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} m y^2 + V(x) = E, \quad (132)$$

где $E = \frac{1}{2} m y_0^2 + V(x_0)$ — полная энергия системы. Ясно, что уравнение (132) — это уравнение фазовых траекторий системы (127), поскольку оно получено в результате интегрирования уравнения

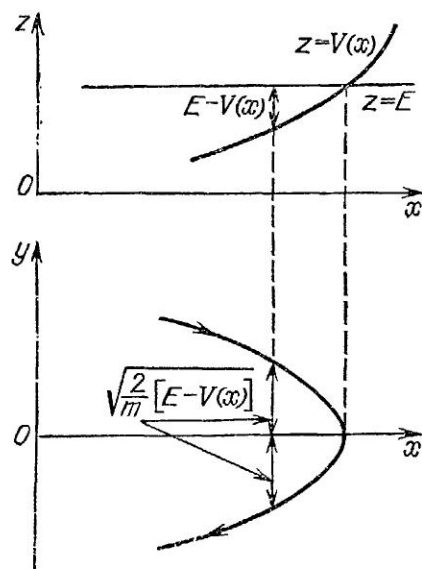


Рис. 53

уравнение (132) показывает, что фазовые траектории симметричны относительно оси x .

В таком случае, если переписать уравнение (132) в виде

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}, \quad (133)$$

то можно легко построить фазовые траектории. Действительно, введем в рассмотрение плоскость (x, z) — «плоскость баланса энергии» (рис. 53), у которой ось z лежит на той же вертикальной прямой, что и ось y фазовой плоскости. Затем изобразим график функции $z=V(x)$ и несколько горизонтальных прямых $z=E$ в плоскости (x, z) (одна такая прямая указана на рис. 53). Отметим на рисунке значение разности $E-V(x)$. После этого для каждого x умножим раз-

рирования уравнения (128). Таким образом, различным значениям E на фазовой плоскости соответствуют различные кривые постоянной энергии. Особыми точками системы (127) являются точки $M_v(x_v, 0)$, где x_v — корни уравнения $f(x)=0$. Как уже отмечалось, особые точки являются точками равновесия динамической системы, описываемой уравнением (126). Из уравнения же (128) следует, что фазовые траектории пересекают ось x под прямым углом, а прямые $x=x_v$ — горизонтально. Кроме того,

ность $E - V(x)$ на $2/m$, что с учетом формулы (133) дает возможность нанести соответствующие значения y на фазовую плоскость. Заметим, что поскольку $\frac{dx}{dt} = y$, то положительное направление вдоль любой траектории определяется движением изображающей точки слева направо выше оси x и справа налево ниже оси x .

Проведенные рассуждения общего характера дают возможность исследовать уравнение движения маятника в среде без сопротивления, которое имеет вид (см. с. 46)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \sin x = 0, \quad (134)$$

где k — положительная постоянная.

Поскольку уравнение (134) является частным случаем уравнения (126), то его можно интерпретировать и как уравнение, описывающее прямолинейное движение без трения тела единичной массы под действием нелинейной пружины, где восстанавливающая сила равна $-k \sin x$. В этом случае автономная система, соответствующая уравнению (134), запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k \sin x. \quad (135)$$

Особыми точками здесь будут $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, \dots , а дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (135) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k \sin x}{y}.$$

Разделяя переменные в последнем уравнении и интегрируя, получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{1}{2} y^2 + k(1 - \cos x) = E.$$

Последнее уравнение есть частный случай уравнения (132), где $m=1$, а потенциальная энергия, определяемая по формуле (131), задается соотношением

$$V(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi = k(1 - \cos x).$$

Изобразим теперь в плоскости (x, z) график функции $z = V(x)$, а также несколько прямых $z = E$ (на рис. 54 указана только прямая $z = E = 2k$). Определив значения $E - V(x)$,

мы можем схематически набросать картину поведения траекторий на фазовой плоскости, если воспользоваться соотношением

$$y = \pm \sqrt{2[E - V(x)]}.$$

Полученный фазовый портрет показывает (рис. 54), что если энергия E изменяется от 0 до $2k$, то соответствующие фазовые траектории оказываются замкнутыми и уравнение (134)

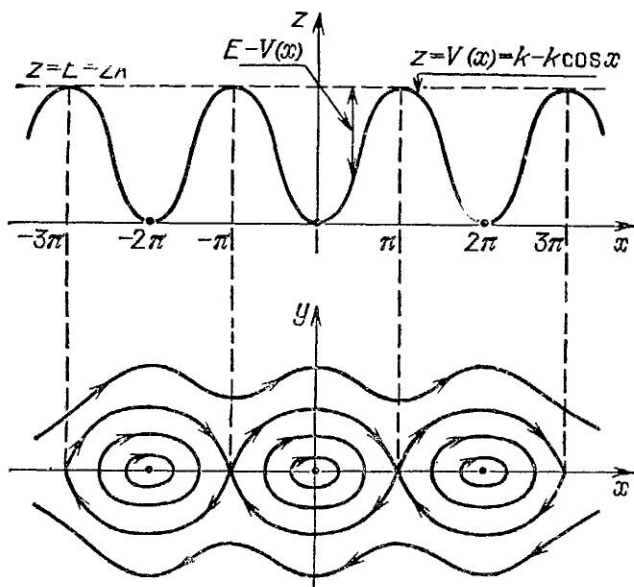


Рис. 54

имеет периодические решения. С другой стороны, если $E > 2k$, то соответствующие фазовые траектории не являются замкнутыми и уравнение (134) периодических решений не имеет. Значению же $E = 2k$ на фазовой плоскости соответствует фазовая траектория, которая разделяет два различных типа движений, т. е. является *сепаратрисой*. Волнистые фазовые траектории, расположенные вне сепаратрис, соответствуют вращательным движениям маятника, а замкнутые траектории, расположенные в областях, ограниченных сепаратрисами, — его колебательным движениям.

Из рис. 54 видно, что в окрестности особых точек $(\pm 2m\pi, 0)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, поведение фазовых траекторий отличается от поведения фазовых траекторий в окрестности особых точек $(\pm \pi n, 0)$, где $n = 1, 2, \dots$.

Существуют различные типы особых точек, и с некоторыми из них мы познакомимся ниже. Что же касается последнего примера, то точки $(\pm 2\pi m, 0)$, где $m=0, 1, 2, \dots$, относятся к особым точкам типа *центр*. Особые точки $(\pm \pi n, 0)$, где $n=1, 2, \dots$, — это точки типа *седло*. Особая точка автономной дифференциальной системы вида (122) называется *центром*, если некоторая ее окрестность сплошь заполнена непересекающимися замкнутыми фазовыми траекториями, окружающими эту точку. *Седлом* же называют такую особую точку, к которой примыкает конечное число фазовых траекторий («кусов»), разбивающих некоторую окрестность рассматриваемой точки на области, где траектории ведут себя подобно семейству гипербол, заданных уравнением $xy = \text{const}$.

Посмотрим теперь, какое влияние оказывает на поведение фазовых траекторий консервативной системы линейное трение. В этом случае уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k \sin x = 0, \quad c > 0.$$

А тогда если трение достаточно мало, т. е. возможны колебания маятника относительно положения равновесия, то можно показать, что фазовые траектории таковы, как это схематически показано на рис. 55. Если трение не допускает никаких колебаний маятника относительно положения равновесия, то картина фазовых траекторий будет иметь вид, показанный на рис. 56.

Если теперь сравнить фазовый портрет консервативной системы с последними двумя фазовыми портретами неконсервативных систем, то можно заметить, что седла остались седлами (рассматриваем только достаточно малую окрестность особых точек), а вот в окрестности точек $(\pm 2\pi m, 0)$, где $m=0, 1, 2, \dots$, замкнутые фазовые траектории при слабом трении перешли в спирали, а при сильном трении — в траектории, которые «входят» в особые точки в определенных направлениях. В случае спирали приходим к особой точке типа *фокус*; в последнем же случае особая точка называется *узлом*.

Особая точка двумерной автономной дифференциальной системы общего вида (122) (если таковая существует) называется *фокусом*, если существует окрестность этой точки, сплошь заполненная непересекающимися фазовыми траекториями, подобными спиралям, которые «наматываются» на особую точку либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$. *Узлом* же называют такую особую точку, в некоторой окрестности

которой каждая из фазовых траекторий ведет себя подобно ветви параболы или полупрямой, примыкающей к исследуемой точке по определенному направлению.

Следует отметить, что если какая-либо из консервативных систем имеет периодическое решение, то последнее не

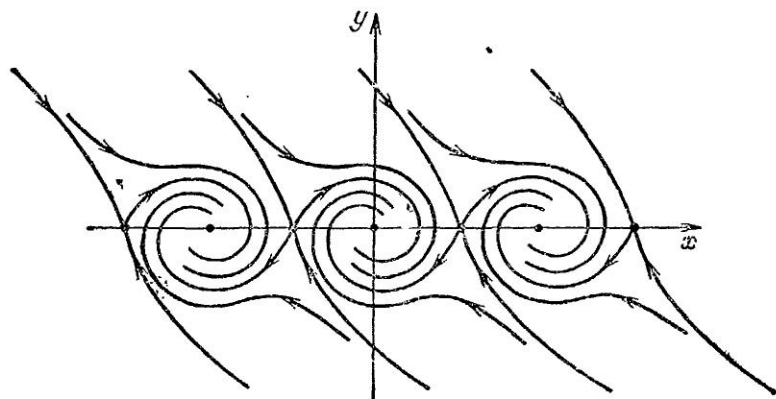


Рис. 55

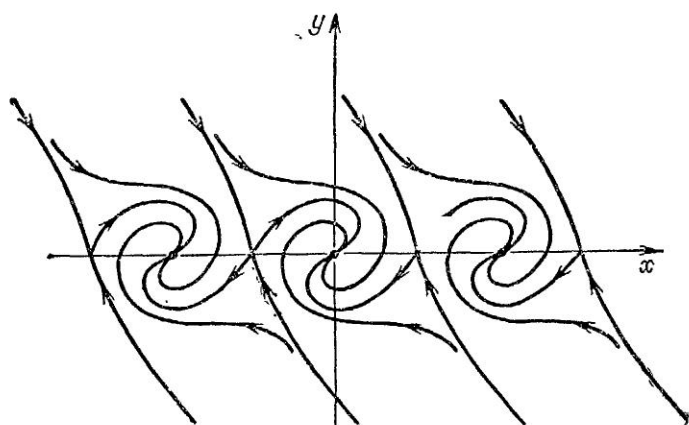


Рис. 56

может быть изолированным. Более того, если Γ — замкнутая фазовая траектория, соответствующая периодическому решению консервативной системы, то некоторая окрестность траектории Γ всегда сплошь заполнена замкнутыми фазовыми траекториями.

Заметим далее, что приведенные выше определения некоторых типов особых точек носят чисто качественный,

описательный характер. Что же касается аналитических признаков их различия, то, к сожалению, в общем случае систем вида (122) таких критериев не существует, однако для некоторых классов дифференциальных уравнений их удается получить. Простейшим примером является линейная система вида

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y, \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — вещественные постоянные.

Если матрица коэффициентов этой системы невырождена, т. е. если определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то начало координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости — единственная особая точка дифференциальной системы.

Считая последнее неравенство выполненным, обозначим через λ_1 и λ_2 собственные значения матрицы коэффициентов. Тогда можно показать, что

1) если λ_1 и λ_2 вещественны и одного знака, то особая точка — узел;

2) если λ_1 и λ_2 вещественны и разных знаков, то особая точка — седло;

3) если λ_1 и λ_2 не вещественны и не чисто мнимы, то особая точка — фокус;

4) если λ_1 и λ_2 чисто мнимы, то особая точка — центр.

Отметим, что первые три типа особых точек относят к так называемым «грубым» особым точкам: их характер не меняется при малых возмущениях правых частей исходной дифференциальной системы. Особая же точка центр — «негрубая» точка: ее характер меняется уже при малых возмущениях правых частей дифференциальной системы.

Устойчивость точек равновесия и периодических движений

Как мы уже знаем, различные по своему типу особые точки характеризуются различным расположением фазовых траекторий в достаточно малой окрестности этих точек. Вместе с тем существует еще одна характеристика — устойчивость точки равновесия, которая позволяет получить дополнительную информацию о поведении фазовых траекторий в окрестности особых точек. Рассмотрим маятник, изображенный на рис. 57. На рисунке показаны два состоя-

ния равновесия: а) тело массой m находится в состоянии равновесия в верхней точке; б) тело массой m находится в состоянии равновесия в нижней точке. Первое состояние неустойчиво, а второе устойчиво и вот почему. Если тело массой m находится в состоянии равновесия в верхней точке, то достаточно слегка толкнуть его, чтобы оно начало с возрастающей скоростью отклоняться от положения равновесия и тем самым удаляться от исходного положения; если же тело находится в состоянии равновесия в нижней точке,



Рис. 57

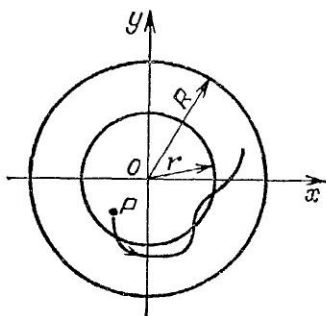


Рис. 58

то после толчка оно будет двигаться с уменьшающейся скоростью, причем чем слабее толчок, тем на меньшее расстояние произойдет отклонение от исходного положения.

Состояние равновесия физической системы соответствует особой точке на фазовой плоскости. Малые возмущения неустойчивой точки равновесия приводят к большим отклонениям от этой точки; в случае же устойчивой точки равновесия малые возмущения приводят к малым отклонениям. Отправляясь от таких наглядных интуитивных соображений, рассмотрим изолированную особую точку системы (122), предполагая для простоты, что она находится в начале координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости. Будем говорить, что эта особая точка *устойчива*, если для любого положительного числа R существует положительное число $r \leq R$ такое, что любая фазовая траектория, выходящая в начальный момент времени $t=t_0$ из точки P , лежащей в круге $x^2 + y^2 = r^2$, при всех $t > t_0$ будет лежать в круге $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 58). Не придерживаясь строгой формулировки, можно сказать, что особая точка является устойчивой, если все фазовые траектории, которые в начальный момент времени падают вблизи особой точки, с течением времени также остаются вблизи этой точки. Далее, особая точка называется *асимпт-*

топтически устойчивой, если она устойчива и если существует круг $x^2 + y^2 = r_0^2$ такой, что каждая траектория, которая в момент времени $t = t_0$ находится в этом круге, при $t \rightarrow +\infty$ стремится к началу координат. Наконец, если особая точка не является устойчивой, то ее называют *неустойчивой*.

Особая точка типа центра всегда устойчива (но не асимптотически). Седло всегда является неустойчивой особой точкой. На рис. 55, где показано поведение фазовых траекторий в случае колебаний маятника в среде с малым трением, особые точки — фокусы — асимптотически устойчивы; особые точки, являющиеся узлами (рис. 56), также асимптотически устойчивы.

Введенное понятие устойчивости точки равновесия является понятием чисто качественным, так как ни о каких свойствах, касающихся характера поведения фазовых траекторий, здесь не говорится. Что же касается понятия асимптотической устойчивости, то по сравнению с понятием простой устойчивости здесь дополнительно требуется, чтобы любая фазовая траектория с течением времени стремилась к началу координат. Однако и в этом случае никаких условий на характер приближения к точке $O(0, 0)$ также не накладывается.

Понятие устойчивости (асимптотической устойчивости) играет важную роль в приложениях. Дело в том, что если какой-то агрегат сконструирован без учета устойчивости, то он будет чувствителен даже к самым незначительным внешним воздействиям, а это в конечном счете может привести к нежелательным последствиям. Подчеркивая важность понятия устойчивости, известный советский специалист в области математики и механики Н. Г. Четаев писал *):

«...если конструируется пассажирский самолет, то его проектным движениям нужно обеспечить известного рода устойчивость, чтобы тем самым получить машину, спокойную в полете и безаварийную на взлете и посадке. Коленчатый вал нужно рассчитать так, чтобы он не поломался от вибраций, какие могут возникнуть в реальных условиях работы двигателя. Чтобы обеспечить артиллерийскому оружию наибольшую меткость и кучность боя, надо строить орудия, снаряды и мины так, чтобы была известного рода устойчивость траекторий и правильность полета снарядов.

Можно привести много примеров, но они ничего не прибавят к тому, что при решении вопроса о действительных

*) Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1965. — С. 8—9.

движениях необходимо из возможных решений уравнения останавливаться на решениях, отвечающих устойчивым состояниям, и что в тех случаях, когда желательно избежать в действительности какого-либо решения, разумно путем некоторого изменения в конструкции системы делать отвечающее этому решению состояние движения неустойчивым».

Возвращаясь к маятнику, изображенному на рис. 57, отметим следующий любопытный и в определенной степени неожиданный факт. Оказывается, что верхнее неустойчивое

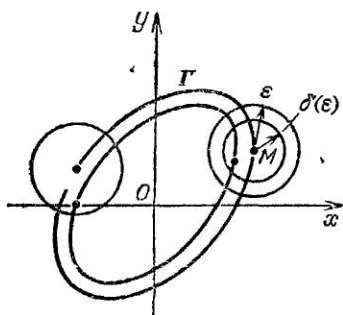


Рис. 59

положение равновесия маятника можно сделать устойчивым с помощью вертикальных колебаний точки подвеса А. Более того, не только верхнее положение маятника, но и любое другое его положение (в частности, горизонтальное) можно сделать устойчивым за счет вибрации точки подвеса*).

Обратимся теперь к не менее важному понятию, чем

понятие устойчивости точки равновесия, — к понятию устойчивости периодических движений (решений). Предположим, что рассматривается консервативная система, имеющая периодические решения. На фазовой плоскости этим решениям соответствуют замкнутые траектории, сплошь заполняющие некоторую область. Таким образом, всякому периодическому движению консервативной системы соответствует движение изображающей точки по некоторой фиксированной замкнутой траектории в фазовой плоскости.

В общем случае период обхода изображающих точек по разным траекториям различен. Иначе говоря, период колебаний в консервативной системе будет зависеть от начальных данных. В геометрической интерпретации это означает, что две близкие друг к другу изображающие точки, начавшие в некоторый момент времени $t=t_0$ свое движение, например, с оси x , с течением времени разойдутся на некоторое конечное расстояние. Однако может случиться и так, что с течением времени указанные точки и не разойдутся. Чтобы различать эти две возможности, вводится понятие

* Много примеров стабилизации различных видов маятников приведено в книге Т. Г. Стрижак «Методы исследования динамических систем типа «маятник» (Алма-Ата: Наука, 1981.—254 с.).

устойчивости по Ляпунову периодических решений. Суть его в следующем. Если по заданной сколь угодно малой ϵ -окрестности движущейся по замкнутой траектории Γ точки M^*) (рис. 59) можно указать такую движущуюся $\delta(\epsilon)$ -окрестность той же точки M , что всякая изображающая точка, лежащая в начальный момент времени в $\delta(\epsilon)$ -окрестности, с течением времени никогда не выйдет из ϵ -окрестности, то периодическое решение, соответствующее траектории Γ , называют *устойчивым по Ляпунову*. Если периодическое решение не является устойчивым по Ляпунову, то его называют *неустойчивым по Ляпунову*.

Говоря о неустойчивых по Ляпунову периодических решениях, следует заметить, что они все-таки обладают определенным видом устойчивости: так называемой *орбитальной устойчивостью*, заключающейся в том, что при малых изменениях начальных данных изображающая точка переходит с одной фазовой траектории на другую, но сколь угодно близко лежащую к первоначально рассматриваемой.

Примером устойчивых по Ляпунову периодических решений могут быть решения, которые возникают, например, при рассмотрении дифференциального уравнения, описывающего горизонтальные движения тела массой m под действием двух линейных пружин в вакууме (рис. 52). Примером же неустойчивых по Ляпунову, но орбитально устойчивых периодических решений являются решения дифференциального уравнения (134), описывающего движение кругового маятника в среде без сопротивления.

В первом случае период колебаний не зависит от начальных данных и вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Во втором случае период колебаний зависит от начальных данных и выражается, как мы знаем, через эллиптический интеграл первого рода, взятый в пределах от 0 до $\pi/2$.

Отметим, наконец, что вопрос об устойчивости по Ляпунову периодических движений непосредственно связан с изучением вопроса об изохронных колебаниях **).

Энергетические функции

Интуитивно ясно, что если полная энергия некоторой физической системы имеет минимум в точке равновесия,

*) Под ϵ -окрестностью точки M понимается круг радиусом ϵ с центром в точке M .

**) См., например, книгу В. В. Амелькина, Н. А. Лукашевича, А. П. Садовского «Нелинейные колебания в системах второго порядка» (Минск: Изд-во БГУ, 1982.—208 с.).

то эта точка является точкой устойчивого равновесия. Вышеуказанная идея лежит в основе одного из двух методов изучения различных задач устойчивости, предложенных известным русским математиком и механиком А. М. Ляпуновым. Этот метод обычно называют *прямым* или *вторым методом Ляпунова* *).

Прямой метод Ляпунова проиллюстрируем на системах вида (122) в случае, когда начало координат для этой системы является особой точкой.

Итак, пусть Γ — фазовая траектория системы (122). Рассмотрим функцию $V=V(x, y)$, которая является непрерывной вместе со своими частными производными $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$ в области фазовой плоскости, содержащей траекторию Γ . Если изображающая точка $(x(t), y(t))$ движется вдоль кривой Γ , то вдоль этой кривой функцию $V(x, y)$ можно рассматривать как функцию t . А тогда скорость изменения функции $V(x, y)$ вдоль траектории Γ определяется равенством

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} X(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} Y(x, y), \quad (136)$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — это правые части системы (122).

Формула (136) играет существенную роль в реализации прямого метода А. М. Ляпунова, для практического использования которого важны следующие понятия.

Пусть $V=V(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$ в некоторой области G , содержащей начало координат, причем $V(0, 0)=0$. Тогда эту функцию называют *определенно положительной* (*отрицательной*), если во всех точках области G , исключая начало координат, выполняется неравенство $V(x, y) > 0$ (< 0). Если же в точках области G имеет место нестрогое неравенство $V(x, y) \geq 0$ (≤ 0), то функцию $V(x, y)$ называют *знакоположительной* (*знакоотрицательной*). Так, например, функция V , определяемая равенством $V(x, y) = x^2 + y^2$ и рассматриваемая на плоскости (x, y) , будет функцией определенно положительной. Функция же $V(x, y) = x^2$ будет на плоскости

* Много интересных примеров исследования дифференциальных моделей на устойчивость можно найти в книге Н. Руша, П. Абетса, М. Лалуа «Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости» (М.: Мир, 1980).

(x, y) функцией знакоположительной, ибо она обращается в нуль на всей оси y .

Если функция $V(x, y)$ является определенно положительной, то, потребовав, например, чтобы во всех точках области $G \setminus O$ выполнялось неравенство $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \neq 0$, уравнение $z=V(x, y)$ можно интерпретировать как уравнение поверхности, которая похожа на параболоид, касающийся плоскости (x, y) в точке $O(0, 0)$ (рис. 60). Вообще же

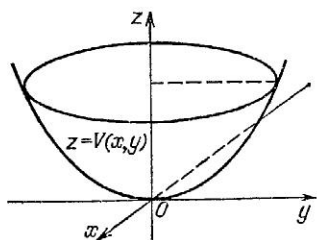


Рис. 60

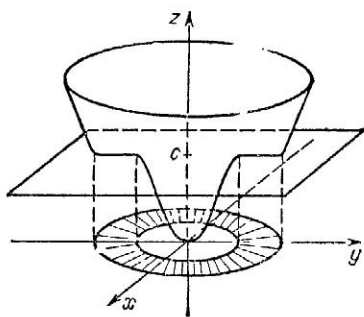


Рис. 61

уравнение $z=V(x, y)$ при определенно положительной функции V может задавать поверхности и более сложной структуры. Одна из таких поверхностей показана на рис. 61, где сечение ее плоскостью $z=C$ дает не кривую, а целое кольцо.

Если положительно определенная функция $V(x, y)$ обладает тем свойством, что функция

$$W(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} X(x, y) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} Y(x, y) \quad (137)$$

является знакоотрицательной, то V называют *функцией Ляпунова* или *энергетической функцией для системы* (122). Заметим здесь, что в силу равенства (136) требование того, чтобы функция W была знакоотрицательной, означает, что

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

и, следовательно, функция V не возрастает вдоль траектории Γ в окрестности начала координат.

Приведем один из результатов А. М. Ляпунова, который состоит в следующем: *если для системы (122) существует энергетическая функция $V(x, y)$, то начало координат, являющееся особой точкой, устойчиво. Если определенно поло-*

осительная функция такова, что функция W , определяемая равенством (137), определено отрицательна, то начало координат устойчиво асимптотически.

Покажем на примере, как практически применяется только что приведенный результат. Рассмотрим уравнение движения тела единичной массы под действием пружины, которое на основании соотношения (124) записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad c > 0. \quad (138)$$

Напомним, что в уравнении (138) постоянная $c > 0$ характеризует вязкость среды, в которой движется тело, а постоянная $k > 0$ характеризует свойства пружины. Автономная система, соответствующая уравнению (138), имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -kx - cy. \quad (139)$$

Для этой системы начало координат фазовой плоскости (x, y) является единственной особой точкой. Кинетическая энергия тела единичной массы в данном случае равна $y^2/2$, а потенциальная энергия (энергия, накопленная пружиной) определяется равенством

$$\int_0^x k\xi d\xi = \frac{1}{2} kx^2.$$

Отсюда полная энергия системы определяется равенством

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} kx^2. \quad (140)$$

Легко видеть, что функция V , заданная соотношением (140), является функцией определено положительной. А тогда поскольку в данном случае

$$\frac{\partial V}{\partial x} X(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} Y(x, y) = kxy + y(-kx - cy) = -cy^2 \leq 0,$$

то эта функция будет для системы (139) энергетической функцией, и поэтому особая точка $O(0, 0)$ устойчива.

В рассмотренном примере мы быстро получили результат. Однако это не всегда удается. Дело в том, что приведенный критерий А. М. Ляпунова носит чисто качественный характер. Исходя из него, не всегда можно построить энергетическую функцию, даже если мы и знаем, что она су-

ществует. Это существенно усложняет выяснение вопроса об устойчивости в каждом конкретном случае.

Следует иметь в виду, что приведенный критерий А. М. Ляпунова необходимо рассматривать как принцип получения эффективных признаков устойчивости. Этому вопросу посвящено много исследований, и в настоящее время получен ряд интересных результатов *).

Простые состояния равновесия

Уже из динамической интерпретации дифференциальных уравнений второго порядка ясно, что исследование характера состояний равновесия или, что то же самое, особых точек дает ключ к выяснению поведения интегральных кривых.

Понятно также, что так как, вообще говоря, дифференциальные уравнения не интегрируются в замкнутой форме, то необходимо иметь критерии, которые давали бы возможность по виду исходного дифференциального уравнения ответить на вопрос о типе особой точки. К сожалению, в общем случае этот вопрос решить, как правило, очень сложно, но все-таки всегда можно выделить классы дифференциальных уравнений, когда эта задача решается довольно просто. Ниже на примере исследования движения тела единичной массы под действием линейных пружин в среде с линейным трением мы покажем, как используются некоторые факты качественной теории дифференциальных уравнений. Но предварительно остановимся на рассмотрении системы вида (122). Оказывается, что при выяснении типа особой точки такой системы простейшим является случай, когда определитель Якоби (или якобиан)

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в рассматриваемой точке.

Если (x^*, y^*) — особая точка системы (122) и если $J^* = = J(x^*, y^*) \neq 0$, то тип особой точки, называемой в данном случае *простой особой точкой*, зависит в основном от знака константы J^* . Так, если $J^* < 0$, то особая точка (x^*, y^*) является седлом. В случае же $J^* > 0$ особая точка может

*) См., например, книгу Е. А. Барбашина «Функции Ляпунова» (М.: Наука, 1970.—240 с.).

быть либо центром, либо узлом, либо фокусом. Центр может быть лишь в случае, когда дивергенция (от позднелатинского *divergentia* — расхождение)

$$D(x, y) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

обращается в нуль в особой точке, т. е. когда $D^* = D(x^*, y^*) = 0$. Следует, однако, заметить, что выполнение условия $D^* = 0$ недостаточно в общем случае для того, чтобы в особой точке (x^*, y^*) был центр. Для наличия центра требуется выполнение дополнительных условий, где участвуют частные производные высших порядков. И этих условий,

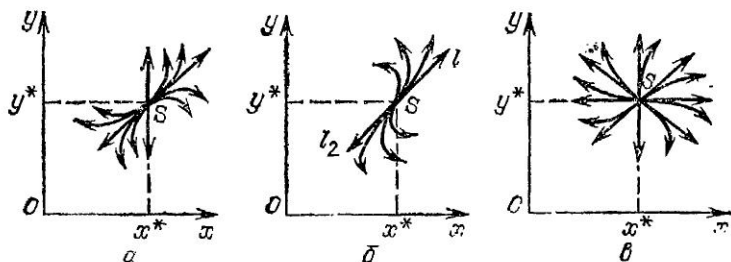


Рис. 62

вообще говоря, бесчисленное множество. Вместе с тем, если функции X и Y оказываются линейными по переменным x и y , то условие $D^* = 0$ становится уже достаточным для того, чтобы особая точка (x^*, y^*) была центром.

Если $J^* > 0$, но особая точка (x^*, y^*) не является центром, то ее достаточно малая окрестность сплошь заполнена траекториями, либо стремящимися к этой особой точке по спиралям, либо входящими в нее в определенном направлении. При этом, если $D^* > 0$, то особая точка достигается при $t \rightarrow -\infty$ и является неустойчивой. Если же $D^* < 0$, то особая точка достигается при $t \rightarrow +\infty$ и оказывается устойчивой. Если фазовые траектории, достигающие особой точки, являются спиралями, то эта точка есть фокус. Если же все интегральные кривые «входят» в особую точку с определенной касательной, то такая точка есть узел (рис. 62).

Независимо от знака якобиана J^* касательные к траекториям дифференциальной системы (122) в особой точке (x^*, y^*) определяются из так называемого характеристи-

ческого уравнения

$$\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{\frac{\partial Y(x^*, y^*)}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial Y(x^*, y^*)}{\partial y} \tilde{y}}{\frac{\partial X(x^*, y^*)}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial X(x^*, y^*)}{\partial y} \tilde{y}}, \quad (141)$$

где

$$\tilde{x} = x - x^*, \quad \tilde{y} = y - y^*. \quad (142)$$

Если X и Y содержат линейные члены, то частные производные в уравнении (141) представляют собой коэффициенты при x и y в системе, получающейся из системы (122) после замены (142).

Уравнение (141) — это однородное уравнение. Поэтому если ввести в рассмотрение угловой коэффициент $\lambda = \tilde{y}/\tilde{x}$ так называемых *исключительных направлений*, то для нахождения λ имеем квадратное уравнение

$$X_y^* \lambda^2 + (X_x^* - Y_y^*) \lambda - Y_x^* = 0. \quad (143)$$

Дискриминант этого уравнения

$$\Delta = (X_x^* + Y_y^*)^2 - 4J^* = D^{*2} - 4J^*.$$

Поэтому если $J^* < 0$, что соответствует случаю седла, то уравнение (143) всегда дает два вещественных исключительных направления. Если же $J^* > 0$, то либо нет вещественных исключительных направлений, либо их два или одно кратное. В первом из указанных случаев особая точка будет либо центром, либо фокусом.

Существование вещественных исключительных направлений означает (при условии $J^* > 0$) наличие особой точки типа узла. В частности, если существуют два вещественных исключительных направления, то можно доказать, что существуют точно две траектории (по одной с каждой стороны), касающиеся в особой точке одной из исключительных прямых, в то время как все другие траектории «входят» в особую точку, касаясь другой такой прямой (рис. 62, а).

Далее, если $\Delta = 0$, а уравнение (143) не есть тождество, то мы имеем одну исключительную прямую. Картина поведения траекторий в данном случае показана на рис. 62, б, и она получается из предыдущего случая, когда два исключительных направления совпадают. Особая точка разделяет исключительную прямую на две полупрямые l_1 и l_2 . Окрестность же особой точки разбивается на два сектора, один из которых сплошь заполнен траекториями, «входящими» в особую точку, касаясь полупрямой l_1 , а второй

сплошь заполнены траекториями, «входящими» в особую точку, касаясь полупрямой l_2 . Граница между двумя секторами состоит из двух траекторий, одна из которых касается в особой точке полупрямой l_1 , а вторая — полупрямой l_2 .

Если в уравнении (143) все коэффициенты обращаются в нуль, то мы имеем тождество, и тогда все прямые, проходящие через особую точку, являются исключительными и при этом существуют точно две траектории (по одной с каждой стороны), касающиеся каждой из этих прямых в особой точке. Эта особая точка (рис. 62, в) подобна точке с одной двойной вещественной исключительной прямой.

Движение тела единичной массы под действием линейных пружин в среде с линейным трением

Выше было показано, что дифференциальное уравнение движения тела единичной массы под действием линейных пружин в среде с линейным трением имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (144)$$

Для полноты исследования дифференциальной модели (144) мы не будем фиксировать направление действия сил $c \frac{dx}{dt}$ и kx . Уравнению (144), как уже указывалось выше, можно поставить в соответствие автономную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -kx - cy. \quad (145)$$

А тогда если исключить тривиальный случай $k=0$, что мы пока и предполагаем, то дифференциальная система (145) имеет в начале координат изолированную особую точку. Система (145) является специальным видом общей системы (122). В нашем конкретном примере

$$X(x, y) = y, \quad Y(x, y) = -kx - cy.$$

Далее, якобиан $J(x, y) = k$, а дивергенция $D(x, y) = -c$. Характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^2 + c\lambda + k = 0,$$

где $\Delta = c^2 - 4k$ — дискриминант этого уравнения.

Отсюда, в соответствии с результатами, изложенными на с. 111—114, приходим к следующим возможным случаям:

1. Если $k < 0$, то особая точка является седлом с одним положительным и одним отрицательным исключительными направлениями. Поведение фазовых траекторий показано на рис. 63, где можно выделить три различных типа движений. Когда начальные условия соответствуют точке a ,

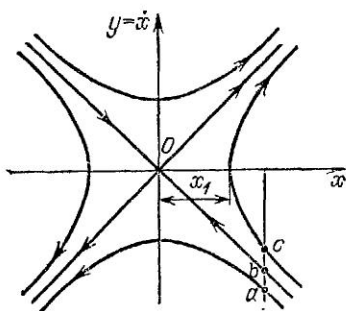


Рис. 63

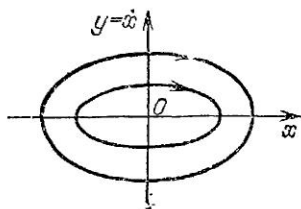


Рис. 64

в которой вектор скорости направлен к началу координат и скорость достаточно большая, изображающая точка будет двигаться по траектории по направлению к особой точке с убывающей скоростью; затем, пройдя мимо начала координат, изображающая точка будет удаляться от него уже с возрастающей скоростью. Если начальная скорость убывает до некоторого критического значения, соответствующего точке b , то изображающая точка будет приближаться к особой точке с убывающей скоростью и «достигнет» начала координат за бесконечный промежуток времени. Наконец, если начальная скорость меньше, чем критическое значение, и соответствует, например, точке c , то изображающая точка будет двигаться к началу координат с убывающей скоростью, обращающейся в нуль на некотором расстоянии x_1 от особой точки. В точке $(x_1, 0)$ вектор скорости меняет направление, и изображающая точка удаляется от начала координат.

Если фазовая точка, которая соответствует начальному состоянию динамической системы, находится в любом из трех оставшихся квадрантов, то интерпретация движений уже очевидна.

2. Если $k > 0$, то $J^* > 0$ и тип особой точки зависит от значения коэффициента c .

Рассмотрим представляющиеся здесь возможности.

2а) Если $c = 0$, т. е. если трение отсутствует, то особая точка является центром (рис. 64). Движения являются

периодическими, и их амплитуда зависит от начальных условий.

2б) Если $c > 0$, т. е. если имеет место случай положительного затухания, то дивергенция $D = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ отрицательна и, следовательно, изображающая точка движется по

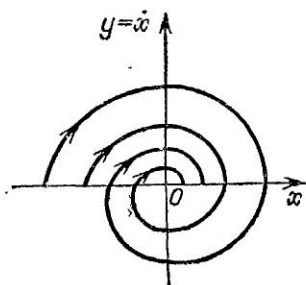


Рис. 65

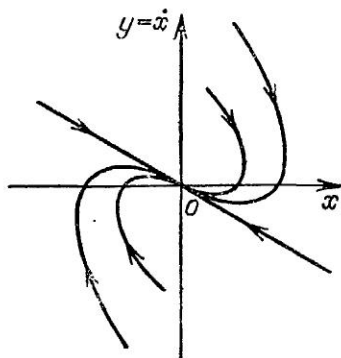


Рис. 66

траекториям по направлению к началу координат и достигнет его за бесконечный промежуток времени.

Более точно:

2б₁) Если $\Delta < 0$, т. е. если $c^2 < 4k$, то особая точка оказывается фокусом (рис. 65) и, значит, динамическая система совершает затухающие колебания относительно состояния равновесия с убывающей амплитудой.

2б₂) Если $\Delta = 0$, т. е. если $c^2 = 4k$, то особая точка — узел с одним исключительным направлением отрицательного наклона (рис. 66). Движение в данном случае является аперриодическим, и оно соответствует так называемому *критическому затуханию*.

2б₃) Если $\Delta > 0$, т. е. если $c^2 > 4k$, то особая точка является узлом с двумя исключительными направлениями отрицательного наклона (рис. 67). Качественно движение динамической системы таково, как и в предыдущем случае, и оно соответствует затуханию колебаний.

Из приведенных результатов следует, что в случае, когда $c > 0$ и $k > 0$, т. е. когда трение положительно, а восстанавливающая сила является притягивающей, динамическая система стремится к состоянию равновесия и ее движение устойчиво.

2в) Если $c < 0$, т. е. если имеет место случай отрицательного затухания, то качественная картина поведения фазовых траекторий подобна той, которая имеет место в случае 2б). Единственное различие состоит лишь в том, что

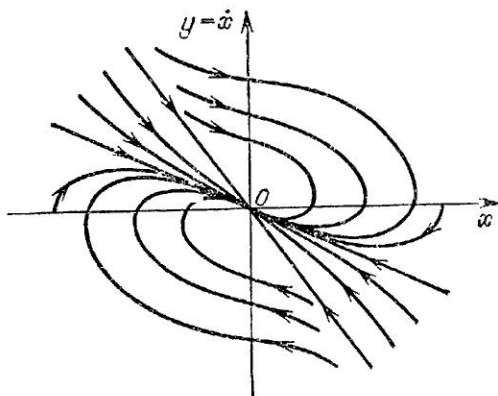


Рис. 67

динамическая система в данном случае перестает быть устойчивой.

Диаграмма на рис. 68 содержит сводку полученных результатов и указывает характер (тип) особой точки в за-

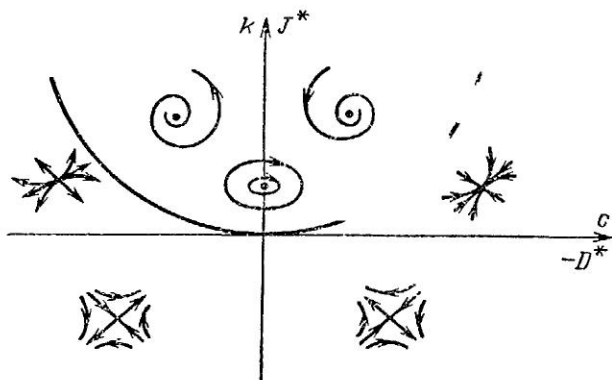


Рис. 68

висимости от значения параметров c и k . Заметим, что приведенная диаграмма может быть использована и как сводка результатов исследования типов особых точек системы (122),

когда якобиан $J^* \neq 0$ при значениях $c = -D^*$, $k = J^*$. Однако в общем случае равенство $c = 0$ еще не означает, что система (122) имеет центр, а равенство $k = 0$ еще не означает,

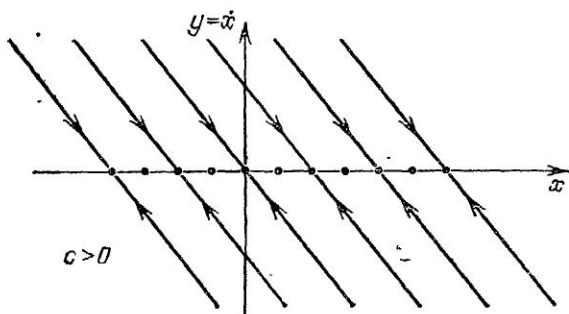


Рис. 69

что система общего вида не имеет особой точки. Указанные случаи — случаи сложных особых точек, рассматриваемых ниже.

Возвращаясь к рассматриваемой в этом параграфе динамической системе, отметим, что если $k = 0$ ($c \neq 0$), то

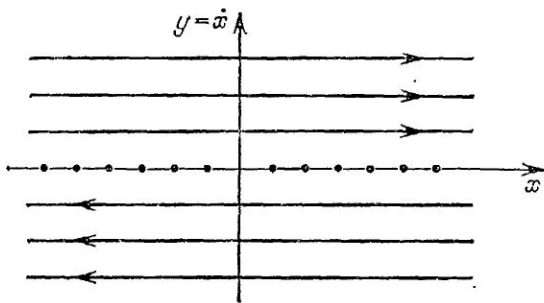


Рис. 70

соответствующая уравнению (144) автономная система (145) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -cy.$$

Отсюда следует, что прямая $y = 0$ сплошь заполнена особыми точками. Поведение же фазовых траекторий показано на рис 69.

Наконец, если $k = c = 0$, то уравнение (144) таково:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Соответствующая ему система записывается так:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, ось x сплошь заполнена особыми точками. Картина поведения фазовых траекторий показана на рис. 70.

Адиабатический поток идеального газа в канале переменного диаметра

Изучение потоков сжимаемых вязких сред имеет большое значение для практики. В частности, такие потоки возникают вокруг крыла и фюзеляжа самолета; с ними связана работа паровых и газовых турбин, воздушно-реактивных двигателей и ядерных реакторов.

Ниже мы остановимся на рассмотрении потока идеального газа, проходящего через сопло с изменяющейся площадью поперечного сечения A (рис. 71) и имеющего удельную теплоемкость c_p . Поток будет трактоваться как одномерный, т. е. все свойства потока предполагаются одинаковыми на одном и том же поперечном сечении сопла. Трение в пограничном слое обуславливается тангенциальным напряжением τ , которое задается равенством

$$\tau = q\rho v^2/2, \quad (146)$$

где q — коэффициент трения, зависящий в основном от числа Рейнольдса, но предполагаемый постоянным вдоль сопла, ρ — плотность массы потока, v — скорость потока. Наконец, мы предположим, что выполняются условия адиабатичности, которые исключают лобовое сопротивление внутренних тел, горение, химические изменения, испарение или конденсацию и т. д.

Одним из основных уравнений, описывающих поток, является известное уравнение неразрывности, которое в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\omega = \rho Av, \quad (147)$$

где скорость изменения массы потока ω постоянна.

Из равенства (147) следует, что

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0. \quad (148)$$

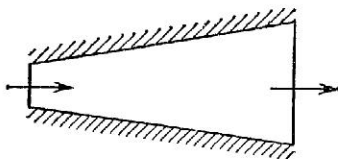


Рис. 71

Обращаясь к уравнению для энергии установившегося потока, отметим, что в общем случае такое уравнение связывает действие внешней работы и внешних тепловых воздействий с возрастанием в потоке энтальпии (теплосодержания), кинетической и потенциальной энергий. В рассматриваемом случае поток является адиабатическим, поэтому уравнение для энергии записывается в виде

$$0 = w(h + dh) - wh + w[v^2/2 + d(v^2/2)] - wv^2/2,$$

или

$$dh + d(v^2/2) = 0, \quad (149)$$

где h — энтальпия потока (термодинамический потенциал) при абсолютной температуре T . Но в уравнении (149) $dh = c_p dT$, и поэтому уравнение энергии потока можно записать в виде

$$c_p dT + d(v^2/2) = 0. \quad (150)$$

Обратимся к выводу уравнения (количества) движения потока. Заметим здесь, что для задач, касающихся установившихся потоков, обычно используется второй закон Ньютона. Считая, что угол расходимости стенок сопла является малым, уравнение движения можно записать в виде

$$\rho A + \rho dA - (\rho + d\rho)(A + dA) - \tau dA = w dv,$$

или

$$-A d\rho - dA d\rho - \tau dA = w dv, \quad (151)$$

где ρ — статическое давление.

Слагаемое $dA d\rho$ в уравнении (151) имеет более высокий порядок малости, чем остальные члены, и поэтому всегда можно считать, что уравнение движения потока имеет вид

$$-A d\rho - \tau dA = w dv. \quad (152)$$

Обозначая через D гидравлический диаметр, заметим, что его изменение вдоль оси сопла определяется функцией F такой, что $D = F(x)$, где x — координата вдоль оси сопла. Из определения гидравлического диаметра следует, что

$$\frac{dA}{A} = \frac{4dx}{D}. \quad (153)$$

Отмечая, что $\rho v^2/2 = \gamma p M^2$, где γ — коэффициент удельной теплоемкости, а M — число Маха, формулу (146) можно переписать в виде

$$\tau = -\gamma p f A^2. \quad (154)$$

А тогда, учитывая равенства (147), (153) и (154), для уравнения движения потока (152) получаем представление

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \left(4q \frac{dx}{D} + \frac{dv^2}{v^2} \right) = 0. \quad (155)$$

Обозначив квадрат числа Маха через y и воспользовавшись соотношениями (148), (150) и (155), после алгебраических комбинаций и преобразований придем *) к дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} y \right) (\gamma q y - F'(x))}{(1-y) F(x)}, \quad (156)$$

где штрих обозначает дифференцирование по x .

Знаменатель правой части уравнения (156) обращается в нуль при $y=1$, т. е. когда число Маха $M=1$. Это означает, что интегральные кривые последнего уравнения пересекают так называемую *звуковую линию* с вертикальными касательными. Так как правая часть уравнения (156) меняет знак при переходе звуковой линии, то интегральные кривые «поворачиваются» и точки перегиба исключаются. Из физического смысла явления следует, что вдоль интегральных кривых значение x должно непрерывно возрастать. Следовательно, сечение, на котором интегральные кривые пересекают звуковую линию с вертикальными касательными, должно быть сечением выхода из сопла. Таким образом, переход от дозвукового потока к сверхзвуковому, а также обратный процесс, может происходить внутри сопла только через особую точку с вещественными исключительными направлениями, т. е. через седловую или узловую точку.

Координаты особых точек уравнения (156) задаются равенствами

$$y^* = 1, \quad F'(x^*) = \gamma q,$$

которые означают, что указанные точки располагаются в расходящейся части сопла. Седловая точка появляется в том случае, когда якобиан $J^* < 0$, т. е. когда $F''(x^*) > 0$. Поскольку q — достаточно малая константа, то седловая точка появляется возле горловины сопла. Узловая же точ-

*) Kestin J., Zarembo S. K. One-dimensional high-speed flows. Flow patterns derived for the flow of gases through nozzles, including compressibility and viscosity effects // Aircraft Engin.—1953.—V. 25, № 292.—P. 172—175, 179.

ка возникает лишь при выполнении условия $F''(x^*) < 0$. Таким образом, узловая точка образуется в той части сопла, которая следует за точкой перегиба в его профиле или, на практике, на некотором расстоянии от горловины сопла при условии, что профиль содержит точку перегиба.

Из характеристического уравнения

$$F(x^*) \lambda^2 + 2q\gamma(\gamma + 1)\lambda - 2(\gamma + 1)F''(x^*) = 0$$

видно, что два исключительных направления имеют угловые коэффициенты, противоположные по знаку в случае седла и совпадающие (отрицательные) по знаку в случае узла. Последнее означает, что только седловая точка допускает переход как от сверхзвуковых к дозвуковым, так и от

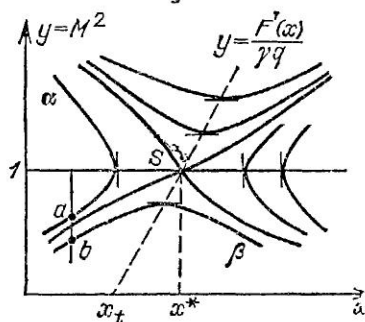


Рис. 72

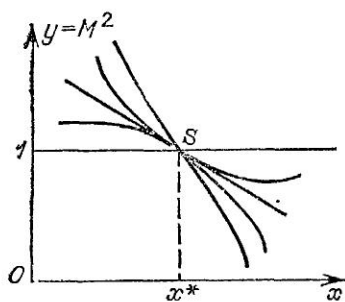


Рис. 73

дозвуковых к сверхзвуковым скоростям (рис. 72). Случай узловой точки (рис. 73) говорит о том, что здесь допускается непрерывный переход только от сверхзвукового к дозвуковому потоку.

Далее, поскольку уравнение (156) не может быть проинтегрировано в замкнутой форме, то для дальнейших исследований необходимо применять методы численного интегрирования. В связи с этим отметим, что построение четырех сепаратрис седла как интегральных кривых лучше начинать с учетом того, что сама особая точка является как бы точкой, из которой эти интегральные кривые выходят. И такое построение действительно возможно, ибо из характеристического уравнения мы знаем направление двух касательных в особой точке $S(x^*, 1)$. Если это замечание не принять во внимание и начать следить за движением, скажем, с начальными точками a и b на рис. 72, которые расположены по разные стороны от сепаратрисы, то соответствующие точки будут двигаться вдоль кривых α и

β , которые сильно расходятся и, следовательно, не дают никакой информации об интегральной кривой, которая «входит» в особую точку S . С другой стороны, если по интегральной кривой двигаться, «выходя» из особой точки S , считая начальным сегментом интегральной кривой сегмент исключительной прямой, то погрешность может быть минимизирована, если учесть сходимость интегральных кривых в направлении убывания переменной x .

На рис. 72 показана картина расположения интегральных кривых в окрестности особой точки. Прямая, которая проходит через точку x_t горловины сопла, соответствует значениям, при которых числитель в правой части уравнения (156) обращается в нуль, указывая на наличие точек экстремума.

Точки равновесия высшего порядка

В предыдущих параграфах были исследованы типы особых точек, которые возникают в случае, когда якобиан $J^* \neq 0$. В случае же, когда, например, все частные производные функций X и Y , фигурирующих в представлении правых частей системы (122), обращаются в нуль до порядка n включительно, в окрестности особой точки возможно бесконечно много картин поведения фазовых траекторий. Вместе с тем, если исключить из рассмотрения точки равновесия типа центра и фокуса, то оказывается, что окрестность особой точки может быть разбита на конечное число секторов, принадлежащих трем стандартным типам. Это гиперболические, параболические и эллиптические секторы. К описанию этих секторов мы и приступим ниже, но предварительно сделаем ряд упрощающих исследование предположений.

Прежде всего будем считать, что начало координат перенесено в особую точку, т. е. $x^* = y^* = 0$; правые части системы (122) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} X(x, y) &= X_n(x, y) + \Phi(x, y), \\ Y(x, y) &= Y_n(x, y) + \Psi(x, y), \end{aligned} \quad (157)$$

где X_n и Y_n — однородные относительно переменных x и y полиномы степени n (один из которых может обращаться в нуль тождественно), а функции Φ и Ψ имеют в окрестности начала координат непрерывные частные производные первого порядка. Кроме того, предполагается, что в той же окрестности начала координат ограничены функции,

определяемые выражениями

$$\frac{\Phi(x, y)}{(x^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \quad \frac{\Phi_x(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n/2}}, \quad \frac{\Phi_y(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n/2}},$$

$$\frac{\Psi(x, y)}{(x^2 + y^2)^{(n+1)/2}}, \quad \frac{\Psi_x(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n/2}}, \quad \frac{\Psi_y(x, y)}{(x^2 + y^2)^{n/2}}.$$

При этих предположениях могут быть доказаны следующие утверждения:

1. Любая траектория системы уравнений (122) с правыми частями вида (157), «входящая» в начало координат с определенной касательной, касается одной из исключительных прямых, задаваемых уравнением

$$xY_n(x, y) - yX_n(x, y) = 0. \quad (158)$$

Поскольку функции X_n и Y_n являются однородными, то уравнение (158) может быть переписано как уравнение относительно углового коэффициента $\lambda = y/x$. При этом исключительная прямая называется особой, если на этой прямой выполняются равенства

$$X_n(x, y) = Y_n(x, y) = 0.$$

Примером таких прямых являются прямые, показанные на рис. 62. Прямые же, которые определяются уравнением (158) и которые не являются особыми, называются регулярными.

2. Поведение фазовых траекторий системы (122) в окрестности одного из двух лучей, «выходящих» из начала координат и образующих вместе исключительную прямую, может быть исследовано путем рассмотрения достаточно малого круга (с центром в начале координат), в котором выбирается сектор, ограниченный двумя радиусами, расположенными по обе стороны от полупрямой и достаточно близкими к ней. Такой сектор обычно называют *нормальной областью*.

Более точно, в случае регулярной исключительной прямой, которая соответствует линейному множителю в уравнении (158), нормальная область, рассматриваемая в круге достаточно малого радиуса, принадлежит одному из двух типов: притягивающему или отталкивающему.

2а) Притягивающая нормальная область характеризуется тем, что каждая траектория, проходящая через эту область, достигает начала координат в направлении касательной, совпадающей с исключительной прямой (рис. 74).

2б) Отталкивающая нормальная область характеризуется тем, что только одна фазовая траектория, проходящая

через эту область, достигает особой точки в направлении касательной, совпадающей с исключительной прямой. Все остальные фазовые траектории системы (122), которые входят в нормальную область через границу круга, покидают эту область, проходя через один из радиусов, ее ограничивающих (рис. 75).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если круг с центром в начале координат достаточно мал, то рассмотренные два типа нормальных областей могут быть

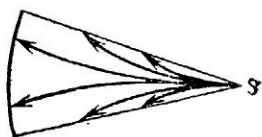


Рис. 74



Рис. 75

классифицированы по поведению вектора (X, Y) на границе рассматриваемой области. При этом поведение вектора (X, Y) можно отождествить с поведением вектора (X_n, Y_n) . Более того, можно показать, что если (как мы и предполагаем) заданное исключительное направление не соответствует кратному корню характеристического уравнения, то вектор, рассматриваемый на одном из радиусов, ограничивающих нормальную область, направлен либо внутрь области, либо наружу. А тогда если в первом случае вектор, рассматриваемый на той части границы нормальной области, которая состоит из дуги окружности, направлен также внутрь области, а во втором случае направлен наружу, то нормальная область является притягивающей. Если же имеет место противоположная ситуация, то нормальная область является отталкивающей. Следует отметить, что в любом случае вектор, рассматриваемый на той части границы нормальной области, которая состоит из дуги окружности, всегда направлен либо внутрь области, либо наружу, ибо он почти параллелен радиусу.

Нормальные области, соответствующие особым исключительным направлениям или кратным корням характеристического уравнения, имеют более сложную природу, по ввиду того, что они в какой-то мере представляют собой явление исключительное, мы их здесь описывать не будем.

Если теперь обратиться, например, к седловой особой точке, то можно отметить, что она допускает четыре отталкивающие нормальные области. В окрестности же особой

точки типа узла имеются две притягивающие и две отталкивающие нормальные области.

3. Если существуют вещественные исключительные прямые, то окрестность особой точки может быть разбита на конечное число секторов, каждый из которых ограничен

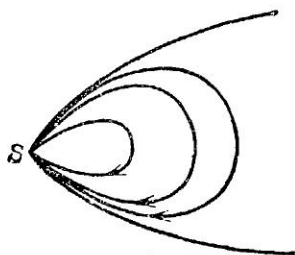


Рис. 76

двумя фазовыми траекториями системы (122), которые «входят» в начало координат с определенными касательными. При этом каждый из таких секторов принадлежит одному из следующих трех типов:

3а) Эллиптический сектор (рис. 76) содержит бесконечно много фазовых кривых в виде петель, проходящих через начало координат и касающихся с каждой стороны границы сектора.

3б) Параболический сектор (рис. 77) заполнен фазовыми кривыми, которые связывают (соединяют) особую точку с границей окрестности.

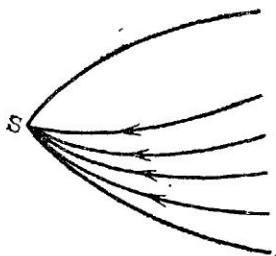


Рис. 77

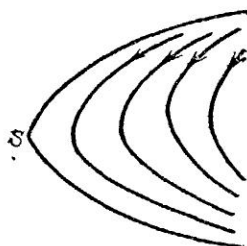


Рис. 78

3в) Гиперболический сектор (рис. 78) заполнен траекториями, которые подходят к границе окрестности в обоих направлениях.

Более точно:

4а) Эллиптические секторы образуются между двумя траекториями, принадлежащими двум последовательным нормальным областям, которые обе являются притягивающими.

4б) Параболические секторы образуются между двумя фазовыми кривыми, принадлежащими двум последовательным нормальным областям, одна из которых притягивающая, а другая отталкивающая. Все фазовые кривые, которые проходят через эту область, касаются в особой точке

исключительной прямой, которая определяет притягивающую область.

4в) Гиперболические секторы образуются между двумя траекториями, принадлежащими двум последовательным отталкивающим нормальным областям.

Легко, например, отличить четыре гиперболических сектора в седловой точке и четыре параболических сектора в узловой точке. Эллиптические секторы не появляются в случае простых особых точек, когда якобиан $J^* \neq 0$.

Если особая точка не допускает существования вещественных исключительных направлений, то фазовые кривые в ее окрестности обязательно имеют структуру центра или фокуса *).

Преобразование обратными радиусами и однородные координаты

Выше были описаны методы выяснения локального поведения фазовых траекторий дифференциальных систем вида (122) в окрестности особых точек. И хотя во многих случаях вся требуемая информация может быть получена указанным выше образом, может, однако, возникнуть необходимость исследовать поведение траекторий в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости, когда $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Простейший путь изучения асимптотического поведения траекторий дифференциальной системы (122) состоит в том, чтобы соответствующим преобразованием первоначальной дифференциальной системы, таким, например, как инверсия, определяемая подстановками

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, & y &= \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \\ \left(\xi &= \frac{x}{x^2 + y^2}, & \eta &= \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \end{aligned} \quad (159)$$

вести в рассмотрение точку в бесконечности. Геометрически это преобразование представляет собой так называемое *преобразование обратными радиусами*, которое начало координат переводит в точку на бесконечности и наоборот. Любую же конечную точку $M(x, y)$ фазовой плоскости преобразование (159) переводит в точку $M'(\xi, \eta)$ той же плос-

*) Методы различения центра от фокуса рассматриваются, например, в книге В. В. Амелкина, Н. А. Лукашевича, А. П. Садовского «Нелинейные колебания в системах второго порядка» (Минск: Изд-во БГУ, 1982).

кости, причем точки M и M' лежат на одном луче, выходящем из начала координат, и для них выполняется равенство $OM \cdot OM' = r^2$ (рис. 79). Хорошо известно, что при таком преобразовании окружности переходят в окружности (прямые линии рассматриваются как окружности, проходящие через точку в бесконечности). В частности, прямые линии, проходящие через начало координат, инвариантны относительно преобразования (159). Отсюда угловые коэффици-

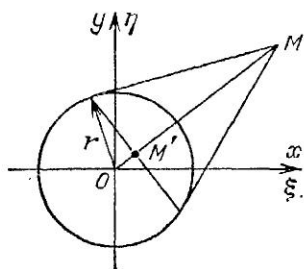


Рис. 79

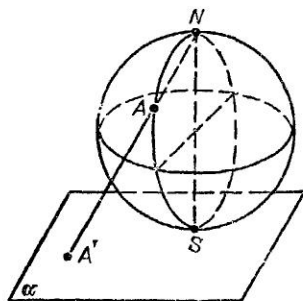


Рис. 80

енты асимптотических направлений являются угловыми коэффициентами касательных в новом начале координат $\xi = \eta = 0$. Отметим, что в большинстве случаев новое начало координат будет особой точкой. Причины этого обстоятельства будут обсуждены ниже.

Что же касается того, как построить в первоначальной плоскости (x, y) кривую, которая имеет определенное асимптотическое направление, т. е. которая имеет определенную касательную в начале координат новой плоскости (ξ, η) , то построение такой кривой можно начать с плоскости (ξ, η) , а точнее, с рассмотрения этой кривой, скажем, в единичном круге в плоскости (ξ, η) . Дело в том, что поскольку единичная окружность подстановками (159) преобразуется в себя, то всегда можно найти точку пересечения кривой с единичной окружностью в плоскости (x, y) ; дальнейшее же исследование уже проводится обычным образом.

Отметим далее, что пополнение плоскости (x, y) одной точкой в бесконечности топологически эквивалентно инверсии стереографической проекции (рис. 80), при которой точки сферы отображаются на плоскость, касательную к сфере в точке S . Центр проекции N диаметрально противоположен точке S . Ясно, что центр проекции N соответствует бесконечно удаленной точке плоскости (x, y) . Обратное,

если мы отображаем плоскость на сферу, то векторное поле на плоскости переходит в векторное поле на сфере и точка в бесконечности может оказаться особой точкой на сфере.

Следует, однако, заметить, что хотя метод обратных радиусов и является полезным, он все-таки становится громоздким и малоудобным, когда особая точка в бесконечности имеет сложную структуру. В таких случаях используется другое, более удобное преобразование плоскости (x, y) путем введения так называемых *однородных координат*

$$x = \xi/z, \quad y = \eta/z.$$

При таком преобразовании каждой точке (x, y) соответствуют тройки действительных чисел (ξ, η, z) , не равных одновременно нулю, причем не делается различия между тройками (ξ, η, z) и $(k\xi, k\eta, kz)$ при любом действительном $k \neq 0$.

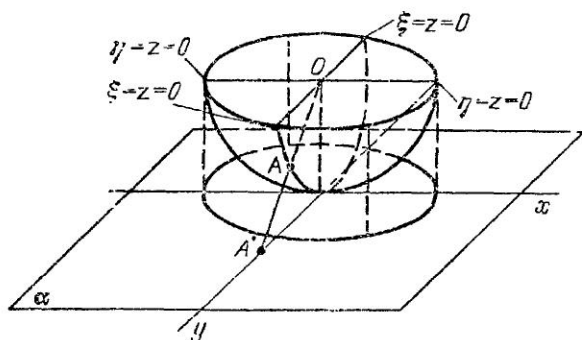


Рис. 81

Если точка (x, y) конечная, то $z \neq 0$. В случае же $z = 0$ получаем прямую в бесконечности. Плоскость (x, y) , дополненная прямой в бесконечности, называется *проективной плоскостью*. На такой прямой может существовать несколько особых точек, и их природа будет, как правило, проще чем природа одной особой точки, вводимой посредством преобразования обратными радиусами.

Если теперь рассмотреть пучок прямых и описать вокруг его центра сферу, например, радиуса 1, то каждая прямая пучка пересечет эту сферу в двух диаметрально противоположных точках. Отсюда следует, что любая точка проективной плоскости отображается взаимно однозначно и непрерывно на пару диаметрально противоположных точек единичной сферы. Таким образом, проективную плос-

кость можно рассматривать как совокупность всех пар диаметрально противоположных точек единичной сферы. Чтобы представить себе проективную плоскость, достаточно поэтому рассмотреть, например, нижнюю половину сферы и считать ее точки точками проективной плоскости. Если спроектировать ортогонально нижнюю полусферу на касательную к ней в полюсе S плоскость α (рис. 81), то проективная плоскость отображается на единичный круг, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границ. Каждая пара диаметрально противоположных точек границы соответствует при этом несобственной (бесконечно удаленной) прямой, присоединение которой к евклидовой плоскости превращает ее в замкнутую поверхность — проективную плоскость.

Поток идеального газа во вращающемся канале постоянного диаметра

В некоторых системах турбовинтовых вертолетов и самолетов, а также воздушно-реактивных турбин газообразная рабочая смесь пропускается через вращающиеся каналы постоянной площади поперечного сечения, которые размещаются в лопатках компрессора и которые в свою очередь связаны посредством пустотелой вертикальной оси.

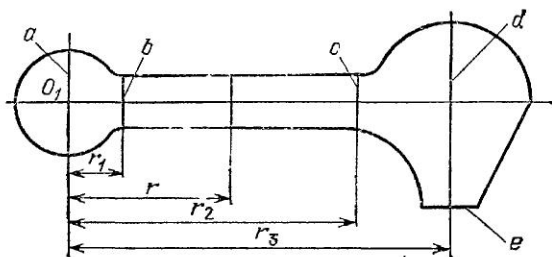


Рис. 82

Чтобы установить оптимальные условия вращения, необходимо проанализировать прохождение смеси через вращающийся канал и связать решение с граничными условиями, обусловленными конструкцией канала. В лопатке газ принимает участие во вращательном движении относительно ее оси с постоянной угловой скоростью ω и движется относительно канала с ускорением $v \frac{dv}{dr}$, где v — скорость частицы

газа относительно канала, а r — координата, измеряемая вдоль вращающейся лопатки компрессора.

На рис. 82 схематически изображен один вращающийся канал лопатки компрессора*). Предполагается, что рабочая смесь, начальное состояние которой известно, подается вдоль пустотелой оси к полости на оси, в которой скорость потока может считаться весьма незначительной. Граница нахождения газа в этой полости будет обозначаться символом a ; сам же газ предполагается идеальным с постоянной удельной теплоемкостью. Показатель изэнтропийного, т. е. обратимого адиабатического процесса будем обозначать через γ .

Далее предполагается, что газ расширяется через сопло, заканчивающееся сечением b , которое является входным сечением канала постоянного диаметра. Расширение газа из состояния a до состояния b предполагается изэнтропийным; скорость газа после расширения будем обозначать через u_1 . Расстояние от оси вращения O_1 до сечения b обозначается через r_1 .

При прохождении через канал, площадь постоянного поперечного сечения которого обозначается через A , а гидравлический диаметр — через D , газ ускоряется благодаря комбинированному действию градиента давления и динамического ускорения во вращающейся лопатке компрессора. Влиянием изменения уровня давления, если оно вообще имеет место, а также изменением градиентов давления, действующих на плоскость поперечного сечения, которые являются следствием ускорений Кориолиса, будем пренебрегать. Это последнее предположение, вообще говоря, требует экспериментальной проверки, так как существование поперечных градиентов давления может быть причиной вторичных потоков. Однако если диаметр канала мал по сравнению с его длиной, то такое предположение оправдано.

Теперь ясно, что уравнения движения и энергии сжимаемой смеси, проходящей через канал постоянного диаметра, находящийся в состоянии покоя, должны видоизменяться с учетом силы инерции. Что же касается уравнения неразрывности, то оно останется неизменным.

Далее предполагается, что, начиная от сечения c в конце канала, газ сжимается изэнтропийно, проходя через рас-

*) Kestin J., Zaremba S. K. Adiabatic one-dimensional flow of a perfect gas through a rotating tube of uniform cross-section// Aeronaut. Quart.—1954.—V. 4.—P. 373—399.

ширяющееся сопло. При этом он приходит в состояние покоя относительно лопатки компрессора во второй полости на расстоянии r_3 от оси вращения и достигает давления P_d и температуры T_d .

Из второй полости газ расширяется изэнтропийно через сужающееся или сужающе-расширяющееся сопло так, что он покидает полость под прямым углом к оси канала. Таким образом, возникает сила тяги, обуславливаемая наличием крутящего момента.

Ниже для простоты изложения считаем, что выходное сопло является сужающимся и имеет выходное поперечное сечение площади A^* . Обозначая внешнее (атмосферное) давление через P_a , рассмотрим два случая прохождения смеси через сопло. Это, во-первых, случай, когда отношение P_a/P_d превосходит критическое значение, т. е. когда

$$P_a/P_d > (2/(\gamma + 1))^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

В этом случае поток на выходе из сопла будет дозвуковым и, следовательно, давление P_3 на выходе из сопла будет равно атмосферному давлению, т. е.

$$P_3 = P_a.$$

Во-вторых, это случай, когда отношение P_a/P_d меньше критического значения, т. е. когда

$$P_a/P_d < (2/(\gamma + 1))^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Здесь давление P_3 на выходе из сопла имеет фиксированное значение, которое зависит от давления P_d и не зависит от давления P_a . Таким образом,

$$P_3 = (2/(\gamma + 1))^{\gamma/(\gamma-1)} P_d.$$

В последнем случае поток на выходе из сопла будет иметь скорость звука

$$v_3 = (2/(\gamma + 1))^{1/2} a_d,$$

где значение величины a_d зависит только от температуры T_d .

При дальнейшем анализе поток всюду считается адиабатическим, причем он рассматривается как изэнтропийный, за исключением части канала между сечениями b и c .

Как и в случае вывода дифференциального уравнения, описывающего адиабатический поток идеального газа в соп-

ле переменного диаметра, остановимся теперь на уравнениях неразрывности, движения и энергии. Так, уравнение неразрывности в рассматриваемом случае имеет вид

$$\psi = \frac{v}{V} = \frac{v_3}{V_3} \frac{A^*}{A} = \text{const}, \quad (160)$$

где V — удельный объем, ψ — плотность массы потока. Иначе,

$$\psi = m'/A,$$

где m' — масса потока.

Чтобы вывести уравнение движения, обратимся к рис. 83. При этом заметим, что динамическое действие вращательного движения лопатки компрессора может быть использовано для описания движения потока относительно движущегося канала, в котором в соответствии с принципом Даламбера предполагается, что сила инерции

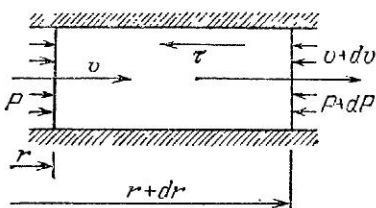


Рис. 83

$$dI = \frac{A}{V} \omega^2 r \, dr$$

действует в положительном направлении r . Следовательно, элемент массы $dm = \frac{A}{V} dr$ движется с ускорением $v \frac{dv}{dr}$ под действием силы инерции dI , силы давления $A \, dP$ и силы трения $dF = \frac{4A}{D} dr$. Здесь $\tau = \lambda \frac{\rho v^2}{2}$, где λ зависит от числа Рейнольдса R . В первом приближении можно считать, что λ — величина постоянная вдоль всего канала. С учетом этого предположения уравнение движения записывается в виде

$$\frac{A}{V} dr \, v \frac{dv}{dr} = -A \, dP - \frac{2\lambda A v^2}{VD} dr + \frac{A}{V} \omega^2 r \, dr,$$

или, после упрощения, в виде

$$V \, dP + v \, dv + \frac{2\lambda}{D} v^2 \, dr - \omega^2 r \, dr = 0. \quad (161)$$

Что же касается уравнения энергии, то оно может быть легко выведено, если воспользоваться первым законом термодинамики для незамкнутой системы и иметь в виду, что количество работы, совершаемой системой, есть $\omega^2 r \, dr$.

Таким образом,

$$dh + v dv - \omega^2 r dr = 0,$$

где h — энтальпия.

Определяя скорость звука a с помощью равенства

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1},$$

получаем, что

$$a da + \frac{\gamma - 1}{2} v dv - \frac{\gamma - 1}{2} \omega^2 r dr = 0.$$

Отсюда уравнение для энергии записывается в виде

$$a_0^2 = a^2 + \frac{\gamma - 1}{2} v^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \omega^2 r^2. \quad (162)$$

Если теперь ввести безразмерные величины

$$M_0 = v/a_0, \quad x = r/D, \quad G^2 = \omega^2 D^2/a_0^2, \quad (163)$$

то приходим к равенству

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} G^2 x^2. \quad (164)$$

Исключая давление и удельный объем из основных уравнений (160), (161) и (164), можно вывести уравнение, связывающее безразмерную величину M_0 с безразмерным расстоянием, которое является основным дифференциальным уравнением для решения рассматриваемой задачи. Из уравнения неразрывности (160) получаем, что

$$V = v/\psi. \quad (165)$$

А тогда, учитывая равенства

$$a^2 = \gamma P V = \frac{\gamma P v}{\psi},$$

из уравнения (162) приходим к соотношениям

$$P = \left(\frac{a_0^2}{\gamma v} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} v + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\omega^2}{v} r^2 \right) \psi, \\ \frac{dP}{dr} = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\omega^2 r}{v} - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{a_0^2}{\gamma v^2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\omega^2 r^2}{v^2} \right) \frac{dv}{dr} \right]. \quad (166)$$

Подставляя значения V из равенства (165) и $\frac{dP}{dr}$ из равенства (166) в уравнение движения (161) и учитывая соот-

ношения (163), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dM_0^2}{dx} = \frac{2M_0^2(2\lambda\gamma M_0^2 - G^2x)}{1 - \frac{\gamma+1}{2} M_0^2 + \frac{\gamma-1}{2} G^2x^2}. \quad (167)$$

Полагая здесь

$$M_0^2 = y, \quad m = 2\lambda\gamma, \quad p = \frac{1}{2}(\gamma+1), \quad q = \frac{1}{2}(\gamma-1),$$

уравнение (167) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y(my - G^2x)}{1 - py + qG^2x^2}. \quad (168)$$

Дифференциальное уравнение (168) и является предметом дальнейших исследований. Подстановкой (159) оно приводится к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\xi\eta[(\xi^2 + \eta^2)^2 - p\eta(\xi^2 + \eta^2) + qG^2\xi^2] + 2\eta(\eta^2 - \xi^2)(m\eta - G^2\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)[(\xi^2 + \eta^2)^2 - p\eta(\xi^2 + \eta^2) + qG^2\xi^2] + 4\xi\eta^2(m\eta - G^2\xi)}. \quad (169)$$

Ясно, что начало координат является особой точкой для уравнения (169). Члены наименьшей степени как в числителе, так и в знаменателе являются квадратичными. Если отбросить члены высшего порядка, как это описано на с. 123 при рассмотрении точек равновесия высшего порядка, то получим, что

$$Y_4(\xi, \eta) = 2qG^2\xi^3\eta + 2\eta(\eta^2 - \xi^2)(m\eta - G^2\xi), \\ X_4(\xi, \eta) = qG^2\xi^2(\xi^2 - \eta^2) + 4\xi\eta^2(m\eta - G^2\xi),$$

и, таким образом, начало координат является особой точкой высшего порядка.

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (169) после упрощений принимает вид

$$\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)[(q+2)G^2\xi - 2m\eta] = 0. \quad (170)$$

Отсюда имеем следующие три вещественные исключительные прямые:

$$а) \xi = 0, \quad б) \eta = 0, \quad в) (q+2)G^2\xi - 2m\eta = 0, \quad (171)$$

каждая из которых является регулярной и соответствует одному из множителей в уравнении (170).

Легко видеть, что для положительных ξ и η значение $X_4(\xi, \eta)$ является положительным в окрестности всех трех

исключительных прямых, и поэтому в первом квадранте и в окрестности указанных прямых выражение

$$\frac{Y_4(\xi, \eta)}{X_4(\xi, \eta)} - \frac{\eta}{\xi} = \frac{\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)[(q+2)G^2\xi - 2m\eta]}{\xi[qG^2\xi^2(\xi^2 - \eta^2) + 4\xi\eta^2(m\eta - G^2\xi)]} \quad (172)$$

имеет тот же знак, что и левая часть равенства (171в), и, следовательно, отрицательный знак ниже прямой (171в) и положительный выше нее. Последнее объясняется тем, что выражение (172) может менять знак только при переходе

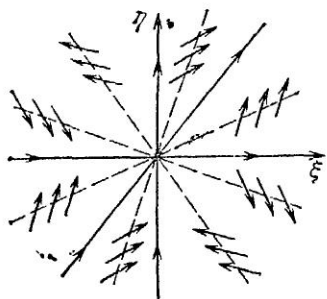


Рис. 84

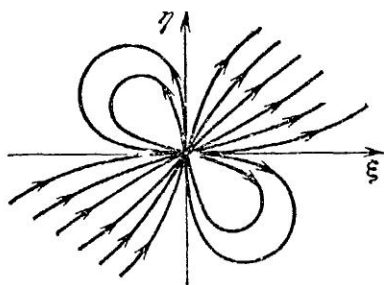


Рис. 85

через исключительную прямую. Геометрически это означает, что в первом квадранте на радиусах, расположенных между прямыми (171б) и (171в), правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Y_4(\xi, \eta)}{X_4(\xi, \eta)},$$

которое определяет поведение интегральных кривых в круге с центром в начале координат и с достаточно малым радиусом, задает угол, который больше угла наклона радиусов. Что же касается радиусов, расположенных между прямыми (171в) и (171а), то на них правая часть последнего дифференциального уравнения задает угол, который меньше угла наклона радиусов (рис. 84). Таким образом, нормальная область, содержащая прямую (171в), должна быть отталкивающей, в то время как области, содержащие прямые (171а) и (171б), являются притягивающими. В силу симметрии поля, задаваемого вектором (X_4, Y_4) , приведенные факты справедливы и для нормальных областей, полученных из упомянутых выше поворотом вокруг особой точки на угол 180° .

Таким образом, существуют точно две интегральные кривые, которые «входят» в особую точку по касательной (171в), и бесконечно много таких кривых, касающихся координатных осей (171а) и (171б) в точке покоя.

Таким образом, видим, что второй и четвертый квадранты содержат эллиптические секторы, так как они расположены между двумя последовательными притягивающими нормальными областями (рис. 85). Каждый из первого и третьего квадрантов разделяется на два сектора интегральными кривыми, которые касаются в начале координат исключительной прямой (171в). Эти секторы являются параболическими, так как они расположены между двумя последовательными нормальными областями, одна из которых является притягивающей, а другая — отталкивающей. Более того, все интегральные кривые, за исключением тех, которые касаются прямой (171в), касаются осей координат (171а) и (171б) в особой точке.

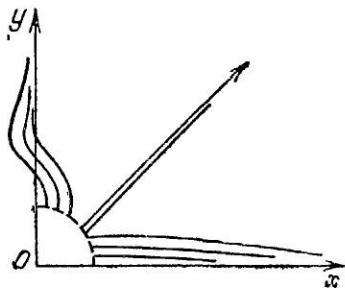


Рис. 86

Исходя из физических соображений, дифференциальное уравнение (168) имеет смысл рассматривать только в первом квадранте плоскости (x, y) . Возвращаясь к этой плоскости, видим, что существует точно одна интегральная кривая, имеющая асимптотическое направление с угловым коэффициентом $(q+2) G^2/(2m)$. Все же другие интегральные кривые допускают в качестве асимптотического направления одну из осей координат. Действительно, нетрудно доказать, что все эти кривые приближаются асимптотически к одной из осей координат, т. е. что на каждой из этих кривых при стремлении к бесконечности не только $y/x \rightarrow 0$ или $x/y \rightarrow 0$, но в действительности $y \rightarrow 0$ или $x \rightarrow 0$. Этот факт иллюстрируется на рис. 86, где начерчены некоторые из интегральных кривых при больших значениях x и y . Обратим внимание на то, что картина поведения интегральных кривых на конечном расстоянии от начала координат зависит прежде всего от расположения особых точек и требует специального исследования. Можно также доказать, что интегральные кривые, которые асимптотически приближаются к осям координат (рис. 86), покидают первый квадрант на конечном расстоянии от начала координат.

Изолированные замкнутые траектории

Мы уже знаем, что в случае особой точки типа центра некоторая область фазовой плоскости сплошь заполнена замкнутыми траекториями. Вместе с тем возможна и более сложная ситуация, когда имеется изолированная замкнутая траектория, т. е. траектория, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Последний случай непосредственно связан с решением вопроса о существовании изолированных периодических решений. При этом интересно, что изолированные замкнутые траектории могут иметь только нелинейные дифференциальные уравнения и системы.

Изолированные периодические решения соответствуют самым разнообразным свойствам явлений и процессов, происходящих в биологии и радиофизике, в теории колебаний и астрономии, в медицине и теории конструирования приборов. Такие решения возникают при изучении дифференциальных моделей в экономике, при рассмотрении различных вопросов автоматического регулирования, самолетостроения и т. д. Далее будет изучаться возможность возникновения изолированных периодических решений при исследовании процессов, происходящих в электрических цепях; здесь же мы рассмотрим как модель нелинейную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \quad (173)$$

Чтобы решить ее, введем полярные координаты r, θ , где $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Тогда, продифференцировав соотношения $x^2 + y^2 = r^2$ и $\theta = \arctg(y/x)$ по t , получим равенства

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (174)$$

Умножая первое уравнение из системы (173) на x , а второе — на y и складывая, с учетом первого равенства из (174) находим, что

$$r \frac{dr}{dt} = r^2 (1 - r^2). \quad (175)$$

Если же умножить второе уравнение из системы (173) на x , а первое — на y и вычитать, с учетом второго равенства из (174) получим соотношение

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2. \quad (176)$$

Система (173) имеет единственную особую точку $O(0, 0)$. Так как мы интересуемся сейчас только построением траекторий, то можно считать $r > 0$. А тогда уравнения (175) и (176) означают, что система (173) приводится к виду

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \quad (177)$$

Каждое из полученных уравнений системы (177) легко интегрируется и все семейство решений, как нетрудно видеть, задается формулами

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad \theta = t + t_0, \quad (178)$$

или, в старых переменных x и y , формулами

$$x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad y = \frac{\sin(t + t_0)}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}.$$

Если теперь в первом уравнении системы (178) положить $C=0$, то получим $r=1$, $\theta=t+t_0$. Эти равенства определяют замкнутую траекторию — окружность $x^2 + y^2 = 1$. Если $C < 0$, то ясно, что $r > 1$ и $r \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Если же $C > 0$, то $r < 1$ и снова $r \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Это означает, что существует единственная замкнутая траектория $r=1$, к которой все остальные траектории с течением времени приближаются по спиралям (рис. 87).

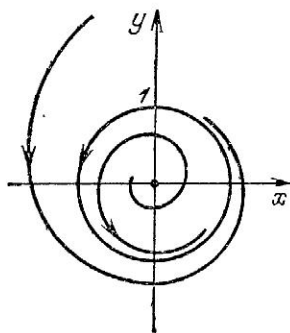


Рис. 87

Замкнутые фазовые траектории, обладающие таким свойством, называют *предельными циклами* или, точнее (*орбитально*), *устойчивыми предельными циклами*. Дело в том, что различают еще два типа предельных циклов. Предельный цикл называется (*орбитально*) *неустойчивым*, если все соседние к нему траектории спиралевидно от него удаляются при $t \rightarrow +\infty$. Предельный цикл называется (*орбитально*) *полуустойчивым*, если все траектории с одной стороны (например, изнутри) наматываются на него, а с другой стороны (извне) разматываются с него при $t \rightarrow +\infty$.

В рассмотренном выше примере мы смогли в явном виде найти уравнение замкнутой фазовой траектории, однако в общем случае, конечно, этого сделать нельзя. Поэтому

в теории обыкновенных дифференциальных уравнений играют большую роль критерии, которые позволяют хотя бы выделить те области, где может содержаться предельный цикл. Заметим, что замкнутая траектория системы (122), если таковая существует, обязательно содержит внутри себя

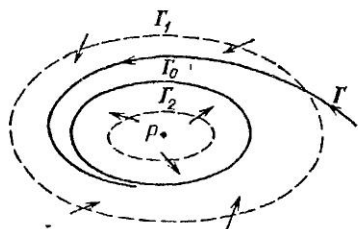


Рис. 88

по крайней мере одну особую точку этой системы. Отсюда, в частности, следует, что если в некоторой области фазовой плоскости нет особых точек дифференциальной системы, то в этой области нет и замкнутых траекторий.

Пусть D — ограниченная область вместе со своей границей, лежащая в фазовой плоскости и не содержащая особых точек системы (122). Тогда доказывается (критерий Пуанкаре — Бендиксона), что если Γ — траектория системы (122), которая в начальный момент времени $t=t_0$ выходит из точки, лежащей в области D , и остается в D при всех $t \geq t_0$, то траектория Γ либо сама является замкнутой траекторией, либо с течением времени она по спирали приближается к замкнутой траектории.

Проиллюстрируем этот факт с помощью рис. 88. Здесь D состоит из двух замкнутых кривых Γ_1 и Γ_2 и кольцевой области между ними. Свяжем с каждой граничной точкой области D вектор

$$V(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j}.$$

Тогда если траектория Γ , выходящая в начальный момент времени $t=t_0$ из точки границы, входит в область D и остается там при всех $t \geq t_0$, то, согласно сформулированному выше утверждению, траектория Γ будет по спирали приближаться к некоторой замкнутой траектории Γ_0 , лежащей в области D . При этом кривая Γ_0 должна окружать особую точку дифференциальной системы (точку P), не лежащую в области D .

Дифференциальная система (173) даст простой пример применения приведенного критерия для отыскания предельных циклов. Действительно, система (173) имеет единственную особую точку $O(0, 0)$, и поэтому в области D между окружностями радиусов $r=1/2$ и $r=2$ нет особых точек. Исходя из первого уравнения системы (177), видим, что

$$\frac{dr}{dt} > 0 \text{ на внутренней окружности и } \frac{dr}{dt} < 0 \text{ на внешней}$$

окружности. Вектор V , связанный с точками на границе области D , всегда направлен внутрь D . Это и означает, что в кольцевой области между окружностями радиусов $r=1/2$ и $r=2$ должна быть замкнутая траектория дифференциальной системы (173). Такая замкнутая траектория действительно существует, и ею является окружность радиуса $r=1$.

Следует, однако, отметить, что в общем случае системы вида (122) практическая реализация критерия Пуанкаре — Бендиксона встречает большие трудности, ибо нет общих методов построения соответствующих областей, и поэтому успех зависит как от вида системы, так и от опыта исследователя. Вместе с тем необходимо иметь в виду, что отыскание признаков отсутствия предельных циклов не менее важная задача, чем нахождение критериев их существования.

Наиболее распространенным в этом плане является признак Дюлака: *если существует непрерывная вместе с непрерывными частными производными функция $V(x, y)$ такая, что в некоторой односвязной области D фазовой плоскости функция*

$$\frac{\partial(BX)}{\partial x} + \frac{\partial(BY)}{\partial y}$$

*является функцией знакоопределенной *)*, то в области D нет предельных циклов дифференциальной системы (122). При $V(x, y) \equiv 1$ сформулированный признак называют *признаком Бендиксона*.

Если обратиться к рассмотренному выше дифференциальному уравнению (156), представляющему собой дифференциальную модель адиабатического одномерного потока идеального газа с постоянной удельной теплоемкостью в канале с трением, то для этого уравнения

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (1-y)F(x), \\ Y(x, y) &= 4y \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} y \right) (\gamma q y - F'(x)). \end{aligned}$$

А тогда если положить

$$B(x, y) = 1 / \left\{ 4yF(x) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} y \right] \right\},$$

то оказывается, что в данном случае

$$\frac{\partial(XB)}{\partial x} + \frac{\partial(YB)}{\partial y} \equiv \frac{\gamma q}{F(x)} > 0$$

*) То есть определено положительной или определено отрицательной.

и, значит, уравнение (156) не имеет замкнутых интегральных кривых.

Остановимся еще на одном понятии, которое может быть использовано при выяснении вопроса о существовании предельных циклов. Это понятие *индекса особой точки*.

Пусть Γ — простая замкнутая кривая (т. е. кривая без самопересечений), которая не обязательно является траекторией дифференциальной системы (122), лежит в фазовой плоскости и не проходит через особые точки этой системы. Тогда если $P(x, y)$ — точка кривой Γ , то вектор

$$V(x, y) = X(x, y)\mathbf{i} + Y(x, y)\mathbf{j},$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} — единичные векторы осей декартовых координат, будет ненулевым вектором и, следовательно, будет иметь определенное направление, заданное некоторым углом θ

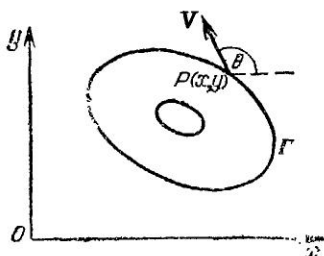


Рис. 89

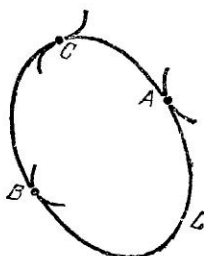


Рис. 90

(рис. 89). Если точка $P(x, y)$, двигаясь по кривой Γ , например, против хода часовой стрелки, совершит один оборот, то вектор V сделает при этом некоторое целое число оборотов, т. е. угол θ получит приращение $\Delta\theta = 2\pi n$, где n — целое положительное, нуль или целое отрицательное число. Это число и называют *индексом замкнутой кривой Γ* (цикла Γ).

Если цикл Γ начать непрерывно стягивать так, чтобы он не проходил при деформации через особые точки заданного векторного поля, то индекс цикла должен, с одной стороны, меняться непрерывно, а с другой — всегда быть равным целому числу. Это означает, что при непрерывной деформации индекс цикла не меняется. Исходя из этого свойства, под *индексом особой точки* понимают индекс простой замкнутой кривой, окружающей эту особую точку.

Отметим следующие свойства индекса:

1) *индекс замкнутой траектории дифференциальной системы (122) равен +1;*

2) индекс замкнутой кривой, окружающей несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек;

3) индекс замкнутой кривой, не окружающей ни одной особой точки, равен нулю.

Отсюда, в частности, следует, что так как индекс замкнутой траектории системы (122) всегда равен $+1$, то замкнутая траектория должна окружать либо одну особую точку с индексом $+1$, либо несколько таких точек, но обязательно с суммарным индексом, равным $+1$. Это часто используется при доказательстве отсутствия предельных циклов.

Индекс особой точки вычисляется по формуле

$$n = 1 + \frac{e-h}{2}, \quad (179)$$

где e — число эллиптических секторов, а h — число гиперболических секторов. Практически при вычислении индекса особой точки можно пользоваться следующим простым приемом. Пусть L — цикл, не проходящий через особые точки дифференциальной системы (122) и такой, что любая из траекторий дифференциальной системы имеет с кривой L не более конечного числа общих точек. При этом траектории могут пересекать кривую L или касаться ее. В случае касания учитываются (рис. 90) только внешние (типа A) и внутренние (типа B) точки касания. Касания же типа C , т. е. когда точка C является точкой перегиба, во внимание не принимаются. Для вычисления индекса особой точки используют формулу (179), где уже e — число точек внутреннего касания, а h — число точек внешнего касания траекторий системы (122) с циклом L .

На рис. 91 показаны особые точки с индексами, равными соответственно 0 , $+2$, $+3$, $+1$, -2 .

Выше уже отмечалось, что построение полной картины поведения фазовых траекторий дифференциальной системы (122) облегчается введением точки на бесконечности посредством преобразований (159). Топология дает здесь весьма общую теорему, которая говорит о том, что когда непрерывное векторное поле с конечным числом особых точек задается на сфере, то сумма их индексов равна $+2$. Таким образом, если сумма индексов всех расположенных в конечной части фазовой плоскости особых точек дифференциальной системы, имеющих их конечное число, отлична от $+2$, то точка в бесконечности будет особой точкой с ненулевым индексом.

Если же вместо инверсии использовать однородные координаты, то сумма индексов всех особых точек будет уже равна $+1$. То, что это так, можно заметить из того, что если плоскость проецируется на сферу с центром проекции в центре сферы, то две точки на сфере соответствуют одной точке проективной плоскости. При этом окружность большого круга, параллельного плоскости, соответствует прямой в бесконечности.

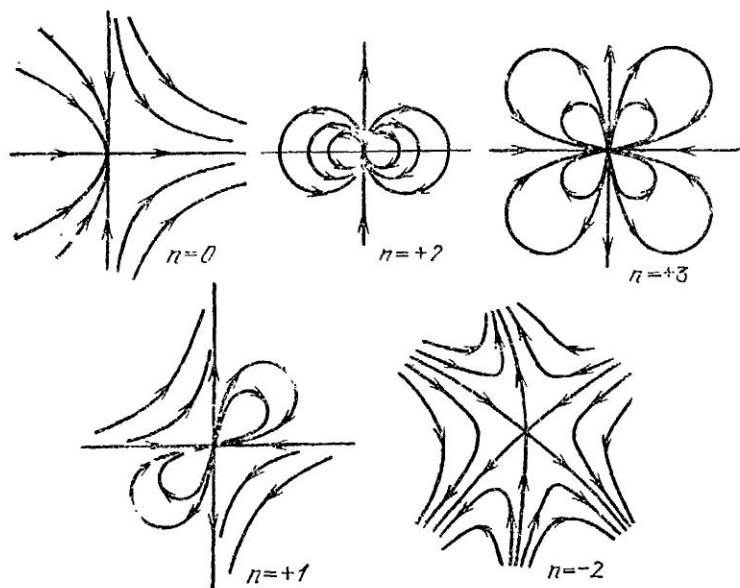


Рис. 91

Если обратиться к уравнению (168), описывающему адиабатический одномерный поток идеального газа, проходящего через вращающийся канал постоянного диаметра, то, как видно из рис. 85, для особой точки в бесконечности $e=-2$, $h=0$. Отсюда следует, что индекс этой точки равен $+2$. При этом индекс не зависит от значений констант в уравнении (168). Из предыдущего, в частности, следует, что сумма индексов конечных особых точек равна нулю. Можно показать, что в зависимости от того, имеет ли прямая, задаваемая уравнением $ty - G^2x=0$, две, одну двойную или ни одной точки пересечения с параболой, заданной уравнением $1 - ry + qG^2x^2=0$ (что в свою очередь эквивалентно выполнению соответственно соотношений $G > G_0$,

$G = G_0$, $G < G_0$, где $G_0 = 2mq^{1/2}/p$, имеют место следующие комбинации конечных особых точек:

а) $G > G_0$. Седло и узел.

б) $G = G_0$. Особая точка является особой точкой высшего порядка с двумя гиперболическими ($h=2$) и двумя параболическими ($e=0$) секторами.

в) $G < G_0$. Особые точки отсутствуют.

Мы видим, что во всех случаях сумма индексов равна нулю, как это и должно быть.

Периодические режимы в электрических цепях

Покажем, как появляются предельные циклы при рассмотрении динатронного осциллятора (рис. 92), анализ работы которого приводит к так называемому уравнению Ван-дер-Поля. Хотя явление, связанное с возникновением

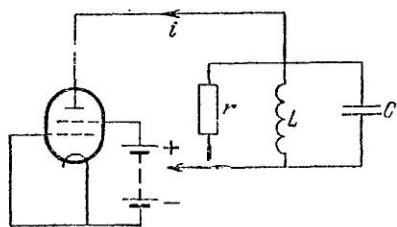


Рис. 92

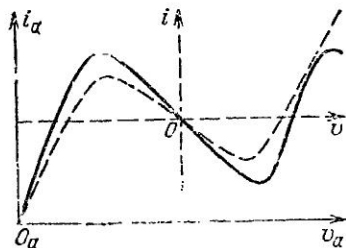


Рис. 93

предельных циклов, можно проиллюстрировать, например, на задачах из механики, биологии, экономики, покажем, как они появляются при изучении электрических цепей.

На рис. 92 схематически изображен динатронный осциллятор, чьи характеристики i_a , v_a на рис. 93 показаны сплошной линией. Здесь i_a — ток, а v_a — напряжение в электронной лампе. Цепь содержит сопротивление r , индуктивность L и емкость C , соединенные параллельно и последовательно с динатроном. Реальная цепь может быть в данном случае заменена цепью, показанной схематически на рис. 94. При этом характеристика электронной лампы может быть аппроксимирована полиномом третьей степени $i = av + \gamma v^3$, что и показано пунктирной линией на рис. 93. Здесь i и v обозначают координаты в системе с началом, перенесенным в точку перегиба O . Как видно из рис. 93,

справедливы неравенства

$$\alpha > 0, \quad \gamma > 0.$$

Далее, в соответствии с одним из законов Кирхгофа получаем, что

$$i + i_r + i_L + i_C = 0,$$

где $i_r = \frac{v}{r}$, $L \frac{di_L}{dt} = v$, $i_C = C\dot{v}$. А отсюда в результате

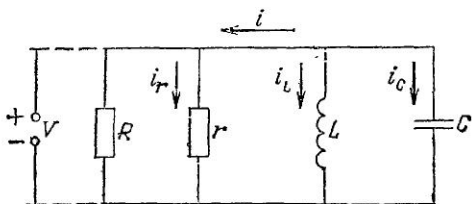


Рис. 94

простых операций приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{v} + \left(\frac{\alpha}{C} + \frac{1}{rC} + \frac{3\gamma}{C} v^2 \right) \dot{v} + \frac{1}{LC} v = 0.$$

Если теперь положить

$$\frac{\alpha}{C} + \frac{1}{rC} = a, \quad \frac{3\gamma}{C} = b, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

то предыдущее уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{v} + (a + bv^2) \dot{v} + \omega_0^2 v = 0.$$

А это и есть так называемое дифференциальное уравнение Ван-дер-Поля. Если воспользоваться преобразованием вида

$$\dot{v} = y, \quad \ddot{v} = y \frac{dy}{dv},$$

то уравнению Ван-дер-Поля можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dv} = - \frac{(a + bv^2) y + \omega_0^2 v}{y} = \frac{Y(v, y)}{V(v, y)}. \quad (180)$$

Единственной конечной особой точкой здесь является начало координат, при этом

$$J^*(0, 0) = \omega_0^2 > 0, \quad D(v, y) = -(a + bv^2).$$

Поскольку $b > 0$, то, полагая $a > 0$, приходим к выводу, что дивергенция D не меняет знака и, следовательно, замкнутые интегральные кривые у последнего дифференциального уравнения появиться не могут. Поэтому будем рассматривать только случай, когда $a < 0$, т. е. когда $\alpha < -1/r$. Отсюда следует, что $D(0, 0) = -a > 0$ и, значит, особая точка является либо узлом, либо фокусом. Если теперь рассмотреть дифференциальную систему, соответствующую дифференциальному уравнению (180), т. е. рассмотреть дифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = Y(v, y), \quad \frac{dv}{dt} = V(v, y),$$

то видно, что при возрастании t изображающая точка движется по траектории в направлении от особой точки. Таким образом, траектория, которая выходит из точки в бесконечности, не может достигнуть особой точки в начале координат ни при каком значении t , включая $t = +\infty$. Отсюда следует, что если доказать, что траектория, которая выходит из бесконечно удаленной точки, имеет вид спирали, навивающейся на начало координат при $t \rightarrow +\infty$, то тем самым можно гарантировать существование по крайней мере одного предельного цикла.

Доказательство существования такого цикла может быть получено или численно, или аналитически. Численный метод доказательства, предложенный впервые голландским физиком и математиком Ван-дер-Полем, состоит в построении траектории, выходящей из точки, достаточно удаленной от начала координат, и из проверки того, обладает ли она указанным выше свойством. Такая процедура дает приближение к предельному циклу, но она может использоваться только в случае конкретных численных значений.

Ниже приведем схему доказательства*), основанную на аналитических соображениях, использующую исследование особенностей в бесконечности. При этом, в отличие от способа рассмотрения уравнения (168), воспользуемся более удобным в данном случае преобразованием однородных координат

$$v = \xi/z, \quad y = \eta/z. \quad (181)$$

Прямая в бесконечности здесь задается уравнением $z = 0$. Для того чтобы число переменных свести к двум, исключим

*) Kestin J., Zaremba S. K. Geometrical methods in the analysis of ordinary differential equations//Appl. Sci. Res., sect. B.—1953. V. 3.—P. 144—189.

сначала точку $\xi = z = 0$. Это можно сделать, полагая $\xi = 1$.
 А тогда

$$v = 1/z, \quad y = \eta/z.$$

В этом случае дифференциальная система, соответствующая уравнению (180), преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\eta z, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{(az^2 + b)\eta + \omega_0^2 z^2}{z^2} - \eta^2. \end{aligned}$$

Здесь удобно ввести новый параметр θ , полагая

$$dt = z^2 d\theta. \quad (182)$$

А тогда предыдущая система переписывается так:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\theta} &= -(az^2 + b)\eta - \omega_0^2 z^2 - \eta^2 z^2 = \mathcal{Y}, \\ \frac{dz}{d\theta} &= -\eta z^3 = \mathcal{Z}. \end{aligned} \quad (183)$$

Отметим прежде всего, что прямая в бесконечности $z=0$ является траекторией дифференциальной системы (183) и при возрастании t (а значит, и θ) изображающая точка движется по ней по направлению к единственной особой точке $z=\eta=0$. Характеристическое уравнение, которое в данном случае имеет вид

$$-b\eta z = 0,$$

определяет регулярное исключительное направление $z=0$, которому соответствуют две отталкивающие области, что может быть установлено рассмотрением векторного поля (рис. 95). Второе исключительное направление $\eta=0$ является особым, и поэтому здесь необходимы дополнительные рассуждения.

Геометрическое место точек $\mathcal{Y}=0$ — это кривая, которая касается прямой $\eta=0$ в начале координат и проходит через второй и третий квадранты (рис. 95), позволяя определить три направления I, II, III по разные стороны от оси симметрии $z=0$. Область между кривой, заданной уравне-

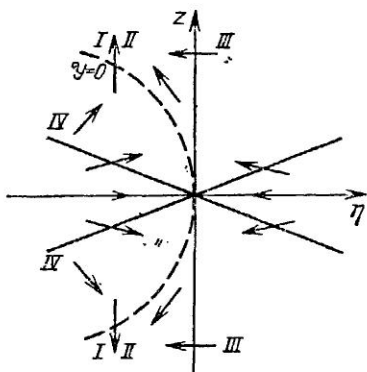


Рис. 95

нием $\mathcal{Y}=0$, и осью $\eta=0$ топологически эквивалентна двум отталкивающим областям. Таким образом, существует по крайней мере по одной траектории с каждой стороны от прямой $\eta=0$, которые касаются последней в начале координат.

Если рассмотреть теперь дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^3} + \frac{\omega_0^2}{\eta z} + \frac{\eta}{z} = f(\eta, z),$$

то можно заметить, что во втором квадранте между кривой $\mathcal{Y}=0$ и осью $\eta=0$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\eta^2} \right) < 0$$

для малых значений $|\eta|$. Следовательно, если взять две фазовые траектории с одним и тем же значением η , то нетрудно видеть, что изображающие точки, движущиеся по этим траекториям, при убывании z будут расходиться. Это означает, что существует только по одной фазовой траектории с каждой стороны от прямой $\eta=0$, которые ее касаются в начале координат и принадлежат рассматриваемой области. Ясно также, что качественная картина симметрична относительно оси $z=0$. Более того, поскольку

$$|\mathcal{Y}/z| \geq \omega_0^2/|\eta z|$$

для малых значений z и положительных η , то нет кривых, касающихся оси $\eta=0$ в начале координат и проходящих через первый или четвертый квадрант. Такие кривые также отсутствуют и в области слева от кривой, заданной уравнением $\mathcal{Y}=0$, ибо в этом случае $\mathcal{Y}>0$, а z имеет тот же знак, что и z (рис. 95, стрелки IV). Проведенные рассуждения говорят о том, что особая точка $\eta=z=0$ — седло. Две фазовые траектории, достигающие этой точки при $t \rightarrow +\infty$, являются сегментами прямой в бесконечности ($z=0$), связывающими предыдущую точку с точкой $\xi=z=0$. Две же другие фазовые траектории достигают седловой точки при $t \rightarrow -\infty$.

В проведенных рассуждениях мы не касались точки $\xi=z=0$. Чтобы завершить исследование, положим $\eta=1$ в формулах (181). Тогда дифференциальная система, соответствующая дифференциальному уравнению (180), запишется в виде

$$\frac{d\xi}{d\theta} = z^2 + \xi (az^2 + b\xi^2 + \omega_0^2 \xi z^2) = P,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = z (az^2 + b\xi^2 + \omega_0^2 \xi z^2) = Q,$$

где переменная θ задается формулой (182). Рассматриваемая точка $\xi=z=0$ оказывается особой. Характеристическое уравнение здесь $z^3=0$. Таким образом, исключительное направление $z=0$ оказывается особым. Кривая, заданная уравнением $P(\xi, z)=0$ (рис. 96), касается оси $z=0$ в начале координат и имеет в нем точку возврата. Кривая же, заданная уравнением $Q(\xi, z)=0$, имеет в начале координат кратную точку. Исследуя знаки функций P и Q , можно

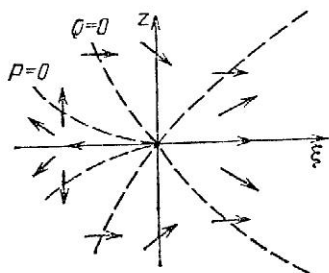


Рис. 96

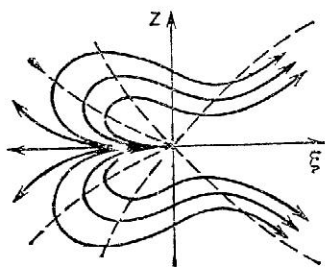


Рис. 97

выяснить характер векторного поля (рис. 96), а также картину поведения фазовых траекторий в окрестности особой точки $\xi=z=0$ (рис. 97).

В частности, отметим, что вдали от оси $\xi=0$ нет фазовых траекторий, которые бы входили в особую точку справа. Это следует из того, что в первом и четвертом квадрантах выполняется неравенство

$$|z/\xi| > |Q/P|.$$

Проведенные рассуждения показывают, что уравнение Ван-дер-Поля не имеет фазовых траекторий, которые стремятся к бесконечности с ростом t , но существует бесконечно много фазовых кривых, которые удаляются от бесконечности при возрастании t . Это и доказывает существование по крайней мере одного предельного цикла у дифференциального уравнения Ван-дер-Поля.

Кривые без контакта

В сравнительно простых случаях полная картина поведения интегральных кривых заданного дифференциального уравнения или, что то же самое, фазовых траекторий соответствующей ему дифференциальной системы определяется типом особых точек и замкнутыми интегральными

кривыми (фазовыми траекториями), если таковые имеются. Иногда качественная картина может быть построена, если удастся, кроме выяснения типов особых точек, найти кривые (сепаратрисы), которые «связывают» особые точки. Однако, к сожалению, нет общих методов, которые позволяли бы решать эффективно последнюю задачу. В связи с этим полезно при качественном интегрировании использовать так называемые кривые без контакта. Напомним, что кривая или дуга кривой с непрерывной касательной называется *кривой (дугой) без контакта*, если она нигде не касается вектора (X, Y) , заданного дифференциальной системой (122). Из определения ясно, что вектор (X, Y) должен быть направлен на кривой всегда в одну сторону. Таким образом, кривая без контакта может пересекаться фазовыми кривыми системы (122) в одном направлении только при возрастании t , а в другом — при убывании t . Поэтому знание соответствующих кривых без контакта может дать требуемую информацию о ходе выбранной частной фазовой траектории.

При качественном интегрировании дифференциальных уравнений могут применяться также различные вспомогательные неравенства. Так, если задачи два дифференциальных уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

и известно, что в некоторой области D выполняется неравенство $f(x, y) \leq g(x, y)$, то, обозначая через $y_1(x)$ решение первого уравнения такое, что $y_1(x_0) = y_0$, где $(x_0, y_0) \in D$, а через $y_2(x)$ — решение второго уравнения с теми же начальными условиями, можно доказать, что $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $x \geq x_0$ в области D . Если же в области D выполняется строгое неравенство $f(x, y) < g(x, y)$, то $y_1(x) < y_2(x)$ для $x > x_0$ в области D и кривая $y = y_2(x)$ является кривой без контакта.

Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение (168). Выше было показано, что если $G > G_0$, то это уравнение допускает две конечные особые точки — седло и узел, которые являются точками пересечения прямой $my - G^2x = 0$ и параболы $1 - py + qG^2x^2 = 0$. Сегменты прямой и параболы, связывающие эти две конечные особые точки, являются кривыми без контакта, и они ограничивают область плоскости, которую обозначим через Δ . Если возьмем

$$X(x, y) = 1 - py + qG^2x^2, \quad Y(x, y) = 2y(my - G^2x),$$

то легко видеть, что вектор (X, Y) направлен на границе области Δ наружу, исключая особые точки. Следовательно, если изображающая точка выходит из любой внутренней точки области Δ и следует вдоль интегральной кривой, когда t убывает, то изображающая точка не сможет покинуть область Δ , не проходя через одну из особых точек. Но так как внутри области Δ выполняется неравенство $X(x, y) < 0$, то особая точка, которая является притягивающей, будет узлом.

Найдя угловые коэффициенты исключительных направлений для седла, можно увидеть, что одна из исключительных прямых проходит через область Δ . Отсюда следует, что интегральная кривая, касательная к этой прямой в седловой точке, входит внутрь области Δ и отсюда должна достигнуть узловой точки.

В заключение отметим, что при исследовании конкретных дифференциальных моделей часто возникает необходимость применять методы, о которых не шла речь в настоящей книге. Все зависит от степени сложности дифференциальной модели, от того, насколько глубоко развит соответствующий математический аппарат, и, конечно, от эрудиции и опыта исследователя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин В. В., Садовский Л. П. Математические модели и дифференциальные уравнения.— Минск: Высшая школа, 1982.— 272 с.
2. Андронов Л. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.— 916 с.
3. D e r r i c k W. R., G r o s s m a n S. I. Elementary differential equations with applications.— 2-nd ed.— Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.— 532 p.
4. Differential equation models / Ed.: Браун М.— New York etc.: Springer, 1983.— 380 p.
5. Е р у г и н Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1979.— 744 с.
6. Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений.— Минск: Высшая школа, 1973.— 560 с.
7. S i m m o n s G. F. Differential equations with applications and historical notes.— New York, N. Y.: McGraw-Hill Book Co., 1972.— 465 p.
8. S p i e g e l M. R. Applied differential equations.— Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1981.— 654 p.

Владимир Васильевич Амелькин
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Редактор *М. М. Горючая*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Н. Б. Румянцева*

ИБ № 12918

Сдано в набор 07.05.86. Подписано к печати
11.12.86. Формат 84×108/32. Бумага тип. №3.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл.
печ. л. 8,4. Усл. кр.-отт. 8,61. Уч.-изд. л. 7,65.
Тираж 100 000 экз. Заказ № 2528. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли. 113054 Москва М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии изд-ва «Наука»,
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6. Зак. 54

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция	Производная
C (постоянная)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0,4343}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sc}^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x$

Функция	Производная
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$
$\csc x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \csc x$
$\operatorname{arcsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsc} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arcsc} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{Arth} x$	$-\frac{1}{1-x^2}$

ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (n \neq -1)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$\int \sin x dx = -\cos x$$
$$\int \cos x dx = \sin x$$
$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|$$
$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x|$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (|x| < a)$$
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (|x| > a)$$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln |\operatorname{ch} x|$$

$$\int \operatorname{cth} x dx = \ln |\operatorname{sh} x|$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \ln |(x + \sqrt{x^2 + a^2})|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} = \ln |(x + \sqrt{x^2 - a^2})|$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. **Элементы высшей математики для школьников.**— 18 л.

(Темплан 1987 г., № 70)

В книге излагаются основные понятия дифференциального и интегрального исчисления, их приложения к исследованию элементарных функций, применения к приближенным вычислениям, решению некоторых задач механики и физики. Имеются главы, посвященные изучению тригонометрических функций, комплексных чисел, элементов теории вероятностей. Каждая глава снабжена упражнениями.

Для учащихся старших классов школ и ПТУ, студентов техникумов и вузов, а также преподавателей математики, инженеров и техников.

Заказы на книгу принимаются без ограничения всеми книжными магазинами Книготорга и Академкниги.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Горелов И. Н. **Разговор с компьютером. Психолингвистические аспекты проблемы.**— 12 л.
(Темплан 1987 г., № 157)

Ученые и инженеры разных стран заняты разработкой ЭВМ пятого поколения. Наступит черед и следующих поколений компьютеров. Эти машины будут способны общаться с человеком не только на своем, машинном, но и на естественном языке, уметь ориентироваться в среде и ситуации общения. Чтобы их создать, надо знать особенности мышления человека и связи его мышления с речью, знать, как понимается текст. Обо всем этом, а также о многом другом (например, о рассудочной деятельности животных, об опытах обучения обезьян языкам жестов и знаков) рассказывается в книге, написанной строго научно и вместе с тем доступно и увлекательно.

Для всех, кто интересуется современной наукой о языке и мышлении, проблемами искусственного интеллекта и лингвистики.

Заказы на книгу принимаются без ограничения. Во всех магазинах Книготорга и Академкниги.