

**Министерство образования Российской Федерации  
Воронежский государственный университет**

**конспекты лекций вопросы и задачи**

**Дифференциальные уравнения**

**часть 4**

**Устойчивость**

**пособие для студентов специальностей**

**02.03.01, 01.03.04, 01.05.01 и 10.05.04**

**Воронеж  
2018**

Утверждено научно-методическим советом математического факультета  
25 апреля 2018 года  
Протокол № 0500-04

Составители: Прядко И.Н., Петрова Л.П.

Пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и  
операторных уравнений математического факультета  
Воронежского госуниверситета

Рекомендуется для студентов 2-го курса  
дневного отделения

## Оглавление

<b>4. УСТОЙЧИВОСТЬ.....</b>	<b>4</b>
4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ.....	4
4.1.1. Пример.....	4
4.1.2. Определения устойчивости.....	4
4.1.3. Устойчивость решений уравнения $n$ -го порядка.....	5
4.1.4. Приведенная система.....	6
4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	7
4.2.1. Приведенная система для (ЛС).....	7
<b>ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕРМИНОЛОГИИ.....</b>	<b>8</b>
4.2.2. Признаки устойчивости (ЛС).....	8
4.2.3. Оценки нормы матричной экспоненты.....	9
4.2.4. Критерии устойчивости (ЛСПК).....	10
4.2.5. Критерий Гурвица (Рауса – Гурвица).....	11
4.2.6. Критерий Михайлова.....	13
4.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ОСОБЫХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	14
4.3.1. Задача об устойчивости положения равновесия автономной системы.....	15
4.3.2. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.....	15
4.3.3. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.....	17
4.3.4. Устойчивость нижнего положения равновесия маятника без трения.....	17
4.4. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ.....	19
4.4.1. Лемма Гронуолла – Беллмана.....	19
4.4.2. Теорема о липшицевости оператора сдвига.....	20
4.5. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ЛАОС.....	21
4.5.1. $\lambda_1, \lambda_2$ – вещественные.....	21
4.5.1.1. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .....	22
4.5.1.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ .....	24
4.5.1.3. Хотя бы одно собственное значение равно нулю.....	25
4.5.2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряжённые.....	28
4.5.2.1. $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ – чисто мнимые.....	28
4.5.2.2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha \neq 0$ .....	29
4.6. МАТЕРИАЛЫ К ЭКЗАМЕНУ.....	30
4.6.1. Вопросы.....	30
4.6.2. Задачи.....	30
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>31</b>

## 4. Устойчивость

### 4.1. Основные понятия теории устойчивости

В этом параграфе формулируются и обсуждаются определения разных видов устойчивости.

#### 4.1.1. Пример.

Общее решение уравнения  $x' = ax$ , как известно, задается формулой  $x = Ce^{at}$ . Среди его решений выделим одно:

$$x \equiv 0$$

и поставим вопрос о его *устойчивости*, т. е. о том, приводят ли малые отклонения от него при  $t = 0$  к малым же отклонениям при всех  $t \geq 0$ ? Ответ будет различным в зависимости от знака  $a$ . При  $a < 0$  нулевое решение *устойчиво асимптотически*, т. е. малым отклонениям от него в момент  $t = 0$  соответствуют отклонения при  $t \geq 0$  не только малые, но и асимптотически стремящиеся к нулю (см. рис. 1). При  $a = 0$  оно *устойчиво* – малым отклонениям в нулевой момент соответствуют малые отклонения при  $t \geq 0$ . Наконец, при  $a > 0$  нулевое решение *неустойчиво*, т. е. сколь угодно малые отклонения от него при  $t = 0$  могут приводить к большим отклонениям при  $t > 0$ .

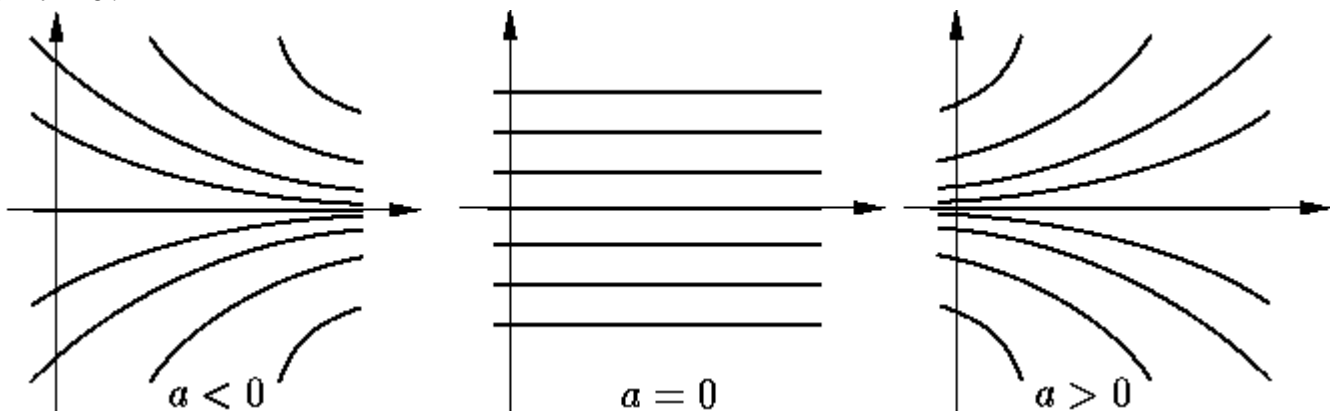


Рис. 1.

#### 4.1.2. Определения устойчивости.

**Определение.** Для уравнения

$$x' = f(t, x), \quad f: [t_0, +\infty) \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (\text{НС})$$

в предположении выполнения условий теоремы Коши – Пикара в полосе (с переменным коэффициентом Липшица) фиксированное его решение  $x = \varphi(t) = g_{t_0}^t \bar{x}_0$  на  $[t_0, +\infty)$  называется *устойчивым по Ляпунову*, если (см. рис. 2а):

$$\forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \forall (x_0: \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta) \forall (t \geq t_0) \left[ \|g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0\| < \varepsilon \right];$$

– *асимптотически устойчивым*, если (см. рис. 2б)

1) оно устойчиво и

$$2) \exists(\Delta > 0) \forall(x_0 : \|x_0 - \bar{x}_0\| < \Delta) \left[ g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \right].$$

– асимптотически устойчивым в целом, если оно асимптотически устойчиво, причем в 2) можно взять  $\Delta = +\infty$ ; другими словами, 2) заменяется на

$$2') \forall(x_0) \left[ g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \right].$$

– экспоненциально устойчивым, если

$$\exists(\Delta_1 > 0, M > 0, \gamma > 0) \forall(x_0 : \|x_0 - \bar{x}_0\| < \Delta_1) \forall(t \geq t_0)$$

$$\left[ \|g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0\| \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} \|x_0 - \bar{x}_0\| \right];$$

– экспоненциально устойчивым в целом, если в качестве  $\Delta_1$  можно взять  $+\infty$ , т.е.

$$\exists(M > 0, \gamma > 0) \forall(x_0) \forall(t \geq t_0) \left[ \|g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0\| \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} \|x_0 - \bar{x}_0\| \right].$$

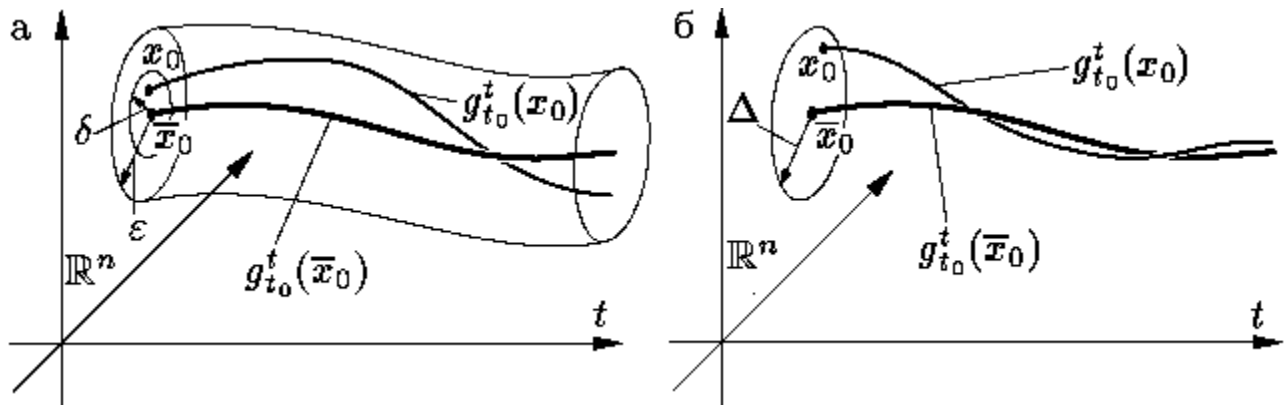


Рис. 2.

Очевидно, экспоненциальная устойчивость решения влечет его асимптотическую устойчивость, которая, в свою очередь, влечет устойчивость. Нетрудно проверить также, что обратные импликации не справедливы (для второй это уже показано в п. 4.1.1).

Как видно из определения, устойчивость решения  $\varphi(t) = g_{t_0}^t \bar{x}_0$  – это непрерывность оператора сдвига в точке  $\bar{x}_0$ , равномерная относительно  $t \in [t_0, +\infty)$ .

### 4.1.3. Устойчивость решений уравнения n-го порядка.

**Определение.** Для уравнения порядка  $n$

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (Yn)$$

его решение  $y = \psi(t)$  будем называть устойчивым (в том или ином виде) в случае, когда устойчив (в том же виде) его джет  $x = J^{(n-1)}\psi(t)$ , как решение соответствующей нормальной системы (см. 3.4).

Например, рассмотрим уравнение маятника с трением, пропорциональным угловой скорости:

$$\ddot{y} + r\dot{y} + \omega^2 \sin y = 0.$$

Для него вопрос об устойчивости нижнего положения равновесия  $y = \psi(t) \equiv 0$  эквивалентен, по определению, вопросу об устойчивости решения  $x = (\psi(t), \psi'(t)) = (0, 0)$  нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1 - r x_2. \end{cases}$$

#### 4.1.4. Приведенная система.

**Определение.** Для (НС)  $\dot{x} = f(t, x)$  и его решения  $\varphi(t)$  введём замену переменных  $y = x - \varphi(t)$ , для которой

$$y' = x' - \varphi'(t) = f(t, x) - f(t, \varphi(t)) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) =: F(t, y).$$

С учетом произведенной замены (НС) эквивалентна системе

$$y' = F(t, y), \quad (\text{ПС})$$

которая называется *приведённой* (или *системой уравнений возмущенного движения*) по отношению к (НС) и заданному ее решению  $x = \varphi(t)$ .

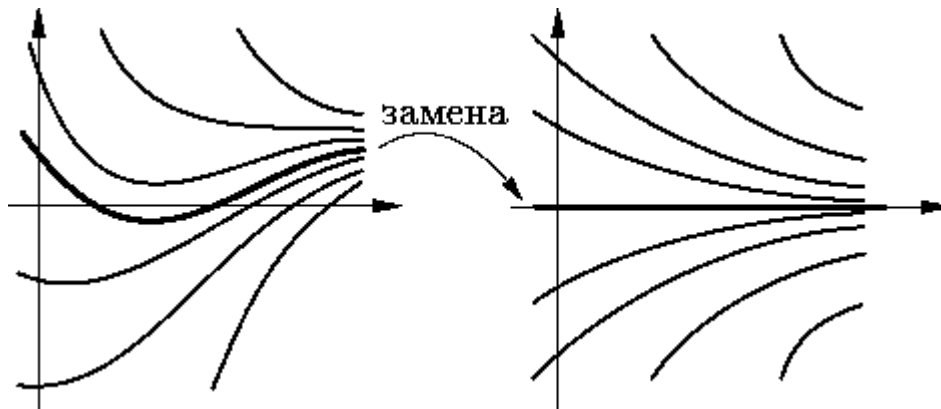


Рис. 3.

Утверждение об «эквивалентности с учетом замены» означает, что оператор сдвига  $\tilde{g}_{t_0}^t$  по траекториям (ПС) связан с оператором сдвига  $g_{t_0}^t$  по траекториям (НС) соотношением:

$$\tilde{g}_{t_0}^t(x_0 - \bar{x}_0) = g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0$$

$$\left( \tilde{g}_{t_0}^t(x_0 - \bar{x}_0) = y, g_{t_0}^t x_0 = x, g_{t_0}^t \bar{x}_0 = \varphi(t), y(t_0) = x_0 - \bar{x}_0 =: y_0 \right).$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Утверждение о приведенной системе.** Решение  $\varphi$  (НС) обладает одним из свойств устойчивости, если и только если соответствующим свойством обладает нулевое решение (ПС).

**Доказательство.** Проведем доказательство для асимптотической устойчивости.

Решение  $g_{t_0}^t \bar{x}_0$  системы (НС) асимптотически устойчиво

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[ \forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \forall (x_0 : \|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta) \forall (t \geq t_0) \left[ \|g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0\| < \varepsilon \right] \wedge \right. \\ \left. \wedge \exists (\Delta > 0) \forall (x_0 : \|x_0 - \bar{x}_0\| < \Delta) \left[ g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t \bar{x}_0 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \right] \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \forall (y_0 : \|y_0\| < \delta) \forall (t \geq t_0) \left[ \|g_{t_0}^t (y_0 + \bar{x}_0) - g_{t_0}^t \bar{x}_0\| < \varepsilon \right] \wedge \right. \\ \left. \wedge \exists (\Delta > 0) \forall (y_0 : \|y_0\| < \Delta) \left[ g_{t_0}^t (y_0 + \bar{x}_0) - g_{t_0}^t \bar{x}_0 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \right] \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \forall (y_0 : \|y_0\| < \delta) \forall (t \geq t_0) \left[ \|\tilde{g}_{t_0}^t y_0 - 0\| < \varepsilon \right] \wedge \right. \\ \left. \wedge \exists (\Delta > 0) \forall (y_0 : \|y_0\| < \Delta) \left[ \tilde{g}_{t_0}^t y_0 - 0 \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \right] \right] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$  нулевое решение (ПС) асимптотически устойчиво.

**Задача.** Доказать утверждение для остальных видов устойчивости.

## 4.2. Устойчивость линейных систем

В этом параграфе изучаются критерии устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости для линейных систем с переменными и постоянными коэффициентами.

### 4.2.1. Приведенная система для (ЛС).

**Утверждение о (ПС) для (ЛС).** Для линейной системы

$$x' = A(t)x + b(t), \quad a_{ij}, b_i \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R}) \quad (\text{ЛС})$$

и любого ее решения  $x = \varphi(t)$  приведенная система совпадает с соответствующей (ЛОС).

**Доказательство.** Произведем замену  $y = x - \varphi(t)$ :

$$y' = x' - \varphi'(t) = A(t)x + b(t) - A(t)\varphi(t) - b(t) = A(t)(x - \varphi(t)) = A(t)y.$$

Таким образом, (ПС)  $y' = A(t)y$  является одновременно (ЛОС) исходной (ЛС).

### Замечание о терминологии.

Из предыдущего пункта следует, что решения (ЛС) могут обладать или не обладать каким-то свойством устойчивости только все одновременно, и при этом соответствующее свойство обязательно имеется или не имеется у нулевого решения (ЛОС) (и всех других ее решений). Поэтому употребляют термины *устойчивая линейная система, асимптотически устойчивая линейная система* и т. д.

### 4.2.2. Признаки устойчивости (ЛС).

#### Утверждение.

- (а) *Ограниченность*  $\Phi_{t_0}(t)$  на  $[t_0, +\infty)$  означает *устойчивость* (ЛС).  
 (б) *Стремление*  $\Phi_{t_0}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  означает *асимптотическую устойчивость* (ЛС) в целом.  
 (в) *Справедливость оценки*  $\|\Phi_{t_0}(t)\| \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}$  при некоторых  $M > 0$ ,  $\gamma > 0$  и любом  $t \geq t_0$ , означает *экспоненциальную устойчивость* (ЛС) в целом.

**Замечание.** Здесь норму матрицы (и вектора) будем полагать равной максимальному из модулей её элементов  $\|A(n \times n)\| = \max_{i,j=1,n} |a_{ij}|$  ( $\|b\| = \max_{i=1,n} |b_i|$ ). Ещё заметим, что  $\|\Phi_{t_0}(t)\|$  – функция переменной  $t$ .

**Доказательство.** Покажем, что из выполнения условий вытекают соответствующие виды устойчивости (ЛС). Во всех случаях достаточно проверить, что соответствующим свойством устойчивости обладает нулевое решение приведенной системы, т.е. (ЛОС).

- (а) Для произвольного  $\varepsilon > 0$  положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{nM}$ , где  $M$  положительная константа, ограничивающая норму  $\Phi_{t_0}(t)$  на  $[t_0, +\infty)$ . Тогда если  $\|y_0\| < \delta$ , то

$$\|\tilde{g}_{t_0}^t y_0\| = \|\Phi_{t_0}(t)y_0\| \leq n \cdot \|\Phi_{t_0}(t)\| \cdot \|y_0\| < nM \frac{\varepsilon}{nM} = \varepsilon.$$

Итак, нулевое решение (ЛОС) устойчиво.

- (б) Для любого  $y_0$  имеем:

$$\|\tilde{g}_{t_0}^t y_0\| \leq n \cdot \|\Phi_{t_0}(t)\| \cdot \|y_0\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

- (в) Аналогично:

$$\|\tilde{g}_{t_0}^t y_0\| \leq n \cdot \|\Phi_{t_0}(t)\| \cdot \|y_0\| \leq (n \cdot M) e^{-\gamma(t-t_0)} \|y_0\|.$$



**Задача.** Покажите, что во всех трёх случаях отмеченные признаки являются необходимыми условиями соответствующих видов устойчивости.

### 4.2.3. Оценки нормы матричной экспоненты.

Переходя к рассмотрению линейных систем с постоянными коэффициентами

$$x' = Ax + b(t), \quad (\text{ЛСПК})$$

$$x' = Ax, \quad (\text{ЛАОС})$$

заметим, во-первых, что в качестве начального момента  $t_0$ , фигурирующего в определениях устойчивости, для (ЛАОС) всегда можно брать 0, поскольку решения автономных систем инвариантны относительно сдвигов вдоль оси времени. Во-вторых, для облегчения формулировок введем следующие обозначения:  $\bar{\alpha}$  – максимальная вещественная часть собственных значений матрицы  $A$ ,  $\bar{k}$  – максимальная размерность жордановых клеток (максимальная степень элементарных делителей)  $A$ , отвечающих собственным значениям с вещественной частью  $\bar{\alpha}$ .

**Утверждение (об оценке  $\|e^{At}\|$ ).**

$$(a) \exists(m > 0, M > 0) \forall(t \geq 0) \left[ me^{\bar{\alpha}t} t^{\bar{k}-1} \leq \|e^{At}\| \leq Me^{\bar{\alpha}t} (t+1)^{\bar{k}-1} \right],$$

$$(b) \exists(H : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)) \forall(\varepsilon > 0, t \geq 0) \left[ \|e^{At}\| \leq H(\varepsilon) e^{(\bar{\alpha}+\varepsilon)t} \right].$$

**Доказательство.** (a) Из равенства

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

(см. п. 3.3.5) вытекает существование таких  $m_1 > 0$ ,  $M_1 > 0$ , что

$$m_1 \|e^{Jt}\| \leq \|e^{At}\| \leq M_1 \|e^{Jt}\|.$$

Действительно,  $\|e^{At}\| = \|Pe^{Jt}P^{-1}\| = \max_{i,j} \left\{ \left( Pe^{Jt}P^{-1} \right)_{ij} \right\} \leq \|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot n^2 \|e^{Jt}\| = M_1 \|e^{Jt}\|$ ,

здесь  $M_1 = n^2 \cdot \|P\| \cdot \|P^{-1}\|$ . Поскольку  $P^{-1}e^{At}P = e^{Jt}$ , то  $M_1 \|e^{At}\| \geq \|e^{Jt}\|$  или

$$m_1 \|e^{Jt}\| \leq \|e^{At}\|, \text{ где } m_1 = \frac{1}{M_1}.$$

Полученные неравенства по определению рассматриваемой нами нормы матрицы запишем в виде

$$m_1 \max_{i,j} \left| \left( e^{Jt} \right)_{ij} \right| \leq \|e^{At}\| \leq M_1 \max_{i,j} \left| \left( e^{Jt} \right)_{ij} \right|.$$

Принимая во внимание описанный в 3.3.4 вид экспоненты жордановой клетки

$$e^{(\lambda I + I^{(1)})t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{I^{(k)} t^k}{k!}$$

и равенство  $|e^{\lambda t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda t} |\cos \operatorname{Im} \lambda t + i \sin \operatorname{Im} \lambda t| = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \sqrt{\cos^2 \operatorname{Im} \lambda t + \sin^2 \operatorname{Im} \lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t}$ ,  
получим для  $t \geq 0$ :

$$\frac{1}{(\bar{k}-1)!} e^{\bar{\alpha} t} t^{\bar{k}-1} \leq \max_{i,j} \left| (e^{Jt})_{ij} \right|.$$

Отсюда вытекает первое из неравенств в (а) с  $m = \frac{m_1}{(\bar{k}-1)!}$ .

Далее, если

$$(e^{Jt})_{ij} = e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!},$$

то дробь

$$\frac{\left| (e^{Jt})_{ij} \right|}{e^{\bar{\alpha} t} (t+1)^{\bar{k}-1}} = \frac{1}{(k-1)!} e^{(\operatorname{Re} \lambda - \bar{\alpha})t} \frac{t^{k-1}}{(t+1)^{\bar{k}-1}}$$

ограничена на  $[0, +\infty)$  некоторой константой  $M_2 > 0$ . При  $\operatorname{Re} \lambda < \bar{\alpha}$  это следует из того, что она непрерывна и стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , а при  $\operatorname{Re} \lambda = \bar{\alpha}$  — из неравенства  $k \leq \bar{k}$ . Итак, при  $t \geq 0$

$$\|e^{At}\| \leq M_1 \max_{i,j} \left| (e^{Jt})_{ij} \right| \leq M_1 M_2 e^{\bar{\alpha} t} (t+1)^{\bar{k}-1} = M e^{\bar{\alpha} t} (t+1)^{\bar{k}-1}.$$

Это завершает доказательство верхней оценки в (а).

(б) Наконец, заметим, что при  $\varepsilon > 0$

$$e^{\bar{\alpha} t} (t+1)^{\bar{k}-1} = e^{(\bar{\alpha} + \varepsilon)t} \left[ e^{-\varepsilon t} (t+1)^{\bar{k}-1} \right] \leq M_3(\varepsilon) e^{(\bar{\alpha} + \varepsilon)t},$$

так как выражение в квадратных скобках непрерывно и стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому  $\|e^{At}\| \leq M e^{\bar{\alpha} t} (t+1)^{\bar{k}-1} \leq M \cdot M_3(\varepsilon) e^{(\bar{\alpha} + \varepsilon)t} \leq H(\varepsilon) e^{(\bar{\alpha} + \varepsilon)t}$  и

(б) доказано.

**4.2.4. Критерии устойчивости (ЛСПК).** Утверждается, что (в обозначениях предыдущего пункта):

(а) если  $\bar{\alpha} < 0$ , то (ЛСПК) экспоненциально устойчива в целом;

(б) если  $\bar{\alpha} = 0$  и  $\bar{k} = 1$ , то (ЛСПК) устойчива, но не асимптотически;

(в) если ( $\bar{\alpha} = 0$  и  $\bar{k} > 1$ ) или  $\bar{\alpha} > 0$ , то (ЛСПК) неустойчива.

**Доказательство.**

(а) Зафиксируем какое-нибудь  $\bar{\varepsilon} \in (0, -\bar{\alpha})$  и воспользуемся утверждением

(б) предыдущей теоремы:

$$\|\tilde{g}^t y_0\| = \|e^{At} y_0\| \leq n \cdot \|e^{At}\| \cdot \|y_0\| \leq n \cdot H(\bar{\varepsilon}) e^{(\bar{\alpha} + \bar{\varepsilon})t} \|y_0\|.$$

Положив  $M = n \cdot H(\bar{\varepsilon})$ ,  $\gamma = -(\bar{\alpha} + \bar{\varepsilon}) (> 0)$ , получаем:

$$\|\tilde{g}^t y_0\| \leq M e^{-\gamma t} \|y_0\|,$$

т.е. нулевое решение (ЛАОС) экспоненциально устойчиво в целом.

(б) Неравенства из утверждения (а) предыдущей теоремы в данном случае имеют вид:

$$m = m e^{\bar{\alpha} t} t^{\bar{k}-1} \leq \|e^{At}\| \leq M e^{\bar{\alpha} t} (t+1)^{\bar{k}-1} = M$$

Правое неравенство означает ограниченность  $e^{At} = \Phi_0(t)$  и, следовательно, устойчивость (ЛСПК) на любом промежутке  $[t_0, +\infty)$ , на котором непрерывна функция  $b(t)$  – см. признаки устойчивости (ЛС). Из левого неравенства вытекает, что хотя бы один из столбцов матрицы  $e^{At}$  (например,  $\varphi_k(t)$ ) не стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  (одна из эквивалентных норм в пространстве матриц – максимум норм столбцов). Поскольку столбцы фундаментальной матрицы являются решениями (ЛАОС), мы можем построить решение  $\delta \cdot \varphi_k(t)$  со сколь угодно малым начальным значением, не стремящееся к нулю. Следовательно, устойчивость не является асимптотической.

(в) Из левого неравенства в утверждении (а) предыдущей теоремы в данном случае следует, что  $\|e^{At}\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Это означает, что хотя бы для одного  $k$  норма  $\varphi_k$  стремится к бесконечности. Но тогда решение  $\delta \cdot \varphi_k(t)$  (ЛАОС) не может быть ограниченным ни при каком положительном  $\delta$ . Следовательно, нулевое решение (ЛАОС) неустойчиво.

#### 4.2.5. Критерий Гурвица (Рауса – Гурвица).

По теореме 3.4.6 о фундаментальной системе решений (ЛАОУ  $n$ ) её можно составить из функций  $\varphi_{kl}(t) = e^{\lambda_k t} t^{l-1}$  ( $k = 1, \dots, m; l = 1, \dots, r_k$ ), где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  – все различные корни соответствующего данному (ЛАОУ  $n$ ) характеристического уравнения и  $r_1, r_2, \dots, r_m$  – кратности этих корней. Поэтому критерий устойчивости предыдущего пункта справедлив для (ЛАОУ  $n$ ) в интерпретации  $\bar{\alpha}$  – наибольшая вещественная часть корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и  $\bar{k}$  – наибольшая кратность из тех  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , вещественная часть которых совпадает с  $\bar{\alpha}$ .

**Задача.** Докажите это.

В общем случае отыскание корней многочлена, степень которого больше двух, является трудно выполнимой задачей. Следующие критерии позволяют определять знак  $\bar{\alpha}$ , не находя корней характеристического многочлена.

**Утверждение.** Для того, чтоб многочлен

$$h(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

с вещественными коэффициентами и с

$$a_0 > 0, a_n \neq 0 \quad (*)$$

имел отрицательные вещественные части (т.е.  $\bar{\alpha} < 0$ ) у всех своих корней, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры следующей матрицы Гурвица:

$$\Gamma = (\Gamma_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \Gamma_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & \text{если } 0 \leq 2i-j \leq n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство критерия Гурвица, а также формулируемого ниже критерия Михайлова, можно найти, например, в книге Б.П. Демидовича «Лекции по математической теории устойчивости».

**Примеры.** Рассмотрим уравнение маятника с трением, пропорциональным угловой скорости:

$$\ddot{y} + r\dot{y} + \omega^2 \sin y = 0.$$

Произведем *линеаризацию* этого уравнения вблизи нижнего положения равновесия, т.е. приближенно заменим функцию  $\sin y$  на эквивалентную величину  $y$  (и сменим обозначение неизвестной функции на  $\psi$ ):

$$\ddot{\psi} + r\dot{\psi} + \omega^2 \psi = 0.$$

Для полученного линейного уравнения вопрос об устойчивости можно решить с помощью теоремы Гурвица. Матрица Гурвица для характеристического полинома  $h(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + \omega^2$  (который является и характеристическим многочленом соответствующей нормальной системы) и ее главные диагональные миноры в этом случае имеют вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \omega^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = r, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} r & \omega^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

При  $r > 0$  главные миноры положительны, так что по теореме Гурвица и утверждению (а) теоремы 4.2.4 линеаризованное уравнение экспоненциально устойчиво в целом. Оказывается, что это уже гарантирует и экспоненциальную устойчивость нулевого решения исходного нелинейного уравнения маятника – соответствующая теорема Ляпунова будет доказана в следующем параграфе.

Для анализа на устойчивость верхнего положения равновесия маятника  $y \equiv \pi$  сначала введем новую неизвестную  $z = y - \pi$  (отклонение от положения равновесия) и выпишем приведенное уравнение:

$$\ddot{z} + rz + \omega^2 \sin(z + \pi) = 0, \quad \text{т.е. } \ddot{z} + rz - \omega^2 \sin z = 0.$$

Теперь, как и в предыдущем случае, произведем линеаризацию вблизи стационарного решения  $z \equiv 0$ :

$$\ddot{\psi} + r\dot{\psi} - \omega^2 \psi = 0.$$

Для полученного уравнения матрица Гурвица и главные диагональные миноры имеют вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -r & \omega^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = -r, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -r & \omega^2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = r.$$

При формировании матрицы Гурвица пришлось изменить знаки всех коэффициентов, чтобы было выполнено условие положительности коэффициента  $a_0$ . Поскольку один из главных миноров оказался отрицательным, можно сделать вывод, что верхнее положение равновесия не является асимптотически устойчивым.

Разобранные примеры носят чисто иллюстративный характер, поскольку корни характеристических уравнений в этих случаях могут быть найдены непосредственно и необходимости в применении критерия Рауса–Гурвица нет. В частности, один из корней характеристического уравнения во втором случае

$$\lambda = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \omega^2}$$

положителен, так что уравнение не только не является асимптотически устойчивым, но даже не является просто устойчивым (см. 4.2.4).

Отметим еще полезное *необходимое*, но не достаточное условие *гурвицевости* (т. е. отрицательности вещественных частей всех корней) многочлена.

**Утверждение.** *Для того, чтобы у многочлена, удовлетворяющего условиям (\*) все корни имели отрицательные вещественные части необходима положительность коэффициентов  $a_k$ .*

**Задача.** Докажите это утверждение.

Для второго из рассмотренных уравнений, умноженного на  $-1$ , это условие не выполнено, поэтому матрицу Гурвица можно было не составлять. Для многочлена второй степени, удовлетворяющего требованиям (\*), сформулированное условие не только необходимо, но и достаточно.

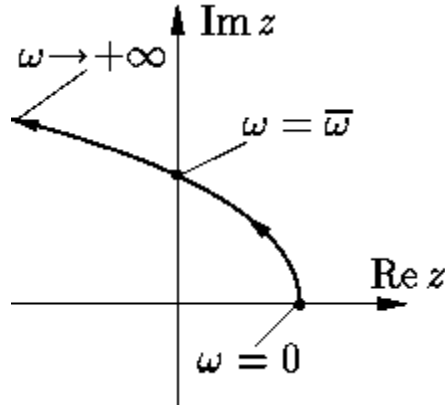
**Задача.** Докажите это.

#### 4.2.6. Критерий Михайлова.

Для описанного выше многочлена  $h(\lambda)$  построим годограф Михайлова, т.е. ориентированную кривую, описываемую в комплексной плоскости точкой  $z = h(i\omega)$ , когда вещественное число  $\omega$  изменяется от 0 до  $+\infty$ . Допустим, что годограф Михайлова не проходит через начало координат, т.е. многочлен  $h$  не имеет чисто мнимых корней.

**Утверждение.** *Для гурвицевости многочлена  $h$  необходимо и достаточно, чтобы его годограф Михайлова делал поворот вокруг начала координат против часовой стрелки на угол  $\frac{n\pi}{2}$  где  $n$  – степень полинома.*

Пример. Построим годограф Михайлова для первого многочлена из рассмотренных в предыдущем пункте  $h(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + \bar{\omega}^2$  (здесь мы немного изменили обозначение):  $h(i\omega) = -\omega^2 + ri\omega + \bar{\omega}^2 = (\bar{\omega}^2 - \omega^2) + r\omega i$ .



Эта кривая изображена на рисунке. Угол  $\varphi = \arg h(i\omega)$  при  $\omega \rightarrow +\infty$  стремится к  $\pi$ , так как  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r\omega}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} \rightarrow 0$ . Итак, годограф делает поворот вокруг начала координат против часовой стрелки на угол  $\frac{2\pi}{2}$ , т. е. многочлен гурвицев. Для второго многочлена из предыдущего пункта угол поворота годографа Михайлова будет равен 0 (проверьте).

**Утверждение (эквивалентная формулировка критерия Михайлова).** Для гурвицевости многочлена  $h$  необходимо и достаточно, чтобы  $a_0 a_1 > 0$  и корни многочленов

$$p(\xi) = a_0 - a_2 \xi + a_4 \xi^2 - \dots,$$

$$q(\eta) = a_1 - a_3 \eta + a_5 \eta^2 - \dots$$

были все действительными положительными, различными и чередующимися в следующем порядке  $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots$

### 4.3. Устойчивость особых точек нелинейных систем

Для нелинейной системы вопрос об устойчивости решения можно при некоторых условиях решить с помощью анализа соответствующей линеаризованной системы – это утверждают приводимые в настоящем параграфе теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. В более трудных случаях привлекаются другие методы, в частности, метод функций Ляпунова, который мы иллюстрируем на примере маятника без трения.

### 4.3.1. Задача об устойчивости положения равновесия автономной системы.

Рассматривается автономная система

$$x' = f(x) \quad (\text{НАС})$$

где  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  – непрерывная функция.

**Определение.** *Положением равновесия, или особой точкой* этой системы называется решение–константа  $\varphi(t) \equiv x^*$ .

Нетрудно видеть, что  $x^*$  является положением равновесия тогда и только тогда, когда  $f(x^*) = 0$ .

Итак, пусть  $x^*$  положение равновесия системы (НАС) и отображение  $f$  имеет в точке  $x^*$  производную  $f'(x^*) = A$ , т. е.

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial (f(x))_i}{\partial x_j} \right|_{x=x^*} = \left( \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{(f(x) - f(x^*))_i}{(x - x^*)_j} \right).$$

Тогда  $(f(x) - f(x^*))_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x - x^*)_j + (r(x - x^*))_i$  или

$$f(x) - f(x^*) = A(x - x^*) + r(x - x^*),$$

где

$$\frac{r(x - x^*)}{\|x - x^*\|} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x^*. \quad (*)$$

Рассмотрим приведенную систему

$$y' = Ay + r(y) \quad (\text{ПС})$$

и линеаризованную систему

$$y' = Ay \quad (\text{ЛАОС})$$

Как видно, они отличаются друг от друга "малым" слагаемым  $r(y)$  в правой части. Поэтому есть основание ожидать, что об устойчивости нулевого решения приведенной системы можно судить по устойчивости линейной автономной системы.

**4.3.2. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.** *Если все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия  $x^*$  (НАС) экспоненциально устойчиво.*

**Доказательство.** Мы будем доказывать экспоненциальную устойчивость нулевого решения приведенной системы, что эквивалентно утверждению теоремы. Требуется найти такие положительные  $\Delta_1$ ,  $M$  и  $\gamma$ , чтобы из неравенств

$$\|y_0\| < \Delta_1, \quad t \geq 0$$

вытекало неравенство

$$\|g^t y_0\| \leq M e^{-\gamma t} \|y_0\|.$$

Для функции  $\varphi(t) := g^t y_0$  выполнено тождество:

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + r(\varphi(t)).$$

Введя временное обозначение  $b(t) := r(\varphi(t))$ , получим, что  $\varphi$  удовлетворяет линейной системе с постоянными коэффициентами:

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + b(t).$$

Воспользовавшись известной формулой для оператора сдвига, получаем:

$$\varphi(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s) ds.$$

Оценим норму:

$$\|\varphi(t)\| \leq K \left( \|e^{At}\| \|y_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|b(s)\| ds \right) \leq$$

\используется утверждение (б) из 4.2.3\

$$\leq K \left( M e^{-\gamma_1 t} \|y_0\| + \int_0^t M e^{-\gamma_1(t-s)} \|b(s)\| ds \right) =$$

$$= M_1 e^{-\gamma_1 t} \left( \|y_0\| + \int_0^t e^{\gamma_1 s} \|b(s)\| ds \right) \quad (\bar{\alpha} \leq -\gamma_1 < 0, M_1 = KM) \quad (+)$$

Далее, зафиксируем  $\varepsilon \in \left(0, \frac{\gamma_1}{M_1}\right)$  и, применив соотношение (\*), найдем такое

$\Delta > 0$ , что

$$\|b(s)\| = \|r(\varphi(s))\| < \varepsilon \|\varphi(s)\| \quad \text{при} \quad \|\varphi(s)\| < \Delta.$$

Тогда из оценки (+) получаем неравенство:

$$e^{\gamma_1 t} \|\varphi(t)\| < M_1 \|y_0\| + \int_0^t M_1 \varepsilon e^{\gamma_1 s} \|\varphi(s)\| ds \quad (\text{если} \quad \|\varphi(s)\| < \Delta \quad \text{при} \quad s \in [0, t]).$$

Это означает, что для функции  $\psi(t) = e^{\gamma_1 t} \|\varphi(t)\|$  выполнено условие леммы Гроуолла – Беллмана (см. ниже):

$$\psi(t) \leq M_1 \|y_0\| + \int_0^t M_1 \varepsilon \psi(s) ds.$$

Применив эту лемму и положив  $-\gamma := -\gamma_1 + M_1 \varepsilon$  ( $< 0$ ), получаем:

$$\psi(t) = e^{\gamma_1 t} \|\varphi(t)\| \leq M_1 e^{M_1 \varepsilon t} \|y_0\|, \quad \text{т.е.} \quad \|\varphi(t)\| \leq M_1 e^{-\gamma t} \|y_0\|.$$



Именно такое неравенство требовалось доказать, но доказано оно пока только на таком промежутке  $[0, t_1)$ , на котором  $\|\varphi(t)\| < \Delta$ . Если теперь потребовать, чтобы начальное значение удовлетворяло неравенству

$$\|y_0\| < \Delta_1 = \frac{\Delta}{M_1 + 1},$$

то неравенство  $\|\varphi(t)\| < \Delta$  будет выполняться для всех неотрицательных  $t$ . Действительно, если бы для некоторого  $t_1$  это неравенство впервые обратилось в равенство, то было бы:

$$\Delta = \|\varphi(t_1)\| \leq M_1 e^{-\gamma t_1} \|y_0\| < M_1 \frac{\Delta}{M_1 + 1} < \Delta.$$

Итак, требуемое неравенство выполнено для всех неотрицательных  $t$ ; теорема полностью доказана.

**Пример.** Система уравнений маятника

$$\begin{cases} \varphi' = x \\ x' = -\omega^2 \sin \varphi - rx \end{cases}$$

( $r > 0$ ) имеет особые точки

$$y_n = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_e = \begin{pmatrix} \varphi_e \\ x_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

соответствующие нижнему и верхнему положениям равновесия. Для первой из них выполнены условия доказанной теоремы (как выяснено в предыдущем параграфе). Поэтому  $y_n$  экспоненциально устойчивая особая точка данной системы.

**4.3.3. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.** Если среди собственных значений матрицы  $A$  есть хотя бы одно с положительной вещественной частью, то положение равновесия системы неустойчиво.

**Пример.** Верхнее положение равновесия  $y_e$  рассмотренной системы неустойчиво, так как один из корней характеристического уравнения положителен (см. 4.2.5).

**4.3.4. Устойчивость нижнего положения равновесия маятника без трения.**

Если  $r = 0$ , то для  $y_n$  не выполнены условия ни одной из двух предыдущих теорем, поскольку оба корня чисто мнимые:  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . В подобных случаях для исследования на устойчивость бывает удобна следующая теорема.

**Теорема (признак устойчивости).** Пусть  $\varphi^*$  – точка строгого локального минимума гладкой функции  $U: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Тогда она является устойчивым положением равновесия уравнения второго порядка

$$\varphi'' = -\frac{dU(\varphi)}{d\varphi}, \quad (*)$$

т. е.  $x^* = \begin{pmatrix} \varphi^* \\ 0 \end{pmatrix}$  есть устойчивая особая точка системы  $\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\frac{dU(x_1)}{dx_1}. \end{cases}$

**Доказательство.** Во-первых, точка  $x^*$  действительно является особой, так как в ней правая часть рассматриваемой системы равна нулю (правая часть второго уравнения – в силу необходимого признака точки экстремума).

Далее, рассмотрим функцию

$$V(x) = U(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

Для нее  $x^*$  является, очевидно, точкой строгого локального минимума, т. е. найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что

$$0 < \|x - x^*\| < \varepsilon_0 \Rightarrow V(x) > V(x^*).$$

Заметим, что функция  $V$  является *интегралом* системы (\*) в том смысле, что  $V[x(t)] \equiv C$  для любого ее решения  $x(t)$ . Действительно,

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] = \frac{dU(x_1)}{dx_1}x_1' + x_2x_2' = \frac{dU(x_1)}{dx_1}x_2 - x_2\frac{dU(x_1)}{dx_1} \equiv 0.$$

Докажем теперь устойчивость  $x^*$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon\}$ . Положим

$$M := \min\{V(x) : \|x - x^*\| = \varepsilon_1\}.$$

(непрерывная функция  $V$  на компакте достигает минимального значения, причем  $M > V(x^*)$ ). Выберем  $\delta$  так, чтобы из неравенства  $\|x - x^*\| < \delta$  вытекало неравенство  $V(x) < M$ ; это можно сделать ввиду непрерывности  $V$ . Очевидно,  $\delta < \varepsilon_1$ .

Пусть теперь  $\|x_0 - x^*\| < \delta$ . Тогда

$$V[g^t x_0] = V(x_0) < M.$$

Поэтому при любом  $t \geq 0$  будет

$$\|g^t x_0 - x^*\| < \varepsilon_1,$$

так как иначе при некотором  $t$  было бы  $\|g^t x_0 - x^*\| = \varepsilon_1$  и, следовательно,

$$V(g^t x_0) \geq M.$$

Теорема доказана.

Для **примера** с маятником без трения ( $r=0$ ) уравнение  $\ddot{y} + \omega^2 \sin y = 0$  можно записать в виде

$$\varphi'' = -\frac{d(-\omega^2 \cos \varphi)}{d\varphi},$$

причем функция  $U(\varphi) := -\omega^2 \cos \varphi$  в точке  $\varphi^* = 0$  имеет строгий локальный минимум. Следовательно, *это положение равновесия устойчиво*.

Заметим, что если бы для функции  $V$  в доказательстве признака устойчивости вместо тождества

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] \equiv 0$$

выполнялось неравенство

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] \leq 0,$$

то все доказательство оставалось бы верным. Такие функции называют *функциями Ляпунова*, а соответствующий метод исследования на устойчивость – *методом функций Ляпунова*, или *вторым методом Ляпунова*.

## 4.4. Зависимость решений от начальных значений

**4.4.1. Лемма Гронуолла – Беллмана.** Пусть на некотором отрезке  $[t_0, t_1]$  непрерывная функция  $y(t) \geq 0$  удовлетворяет неравенству

$$y(t) \leq y_0 + \int_{t_0}^t M(s)y(s)ds,$$

где  $y_0 \geq 0$  а  $M : [t_0, t_1] \rightarrow [0, +\infty)$  – непрерывная функция. Тогда

$$y(t) \leq y_0 e^{\int_{t_0}^t M(s)ds} \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Эта лемма часто применяется при исследовании дифференциальных уравнений, в частности, при изучении вопросов о зависимости решений от начальных значений. Выше мы уже ее использовали в доказательстве теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

**Доказательство.** Введем обозначение

$$z(t) := y_0 + \int_{t_0}^t M(s)y(s)ds;$$

тогда, очевидно,  $y(t) \leq z(t)$ . Поэтому достаточно доказать, что

$$z(t) \leq y_0 e^{\int_{t_0}^t M(s) ds}.$$

Очевидно,

$$z'(t) = M(t)y(t) \leq M(t)z(t) \text{ и } z(t_0) = y_0.$$

Поэтому для неотрицательной непрерывной функций  $b(t) = M(t)z(t) - z'(t)$  имеем:

$$z'(t) = M(t)z(t) - b(t).$$

Воспользовавшись формулой для оператора сдвига по траекториям линейного неоднородного уравнения, получаем:

$$z(t) = e^{\int_{t_0}^t M(s) ds} \left( z(t_0) - \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} M(s) ds} b(\tau) d\tau \right) \leq y_0 e^{\int_{t_0}^t M(s) ds}.$$

Лемма доказана.

#### 4.4.2. Теорема о липшицевости оператора сдвига.

Пусть для нормальной системы

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{НС}$$

выполнены условия теоремы Коши – Пикара в полосе  $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^n$  (см. 2.1.8).

Тогда оператор сдвига по траекториям (НС) удовлетворяет условию Липшица

$$\|g_{t_0}^t x_0 - g_{t_0}^t y_0\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L(t-t_0)} \leq \|x_0 - y_0\| e^{L(t_1-t_0)}$$

и, как следствие, непрерывен.

**Доказательство.** Функции  $\varphi(t) := g_{t_0}^t x_0$ ,  $\psi(t) := g_{t_0}^t y_0$  удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f[s, \varphi(s)] ds, \\ \psi(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f[s, \psi(s)] ds. \end{aligned}$$

Поэтому для нормы разности этих функций получаем:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t \|f[s, \varphi(s)] - f[s, \psi(s)]\| ds \leq \|x_0 - y_0\| + \int_{t_0}^t L \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds.$$

Применение леммы Гронуолла – Беллмана завершает доказательство:

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| e^{L(t-t_0)}.$$

### 4.5. Особые точки ЛАОС.

Мы ограничимся здесь рассмотрением ЛАОС второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Очевидно, что особой точкой (стационарным решением) этой системы является точка  $(0, 0)$ , но не обязательно она единственна. Нас будет интересовать вопрос о виде *фазовых портретов (траекторий)* – графиков решений системы  $(x(t), y(t))$  на *фазовой плоскости XOY* вблизи особой точки.

Представим матрицу системы через её жорданову форму  $J$  с помощью невырожденной матрицы  $P$

$$A = PJP^{-1}$$

и заменой переменных  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$  перейдём к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Умножением слева на  $P^{-1}$  обеих частей равенства (\*), представленного с учётом замен в виде  $P \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{pmatrix} = PJP^{-1}P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ , получается (\*\*).

Установим связь между характером собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  и видом фазовых портретов решений (\*\*). Очевидно, фазовые портреты системы (\*) будут выглядеть так же, как у системы (\*\*), только подвергнутся деформации, связанной с умножением на невырожденную матрицу  $P$ .

#### 4.5.1. $\lambda_1, \lambda_2$ – вещественные

Рассмотрим различные соотношения между  $\lambda_1, \lambda_2$ .

**4.5.1.1.**  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  и  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 

В этом случае матрица  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  и из системы (\*\*)  $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \lambda_1 \bar{x} \\ \dot{\bar{y}} = \lambda_2 \bar{y} \end{cases}$  следует

уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{\lambda_2 d\bar{x}}{\lambda_1 \bar{x}},$$

решениями которого являются кривые семейства

$$\bar{y} = C \cdot \bar{x}^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (+)$$

Кроме них прямые  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$  – собственные подпространства матрицы  $J$ , отвечающие  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1$  соответственно, тоже являются фазовыми траекториями системы (\*\*). Для выяснения вида траекторий (+) на плоскости требуется уточнение значений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

а)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  имеют один знак. В этом случае показатель степени  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  положитель-

лен и траектории имеют вид параболических ветвей, касающихся прямой, отвечающей меньшему по абсолютной величине собственному значению (при  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  показатель  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$  – касание прямой  $\bar{y} = 0$ , при  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  показатель

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$  – касание прямой  $\bar{x} = 0$ ). Особую точку  $(0, 0)$  в этом случае называют уз-

лом.

б)  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  имеют разные знаки. В этом случае степень  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ , и траектории

(+) имеют вид гипербол с асимптотами  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$ , а точку  $(0, 0)$  называют седлом.

Направление движения точки вдоль фазовой траектории определяется знаками  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . По критерию устойчивости ЛСПК (4.2.4) в случае а) при положительных  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  положение равновесия  $(0, 0)$  неустойчиво поэтому движение по траек-

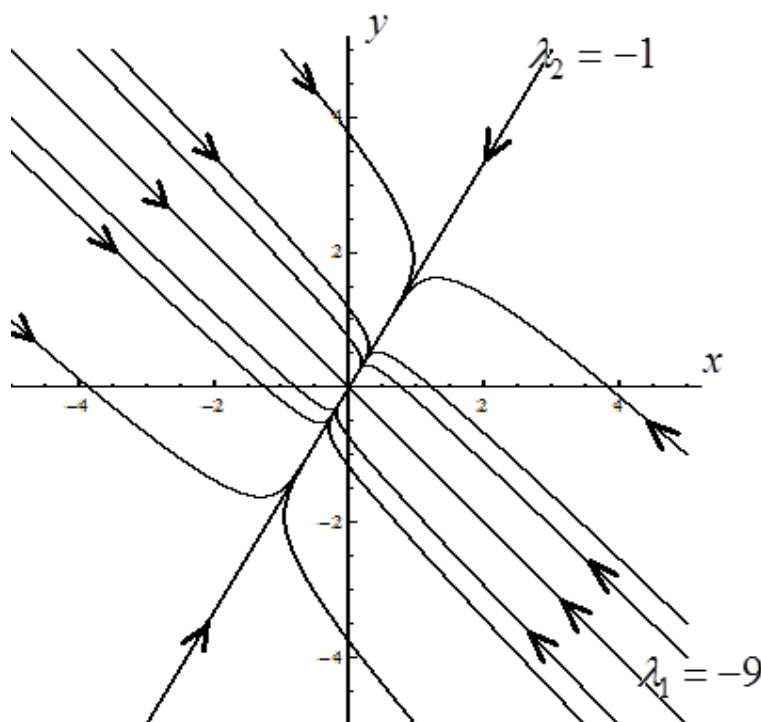
ториям направлено от точки  $(0, 0)$  – *неустойчивого узла*, а при отрицательных значениях  $\lambda_1, \lambda_2$ , положение равновесия устойчиво, и движение по траекториям направлено к точке  $(0, 0)$  – *устойчивому узлу*. В случае б)  $(0, 0)$  – неустойчивое положение равновесия, движение по асимптоте отвечающей отрицательному собственному значению – к  $(0, 0)$ , а по второй асимптоте – от  $(0, 0)$ . Движение по гиперболам согласовано с направлением движения по асимптотам.

**Примеры.** 1) Для системы 
$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 3y \\ \dot{y} = 5x - 4y \end{cases}$$
 собственные значения

$\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -1$ , поэтому положение равновесия  $(0, 0)$  – устойчивый узел. Прямые

$y = -x$  и  $y = \frac{5}{3}x$  – соответствующие собственные подпространства, фазовые траектории касаются второй из этих прямых.

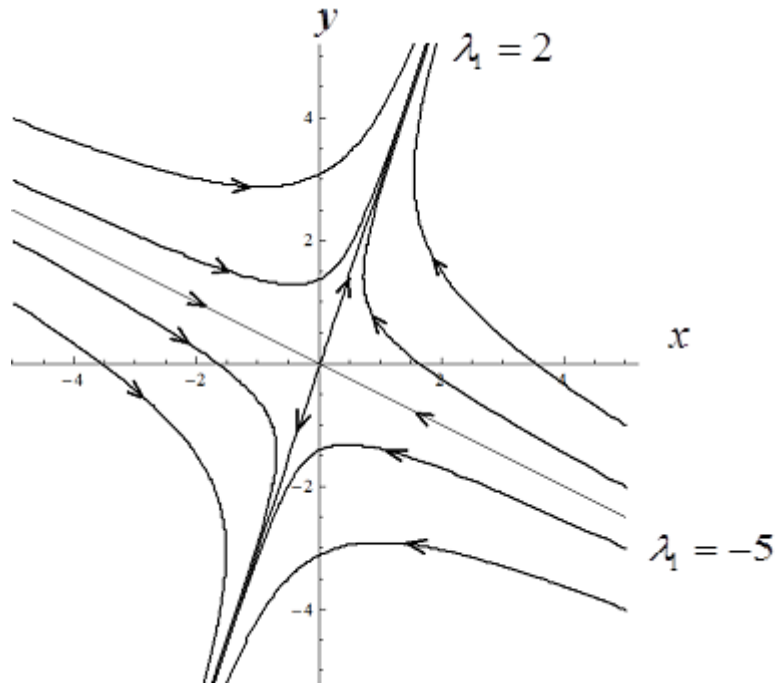
ектории касаются второй из этих прямых.



2) Собственные значения  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2$  системы 
$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$
 имеют разные

знаки, поэтому  $(0, 0)$  – седло. Собственные подпространства заданы уравнениями

$y = -0.5x, y = 3x$ .



#### 4.5.1.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

Вид жордановой формы для кратного собственного значения  $\lambda$  может быть двух видов:

а)  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , если собственное подпространство двумерно, а это возмож-

но только в случае  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Уравнения траекторий в этом случае  $y = C \cdot x$  и

$x = 0$ , а  $(0, 0)$  называют *диритическим узлом*. Направление по полупрямым соответствует знаку  $\lambda$  (при  $\lambda < 0$  – к  $(0, 0)$  – *устойчивому диритическому узлу*, при  $\lambda > 0$  – от  $(0, 0)$  – *неустойчивого диритического узла*).

б)  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  при одномерном собственном подпространстве  $\bar{y} = 0$ . В этом

случае из системы (\*\*)  $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \lambda \bar{x} + \bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = \lambda \bar{y} \end{cases}$  следует уравнение фазовых траекторий

$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{1}{\lambda}$  (линейное относительно переменной  $\bar{x}$ ) с общим решением

$\bar{x} = \frac{\bar{y} \ln(C\bar{y})}{\lambda}$ . Вид фазовых траекторий похож на части парабол, одной из ветвей

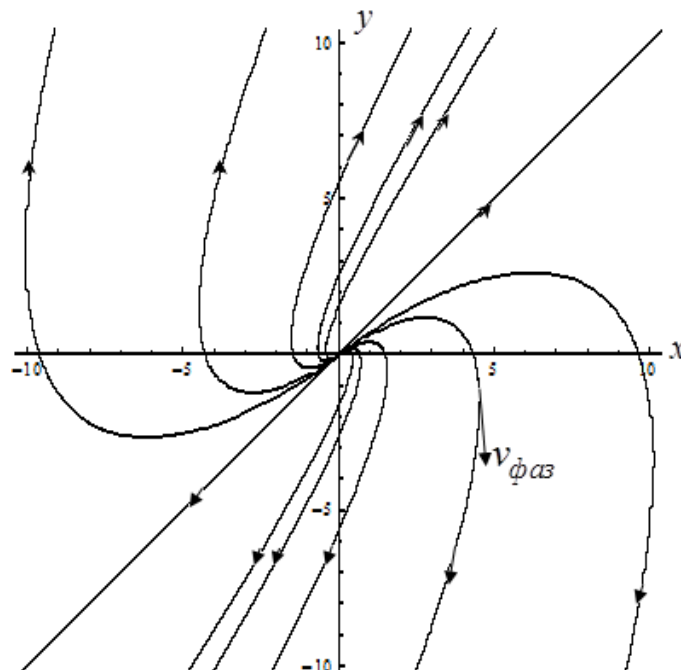


касающихся прямой  $\bar{y} = 0$  в начале координат. Точку  $(0, 0)$  называют при этом *вырожденным узлом*. Направление движения по траекториям зависит, очевидным образом, от знака  $\lambda$ . Для уточнения положения траекторий следует построить вектор скорости в любой точке, не лежащей в собственном подпространстве.

**Пример.** У матрицы системы  $\begin{cases} \dot{x} = 0.1x + 0.3y \\ \dot{y} = -0.3x + 0.7y \end{cases}$  имеется одно собственное

значение  $\lambda = 0.4$  с собственным подпространством  $y = x$ . Точка  $(0, 0)$  – неустойчивый вырожденный узел. Для уточнения вида параболовидных траекторий вычислим фазовую скорость, например, в точке  $(4.5, -1)$ .

$v_{\text{фаз}}(4.5, -1) = (0.15, -2.05)$ . Изобразим траекторию, учитывая, что она, проходя через  $(4.5, -1)$ , касается вычисленного  $v_{\text{фаз}}$  и в его направлении уходит в бесконечность, а в обратную сторону подходит к касанию с собственным подпространством в  $(0, 0)$ . Остальные траектории изображаем по соображениям подобия.



#### 4.5.1.3. Хотя бы одно собственное значение равно нулю

В этом случае  $|A| = 0$ , а значит, строки системы линейно зависимы и уравнение фазовых траекторий имеет вид  $\frac{dy}{dx} = k$ . Фазовые траектории системы – па-

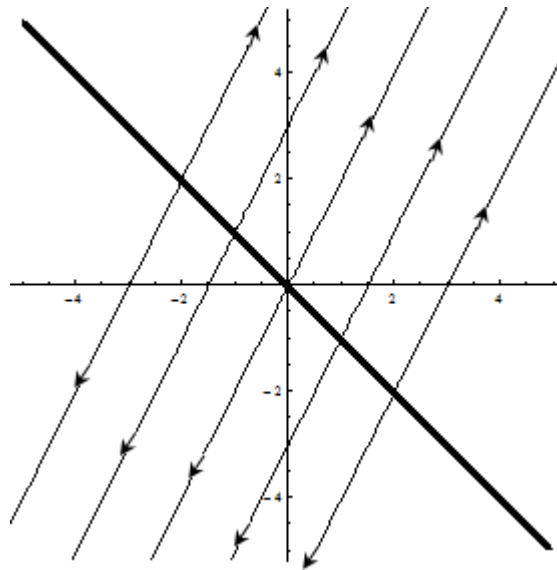
раболы, касаясь оси  $y = 0$  в начале координат. Точку  $(0, 0)$  называют при этом *вырожденным узлом*. Направление движения по траекториям зависит, очевидным образом, от знака  $\lambda$ . Для уточнения положения траекторий следует построить вектор скорости в любой точке, не лежащей в собственном подпространстве.

параллельные друг другу прямые  $y = kx + C$ . Точка  $(0, 0)$  не является единственной особой точкой и не носит специального названия.

а) Одно собственное значение равно нулю. В этом случае прямая  $a_{11}x + a_{12}y = 0$  целиком состоит из особых точек. В зависимости от знака второго, отличного от нуля, собственного значения  $\lambda$  матрицы  $A$  движение точки по траекториям идёт либо к этой прямой ( $\lambda < 0$ ), либо от неё ( $\lambda > 0$ ).

**Пример.** Фазовые траектории системы  $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$  – это семейство прямых

$y = 2x + C$ . Прямая  $y = -x$  целиком состоит из особых точек. Собственное значение  $\lambda = 3 > 0$ , поэтому движение точки по траектории происходит от прямой  $y = -x$



б) Оба собственных значения равны нулю. При этом возможны два случая. В первом собственное пространство двумерно, это возможно только в случае

$J = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Последнее означает, что все точки плоскости являются особыми,

и фазовые траектории отсутствуют. В случае одномерного собственного подпространства

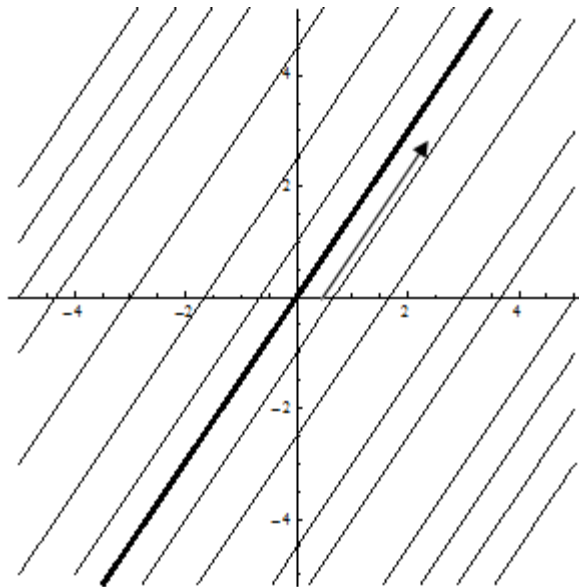
$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , и (\*\*\*)  $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = 0 \end{cases}$  влечёт уравнение траекторий  $\bar{y} = C$ . Одна из

этих траекторий  $\bar{y} = 0$  является собственным подпространством и состоит из осо-

бых точек, движения по ней нет. Направление движения на любой другой выбранной прямой можно определить, вычислив вектор фазовой скорости в одной из её точек. Тогда для всех прямых с той же стороны от собственного подпространства направление скорости будет таким же, что и на выбранной, а по другую сторону от собственного подпространства – противоположным. Скорость движения по каждой прямой равномерна (равна  $|C|$ ) и увеличивается по мере удаления прямой от собственного подпространства.

**Пример.** У матрицы системы  $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 4y \\ \dot{y} = -9x + 6y \end{cases}$  с нулевыми собственными значениями

собственным подпространством является прямая  $y = \frac{2}{3}x$ , все точки которой являются особыми. Вычисленный вектор фазовой скорости  $v_{фаз}(0, 0.5) = (2, 3)$  позволяет утверждать, что равномерное движения по прямым ниже и правее  $y = 1.5x$  направлено вправо вверх, а по другую сторону – влево вниз.



### 4.5.2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряжённые

#### 4.5.2.1. $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ – чисто мнимые

В этом случае матрица  $A$  эквивалентна матрице  $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$  в том смыс-

ле, что обе эти матрицы имеют одну и ту же жорданову форму. Система уравне-

ний, образованная матрицей  $B$  имеет вид  $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \beta \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = -\beta \tilde{x} \end{cases}$  и влечёт фазовое уравнение

$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = -\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$  или  $\tilde{x}d\tilde{x} + \tilde{y}d\tilde{y} = 0$ , интегралом которого являются уравнения окружно-

стей  $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = C$ ,  $C \geq 0$ . Особая точка  $(0, 0)$  называется в этом случае *центром*.

Центр всегда устойчив, но не асимптотически. Для определения направления

движения по фазовым траекториям для исходной системы (\*) вычисляют вектор

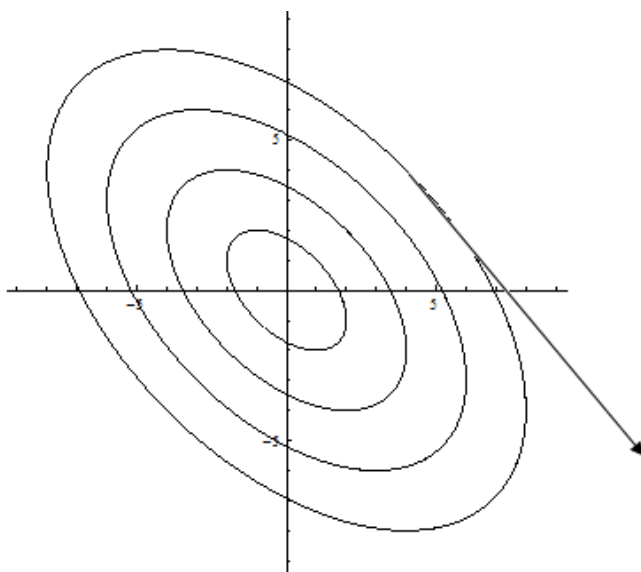
фазовой скорости в любой не нулевой точке. А для уточнения формы сжатия

окружности в эллипс требуется вычисление и построение векторов фазовой ско-

рости в достаточном числе точек в окрестности  $(0, 0)$ .

**Пример.** Матрица системы  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$  имеет мнимые собственные значе-

ния  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{3}i$ , поэтому  $(0, 0)$  – центр.



Вычислив вектор фазовой скорости  $v_{\text{фаз}}(4, 4) = (12, -12)$  определяем направление движения по концентрическим эллипсам.

**4.5.2.2.**  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha \neq 0$

Для этого случая в качестве эквивалентной матрице  $A$  можно взять  $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

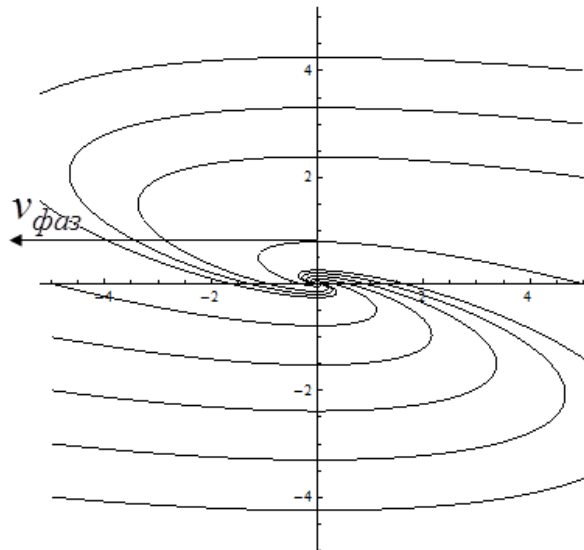
Система уравнений, образованная ей записывается в виде  $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = -\beta \tilde{x} + \alpha \tilde{y} \end{cases}$ . Введём

замену переменных  $\tilde{x} = e^{\alpha t} \hat{x}, \tilde{y} = e^{\alpha t} \hat{y}$ , с помощью которой данная система приобретает вид из предыдущего пункта

$$\begin{cases} \alpha e^{\alpha t} \tilde{x} + e^{\alpha t} \dot{\tilde{x}} = \alpha e^{\alpha t} \hat{x} + \beta e^{\alpha t} \hat{y} \\ \alpha e^{\alpha t} \tilde{y} + e^{\alpha t} \dot{\tilde{y}} = -\beta e^{\alpha t} \hat{x} + \alpha e^{\alpha t} \hat{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \beta \hat{y} \\ \dot{\hat{y}} = -\beta \hat{x} \end{cases}$$

Фазовые траектории последней системы – концентрические окружности, а предыдущей системы – спирали, раскручивающиеся от точки  $(0, 0)$  – *неустойчивого фокуса* при  $\alpha > 0$  и закручивающихся на  $(0, 0)$  – *устойчивый фокус* при  $\alpha < 0$ . Для определения направления закручивания спиралей системы (\*) вычисляют фазовую скорость в произвольной не нулевой точке.

**Пример.**  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}i$  – собственные значения матрицы системы  $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 9y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ , точка  $(0, 0)$  – устойчивый фокус.



Вектор фазовой скорости  $v_{\text{фаз}}(0, 0.75) = (-6.75, 0)$  показывает примерный вид спирали и направление на её закручивание вокруг  $(0, 0)$ .

## 4.6. Материалы к экзамену

### 4.6.1. Вопросы

1. Определение устойчивости по Ляпунову.
2. Определение асимптотической устойчивости и асимптотической устойчивости в целом.
3. Определение экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной устойчивости в целом.
4. Утверждение о приведенной системе и утверждение о (ПС) для (ЛС).
5. Признаки устойчивости (ЛС).
6. Критерий устойчивости ЛСПК.
7. Критерий Гурвица и Михайлова.
8. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
9. Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.
10. Лемма Гронуолла - Беллмана.
11. Теорема о липшицевости оператора сдвига.
12. Классификация особых точек.

### 4.6.2. Задачи

1. Исследуйте на устойчивость решение  $x = \sin t$  дифференциального уравнения, у которого общее решение задается формулой  $x = Ce^{-t} + \sin t$ .
2. Исследуйте на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения, если оператор сдвига для него задается формулой  $g_1^t x_0 = \frac{x_0}{t}$ ,  $t \in [1, +\infty)$ .
3. Исследуйте на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения, если оператор сдвига для него задается формулой  $g_1^t x_0 = x_0 t$ ,  $t \in [1, +\infty)$ .
4. Исследуйте на устойчивость решение  $x = \operatorname{arctg} t$  дифференциального уравнения, общее решение которого задается формулой  $x = \operatorname{arctg} t + C \frac{t+1}{t}$ ,  $t \in [1, +\infty)$ .
5. Докажите, что если одно из решений устойчивой линейной системы ограничено (не ограничено), то все решения этой системы ограничены (не ограничены).
6. Покажите, что если система  $x' = Ax$  асимптотически устойчива, то система  $x' = -Ax$  неустойчива.
7. Докажите, что если система  $x' = Ax$  устойчива, то система  $x' = Ax - x$  асимптотически устойчива.

8. Покажите, что если скалярное уравнение  $x' = a(t)x$  устойчиво и  $a_1(t) \leq a(t)$  при всех  $t$ , то уравнение  $x' = a_1(t)x$  также устойчиво.
9. Докажите, что если на диагонали треугольной матрицы  $A$  стоят различные неположительные числа, то соответствующая (ЛАОС) устойчива.
10. Покажите, что если какое-нибудь ненулевое решение (ЛАОС) ограничено на  $(-\infty, 0]$ , то система не является асимптотически устойчивой.
11. Докажите эквивалентность критериев Михайлова в двух трактовках

## Литература

1. Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н. Очерки по ОДУ. <http://www.bsadovskiy.ru>
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984, 271с.
3. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966, 332 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971, 312с.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980, 232 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : [учебное пособие для физ.-мат. фак. ун-тов] / И.Г. Петровский .— М. : Физматлит, 2009 .— 207 с. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г.Петровский. - М. : Московский университет, 1984. - 295 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф.Филиппов. - М.; Ижевск : 2002, 174 с.
8. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.-540 с.

Составители: Петрова Любовь Петровна,  
Прядко Ирина Николаевна

Редакция авторов