Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

конспекты лекций вопросы и задачи

Дифференциальные уравнения

часть 2

Задача Коши

пособие для студентов специальности 02.03.01

Воронеж
2015

Утверждено научно-методическим советом математического факультета
25 ноября 2015 года
Протокол № 0500-10

Составители: Прядко И.Н., Петрова Л.П.

Пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского госуниверситета

Рекомендуется для студентов 2-го курса
дневного отделения

Оглавление

2. Задача Коши

2.1. Теорема Коши–Пикара

2.1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать векторное уравнение:

$$\dot{x} = f\left(t, x\right) \text{, в котором} \tag{НС}$$

x – неизвестная функция,

$$x\left(t\right) = \begin{pmatrix} x_1\left(t\right) \\ x_2\left(t\right) \\ \ldots \\ x_n\left(t\right) \end{pmatrix}$$ – значение неизвестной функции в момент t,

t – вещественная независимая переменная (“время”),

$$f\left(t, x\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(t, x\right) \\ f_2\left(t, x\right) \\ \ldots \\ f_n\left(t, x\right) \end{pmatrix}$$ – векторная функция.

Наряду с (НС) будем рассматривать начальное условие:

$$x\left(t_0\right) = x_0 \text{ ,} \tag{НУ}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ x_{0_2} \\ \ldots \\ x_{0_n} \end{pmatrix}.$$

В этой главе нас будут интересовать следующие вопросы, относящиеся к задаче Коши.

1) Вопрос о *локальной разрешимости*: имеет ли задача (НС), (НУ) решение на каком–либо промежутке?

2) Вопрос о *глобальной разрешимости*: имеется ли у этой задачи решение, определенное на наперед заданном промежутке (например, на всей оси, на правой полуоси или на заданном отрезке)?

3) Вопрос о *единственности* решения задачи (НС), (НУ) на заданном промежутке.

4) о *приближенном вычислении* решения.

2.1.2. Пример отсутствия локальной разрешимости.

Утверждение. *Задача*

$$x' = \begin{cases} -1 \text{ при } x \neq 0, \\ 1 \text{ при } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

не имеет решения ни на каком промежутке J.

Доказательство. Предположим противное: пусть $x = \varphi(t)$ – решение задачи (1)–(2) на некотором промежутке J. Точка $t = 0 \in J$ *может быть граничной точкой* J, но, по определению, не может быть единственной точкой промежутка. Допустим для определенности, что J содержит некоторую правую полуокрестность нуля. Поскольку $\varphi'(0) = 1 > 0$, можно выбрать эту полуокрестность так, чтобы на ней при $t \neq 0$ было $\varphi(t) > 0$. Из (1) получается, что при таких t $\varphi'(t) = -1$, т. е. функция убывает. Мы получили противоречие: положительная функция, имевшая в нуле нулевое значение, при $t > 0$ строго убывает и в то же время положительная.
Причиной выявленной "неприятности" является разрывность правой части уравнения (1) в точке $x = 0$.

2.1.3. Пример отсутствия глобальной разрешимости.

Рассмотрим следующее уравнение, для которого легко найдём общее решение

$$x' = x^2 + 1 \overset{(\text{т.к. } x^2 + 1 > 0)}{\Leftrightarrow} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x^2 + 1} = dt \overset{(\text{по теореме об УРП})}{\Leftrightarrow},$$

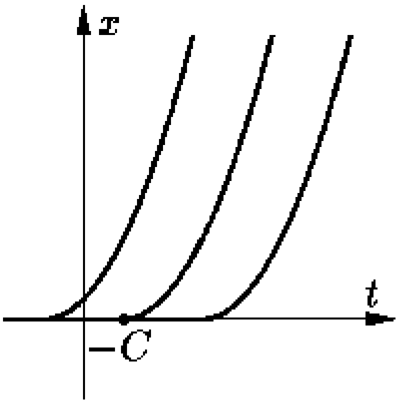
$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} x = t + C, \left(-\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(t + C), \left(-\frac{\pi}{2} < t + C < \frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

Подчеркнем, что из полученного вида решения следует, в частности, что вопрос о разрешимости задачи (3), (2), скажем, на промежутке $J = \mathbb{R}$ имеет отрицательный ответ, так как область определения любого решения не выходит за рамки интервала $\left(-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C\right)$.

Этот эффект связан с тем, что правая часть $x^2 + 1$ уравнения (3) при $x \to \infty$ растет "слишком быстро" по сравнению с x.

2.1.4. Пример отсутствия единственности.



Таким примером может служить уравнение

$$x' = 2\sqrt{x},$$

правая часть которого определена при $x \ge 0$. У задачи Коши, соответствующей начальному условию (2), помимо нулевого имеется бесконечно много решений

$$x = \begin{cases} 0 \text{ при } t < -C, \\ (t+C)^2 \text{ при } t \ge -C. \end{cases}$$

Причина неединственности – в том, что правая часть этого уравнения в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную по x.

2.1.5. Замечание (о нормах в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Для удобства дальнейшего изложения нам необходимо познакомиться с обобщением понятия расстояния в конечномерном пространстве в виде нормы и изучить некоторые её свойства.

Определение. Нормой в линейном пространстве L называют функционал $\|\cdot\|$, определённый на всём пространстве и удовлетворяющий для всех $x, y \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ следующим аксиомам:

1. $\|x\| \ge 0$ для всех $x \in L$ и $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = \theta$, где θ – ноль пространства L;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Примеры норм.

а) в $\mathbb{R}^n$:

1В) $\|x\| = \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$;

2В) $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

б) в $\mathbb{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ – пространстве непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$:

1C) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,\,T]}\left\{\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}\right\}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ – любая норма в $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

в) в пространстве всех квадратных матриц размером $n\times n$, состоящих из действительных чисел:

1M) $$\|A\| = \max_{\underline{j=1,\,n}}\left\{\left\|\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj}\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^n}\right\},$$

2M) $$\|A\| = \max_{\substack{\underline{i=1,\,n} \\ \underline{j=1,\,n}}}\left\{|a_{ij}|\right\},$$

3M) $\|A\| = \sup\limits_{\|b\|\le 1}\|Ab\|_{\mathbb{R}^n}$ – норма матрицы, инициированная нормой вектора.

Задача. Проверить, что нормы, приведённые в примерах, удовлетворяют аксиомам 1–3.

Определение. Последовательность $\{x_k\}\subset L$ называется сходящейся по норме $\|\cdot\|$ к $x\in L$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\| = 0$.

Определение. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ одного и того же линейного пространства называются эквивалентными, если для них существуют две положительные константы $M > m > 0$ и такие, что $m\cdot\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\cdot\|x\|_1$.

Из определения следует одновременная сходимость по эквивалентным нормам в том смысле, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\|_1 = 0 \leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\|_2 = 0$, и свойство ограниченности в эквивалентных нормах сохраняется. Эквивалентность норм обладает кроме того свойством транзитивности.

Следующее простое свойство будет нам полезным в доказательстве утверждения об эквивалентности норм.

Свойство нормы (обратное неравенство треугольника). $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$.

Доказательство. Из аксиомы 3 определения нормы следует $\|x\| = \|x - y + y\| \le \|x - y\| + \|y\|$ или $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$. Аналогично получается $\|y\| - \|x\| \le \|x - y\|$. Откуда окончательно $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$

Утверждение. *В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Доказательство. Учитывая транзитивность эквивалентности норм, достаточно доказать эквивалентность произвольной нормы, например, норме примера 2B. Пусть x произвольный элемент конечномерного линейного пространства $\mathbb{X}$ с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ – разложение x по базису. Покажем, что любая норма $\|x\|$ в $\mathbb{X}$ эквивалентна $\|x\|_{\max} = \max\limits_{i=\overline{1,\,n}} |\xi_i|$.

Во-первых,

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} \left(|\xi_i| \cdot \|e_i\| \right) \le \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{j=\overline{1,\,n}} |\xi_j| \cdot \|e_i\| \right) = \|x\|_{\max} \cdot \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| = M \cdot \|x\|_{\max}.$$

Для доказательства второго неравенства рассмотрим функцию $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\|$, её непрерывность по совокупности переменных в норме $\|\cdot\|_{\max}$ следует из неравенства

$$\left| f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \right| = \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| \right| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i) e_i \right\| \le M \cdot \max_{i=\overline{1,\,n}} |\xi_i - \eta_i|.$$

Для элементов множества $B = \left\{ x : \|x\|_{\max} = 1 \right\}$ по первой аксиоме определения норм $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \|x\| > 0$. На замкнутом ограниченном множестве B непрерывная функция достигает своего минимума. Поэтому существует число m: $m \le f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ для всех таких наборов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, для которых $\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in B$, причём $m > 0$.

Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in \mathbb{X}$ – произвольный элемент, тогда $\dfrac{x}{\|x\|_{\max}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\xi_i}{\|x\|_{\max}} e_i \in B$ и для него верно неравенство

$$f\left(\frac{\xi_1}{\|x\|_{\max}}, \frac{\xi_2}{\|x\|_{\max}}, \ldots, \frac{\xi_n}{\|x\|_{\max}}\right) = \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\|x\|_{\max}} e_i\right\| = \frac{1}{\|x\|_{\max}} f\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right) = \frac{\|x\|}{\|x\|_{\max}} \geq m$$

или $m \cdot \|x\|_{\max} \leq \|x\|$.

Утверждение доказано.

Утверждение. *Если* $x, y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *и* $A(n \times n)$, $B(n \times n)$ *– квадратные матрицы, то:*

а) $|(x, y)| \leq K \cdot \|x\| \cdot \|y\|$;

б) $\|Ay\| \leq L \cdot \|A\| \cdot \|y\|$;

в) $\|AB\| \leq M \cdot \|A\| \cdot \|B\|$

для произвольных норм векторов и матриц и некоторых констант K, L, M.

Доказательство. Достаточно неравенства доказать для некоторых норм, тогда в силу эквивалентности они будут справедливы для всех норм, но быть может, с другими константами.

Первое утверждение а) выполнено очевидным образом для $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ с $K = 1$. Во втором случае б) для векторов возьмём любую норму и норму матриц согласуем с ней $\|A\| = \sup\limits_{\|b\| \leq 1} \|Ab\|$, тогда $\left\|A \frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \|A\|$, что равносильно б) с $L = 1$. Наконец, для доказательства в) выберем норму $\|A\| = \max\limits_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \left\{\left|a_{i\,j}\right|\right\}$, при этом

$$\|AB\| = \max_{i,\, j=\overline{1,n}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \leq \max_{i,\, j=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} \|A\| \cdot \|B\| = n \cdot \|A\| \cdot \|B\|.$$

Далее в качестве нормы в $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ можно рассматривать любую.

2.1.6. Условие Липшица и геометрическая интерпретация его в одномерном пространстве.

Определение. Функцию $f : (D(f) \subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ называют удовлетворяющей условию Липшица с константой $L > 0$, если для любых $x, \overline{x} \in D(f)$ выполняется неравенство $\| f(x) - f(\overline{x})\| \leq L \|x - \overline{x}\|$.

Задача. Показать, что если f удовлетворяет условию Липшица по одной из норм 1В) или 2В), то удовлетворяет этому условию и по второй норме.

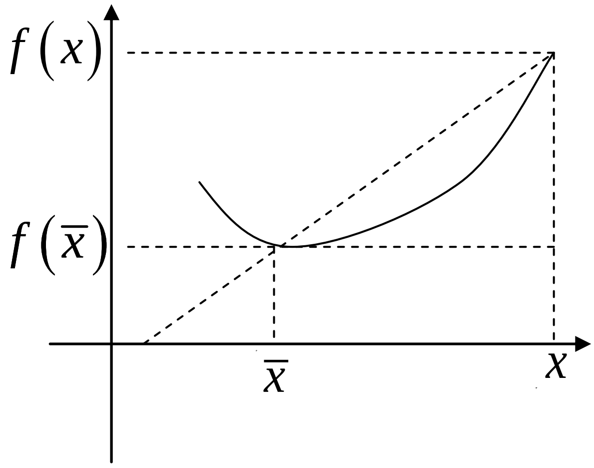
Если $f:(D(f)\subseteq\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ – вещественная функция вещественного аргумента, то для неё условие Липшица можно записать следующим образом:

$$|f(x)-f(\overline{x})|\le L|x-\overline{x}|$$

или при $x\ne\overline{x}$

$$\left|\frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}}\right|\le L$$

Это означает, что угловые коэффициенты всех секущих графика функции f ограничены по модулю единой константой L.



Примеры. 1. Функция $f(x)=\sin x$ удовлетворяет на $\mathbb{R}$ условию Липшица с константой $L=1$, так как по теореме Лагранжа (см. курс матем. анализа) найдется значение $\xi\in[x,\overline{x}]$, для которого $|\sin x-\sin\overline{x}|=|(x-\overline{x})\sin'\xi|=|(x-\overline{x})\cos\xi|\le|x-\overline{x}|$

2. Функция $f(x)=x^2$ удовлетворяет условию Липшица на любом конечном отрезке $[a,b]$. Действительно,

$$\left|x^2-\overline{x}^2\right|=\left|(x+\overline{x})\cdot(x-\overline{x})\right|\le\left(|x|+|\overline{x}|\right)\cdot|x-\overline{x}|\le 2\max\{|a|,|b|\}\cdot|x-\overline{x}|.$$

Но, как нетрудно видеть, на $\mathbb{R}$ эта функция не удовлетворяет Условию Липшица: $\left|0^2-\overline{x}^2\right|=|\overline{x}|\cdot|0-\overline{x}|$ и $|\overline{x}|$ может быть сколь угодно большим.

3. Функция $f(x)=\sqrt{x}$ не удовлетворяет условию Липшица на $[0,1]$, так как $\sqrt{x}-\sqrt{0}=\left(\sqrt{\xi}\right)'(x-0)=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}|x-0|$ для некоторого $\xi\in[0,x]$ и $\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\to\infty$ при $x\to 0$.

2.1.7. Утверждение о дифференцируемости, условии Липшица и непрерывности.

Утверждение. Пусть $f:(D(f)\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ и $D(f)$ – выпуклое множество. Тогда справедлива цепочка следований между утверждениями «f дифференцируема на $D(f)$ и $\|f'(x)\|\le L$» $\overset{1}{\Rightarrow}$ «f удовлетворяет условию Липшица с константой L» $\overset{2}{\Rightarrow}$ «f равномерно непрерывна на $D(f)$».

Доказательство. Из первого утверждения следует второе, т.к. $\|f(x)-f(\bar{x})\|\le\sup\limits_{c\in[x,\bar{x}]}\|f'(c)\|\|x-\bar{x}\|\le L\|x-\bar{x}\|$.

Если f удовлетворяет условию Липшица и $\varepsilon>0$, то положив $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$ получим $\|f(x)-f(\bar{x})\|\le L\|x-\bar{x}\|<\varepsilon$ для $\|x-\bar{x}\|<\delta$.

Отметим, что обратные импликации могут не выполняться.

Примеры.

1. Функция $|x|$ удовлетворяет условию Липшица, но не дифференцируема в нуле.
2. Функция $\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на [0,1] по теореме Кантора (если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на нём), но не удовлетворяет условию Липшица.

2.1.8. Формулировка теоремы Коши-Пикара в полосе.

Теорема (Коши-Пикара в полосе) *Для задачи Коши*

$$\dot{x}=f(t,x) \qquad \text{(НС)}$$

$$x(t_0)=x_0 \qquad \text{(НУ)}$$

состоящей из нормальной системы (НС) *и начального условия* (НУ), п*редполагается, что:*

$f:\ I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ($I-$ *промежуток в* $\mathbb{R}$, содержащий t_0); (1)

$f(t,x)$ *непрерывна по* t *при любом фиксированном* x; (2)

$f(t,x)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x при каждом $t\in I$ *с некоторой константой* L (3)

Утверждается, что при выполнении (1)–(3) задача (НС), (НУ) *имеет на промежутке I единственное решение.*

Пункты 2.1.9–2.1.17 посвящены доказательству этой теоремы.

2.1.9. Замечание о непрерывности f по совокупности переменных.

Утверждение. При выполнении условий (2), (3) f непрерывна по совокупности переменных.

Доказательство. Пусть $t_m \to t,\ x_m \to x$ при $m \to \infty$. Тогда
$\left\| f\left(t_m, x_m\right) - f\left(t, x\right)\right\| = \left\| f\left(t_m, x_m\right) - f\left(t_m, x\right) + f\left(t_m, x\right) - f\left(t, x\right)\right\| \le$
$\le \left\| f\left(t_m, x_m\right) - f\left(t_m, x\right)\right\| + \left\| f\left(t_m, x\right) - f\left(t, x\right)\right\| \le L\left\| x_m - x\right\| + \left\| f\left(t_m, x\right) - f\left(t, x\right)\right\| \to 0$ при $m \to \infty$

2.1.10. Лемма об эквивалентном интегральном уравнении. *При выполнении условий теоремы Коши–Пикара задача (НС), (НУ) эквивалентна следующему интегральному уравнению:*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds\,. \qquad \text{(ИУ)}$$

Доказательство.

1) Пусть $x = \varphi(t)$ – решение задачи (НС), (НУ). Тогда

$$\dot{\varphi}(t) = f\left(t, \varphi(t)\right)\ \left(t \in D(\varphi)\right), \qquad (*)$$

$$\varphi(t_0) = x_0. \qquad (**)$$

Проинтегрируем соотношение (*) в пределах от t_0 ($t_0 \in I$ – фиксированная точка) до t, это возможно, т.к. (*) $\Rightarrow$ $\dot{\varphi}$ существует $\Rightarrow$ φ непрерывна $\Rightarrow$ $f\left(s, \varphi(s)\right)$ непрерывна $\Rightarrow$ f интегрируема $\Rightarrow$ $\dot{\varphi}$ интегрируема.

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(s) ds = \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds;$$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds;$$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds.$$

Следовательно, φ – решение (ИУ).
Итак, (НС), (НУ) $\Rightarrow$(ИУ).

2) Пусть теперь $x = \varphi(t)$ – решение (ИУ). Тогда выполнено тождество

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds\ \ \left(t \in D\varphi\right). \qquad (***)$$

При этом интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi(s)\right)ds$ существует $\Rightarrow$ функция

$F(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi(s)\right)ds$ непрерывна $\Rightarrow$ φ – непрерывна $\Rightarrow$ $f\left(t,\varphi(t)\right)$ непрерывна по t (см. 2.1.9) $\Rightarrow$ $F(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi(s)\right)ds$ дифференцируема по t $\Rightarrow$ φ – дифференцируема.

Итак, продифференцировав тождество (***) по t, получим $\dot{\varphi}(t) = f\left(t,\varphi(t)\right)$. Таким образом, φ – решение (НС).

Наконец проверим выполнение (НУ), подставив $t = t_0$ в (***):

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} f\left(s,\varphi(s)\right)ds = x_0 .$$

Получили (ИУ)$\Rightarrow$(НС), (НУ), и лемма полностью доказана.

2.1.11. Определение последовательных приближений.

Определение. Пусть

$\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^n$ – произвольная непрерывная функция. (4)

Последовательные приближения (НС), *соответствующие начальному приближению* φ_0, определяются с помощью рекуррентной формулы

$$\varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\left(s,\varphi_k(s)\right)ds \tag{5}$$

Утверждение. Последовательные приближения на промежутке I являются непрерывными функциями и дифференцируемы при $k \geq 1$.

Доказательство. Покажем индукцией по k, что функция $\varphi_k(t)$ при любом k определена на всем промежутке I и непрерывна.

Для $k = 0$ это совпадает с условием (4), и база индукции выполнена.

Пусть $\varphi_k(t)$ непрерывная функция. Тогда в правой части (5) под интегралом стоит непрерывная на I функция – это следует из свойств φ_k и условий (1)–(3). Поэтому φ_{k+1} также определена на I и дифференцируема, а следовательно, и непрерывна.

Отметим еще, что из (5) вытекают два равенства:

$\varphi'_{k+1}(t) = f\left(t,\varphi_k(t)\right)$ (6)

и

$$\varphi_{k+1}(t_0) = x_0$$

2.1.12. Лемма о сближении. *Пусть выполнены условия теоремы Коши–Пикара и* $\varphi_0, \psi_0 : I \to \mathrm{R}^n$ *– произвольные непрерывные начальные приближения. Утверждается, что для соответствующих им последовательных приближений* φ_k, ψ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *справедливы неравенства:*

$$\left\|\varphi_k(t) - \psi_k(t)\right\| \le L_0(t) \frac{L^k \left|t - t_0\right|^k}{k!} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где

$$L_0(t) = \left\|\varphi_0 - \psi_0\right\|_t = \max\left\{\left\|\varphi_0(s) - \psi_0(s)\right\| : s \in [t_0, t] \ \left([t, t_0]\right)\right\} \tag{10}$$

Доказательство. Докажем (9) индукцией по k.

При $k = 0$ это неравенство, очевидно, выполнено

$$\left\|\varphi_0(t) - \psi_0(t)\right\| \le \max\left\{\left\|\varphi_0(s) - \psi_0(s)\right\| : s \in [t_0, t] \ \left([t, t_0]\right)\right\} = L_0(t) \frac{L^0 \left|t - t_0\right|^0}{0!}.$$

Предположив, что (9) справедливо для некоторого k, докажем аналогичное неравенство с заменой k на $k+1$:

$$\left\|\varphi_{k+1}(t) - \psi_{k+1}(t)\right\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi_k(s)\right) ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f\left(s, \psi_k(s)\right) ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \left[f\left(s, \varphi_k(s)\right) - f\left(s, \psi_k(s)\right) \right] ds \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\left(s, \varphi_k(s)\right) - f\left(s, \psi_k(s)\right) \right\| ds \right| \overset{\substack{\textit{по условию} \\ \textit{Липшица}}}{\le}$$

$$\le L \left| \int_{t_0}^{t} \left\|\varphi_k(s) - \psi_k(s)\right\| ds \right| \overset{\substack{\textit{по предположению} \\ \textit{индукции}}}{\le} L \left| \int_{t_0}^{t} L_0(s) \frac{L^k \left|s - t_0\right|^k}{k!} ds \right| \overset{\substack{\textit{в силу} \\ \textit{неубывания} \\ L_0(t)}}{\le}$$

$$\le L_0(t) \frac{L^{k+1}}{k!} \left| \int_{t_0}^{t} \left|s - t_0\right|^k ds \right| = L_0(t) \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{t_0}^{t} (s - t_0)^k ds \ \ \textit{при } t \ge t_0 \\ \displaystyle\int_{t}^{t_0} (t_0 - s)^k ds \ \ \textit{при } t < t_0 \end{array} \right. =$$

$$=L_0(t)\frac{L^{k+1}}{k!}\cdot\left[\begin{array}{l}\dfrac{(t-t_0)^{k+1}}{k+1}\ \textit{при } t\ge t_0\\ -\left(-\dfrac{(t_0-t)^{k+1}}{k+1}\right)\ \textit{при } t<t_0\end{array}\right.=L_0(t)\frac{L^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Напомним, что для любого положительного числа c дробь $\dfrac{c^k}{k!}\to 0$ при $k\to\infty$; поэтому из (9) действительно следует, что φ_k и ψ_k сближаются с ростом k (на любом конечном отрезке $[t_0, t]$ ($[t, t_0]$) промежутка I).

2.1.13. Лемма о сходимости. *В условиях теоремы Коши–Пикара последовательные приближения $\varphi_n(t)$ сходятся на I к некоторой функции $\varphi(t)$.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости последовательности (для того, чтобы последовательность (x_n)сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной).

При фиксированном t покажем, что $\left\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+k}(t)\right\|\underset{n\to\infty}{\to}0$ равномерно относительно k. Для начала оценим $\left\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+1}(t)\right\|$. Для этого применим лемму о сближении к начальным функциям φ_0 и $\psi_0=\varphi_1$. Тогда

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+1}(t)\|=\|\varphi_n(t)-\psi_n(t)\|\le\|\varphi_0-\varphi_1\|_t\,\frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}.$$

Отсюда получаем оценку для $\left\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+k}(t)\right\|$:

$$\left\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+k}(t)\right\|\le\left\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+1}(t)\right\|+\left\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_{n+2}(t)\right\|...+\left\|\varphi_{n+k-1}(t)-\varphi_{n+k}(t)\right\|\le$$

$$\|\varphi_0-\varphi_1\|_t\,\frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}+\|\varphi_0-\varphi_1\|_t\,\frac{L^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}+...+\|\varphi_0-\varphi_1\|_t\,\frac{L^{n+k-1}|t-t_0|^{n+k-1}}{(n+k-1)!}\le$$

$$\le\|\varphi_0-\varphi_1\|_t\sum_{i=n}^{\infty}\frac{L^i|t-t_0|^i}{i!}.$$

Введем обозначение $R_n(t)=\sum\limits_{i=n}^{\infty}\dfrac{L^i|t-t_0|^i}{i!}$ – остаточная сумма сходящегося ряда $e^{L|t-t_0|}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{L^i|t-t_0|^i}{i!}$, ($e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ – ряд имеет конечную сумму при любом значении x), поэтому $R_n(t)\underset{n\to\infty}{\to}0$. Тогда $\left\|\varphi_n(t)-\varphi_{n+k}(t)\right\|\le\|\varphi_0-\varphi_1\|_t\,R_n(t)\underset{n\to\infty}{\to}0.$

Следовательно, выполнено условие критерия Коши и $\varphi_n(t)$ сходится к некоторой функции $\varphi(t)$ при $n \to \infty$.

2.1.14. О непрерывности функции $\varphi(t)$.

Предел последовательности непрерывных функций может быть разрывной функцией. Например, скалярные функции $y_n(t) = t^n$ сходятся при каждом $t \in [0, 1)$ к нулю, а $y_n(1) = 1^n = 1 \underset{n\to\infty}{\to} 1$, т.е. $y_n(t) \to y(t) = \begin{cases} 0, \ t \in [0,1), \\ 1, \ t = 1. \end{cases}$ – разрывной в точке $t = 1$ функции.

Если же сходимость последовательности непрерывных функций равномерна на отрезке сходимость, (т.е. начиная с некоторого номера $\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \le \varepsilon_n$, ε_n не зависит от t), то предел есть непрерывная на этом отрезке функция (см. курс матем. анализа).

Пусть $[t_0, T] \subset I$. В условиях предыдущей леммы мы установили, что $\|\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t)\| \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \, R_n(t)$. Перейдем к пределу при $k \to \infty$. Получим $\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \, R_n(t)$. Заметим, что $\|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_T$ и $R_n(t) \le R_n(T)$, если $t_0 \le t \le T$ или $T \le t \le t_0$. Таким образом, $\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_T \, R_n(T)$.

Следовательно, φ_n равномерно сходится к φ на $[t_0, T]$. Поэтому, φ непрерывна на любом отрезке $[t_0, T] \subset I$, а значит непрерывна на I.

2.1.15. Лемма об оценке погрешности n-го приближения. *В условиях теоремы Коши–Пикара и леммы о сходимости верна следующая оценка*

$$\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \frac{e^{L|t-t_0|} L^n |t-t_0|^n}{n!}.$$

Доказательство. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в оценке из леммы о сближении $\|\varphi_n(t) - \varphi_{n+k}(t)\| \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \sum_{i=n}^{\infty} \frac{L^i |t-t_0|^i}{i!}$ получим

$$\|\varphi_n(t) - \varphi(t)\| \le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \sum_{i=n}^{\infty} \frac{L^i |t-t_0|^i}{i!} = \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \frac{L^n |t-t_0|^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L^i |t-t_0|^i \cdot n!}{(n+i)!} \le$$

$$\le \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \frac{L^n |t-t_0|^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L^i |t-t_0|^i}{i!} = \|\varphi_0 - \varphi_1\|_t \frac{L^n |t-t_0|^n}{n!} e^{L|t-t_0|}.$$

2.1.16. Лемма о существовании. *В рассматриваемых условиях предел последовательных приближений φ есть решение задачи* (НС), (НУ).

Доказательство. Заметим, что $\varphi_k'(t)$ равномерно сходятся к $f\left(t, \varphi(t)\right)$, так как при $k \geq 1$

$$\left\|\varphi_k'(t) - f\left(t, \varphi(t)\right)\right\| \overset{см.(6)}{=} \left\|f\left(t, \varphi_{k-1}(t)\right) - f\left(t, \varphi(t)\right)\right\| \overset{\substack{по\ условию\\ Липшица}}{\leq} L\left\|\varphi_{k-1}(t) - \varphi(t)\right\|.$$

Поскольку на любом отрезке, содержащемся в I, сходимость φ_k к φ является равномерной, такова же и сходимость $\varphi_k'(t)$ к $f\left(t,\varphi(t)\right)$. По теореме Вейерштрасса о дифференцировании функциональных последовательностей («*если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке функций $y_k(t)$ сходится к $u(t)$ и последовательность производных $y_k'(t)$ сходится равномерно на этом отрезке к $w(t)$, то $u(t)$ непрерывно дифференцируема на том же отрезке, последовательность $y_k(t)$ сходится к $u(t)$ равномерно и $u'(t) = w(t)$*») отсюда следует равенство $\varphi'(t) = f\left(t, \varphi(t)\right)$. Кроме того, $\varphi(t_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t_0) = x_0$.

2.1.17. Лемма о единственности. *В условиях теоремы Коши–Пикара решение задачи* (НС), (НУ) *на I единственно.*

Доказательство. Если φ и ψ – решения этой задачи на $[a, b]$, то построим последовательные приближения φ_k, ψ_k, соответствующие начальным приближениям $\varphi_0 = \varphi$, $\psi_0 = \psi$. В этом случае, очевидно, $\varphi_k = \varphi$, $\psi_k = \psi$ при любом k. Но тогда из леммы о сближении следует, что $\varphi = \psi$.

Доказательство теоремы Коши–Пикара в полосе завершено. Далее рассмотрим другие теоремы существования и единственности.

2.1.18. Теорема Коши-Пикара в полосе с переменным коэффициентом Липшица. *Пусть выполнены условия* (1)–(3) *теоремы Коши–Пикара со следующим изменением: условие Липшица выполняется с переменным коэффициентом, т.е.*

$$\left\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\right\| \leq L(t)\left\|x - \bar{x}\right\|, \tag{3t}$$

где $L(t)$ непрерывная неотрицательная на I функция.
Тогда задача (НС), (НУ) *имеет на I единственное решение.*

Эта теорема является усилением теоремы из 2.1., так как у неё более слабые условия, а утверждение то же самое.

Доказательство. На любом отрезке $[t_0, T] \subset I$ $\left([T, t_0] \subset I\right)$ выполнены условия (1)–(3) в первоначальной трактовке. Так как по теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем и достигает своих минимального и максимального значений, то в качестве константы Липшица можно взять $L = \max\limits_{t \in [t_0, T], ([T, t_0])} L(t)$.

Тогда по теореме Коши–Пикара задача (НС), (НУ) имеет на этом отрезке единственное решение. В силу произвольности выбора отрезка задача (НС), (НУ) имеет единственное решение на промежутке I.

2.1.19. Локальная теорема Коши–Пикара. *Пусть выполнены условия* (1)–(3) *теоремы Коши–Пикара со следующим изменением:*

$$f : \left(U(t_0, x_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}^n, \tag{1л}$$

где $U(t_0, x_0)$ *– некоторая окрестность точки* (t_0, x_0).

Тогда задача (НС), (НУ) *имеет единственное решение на некотором отрезке* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *(*$h > 0$*).*

План доказательства. Определим отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$ следующим образом. Впишем в окрестность U "бочку": $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B}(x_0, r) = V$. Это ограниченное замкнутое множество. Определим величину $M = \max\limits_{(t, x) \in V} \left\| f(t, x) \right\|$. Максимум существует по теореме Вейерштрасса, как для непрерывной на компакте (в $\mathbb{R}^n$ это замкнутое ограниченное множество) функции.

Выберем h так, чтобы было $h \le \alpha$ и $Mh \le r$.

Дальнейшее доказательство можно провести двумя способами.

1. Почти полностью повторить доказательство теоремы Коши–Пикара, только φ_0 выбирать так, чтобы: $\varphi_0 : [t_0 - h, t_0 + h] \to \overline{B}(x_0, r)$.

Затем доказать (индукцией по n), что все последовательные приближения принимают значения в $\overline{B}(x_0, r)$.

2. Продолжить f с бочки V на полосу $[t_0 - h, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n$ с сохранением непрерывности по t и условия Липшица по x.

2.1.20. Теорема Коши–Пикара для уравнения n–го порядка. *Рассматривается уравнение*

$$y^{(n)} = F\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{Уn}$$

а также начальное условие

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{НУn}$$

Предположим, что:

F определена на некоторой окрестности U точки $(t_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и принимает значения в $\mathbb{R}$; (1Уn)

$F(t, y_0, y_1, ..., y_{n-1})$ непрерывна по t при любых допустимых $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$; (2Уn)

$\left\|F(t, x) - F(t, \bar{x})\right\| \le L\|x - \bar{x}\|$ *при всех* $(t, x), (t, \bar{x}) \in U$. (3У$n$)

Тогда задача (Уn), (НУn) *имеет единственное решение на некотором отрезке* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *($h > 0$).*

Доказательство. Задача (Уn), (НУn) с помощью введения новой (векторной) неизвестной функции

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

сводится к задаче Коши для нормальной системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ F(t, x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

При этом условия (1Уn) – (3Уn) обеспечивают выполнение для полученной нормальной системы условий теоремы Коши–Пикара.

Задача. Докажите это.

2.1.21. Формулировка теоремы Пеано. *Пусть выполнено условие* (1л) *локальной теоремы Коши–Пикара и функция f непрерывна на $U(t_0, x_0)$ по* *совокупности переменных. Тогда задача* (НС), (НУ) *имеет решение, определенное на некотором отрезке* $\left[t_0-h,\, t_0+h\right]$.

Доказательство можно найти, например, во второй главе книги [1]. Заметим, что в условиях этой теоремы решение задачи Коши не обязательно единственно; множество всех решений образует так называемую *интегральную воронку*. В интегральной воронке всегда имеются наибольшее (*верхнее*) и наименьшее (*нижнее*) решения, а вся воронка между ними заполнена графиками решений той же задачи.

Например, интегральная воронка задачи

$$\dot{x}=2\sqrt{|x|},\ x(0)=0$$

заключена между графиками функций $x=0$ и $x=t^2\operatorname{sign} t$.

Задача. Проверьте это.

2.1.22. Овеществление комплексных ОДУ и теорема Коши–Пикара для комплексной нормальной системы.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{z}=a(t)z+b(t), \tag{КЛУ}$$

которое отличается от изученного в параграфе 1.2 линейного уравнения (ЛУ) тем, что данные функции $a(t),\ b(t)$ и неизвестная функция $z(t)$ принимают в этом случае комплексные значения:

$$a(t)=a_1(t)+ia_2(t),\, b(t)=b_1(t)+ib_2(t),\, z(t)=x_1(t)+ix_2(t);\, \dot{z}(t):=\dot{x}_1(t)+i\dot{x}_2(t).$$

Подставив эти выражения в (КЛУ) и приравняв вещественные и мнимые части, получим систему двух уравнений с двумя вещественными неизвестными и вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_1(t)x_1-a_2(t)x_2+b_1(t),\\ \dot{x}_2&=a_2(t)x_1+a_1(t)x_2+b_2(t).\end{aligned} \tag{ОКЛУ}$$

Описанный процесс иногда называют *овеществлением* комплексного уравнения. Нетрудно видеть, что уравнение (КЛУ) и система (ОКЛУ) эквивалентны в следующем смысле: функция $z(t)$ является решением (КЛУ) в том и только том случае, когда пара $\left(x_1=\operatorname{Re} z,\ x_2=\operatorname{Im} z\right)$ удовлетворяет системе (ОКЛУ).

Процедуру овеществления можно применить к любой комплексной системе ОДУ:

$$\dot{z}=f(t,z),\ z=(z_1,\dots,z_n)\in \mathrm{C}^n,\ t\in \mathrm{R}. \tag{КНС}$$

На этом пути получается следующее утверждение: *теорема Коши–Пикара остается справедливой, если всюду в ее формулировке заменить* $\mathbb{R}^n$ *на* $\mathbb{C}^n$. Это относится ко всем рассмотренным выше вариантам теоремы Коши–Пикара.

2.1.23. Комплексификация.

В некоторых случаях оказывается возможной и полезной обратная по отношению к овеществлению процедура *комплексификации*. Рассмотрим двумерную вещественную линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}_1 = a_1 x_1 - a_2 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = a_2 x_1 + a_1 x_2.$$

Она имеет вид (ОКЛУ), что позволяет свести ее к эквивалентному (КУ):

$$\dot{z} = az, a = a_1 + ia_2, \ z = x_1 + ix_2.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$z = Ce^{at} \ \left(C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}\right).$$

По определению экспоненты с комплексным показателем,

$$e^{(a_1 + ia_2)t} = e^{a_1 t}\left(\cos a_2 t + i \sin a_2 t\right).$$

Выделив в выражении для z вещественную и мнимую части, получим общее решение исходной двумерной вещественной системы:

$$x_1 = e^{a_1 t}\left(C_1 \cos a_2 t - C_2 \sin a_2 t\right),$$

$$x_2 = e^{a_1 t}\left(C_1 \sin a_2 t + C_2 \cos a_2 t\right).$$

В векторно-матричных обозначениях оно имеет вид:

$$x = e^{a_1 t}\begin{pmatrix} \cos a_2 t & -\sin a_2 t \\ \sin a_2 t & \cos a_2 t \end{pmatrix} C.$$

В рассмотренном примере комплексификация позволила достаточно просто найти общее решение двумерной вещественной системы специального вида. При этом мы воспользовались тем фактом, что общее решение комплексного уравнения $\dot{z} = az$ выражается такой же (по виду) формулой, что и для вещественного уравнения того же вида. Строго говоря, это нуждается в доказательстве.

Задача. Проведите это доказательство.

2.2. Оператор сдвига

2.2.1. Определение оператора сдвига.

Определение. *Оператор сдвига* (ОС) $g_{t_0}^t$ *по траекториям* (НС) $\dot{x} = f\left(t, x\right)$ *за время от* t_0 *до* t сопоставляет точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ значение решения задачи (НС), (НУ) $x\left(t_0\right) = x_0$, вычисленное в момент t.

Если у рассматриваемой (НС) нет решения, удовлетворяющего (НУ) и определенного в точке t, или такое решение не единственно, то считается, что оператор $g_{t_0}^t$ в точке x_0 не определен.

Например, оператор сдвига по траекториям (ЛУ) $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ (см. 1.2.6) задается формулой:

$$g_{t_0}^t x_0 = \Phi_{t_0}(t)\cdot x_0 + \Phi_{t_0}(t)\cdot \int_{t_0}^{t} \left(\Phi_{t_0}(s)\right)^{-1} b(s)ds,\ \Phi_{t_0}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

Он определен при всех $t_0, t \in I,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

2.2.2. Простейшие свойства оператора сдвига.

Утверждение. *В условиях теоремы Коши–Пикара (с переменной константой Липшица) оператор сдвига по траекториям* (НС) *определен при всех* $t_0, t \in I,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и обладает следующими четырьмя свойствами.*

1. $g_{t_0}^{t_0} x_0 = x_0$.
2. $\dfrac{d}{dt} g_{t_0}^t x_0 = f\left(t, g_{t_0}^t x_0\right)$.
3. $g_{t_1}^t g_{t_0}^{t_1} x_0 = g_{t_0}^t x_0$. $\left(\dfrac{t}{t_1}\dfrac{t_1}{t_0} = \dfrac{t}{t_0}\right)$
4. Оператор $g_{t_0}^t$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$ и $\left(g_{t_0}^t\right)^{-1} = g_t^{t_0}$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 по существу совпадают с определением оператора сдвига. Для доказательства равенства 3 заметим, что левая и правая части по переменной t являются, по свойству 2, решениями (НС). При этом их значения в точке $t = t_1$ совпадают:

$$g_{t_1}^{t_1} g_{t_0}^{t_1} x_0 \overset{\substack{по \\ св-ву 1}}{=} g_{t_0}^{t_1} x_0 .$$

По теореме Коши–Пикара (утверждение о единственности для задачи с начальным условием $x(t_1) = x_1$) эти решения совпадают при всех $t \in I$. Четвертое свойство непосредственно следует из третьего, поскольку операторы $g_{t_0}^t$, $g_t^{t_0}$ оба однозначно определены на $\mathbb{R}^n$ и их композиция есть тождественное отображение:

$$g_t^{t_0} g_{t_0}^t x_0 = g_{t_0}^{t_0} x_0 = x_0 .$$

2.2.3. Свойства оператора сдвига по траекториям нормальной автономной системы.

Определение. Нормальная система (НС) называется *автономной*, если ее правая часть не зависит от t. Ее общий вид:

$$\dot{x} = f(x). \qquad \text{(НАС)}$$

(НАС) обладает тем свойством, что ее решения при произвольных сдвигах вдоль оси времени остаются решениями. В терминах оператора сдвига это можно записать в виде

Утверждение (о дополнительном свойстве ОС (НАС))

5a. $g_{t_0+\tau}^{t+\tau}x_0 = g_{t_0}^{t}x_0 \ \left(\tau \in \mathbb{R}\right)$ *при выполнении условий пункта 2.2.2.*

Доказательство. Заметим, что левая часть этого равенства по переменной t, как и правая, является решением (НАС). Действительно,

$$\frac{d}{dt}g_{t_0+\tau}^{t+\tau}x_0 = \frac{d}{ds}g_{t_0+\tau}^{s}x_0\Big|_{s=t+\tau}\cdot\frac{d\left(t+\tau\right)}{dt} = f\left(g_{t_0+\tau}^{t+\tau}x_0\right)\cdot 1.$$

Кроме того, при $t = t_0$ она, как и правая часть, равна x_0: $g_{t_0+\tau}^{t_0+\tau}x_0 = x_0$. В силу единственности решения задачи Коши отсюда следует доказываемое равенство.

Для автономной системы вместо термина «оператора сдвига за время от t_0 до t» будем использовать термин «оператор сдвига g^t за время t»:

$$g^t x_0 := g_0^t x_0 = g_{t_0}^{t_0+t}x_0 .$$

При этом свойства 1.–4. оператора сдвига примут несколько более простой вид.

1a. $g^0 x_0 = x_0$.

2a. $\dfrac{d}{dt}g^t x_0 = f\left(g^t x_0\right)$.

3a. $g^t g^s x_0 = g^{t+s}x_0$.

4a. $\left(g^t\right)^{-1} = g^{-t}$.

Примером (НАС) может служить линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = ax + b .$$

Для него оператор сдвига за время t можно записать в виде:

$$g^t x_0 = e^{at}\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}$$

(см. 1.2.7).

2.3. Материалы к экзамену

2.3.1. Вопросы.

1. Формулировка теоремы Коши–Пикара.
2. Пример отсутствия локальной разрешимости.
3. Пример отсутствия глобальной разрешимости.
4. Пример отсутствия единственности.
5. Лемма об эквивалентном интегральном уравнении.

6. Определение последовательных приближений.
7. Лемма о сближении.
8. Лемма о сходимости.
9. О непрерывности предела и лемма об оценке погр*е*шности n-го приближения.
10. Лемма о существовании.
11. Лемма о единственности (о простоте).
12. Теоремы Коши–Пикара с переменной константой Липшица.
13. Формулировка локальной теоремы Коши–Пикара.
14. Теорема Коши–Пикара для уравнения *n*-го порядка.
15. Формулировка теоремы Пеано; интегральная воронка.
16. Теорема Коши–Пикара для комплексной нормальной системы.
17. Комплексификация.
18. Определение оператора сдвига для (НС).
19. Простейшие свойства оператора сдвига.
20. Свойства оператора сдвига для нормальной автономной системы.

2.3.2. Задачи.

1. Покажите, что задача Коши

$$x' = (\operatorname{tg} t) \cdot \sin(t + x), \ x(0) = 0$$

имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ единственное решение.

2. Найдите решение *интегрального уравнения*

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)\,ds.$$

3. Задача Коши

$$tx' = x, \ x(0) = 0$$

имеет по крайней мере два решения $x = 0$ и $x = t$. Почему этот факт не противоречит теореме Коши–Пикара?

4. Можно ли утверждать, что задача

$$\dot{x} = \cos|x| + t, \ x(1) = 0$$

имеет на $\mathbb{R}$ единственное решение?

5. На каком максимальном промежутке задача

$$\dot{x} = y + \operatorname{ctg} t, \ \dot{y} = -\sin x, \ x(1) = y(1) = 0$$

имеет единственное решение?

6. Если в условиях теоремы Коши–Пикара третье последовательное приближение совпадает с четвертым, то можно ли утверждать, что оно является точным решением рассматриваемой задачи?

7. Если в условиях теоремы Коши – Пикара третье последовательное приближение совпадает с пятым, то можно ли утверждать, что оно является точным решением рассматриваемой задачи?
8. Если в условиях теоремы Коши–Пикара второе последовательное приближение совпадает с первым, то может ли первое не совпадать с нулевым (начальным)?
9. Методом последовательных приближений найти точное решение задачи
$$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1, x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.$$

10. Докажите, что общее решение уравнения $\dot{z} = az \ (a, z \in \mathbb{C})$ выражается формулой $z = Ce^{at} \ (C \in \mathbb{C})$.

11. У нормальных систем $\dot{x} = f(t,x)$, $\dot{x} = \hat{f}(t,x)$ операторы сдвига определены при всех $t_0, t \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ и совпадают: $g_{t_0}^t x_0 = \hat{g}_{t_0}^t x_0$. Можно ли утверждать, что правые части данных систем совпадают?

12. Может ли формула $g_{t_0}^t x_0 = e^{t^2 - t_0^2} x_0$ задавать оператор сдвига по траекториям автономного уравнения?

Литература

1. Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н. Очерки по ОДУ. http://www.bsadovskiy.ru
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984, 271с.
3. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966, 332 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971, 312с.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., 1980, 232 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : [учебное пособие для физ.-мат. фак. ун-тов] / И.Г. Петровский .— М. : Физматлит, 2009 .— 207 с. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г.Петровский. - М. : Московский университет, 1984. - 295 с.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф.Филиппов. - М.; Ижевск : 2002, 174 с.
8. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.-540 с.

Составители: Прядко Ирина Николаевна,
Петрова Любовь Петровна

Редакция авторов