© 2016г. Нгуен Тхи Хиен (hienvp@utc.edu.vn)

(Вьетнамский государственный университет транспорта и коммуникаций)

О точности гладкой математической модели электрических цепей с диодными преобразователями тока

Математическая модель электрических цепей с диодными преобразователями тока является системой с диодной нелинейностью, которая представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью специального вида. В статье построена и изучена близкая к ней система с непрерывной правой частью и большим параметром K; доказана теорема о близости решений соответствующих начальных задач порядка $1/\sqrt{K}$.

1. Введение

В последнее время исследование электрических цепей является одной из актуальных научных тем. В ходе исследований достигнуты важные результаты, одна из которых является разработка математической модели для электрических цепей с диодными преобразователями тока. Эта модель представлена в виде *системы с диодной нелинейностью* (см. [1]). Следуя [2 – 4] рассмотрим *обобщенную* систему с диодной нелинейностью. Пусть Q – непустое выпуклое замкнутое множество в n – мерном пространстве R^n. Тогда обобщенная система с диодной нелинейностью имеет вид:

(1) $$\dot{x} = \tau_x f(t,x),$$

где $\tau_x f(t,x)$ – проекция вектора $f(t,x)$ на $T_Q(x)$ – касательный конус к Q в точке x (см. определение ниже).

Определение. *Пусть* $x \in Q$. *Тогда множество*

$N_Q(x)=\left\{z\in \mathrm{R}^n:\left(z,y-x\right)\le 0,\ \forall y\in Q\right\}$ *называется нормальным конусом к* Q *в точке* x*, а множество* $T_Q(x)=N_Q^*(x)$ *называется касательным конусом к* Q *в точке* x*, где* $N_Q^*(x)=\left\{z\in \mathrm{R}^n:\left(z,y\right)\le 0,\ \forall y\in N_Q(x)\right\}$.

Правая часть системы (1) может терпеть разрыв на границе множества Q. Под решением этой системы понимается локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (1) почти всюду. Наряду с (1) в [5] рассмотрена *гладкая модель*, в которой Q является любым непустым выпуклым замкнутым множеством. Однако эта модель является не очень эффективной, так как в ней используется оператор проектирования, значения которого вычисляются достаточно сложно. С другой стороны, в [6] доказано, что для электрических цепей с диодными преобразователями тока множество Q в системе (1) при некоторых ограничениях является граненым конусом, который определяется как пересечение конечного набора полупространств. В этой статье предлагается другая эффективная модель для некоторого граненого конуса Q. Эта модель будет подробно исследована для частного случая, когда множество Q является пересечением двух полупространств Q_1 и Q_2 в R^n.

2. Гладкая модель

В $n-$мерном пространстве R^n рассмотрим множество Q как пересечение двух полупространств Q_1 и Q_2, которые определяются следующим образом:

$$Q_i=\left\{z\in \mathrm{R}^n:\left(z,n_i\right)\le 0\right\},(i=1,2),$$

и, следовательно,

(2) $$\partial Q_i=\left\{z\in \mathrm{R}^n:\left(z,n_i\right)=0\right\},\ (i=1,2).$$

При этом вектор единичной длинны n_i называется *внешней нормалью* к полупространству Q_i. Нетрудно видеть, что такое множество Q является непустым, замкнутым и выпуклым.

Предполагается, что для $t \in [t_0, t_0 + T]$ и $x \in Q_i$, $(i = 1, 2)$ функция $f(t, x)$ непрерывна по первому аргумену t при любом фиксированном втором аргументе x, удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу x с константой L и ограничена по норме константой C.

Для этого множества Q *гладкая* модель записывается в виде

(3) $$\dot{y} = \frac{1}{N[\mathrm{M(y)}]}\left[\sum_{l \in M(y)} f\left(t, y - (n_l, y)n_l\right) - K \max\left\{(n_1, y)_+, (n_2, y)_+\right\} \sum_{l \in M(y)} n_l\right].$$

Здесь K – большой положительный параметр; $(n_i, y)_+$ – положительная часть скалярного произведения (n_i, y), т.е. $(n_i, y)_+ = \max\{0, (n_i, y)\}$, $(i = 1, 2)$; $N[\mathrm{M(y)}]$ – количество элементов множества $M(y)$ и $l \in M(y) \Leftrightarrow (n_l, y) = \max\left\{(n_1, y)_+, (n_2, y)_+\right\}$.

Цель данной работы – оценить расстояние (модуль разности) между решениями гладкой модели (3) и системы (1) с одинаковыми начальными условиями.

Заметим, что если множество Q является $m-$ граненым конусом, то гладкая модель будет построена следующим образом:

(4) $$\dot{y} = \frac{1}{N[\mathrm{M(y)}]}\left[\sum_{l \in M(y)} f\left(t, y - (n_l, y)n_l\right) - K \max_{i \neq j; i, j = \overline{1, m}}\left\{(n_i, y)_+, (n_j, y)_+\right\} \sum_{l \in M(y)} n_l\right].$$

3. Теорема о точности гладкой модели

Пусть $x(t)$, $y(t)$ – *решения систем* (1), (3) *соответственно, удовлетворяющие начальным условиям*

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $[t_0, t_0 + T]$ *выполнена следующая оценка:*

(5) $$\left\| x(t) - y(t) \right\| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L}\sqrt{1 - \mathrm{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{K}},$$

где $\alpha \in [0, \pi]$ – *угол между внешними нормалями* n_1 *и* n_2.

Заметим, что для гладкой модели (4) оценка в теореме выглядит следующим образом:

$$\|x(t)-y(t)\| \le \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L}\sqrt{1-\max\limits_{i\neq j;i,j=\overline{1,m}}\left\{\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_{\mathrm{ij}}}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha_{\mathrm{ij}}}{2}\right\}}}\frac{1}{\sqrt{K}},$$

$\alpha_{\mathrm{ij}} \in [0,\pi]-$ *угол между внешними нормалями* n_i *и* n_j.

4. Заключение

Проведенный анализ показывает, что предложенная в данной статье гладкая модель электрических цепей с диодными преобразователями тока при достаточно больших значениях параметра K практически эквивалентна известной дискретной модели, являющейся системой с диодной нелинейностью. Поэтому ее можно использовать наряду с дискретной моделью в тех ситуациях, когда она по тем или иным соображением оказывается более удобной – например, при численном анализе с применением современных прикладных программ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

С помощью леммы об оценке удаления (п. А) и леммы о проекции (п. Б) доказательство теоремы о точности гладкой модели будет изложено в (п. В).

А. *Оценка удаления*

Рассмотрим систему:

(П.1) $$\dot{z} = f(t,\overline{z}) - K(z-\overline{z}),\ z(t_0)=x_0,$$

где $\overline{z} = P(z,Q)$ – проекция z на Q, K – параметр в (3).

Лемма об оценке удаления. Для любого решения z *системы* (П.1) *и* $\overline{z} = P(z,Q)$ *верна оценка*

(П.2) $$\|z-\bar z\| \le \frac{C}{K}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=\|z-\bar z\|^2$. Тогда

(П.3) $$\begin{aligned}\dot\varphi(t) &= 2\left(z-\bar z, \dot z-\dot{\bar z}\right) = 2\left(z-\bar z, f(t,\bar z)-K(z-\bar z)-\dot{\bar z}\right) = \\ &= 2\left(z-\bar z, f(t,\bar z)\right)-2K\|z-\bar z\|^2-2\left(z-\bar z,\dot{\bar z}\right).\end{aligned}$$

Докажем, что последнее слагаемое в оценке (П.3) равняется нулю. Предположим противное, тогда существует момент $t_1\in\left[t_0,t_0+T\right]$ такой, что

(П.4) $$\left(z(t_1)-\bar z(t_1),\dot{\bar z}(t_1)\right)=\theta\ne 0.$$

Если $\theta>0$, то при достаточно малых значениях $\Delta t>0$ имеем

$$\bar z(t_1+\Delta t)-\bar z(t_1)=\dot{\bar z}(t_1)\Delta t+o(\Delta t).$$

В силу последнего равенства и (П.4) получим, что

(П.5) $$\left(z(t_1)-\bar z(t_1),\frac{\bar z(t_1+\Delta t)-\bar z(t_1)}{\Delta t}\right)=\theta+\left(z(t_1)-\bar z(t_1),\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right).$$

В (П.5), устремляя Δt к нулю, справа получаем $\theta>0$, а слева, так как $z(t_1)-\bar z(t_1)\in N_Q(\bar z(t_1))$, получаем число не больше нуля.

Если $\theta<0$, то для достаточно малых значениях $\Delta t<0$ имеем, что

$$\bar z(t_1+\Delta t)-\bar z(t_1)=\left(-\dot{\bar z}(t_1)\right)\left(-\Delta t\right)+o(\Delta t),$$

и, следовательно,

$$\left(z(t_1)-\bar z(t_1),\frac{\bar z(t_1+\Delta t)-\bar z(t_1)}{-\Delta t}\right)=-\theta+\left(z(t_1)-\bar z(t_1),\frac{o(\Delta t)}{-\Delta t}\right).$$

По аналогии с доказательством в первой ситуации, когда $\theta>0$, также получим противоречие.

Таким образом, с учетом определения функции φ, из (П.3) вытекает дифференциальное неравенство

(П.6) $$\dot\varphi\le 2C\sqrt{\varphi}-2K\varphi.$$

Теперь, если положим $u=\sqrt{\varphi}$, то из (П.6) следует, что

(П.7) $$\dot{u} \le C - Ku .$$

Поскольку $\varphi(t_0) = 0$, то в силу (П.7) можно утверждать, что $u(t) = \|z(t) - \bar{z}(t)\|$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\dot{u} = -Ku + C - b(t)$$

с некоторой неотрицательной суммируемой функцией $b(t)$. С учетом равенства $u(t_0) = 0$, как и в элементарной теории уравнений с непрерывными коэффициентами, получим

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} e^{K(s-t)} \left(C - b(s)\right) ds .$$

Отсюда следует, что при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ будет верна оценка

$$\|z(t) - \bar{z}(t)\| = u(t) \le C \int_{t_0}^{t} e^{K(s-t)} ds \le \frac{C}{K} ,$$

следовательно, лемма полностью доказана.

Б. *Л е м м а о п р о е к ц и и*

Для того, чтобы выполнялось $\bar{z} = P(z, Q)$ ($z \notin Q$), необходимо и достаточно, чтобы $\bar{z} \in \partial Q$ и $\left(z - \bar{z}, x - \bar{z}\right) \le 0$ для любого $x \in Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что из $\bar{z} = P(z, Q)$ непосредственно следует, что $\left(z - \bar{z}, x - \bar{z}\right) \le 0$, $\forall x \in Q$. Действительно, рассмотрим функцию $\chi(t) = tx + (1-t)\bar{z}$, где $x \in Q$ и $t \in [0,1]$, и рассмотрим функцию $\Phi(t) = \|z - \chi(t)\|^2$. С одной стороны, имеем, что функция $\Phi(t)$ достигает минимума в $t = 0$ и, следовательно, $\dot{\Phi}(0) \ge 0$. С другой стороны, имеем, что

$$\dot{\Phi}(t) = 2\left(z - \chi(t), -\dot{\chi}(t)\right) = 2\left(z - tx - (1-t)\bar{z}, \bar{z} - x\right) = -2\left(z - \bar{z}, x - \bar{z}\right) + t\|\bar{z} - x\|^2 .$$

Отсюда непосредственно следует неравенство $\dot{\Phi}(0) = -2\left(z - \bar{z}, x - \bar{z}\right) \ge 0$, т.е. доказано, что $\left(z - \bar{z}, x - \bar{z}\right) \le 0$, $\forall x \in Q$.

Теперь, если $\bar{z} \in \partial Q$ и $\left(z - \bar{z}, x - \bar{z}\right) \le 0$ для всех $x \in Q$, то $\|z - x\| \ge \|z - \bar{z}\|$ (так как сторона, лежащая против тупого или прямого угла, больше стороны, лежащей против острого угла треугольника). Докажем единственность $\bar{z}$. Для этого предположим, что $\bar z_1$ и $\bar z_2$ удовлетворяют неравенствам $(z-\bar z_1, x-\bar z_1)\le 0$ и $(z-\bar z_2, x-\bar z_2)\le 0$, $\forall x\in Q$. Отсюда следует

$$(\bar z_2-\bar z_1,\bar z_2-\bar z_1)=(z-\bar z_2,\bar z_1-\bar z_2)+(z-\bar z_1,\bar z_2-\bar z_1)\le 0,$$

и тем самым доказано, что $\bar z_1=\bar z_2$. Итак, $\bar z$ является единственной ближайшей к z точкой множества Q, т.е. $\bar z = P(z,Q)$. Лемма доказана.

В. *Доказательство теоремы о точности гладкой модели*

Обозначим через $\nu_x z$ проекцию вектора $z\in \mathrm{R}^n$ на нормальный к Q конус $N_Q(x)$ в точке x. Как известно (см. [7], с. 110), справедливо равенство

$$z=\tau_x z+\nu_x z,$$

причем слагаемые в правой части взаимно ортогональны. Поэтому систему (1) можно записать в виде

$$\dot x = f(t,x)-\nu_x f(t,x).$$

Положим $p=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|x-y\|^2$ и будем оценивать эту величину. Если $y\in Q$, то из условия Липшица для функции f и определения нормального конуса следует, что

(П.8) $$p\le L\|x-y\|^2.$$

Теперь будем оценивать величину p при $y\notin Q$. Для этого рассмотрим два нетривиальных случая: когда $(n_1,y)_+\ne(n_2,y)_+$ и когда $(n_1,y)_+=(n_2,y)_+>0$.

В1. *Оценка для* $p(t)$ *в первом случае*

Для определенности будем считать, что $(n_1,y)_+>(n_2,y)_+$ и $y\notin Q$. В этом случае уравнение (3) записывается в следующем виде:

$$\dot y = f(t,y_1)-K(y-y_1),$$

где $y_1=P(y,Q_1)$.

Имеем

(П.9) $$p = \left(\dot{x} - \dot{y}, x - y\right) = \left(f(t,x) - f(t,y_1) - \nu_x f(t,x) + K(y - y_1), x - y\right) = \\ = \left(f(t,x) - f(t,y_1), x - y\right) + \left(\nu_x f(t,x), y - x\right) + K\left(y - y_1, x - y\right).$$

В силу леммы о проекции последнее слагаемое в (П.9) не положительно, так как

$$\left(y - y_1, x - y\right) = \left(y - y_1, x - y_1\right) + \left(y - y_1, y_1 - y\right).$$

Для первого слагаемого (П.9) из выполнения условия Липшица функцией f следует

$$\left(f(t,x) - f(t,y_1), x - y\right) \le L\|x - y_1\|\|x - y\|.$$

Воспользовавшись тем известным фактом (см., например, [7], с. 109), что оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество в евклидовом пространстве является нерастягивающим, получим

$$\left(f(t,x) - f(t,y_1), x - y\right) \le L\|x - y\|^2.$$

Из (П.9) с учётом последних двух оценок имеем

(П.10) $$p \le L\|x - y\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - x\right)$$

или, что то же

$$p \le L\|x - y\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - y_1\right) + \left(\nu_x f(t,x), y_1 - x\right).$$

Если $y_1 \in Q$, то из определения нормального конуса имеем

$$\left(\nu_x f(t,x), y_1 - x\right) \le 0.$$

Следовательно,

$$p \le L\|x - y\|^2 + \left(\nu_x f(t,x), y - y_1\right).$$

По лемме об оценке удаления

$$\|y - y_1\| \le \frac{C}{K}.$$

Воспользовавшись ограниченностью функции f, получим следующее неравенство:

(П.11) $$p \le L\|x - y\|^2 + \frac{C^2}{K}.$$

Если $y_1 \notin Q$, то $0 < \alpha < \pi$. Действительно, если $\alpha = 0$, то $Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q$; если $\alpha = \pi$, то $Q \equiv \partial Q_1 \equiv \partial Q_2$. В обоих случаях $y_1 \in Q$, что противоречит предположению $y_1 \notin Q$. Кроме этого y лежит внутри угла α (иначе $y_1 \in Q$).

Предположим $(n_2, y)_+ > 0$. Рассмотрим плоскость (P) в R^2, проходящую через три точки y, y_1, y_2, где $y_i = P(y, Q_i)$, $(i = 1, 2)$. Через y_1, y_2 проведем две прямые, нормали которых являются соответственно n_1 и n_2. Из условия $\alpha \in (0, \pi)$ следует, что эти прямые обязательно пересекаются в некоторой точке, которую обозначим x^*. Нетрудно показать, что $x^* \in E \subset Q$, где

(П.12) $$E = \left\{ z \in \mathrm{R}^n : (z, n_1) = 0, (z, n_2) = 0 \right\}.$$

Действительно, в силу построения этой точки имеем, что $(x^* - y_1, y - y_1) = 0$, и, следовательно, $(x^*, y - y_1) = (y_1, y - y_1) = 0$ (см. (2)); аналогично получается равенство $(x^*, y - y_2) = 0$, и тем самым показано, что $x^* \in E$. В этом случае обозначим через α_1 угол между векторами n_1 и $\overrightarrow{x^* y}$, а через α_2 угол между векторами n_2 и $\overrightarrow{x^* y}$. В силу построения точки x^* получим, что

$$\| y - x^* \| = \frac{\| y - y_1 \|}{|\cos \alpha_1|} = \frac{\| y - y_2 \|}{|\cos \alpha_2|} \le \frac{\| y - y_1 \| + \| y - y_2 \|}{|\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2|}.$$

С другой стороны, $\| y - y_2 \| \le \| y - y_1 \|$. Поэтому

(П.13) $$\| y - x^* \| \le \frac{\| y - y_1 \|}{\left| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right|} \le \frac{\| y - y_1 \|}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

(так как $0 < \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2} < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$).

Если же $(n_2, y)_+ < 0$, то $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right)$. Тогда для $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ в качестве x^* возьмем некоторую точку из множества E такую, что $y x^* y_1 = \pi - \alpha$; для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ возьмем $x^* \equiv y_1$. В этом случае нетрудно проверить, что

$$\|y - x^*\| \le \frac{\|y - y_1\|}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{\|y - y_1\|}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда следует, что

(П.14) $$\|y - x^*\| \le \frac{\|y - y_1\|}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Продолжим оценивать величину p. Из неравенства (П.10) следует, что

$$p \le L\|x - y\|^2 + \left(v_x f(t,x), y - x^*\right) + \left(v_x f(t,x), x^* - x\right).$$

Последнее слагаемое неположительно (см. определение нормального конуса $N_Q(x)$). Отсюда и из ограниченности функции f получаем

(П.15) $$p \le L\|x - y\|^2 + C\|y - x^*\|.$$

Итак, из оценок (П.11) и (П.13) – (П.15) можем сделать вывод, что в случае $\left(n_1, y\right)_+ \ne \left(n_2, y\right)_+$ величина p оценивается следующим образом:

(П.16) $$p \le L\|x - y\|^2 + \frac{C^2}{1 - \operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{K}.$$

В2. *Оценка для $p(t)$ во втором случае*

Рассмотрим второй случай, когда $\left(n_1, y\right)_+ = \left(n_2, y\right)_+$ и $y \notin Q$. В этом случае $\alpha \ne \pi$ и возможно либо $\alpha = 0$, а $y \notin Q$ любое, либо $\alpha \in (0, \pi)$, а y лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла α и множество E. В первой ситуации уравнение (3) записывается в виде

$$\dot{y} = f(t, \bar{y}) - K\left(y - \bar{y}\right), \text{ где } \bar{y} = P(y, Q).$$

Следуя [5], получим

$$\|x(t) - y(t)\| \le \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L}}\frac{1}{\sqrt{K}},$$

и тем самым доказана оценка (5).

Во второй ситуации уравнение (3) записывается как

$$\dot{y}=\frac{1}{2}\left(f(t,y_1)+f(t,y_2)\right)-K\left(y-y_3\right),$$

где $y_1=P\left(y,Q_1\right)$, $y_2=P\left(y,Q_2\right)$ и $y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$.

Тогда имеем

$$p=\frac{1}{2}\left(f(t,x)-f(t,y_1),x-y\right)+\frac{1}{2}\left(f(t,x)-f(t,y_2),x-y\right)+$$
$$+\left(\nu_x f(t,x)y-x\right)+\frac{1}{2}K\left(y-y_1,x-y\right)+\frac{1}{2}K\left(y-y_2,x-y\right).$$

По аналогии с первым случаем строится точка x^* и получается оценка (П.15), но оценить $\|y-x^*\|$ так, как и в первом случае, нельзя. Сделаем это иначе с помощью оценки на $\|y-y_3\|$. Для этого положим $\psi(t)=\|y(t)-x^*(t)\|^2$. В данном случае нетрудно проверить, что $\alpha_1=\alpha_2$ и, кроме этого, y_3 является серединой отрезка y_1y_2, а также точкой пересечения отрезков y_1y_2 и x^*y. В силу этого замечания легко видеть, что

$$\|y-x^*\|=\frac{\|y-y_1\|}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\|y-y_3\|}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда и в силу равенства

$$\dot{\psi}(t)=2\left(\dot{y}-\dot{x}^*,y-x^*\right)=2\left(\frac{f(t,y_1)+f(t,y_2)}{2}-K(y-y_3)-\dot{x}^*,y-x^*\right)$$

получим

(П.17) $$\dot{\psi}(t)\le 2C\|y-x^*\|-2K\cos^2\frac{\alpha}{2}\|y-x^*\|^2-2\left(\dot{x}^*,y-x^*\right).$$

Теперь докажем, что $\left(\dot{x}^*,y-x^*\right)=0$. Предположим противное, т.е. существует момент $t_1\in\left[t_0,t_0+T\right]$, в котором $\left(\dot{x}^*(t_1),y(t_1)-x^*(t_1)\right)=\delta\ne 0$. С другой стороны,

$$\frac{x^*(t_1+\Delta t)-x^*(t_1)}{\Delta t}=\dot{x}^*(t_1)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Тогда

$$\text{(П.18)} \qquad \left(\frac{x^*(t_1+\Delta t)-x^*(t_1)}{\Delta t}, y(t_1)-x^*(t_1)\right)=\delta+\left(\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, y(t_1)-x^*(t_1)\right).$$

Для получения противоречия заметим, что для любого $z \in E$ (см. (П.12)) будет верно равенство $(z, y-x^*)=0$ (см. (2)). Используем этот факт в равенстве (П.18): при $\Delta t \to 0$ выражение слева равняется нулю, так как $x^* \in E$ (см. первый случай), а выражение справа равняется $\delta \neq 0$. Тем самым, получено противоречие. Теперь оценка (П.17) записывается в виде:

$$\dot{\psi}(t) \le 2C\|y-x^*\| - 2K\cos^2\frac{\alpha}{2}\|y-x^*\|^2,$$

или в виде

$$\dot{\psi}(t) \le 2C\|y-x^*\| - 2\bar{K}\|y-x^*\|^2,$$

где $\bar{K}=K\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

По аналогии с доказательством леммы об оценке удаления можно получить

$$\text{(П.19)} \qquad \|y-x^*\| \le C\int_{t_1}^{t} e^{K(s-t)}ds \le \frac{C}{\bar{K}} = \frac{C}{K\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Из неравенств (П.15) и (П.19) следует, что в данном случае величина p оценивается также неравенством (П.16).

В3. *Оценка точности гладкой модели*

Во всех случаях (см. (П.8), (П.11) и (П.16)) величина p оценивается как

$$p \le L\|x-y\|^2 + \frac{C^2}{1-sign\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{K}.$$

Заметим, что абсолютно непрерывная функция $u(t)=\|x(t)-y(t)\|^2$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\dot{u} = 2Lu + 2\frac{C^2}{1-sign\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{K} - b(t)$$

с некоторой неотрицательной суммируемой функцией $b(t)$. С учетом равенства $u(t_0)=0$ можно, как и в элементарной теории уравнений с непрерывными коэффициентами, получить:

$$u(t)=2\int_{t_0}^{t}e^{2L(t-s)}\left[\frac{C^2}{1-sign\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{K}-\frac{b(s)}{2}\right]ds\,.$$

Следовательно, при $t\in[t_0,t_0+T]$

$$u(t)=\|x(t)-y(t)\|^2\le 2\frac{C^2}{1-sign\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{K}\int_{t_0}^{t}e^{2L(t-s)}ds\le$$

$$\le\frac{C^2}{1-sign\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{LK}e^{2LT},$$

т.е. справедливо неравенство (5). Теорема доказана.

Статья посвящается моему многоуважаемому учителю – профессору Садовскому Борису Николаевичу, который при своей жизни добросовестно, тщательно руководил и сильно помогал мне в науке!

Список литературы

1. *Петрова Л.П.* Об одной модели идеального диодного преобразователя. Тр. Мат. фак-та ВГУ (новая сер.). Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1996. №1. С. 68–71.

2. *Лобанова О.А.* О движении точки в ограниченном фазовом пространстве. Сб. ст. аспирантов и студентов мат. фак-та ВГУ. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1999. С.88–92.

3. *Лобанова О.А., Садовский Б.Н.* О двумерных динамических системах с ограничением // Дифференц. уравнения. 2007. №4. С. 449–456.

4. *Нестеренко Р.В., Садовский Б.Н.* О вынужденных колебаниях в двумерном конусе // АиТ. 2002. №2. С. 14–21.

Nesterenko R.V, Sadovskii B.N. Forced Vibrations of Two-dimensional Cone // Autom. – Remote Control. 2002. №2. P. 181–188.

5. *Нгуен Тхи Хиен*. О точности гладкой модели системы с диодной нелинейностью // Вестн. ВГУ. Сер.: Физика, Математика. 2010. №2. С. 240–243.

6. *Петрова Л.П., Садовский Б.Н.* К математической теории электрических цепей с диодными преобразователями тока. Воронеж, 1982 . Деп. ВИНИТИ 10.08.1982, № 4403–82.

7. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.