

**Министерство образования Российской Федерации  
Воронежский государственный университет**

## **Системы с диодными нелинейностями**

**учебное пособие для студентов магистратуры,  
обучающихся по специальности 02.04.01**

**Воронеж  
2020**

Утверждено научно-методическим советом математического факультета  
? февраля 2020 года  
Протокол № 0500-04

Составители: Петрова Л.П., Прядко И.Н.

Пособие подготовлено на кафедре функционального анализа и  
операторных уравнений математического факультета  
Воронежского госуниверситета

Рекомендуется для студентов 1-го и 2-го курса  
магистратуры дневного отделения специальности 02.04.01

## Оглавление

1.	ВВЕДЕНИЕ .....	5
1.1.	Пример электрической цепи с идеальным диодом. ....	5
1.2.	Частная ситуация. ....	7
1.3.	Запись в виде дифференциального уравнения с разрывной правой частью. ....	7
1.4.	Общий вид системы с диодной нелинейностью. ....	8
2.	ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И СДН .....	9
2.1.	Определение и примеры. ....	9
2.2.	Проекция на выпуклое замкнутое множество. .... <b>Ошибка! Закладка не определена.</b>	
2.3.	Нормальный конус. ....	13
2.4.	Сопряженный конус. ....	14
2.5.	Ортогональное разложение по сопряженным конусам. ....	14
2.6.	Касательный конус. ....	16
2.7.	Определение решений систем с диодной нелинейностью. ....	17
2.8.	Эквивалентность двух записей системы с диодной нелинейностью. ....	17
3.	МОДЕЛЬ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ДИОДНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ .....	18
3.1.	Примеры диодных преобразователей тока. ....	18
3.2.	Дополнительные сведения о конусах. ....	20
3.3.	Образ и ядро линейного оператора. ....	22
3.4.	Граненые конусы. ....	23
3.5.	Диодная нелинейность. ....	26
3.6.	Утверждение о линейном преобразовании диодной нелинейности. ....	27
3.7.	Теорема о внешней характеристике диодного преобразователя. ....	27
3.8.	Пример: двухполупериодный выпрямитель с цепями питания и нагрузки. ....	29
3.9.	Численные эксперименты. ....	31
3.10.	Условие существования модели в виде СДН для электрической цепи с диодами. ....	33
4.	ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СДН .....	38
4.1.	Описание уравнения. ....	38
4.2.	Лемма о дифференцировании функции $V(x)$ . ....	40
4.3.	Лемма о дифференциальном неравенстве для функции $V(x)$ . ....	41
4.4.	Теорема о верхней предельной оценке. ....	41
4.5.	Примеры функций $h(x)$ . ....	42
5.	СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ. ....	45

5.1. <i>Формулировка и план доказательства локальной теоремы.</i>	45
5.2. <i>Продолжение системы.</i>	45
5.3. <i>Построение «бочки».</i>	48
5.4. <i>Ломаные Эйлера.</i>	49
5.5. <i>Предельный переход.</i>	49
5.6. <i>Разрешимость в исходном множестве.</i>	50
5.7. <i>Единственность решения.</i>	51
6. ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СДН	53
6.1. <i>Построение модели цепи с ограничителем тока.</i>	53
6.2. <i>Исследование работы цепи с ограничителем тока.</i>	55
6.3. <i>Модель цепи с относительным ограничителем тока в виде СДН.</i>	55
6.4. <i>Исследование работы цепи с относительным ограничителем тока.</i>	57
6.5. <i>Сравнение результатов численных экспериментов для двух ограничителей тока.</i>	60
6.6. <i>Упражнения.</i>	61
7. МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ЧИСЛЕННОСТИ	62
7.1. <i>Классическая модель биологической системы «хищник-жертва».</i>	62
7.2. <i>Положения равновесия классической модели, анализ их устойчивости.</i>	63
7.3. <i>Фазовый портрет системы.</i>	63
7.4. <i>О причинах возникновения предельных циклов.</i>	65
7.5. <i>Автоколебания в обобщённой системе «хищник-жертва».</i>	68
7.6. <i>Упражнения.</i>	70
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>70</b>

## 1. Введение

### 1.1. Пример электрической цепи с идеальным диодом.

Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 1.1. Напомним, что входящие в нее линейные элементы  $L$  (индуктивность),  $R$  (сопротивление),  $E$  (источник эдс – электродвижущей силы) описываются уравнениями:

$$L \frac{di_L}{dt} = u_L, \quad Ri_R = u_R, \quad u_E = -e(t).$$

Параметры  $L$  (Гн, *генри*),  $R$  (Ом, *ом*) – заданные положительные константы; значения известной функции времени  $e(t)$  измеряются в *вольтах* (В). Функции времени  $i$  (А, *ампер*),  $u$  (В, *вольт*) с соответствующими индексами обозначают *токи* и *напряжения* элементов в выбранном направлении, которое на рисунке обозначено стрелкой.

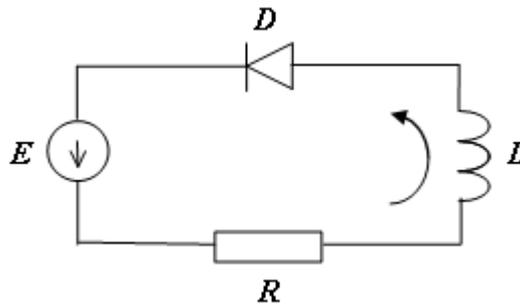


Рис. 1.1

*Идеальный диод*  $D$  – это элемент, свободно проводящий ток в направлении стрелки (от *анода* к *катоде*) и не проводящий его в обратном направлении. При отрицательном *анодном* напряжении ( $u_D < 0$ ) *анодный* ток равен нулю ( $i_D = 0$ ); при нулевом ( $u_D = 0$ ) – может принимать любое неотрицательное значение ( $i_D \geq 0$ ); положительное значение *анодного* напряжения невозможно. Другими словами, для идеального диода зависимость *анодного* тока от *анодного* напряжения можно описать системой трех соотношений:

$$\begin{cases} i \geq 0, \\ u \leq 0, \\ iu = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Графически эта зависимость изображена на следующем рисунке 1.2. Полученную ломаную можно трактовать как график многозначной функции

$$i \in D(u) := \begin{cases} \{0\}, & \text{если } u < 0, \\ [0, +\infty), & \text{если } u = 0, \text{ или обратной многозначной функции} \\ \emptyset, & \text{если } u > 0 \end{cases}$$

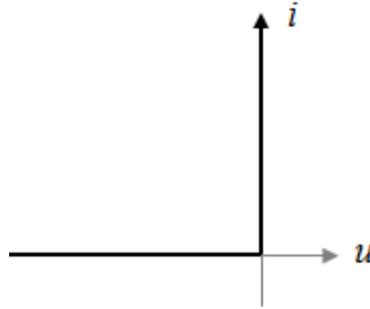


Рис. 1.2

$$u \in D^{-1}(i) := \begin{cases} \{0\}, & \text{если } i > 0, \\ (-\infty, 0], & \text{если } i = 0, \\ \emptyset, & \text{если } i < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Для данной цепи воспользуемся вторым законом Кирхгофа, по которому сумма напряжений элементов по замкнутому контуру равна нулю:

$$u_L + u_R + u_D + u_E = 0.$$

Воспользовавшись уравнениями линейных элементов и замечая, что токи всех элементов в неразветвленной цепи одинаковы ( $i_L = i_R = i_D =: i$ ), получаем уравнение с двумя неизвестными  $i$  и  $u := u_D$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) - u.$$

Для полноты описания цепи к нему нужно присоединить соотношения (1.1) или многозначную зависимость (1.2)  $u$  от  $i$ . В последнем случае математическая модель цепи принимает вид *дифференциального включения*:

$$L \frac{di}{dt} \in e(t) - Ri - D^{-1}i.$$

В дальнейшем нам будет удобно записывать его с единичным коэффициентом при производной:

$$\frac{di}{dt} \in E(t) - \delta i - D^{-1}(i);$$

здесь

$$E(t) := \frac{e(t)}{L}, \quad \delta := \frac{R}{L}$$

и, заметим,  $D^{-1}(i) / L = D^{-1}(i)$ .

Для связи с дальнейшим нам будет удобно также использовать следующие обозначения и термины:  $[0, +\infty) =: Q$  – фазовое пространство данной цепи,  $D^{-1}(i) = N_i$  – нормальный конус к фазовому пространству  $Q$  точке  $i \in Q$ . Окончательно математическая модель рассматриваемой цепи принимает вид дифференциального включения в фазовом пространстве  $Q$ :

$$\frac{di}{dt} \in E(t) - \delta i - N_i. \quad (1.3)$$

### 1.2. Частная ситуация.

Рассмотрим изменение тока в цепи рис.1.1 для того частного случая, когда  $e(t) \equiv -1$ ,  $L=1$ ,  $R=1$ ,  $i(0)=1$ . Соотношение (1.3) при этом имеет вид

$$\frac{di}{dt} \in -1 - i - N_i;$$

при  $i > 0$  оно эквивалентно равенству

$$\frac{di}{dt} = -1 - i \quad (N_i = \{0\}), \quad (*)$$

а при  $i = 0$  – соотношению

$$\frac{di}{dt} \in [-1, +\infty) \quad (N_i = N_0 = (-\infty, 0]). \quad (**)$$

Решив дифференциальное уравнение (\*) при заданном начальном значении  $i(0)=1$ , получим:

$$i = 2e^{-t} - 1.$$

Эта функция положительна при  $t \in [0, \ln 2)$ , т.е. является на этом промежутке решением включения (1.3). Далее, функция  $i \equiv 0$  удовлетворяет включению (\*\*). Поэтому непрерывную функцию

$$i = \begin{cases} 2e^{-t} - 1, & \text{если } 0 \leq t < \ln 2, \\ 0, & \text{если } t \geq \ln 2 \end{cases}$$

естественно считать решением рассматриваемой задачи, хотя в точке  $t = \ln 2$  она не имеет производной в обычном смысле: левая производная равна  $-1$ , а правая – нулю.

Описанная здесь ситуация характерна для систем с диодными нелинейностями, поэтому определение решения для таких систем должно допускать отсутствие производной в некоторых точках (но включать требование непрерывности во всех точках). Строгое определение дается ниже в пункте 2.7.

### 1.3. Запись в виде дифференциального уравнения с разрывной правой частью.

Пусть решение  $i(t)$  включения (1.3) имеет в точке  $t = t_1$  (двустороннюю) производную. Если при этом  $i(t_1) > 0$ , то в данной точке выполнено равенство

$$\frac{di}{dt} = E(t) - \delta i. \text{ Если же } i(t_1) = 0, \text{ то и } i'(t_1) = 0, \text{ поскольку в этом случае } t_1 \text{ есть}$$

точка минимума неотрицательной функции  $i(t)$ . Заметим, что в этом случае из включения (1.3) вытекает, что  $E(t_1)$  не может иметь положительное значение, поскольку в противном случае  $i' = 0 \notin E(t) - \delta \cdot 0 - N_i = [E(t), +\infty)$ .

Итак, любое решение включения (1.3) во всех точках, в которых оно имеет двустороннюю производную, удовлетворяет уравнению

$$i' = \begin{cases} E(t) - \delta i, & \text{если } i > 0, \\ 0, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

Для любой точки  $i$  фазового пространства  $Q = [0, +\infty)$  введем понятие *касательного конуса*  $T_i$  к  $Q$  в этой точке:

$$T_i := \begin{cases} (-\infty, +\infty), & \text{если } i > 0, \\ [0, +\infty), & \text{если } i = 0; \end{cases}$$

и обозначим через  $\tau_i$  оператор проектирования на касательный конус  $T_i$ , определяющий для любого вещественного числа ближайшую к нему точку из  $T_i$ . Такая точка всегда существует, причём единственная.

Для  $i > 0$   $\tau_i(E(t) - \delta i) = E(t) - \delta i$ , и, следовательно  $i' = \tau_i(E(t) - \delta i)$ , если производная  $i'$  существует.

$$\text{При } i = 0 \quad \tau_i(E(t) - \delta i) = \tau_0(E(t)) = \begin{cases} E(t), & \text{если } E(t) \in [0, +\infty), \\ 0, & \text{если } E(t) < 0. \end{cases}$$

Если в момент  $t_2$  обнуления  $i$  (т.е.  $i(t) > 0$  на некотором промежутке  $(t_2 - \varepsilon, t_2)$  и  $i(t_2) = 0$ ) значение функции  $E(t_2) < 0$  отделено от нуля, то оператор  $\tau_i$  терпит в точке  $t_2$  разрыв.

С учётом замечания  $E(t_1) \leq 0$  для точек с нулевым значением  $i$  и существующей двусторонней производной  $i'$  приходим к выводу, что решения (1.3) в точках существования  $i'$  удовлетворяет уравнению с разрывной правой частью

$$i' = \tau_i(E(t) - \delta i).$$

#### 1.4. Общий вид системы с диодной нелинейностью.

Будем полагать теперь, что  $Q$  является некоторым произвольным выпуклым замкнутым множеством евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $N_x$  — конус внешних нормалей к  $Q$  в точке  $x \in Q$  и  $T_x$  — касательный конус к  $Q$  в точке  $x$ .  $\tau_x$  — оператор проектирования точек  $\mathbb{R}^n$  на касательный конус  $T_x$ . Строгие определения этих объектов и их свойства мы рассмотрим в параграфе 2.

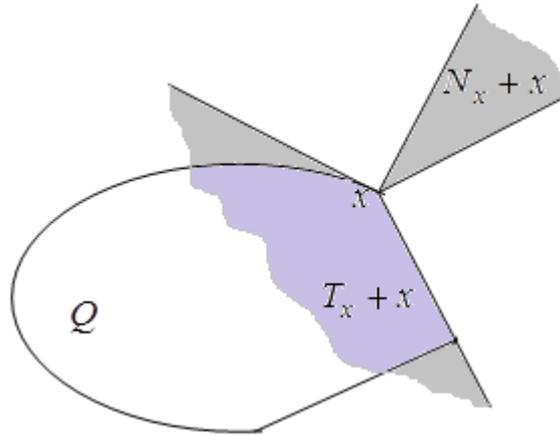


Рис. 1.3

**Определение.** Для функции  $f(t, x)$  систему, записанную в виде дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \tau_x f(t, x) \quad (1.4)$$

или в виде дифференциального включения

$$\dot{x} \in f(t, x) - N_x \quad (1.5)$$

будем называть *системой с диодной нелинейностью (СДН)*.

Эквивалентность (1.4) и (1.5) будет доказана в 2.8, а вначале следующего параграфа поговорим об объектах, входящих в понятие СДН.

## 2. Выпуклые множества и СДН

### 2.1. Определение и примеры.

**Определение.** Подмножество  $Q$  пространства  $\mathbb{R}^n$  называется *выпуклым*, если  $\forall (x \in Q, y \in Q, t \in [0, 1]) [tx + (1-t)y \in Q]$ , т.е. если с любыми двумя своими элементами оно содержит соединяющий их отрезок.

**Упражнения.** Доказать, что следующие множества выпуклы.

1. Пустое множество.
2. Все пространство  $\mathbb{R}^n$ .
3. Подпространство единичной коразмерности, которое можно описать как множество элементов  $x$ , удовлетворяющих при некотором фиксированном ненулевом  $n \in \mathbb{R}^n$  уравнению  $\langle n, x \rangle = 0$  (здесь и в дальнейшем угловыми скобками обозначается стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$  – сумма попарных произведений соответствующих координат), вектор  $n$  называется *нормалью* к данному подпространству.
4. Пересечение любого семейства выпуклых множеств,
5. в частности, любое линейное подпространство  $L$  – пересечение конечного множества подпространств единичной коразмерности, которое можно описать системой уравнений  $\langle n_i, x \rangle = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ) (подпространство  $L$  можно также

описать векторным уравнением  $Nx=0$  с матрицей  $N$ , строками которой являются векторы  $n_i$ )

6. Сдвиг  $Q+s$  выпуклого множества  $Q$  на вектор  $s \in \mathbb{R}^n$ ,
7. в частности, сдвинутое подпространство (аффинное подпространство)  $L+s$ , которое можно также описать неоднородным векторным уравнением  $Nx=c$  с вектором  $c=Ns$ .
8. Полупространство, т.е. множество векторов  $x$ , удовлетворяющих при некотором фиксированном ненулевом  $n \in \mathbb{R}^n$  неравенству  $\langle n, x \rangle \leq 0$ , вектор  $n$  называется *внешней нормалью* к данному полупространству;
9. *Граненый (многогранный) конус* – пересечение конечного набора полупространств.
10. Сдвинутое полупространство  $P+s$  – сдвиг полупространства на некоторый вектор  $s$ , которое можно описать через внешнюю нормаль  $n$  и константу  $c = \langle n, s \rangle$  неравенством  $\langle n, x \rangle \leq c$ .

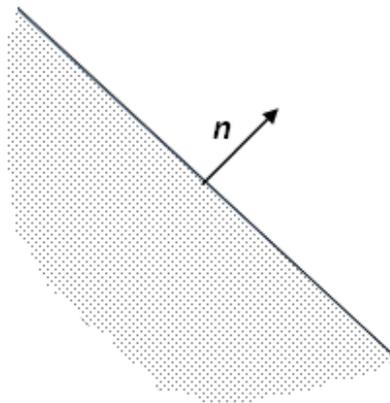


Рис. 2.1: сдвинутое полупространство

11. *Многогранник* – пересечение конечного множества сдвинутых полупространств, его можно описать системой неравенств  $\langle n_i, x \rangle \leq c_i$  ( $i=1, \dots, k$ ).
12. *Выпуклая оболочка*  $\text{co}V$  множества  $V \subset \mathbb{R}^n$ , т.е. множество всех выпуклых комбинаций конечных подмножеств множества  $V$ :  $x \in \text{co}V$  означает, что  $x$  допускает представление  $x = \sum_{j=0}^m \alpha_j v_j$ ,  $v_j \in V$ ,  $\alpha_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=0}^m \alpha_j = 1$  ( $m$  может зависеть от  $x$ ).
13. *Симплекс* размерности  $0 \leq r \leq n$  – выпуклая оболочка множества *вершин*  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ , находящихся в *общем положении*, т.е. таких, что векторы  $\{v_1 - v_0, \dots, v_r - v_0\}$  линейно независимы.
14. Множество, описываемое неравенством  $f(x) \leq 0$  с *выпуклой* функцией  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е. такой, что  $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$  для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$  и  $\alpha \in [0, 1]$ ,

15. в частности, шар радиуса  $R$  с центром в нуле – в этом случае  $f(x) = x^2 - R^2$ ,  $x^2 = \langle x, x \rangle$ .

16. *Конус* – множество  $K \subset \mathbb{R}^n$ , содержащее вместе с любыми своими элементами  $x, y$  их линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами (в частности, все пространство, подпространство, полупространство и граничный конус являются конусами).

В дальнейшем, как правило, рассматриваются замкнутые выпуклые множества.

## 2.2. Проекция на выпуклое замкнутое множество.

**Определение.** Точка  $x \in \mathbb{R}^n$  называется *проекцией* точки  $y \in \mathbb{R}^n$  на множество  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , если она является единственной ближайшей к  $y$  точкой этого множества. В таком случае будем использовать обозначение  $x = P(y, Q)$ .

### Упражнение.

17. Приведите примеры, когда ближайшей точки не существует, и когда ближайшая точка не единственна.

**Утверждение** о существовании проекции. *Если  $Q$  – непустое выпуклое замкнутое множество, то любая точка  $y$  имеет проекцию на это множество.*

**Доказательство.** Пусть  $d = \inf \{ \|y - z\| : z \in Q \}$ ,  $z_n \in Q$ ,  $\|y - z_n\| \leq d + 1/n$ . Последовательность  $(z_n)$  лежит в шаре радиуса  $d + 1$  с центром в точке  $y$ . Поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу  $x$  (пространство конечномерно). Это и есть искомая проекция  $y$  на  $Q$ , поскольку  $x \in Q$  (множество  $Q$  замкнуто) и  $d \leq \|y - x\| \leq d$ , т.е.  $\|y - x\| = d = \min \{ \|y - z\| : z \in Q \}$ . Если предположить, что в  $Q$  есть еще один элемент  $\bar{x}$ , удаленный от  $y$  на такое же расстояние  $d$ , то мы получим, что середина  $\tilde{x}$  отрезка  $[x, \bar{x}]$ , принадлежащая (выпуклому) множеству  $Q$ , удалена от  $y$  на меньшее расстояние – оно равно высоте равнобедренного треугольника  $xy\bar{x}$ , опущенной из вершины  $y$ .

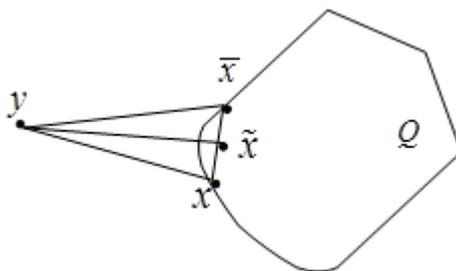


Рис. 2.2

В последнем рассуждении мы применили аргументацию, основанную на элементарной геометрии, и будем пользоваться подобными наглядными соображениями впредь. Они вполне законны, поскольку все евклидовы пространства

одинаковой размерности изоморфны, т.е., в частности, плоскость в  $\mathbb{R}^n$ , содержащая треугольник  $x y \bar{x}$ , изоморфна плоскости, изучаемой в элементарной геометрии.

**Утверждение** об эквивалентном определении проекции. *если  $Q$  – выпуклое замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ , то*

$$x = P(y, Q) \Leftrightarrow x \in Q \wedge \forall (z \in Q) [\langle y - x, z - x \rangle \leq 0]. \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть  $x = P(y, Q)$ . Рассмотрим точку  $x_t = x + t(z - x) = (1 - t)x + tz$ . Очевидно, если  $t \in [0, 1]$ , то  $x_t \in Q$ . Из определения проекции следует, что функция  $\varphi(t) = \|y - x_t\|^2$  при  $t = 0$  принимает минимальное значение, то есть  $\varphi(t) \geq \varphi(0)$  при  $t \in [0, 1]$ . Следовательно,  $\varphi'(0) \geq 0$ . Но

$$\varphi'(0) = \frac{d}{dt} \|y - x - t(z - x)\|^2 \Big|_{t=0} = 2 \langle y - x - t(z - x), -(z - x) \rangle \Big|_{t=0} = -2 \langle y - x, z - x \rangle.$$

Итак,  $\langle y - x, z - x \rangle \leq 0$ .

В другую сторону, если  $x \in Q \wedge \forall (z \in Q) [\langle y - x, z - x \rangle \leq 0]$ , то заметим, что для  $z \in Q$ , в силу выполнения неравенства  $\langle y - x, z - x \rangle \leq 0$  вектора  $(y - x)$  и  $(z - x)$  образуют тупой угол, поэтому  $\|y - z\| \geq \|y - x\|$  (сторона, лежащая против тупого или прямого угла треугольника).

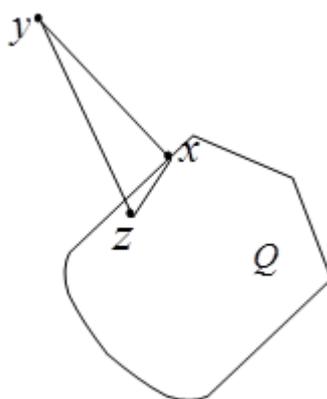


Рис. 2.3

**Утверждение.** *Оператор проектирования на непустое выпуклое замкнутое множество  $Q \in \mathbb{R}^n$  является нерастягивающим.*

Доказательство. Построим две  $(n - 1)$ -мерные плоскости  $L_x$  и  $L_y$ , проходящие через точки  $P(x, Q)$  и  $P(y, Q)$  ортогонально отрезку соединяющему их. Согласно предыдущему утверждению  $\langle x - P(x, Q), P(y, Q) - P(x, Q) \rangle \leq 0$ , поэтому точка  $x$  лежит в замкнутой области с одной стороны от  $L_x$ , а  $P(y, Q)$  с другой стороны. Аналогично, в силу  $\langle y - P(y, Q), P(x, Q) - P(y, Q) \rangle \leq 0$  точка  $y$  распо-

ложена с одной стороны от  $L_y$ , а  $P(x, Q)$  с другой. Отсюда следует, что отрезок  $[x, y]$  имеет с плоскостями  $L_x$  и  $L_y$  общие точки, а поскольку расстояние между этими плоскостями равно  $\|P(x, Q) - P(y, Q)\|$ , то  $\|P(x, Q) - P(y, Q)\| \leq \|x - y\|$ .

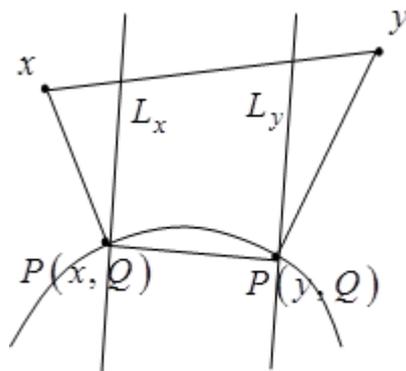


Рис. 2.4

### 2.3. Нормальный конус.

**Определение.** Пусть  $Q$  – выпуклое замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in Q$ . Нормальный конус  $N_x = N_x(Q)$  к  $Q$  в точке  $x$  определяется соотношением:

$$n \in N_x \Leftrightarrow \forall (z \in Q) [\langle n, z - x \rangle \leq 0]. \quad (2.2)$$

Иными словами,  $N_x$  есть множество всех таких векторов  $n$ , что проекции точек  $x + n$  на  $Q$  совпадают с  $x$ .

**Утверждение.**  $N_x$  есть замкнутый конус.

Понятие конуса можно трактовать и определять по-разному. Мы некоторое время будем придерживаться определения, данного в задании 16 упражнения (2.1), но затем дадим другое более удобное для наших задач определение (3.2).

Доказательство. Действительно, если  $n, \bar{n} \in N_x$ ,  $\alpha, \bar{\alpha} \geq 0$  и  $z \in Q$ , то

$$\langle \alpha n + \bar{\alpha} \bar{n}, z - x \rangle = \alpha \langle n, z - x \rangle + \bar{\alpha} \langle \bar{n}, z - x \rangle \leq 0.$$

Следовательно,  $N_x$  есть конус. Далее, если  $n_i \in N_x$  и  $n_i \rightarrow n$  при  $i \rightarrow \infty$ , то

$$\langle n, z - x \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle n_i, z - x \rangle \leq 0,$$

т.е.  $n \in N_x$ . Итак,  $N_x$  – замкнутый конус.

**Упражнения.** Докажите следующие утверждения.

1. Если  $x \in \text{int } Q$  (т.е.  $x$  есть внутренняя точка множества  $Q$ ), то  $N_x = \{\theta\}$  – конус, состоящий из одной нулевой точки.
2. Если  $x$  есть точка сдвинутого подпространства  $Q = \{x : \langle n, x \rangle = c\}$  единичной коразмерности, то  $N_x = \text{lin}\{n\}$  (линейная оболочка одноэлементного множества  $\{n\}$ , т.е. проходящая через ноль прямая с направляющим вектором  $n$ ).

3. Если  $x$  есть граничная точка сдвинутого полупространства  $Q = \{x: \langle n, x \rangle \leq c\}$  (т.е.  $\langle n, x \rangle = c$ ), то  $N_x = \text{con}\{n\}$  – выходящий из нуля луч с направляющим вектором  $n$ , коническая оболочка множества  $\{n\}$ .

4. Если  $Q$  есть пересечение выпуклых замкнутых множеств  $Q_1, Q_2$  и  $x \in Q$ , то

$$N_x = \text{con}[N_x(Q_1) \cup N_x(Q_2)].$$

*Коническая оболочка* произвольного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  определяется как множество всех конечных линейных комбинаций элементов  $M$  с неотрицательными коэффициентами, т.е.  $\text{con} M = \left\{ n: n = \sum_{i=1}^k \lambda_i n_i, n_i \in M, \lambda_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \right\}$ .

5. Если  $Q$  состоит из единственной точки  $x$ , то  $N_x = \mathbb{R}^n$ .

6. Если  $x \in Q_1 \subset Q_2$ , то  $N_x(Q_2) \subseteq N_x(Q_1)$ .

#### 2.4. Сопряженный конус.

**Определение.** Сопряженный конус  $K^*$  к конусу  $K \subset \mathbb{R}^n$  определяется соотношением:

$$y \in K^* \Leftrightarrow \forall (z \in K) [\langle y, z \rangle \leq 0]. \quad (2.3)$$

$$\text{Утверждение. } K^* = N_0(K). \quad (2.4)$$

Действительно, при  $x=0$  определения  $N_x$  и  $K^*$  совпадают.

**Упражнения.** Докажите следующие утверждения.

1. Конус  $K^*$ , сопряжённый к произвольному конусу  $K$  является замкнутым множеством.
2. Замыкание  $\bar{K}$  конуса  $K$  тоже является конусом и  $(\bar{K})^* = K^*$ .
3.  $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_-^n$ .
4. Если  $K$  подпространство, то  $K^*$  тоже, причём каждая пара  $x \in K$  и  $y \in K^*$  ортогональна  $x \perp y$ .
5.  $K^*$  равно пересечению полупространств, внешние нормали которых пробегают конус  $K$ .
6.  $K^*$  является конической оболочкой множества всех внешних нормалей к полупространствам, содержащим конус  $K$ .

#### 2.5. Ортогональное разложение по сопряженным конусам.

Для замкнутого конуса  $K$  пространства  $\mathbb{R}^n$  докажем справедливость следующих утверждений

**Утверждение (а).** Разность  $z = y - x$  между произвольным элементом  $y \in \mathbb{R}^n$  и его проекцией  $x$  на конус  $K$  ортогональна вектору  $x$  и является проекцией  $y$  на сопряженный конус  $K^*$ .

Доказательство. Заметим во-первых, что  $z \in N_x(K)$ , так как проекция точки  $z + x = y$  на  $K$  совпадает с  $x$ . По этой причине  $\langle z, u - x \rangle \leq 0$  для любого  $u \in K$ . Взяв в качестве  $u$  сначала  $2x$ , а затем  $0$ , получим:  $\langle z, 2x - x \rangle = \langle z, x \rangle \leq 0$  и  $\langle z, 0 - x \rangle = -\langle z, x \rangle \leq 0$ . Следовательно,  $\langle z, x \rangle = 0$ , т.е.  $z \perp x$ .

Проверим далее, что  $z \in K^*$ , т.е.  $\langle z, \bar{x} \rangle \leq 0$  для любого  $\bar{x} \in K$ . Действительно,  $\langle z, \bar{x} \rangle = \langle y - x, \bar{x} - x \rangle \leq 0$ , по эквивалентному определению проекции (2.1) для  $x$ . Наконец, по этому же определению убедимся, что  $z$  есть проекция  $y$  на  $K^*$ . Для любого  $\bar{z} \in K^*$  имеем  $\langle y - z, \bar{z} - z \rangle = \langle x, \bar{z} - z \rangle = \langle x, \bar{z} \rangle - \langle x, z \rangle = \langle x, \bar{z} \rangle - 0 \leq 0$ .

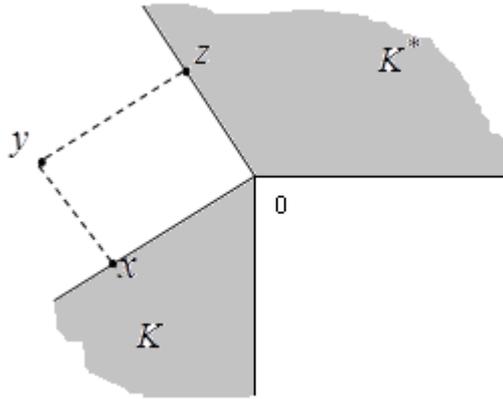


Рис. 2.5 Ортогональное разложение по сопряженным конусам

**Утверждение (б).** Любой элемент  $y \in \mathbb{R}^n$  есть ортогональная сумма своих проекций на  $K$  и  $K^*$ .

Доказательство. Положим  $x = P(y, K)$ ,  $z = P(y, K^*)$ ,  $\bar{z} = y - x$ . Тогда по предыдущему свойству  $\bar{z} \perp x$ ,  $\bar{z} = P(y, K^*)$  и, в силу единственности проекции,  $\bar{z} = z$ ,  $y = x + z$ ,  $x \perp z$ .

**Утверждение (в).** Если элемент  $y$  представлен в виде ортогональной суммы элементов  $x$  из  $K$  и  $z$  из  $K^*$ , то слагаемые  $x$ ,  $z$  являются проекциями этого элемента на соответствующие конусы.

Доказательство. Взяв произвольные  $\bar{x} \in K$  и  $\bar{z} \in K^*$ , убедимся в выполнении свойства проекций (2.1):  $\langle y - x, \bar{x} - x \rangle = \langle z, \bar{x} - x \rangle = \langle z, \bar{x} \rangle - \langle z, x \rangle = \langle z, \bar{x} \rangle - 0 \leq 0$ , аналогично  $\langle y - z, \bar{z} - z \rangle = \langle x, \bar{z} \rangle \leq 0$ .

## 2.6. Касательный конус.

**Определение.** Касательный конус  $T_x$  к выпуклому замкнутому множеству  $Q \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $x \in Q$  есть, по определению, конус, сопряженный к  $N_x$ :

$$z \in T_x \Leftrightarrow \forall (y \in N_x) [\langle z, y \rangle \leq 0] \quad (2.5)$$

На рисунке 2.6 серым цветом и пунктирной линией указаны касательные конуса к области  $Q$  в точках  $x_1, x_2, x_3$ , сдвинутые в соответствующие точки. Касательный конус к внутренней точке  $x_1$  совпадает со всем пространством  $T_{x_1} = \mathbb{R}^n$ , а конус  $T_{x_2}$  является полупространством.

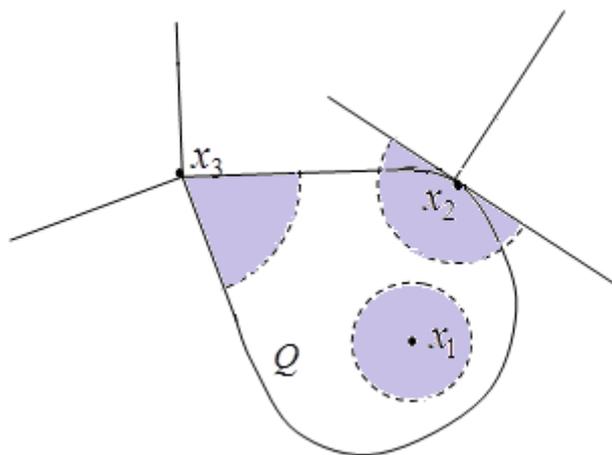


Рис. 2.6

**Упражнения.** Докажите следующие утверждения.

1. Касательный конус  $T_x$  замкнут.
2. Если  $x \in \text{int} Q$  (т.е.  $x$  есть внутренняя точка множества  $Q$ ), то  $T_x = \mathbb{R}^n$  – конус, совпадающий со всем пространством.
3. Если  $x$  есть точка сдвинутого подпространства  $Q = \{x: \langle n, x \rangle = c\}$  единичной коразмерности, то касательный конус совпадает с подпространством  $T_x = \{x: \langle n, x \rangle = 0\}$ .
4. Если  $x$  есть граничная точка сдвинутого полупространства  $Q = \{x: \langle n, x \rangle \leq c\}$  (т.е.  $\langle n, x \rangle = c$ ), то касательный конус совпадает с полупространством  $T_x = \{x: \langle n, x \rangle \leq 0\}$ .
5. Если  $Q$  есть пересечение выпуклых замкнутых множеств  $Q_1, Q_2$  и  $x \in Q$ , то  $T_x = T_x(Q_1) \cap T_x(Q_2)$ .
6. Если  $Q$  состоит из единственной точки  $x$ , то  $T_x = \{\theta\}$  – множество, состоящее только из нулевой точки.

Отметим два существенных для нас свойства касательного конуса. Для функции  $x(t)$ , определённой в окрестности точки  $\bar{t}$ , выполнены следующие утверждения:

**Свойство 1.** если существует правосторонняя производная  $x'_+(\bar{t})$  и  $x(\bar{t} + s) \in Q$  ( $0 \leq s < \varepsilon$ ), то  $x'_+(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$ ; (2.6)

**Свойство 2.** если существует левосторонняя производная  $x'_-(\bar{t})$  и  $x(\bar{t} + s) \in Q$  ( $-\varepsilon \leq s < 0$ ), то  $-x'_-(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$ . (2.7)

Доказательство. Если существует  $x'_+(\bar{t})$ , то по определению нормального конуса

(2.2) для произвольного вектора  $u \in N_{x(\bar{t})}$  справедливо  $\left\langle \frac{x(\bar{t} + s) - x(\bar{t})}{s}, u \right\rangle \leq 0$ ,

из этого неравенства в пределе при  $s \rightarrow +0$  получаем  $\forall (u \in N_{x(\bar{t})}) [\langle x'_+(\bar{t}), u \rangle \leq 0]$ , что означает по (2.5)  $x'_+(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$ . Доказательство свойства 2 отличается тем, что

для вектора  $u \in N_{x(\bar{t})}$  выполняется неравенство  $\left\langle \frac{x(\bar{t} + s) - x(\bar{t})}{-s}, u \right\rangle \leq 0$ , поэтому  $-x'_-(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$ .

## 2.7. Определение решений систем с диодной нелинейностью.

Для вектора  $y \in \mathbb{R}^n$  введём обозначения его проекций на сопряженные конуса  $N_x$  и  $T_x$ , построенных к выпуклому замкнутому множеству  $Q$  в точке  $x$

$$v_x y := P(y, N_x), \quad \tau_x y := P(y, T_x).$$

**Определение.** решения уравнения (1.4). *Решением* дифференциального уравнения (1.4)  $\dot{x} = \tau_x f(t, x)$  (с разрывной по  $x$  правой частью) называется определенная на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (1.4) почти всюду.

**Определение** решения включения (1.5). *Решением* дифференциального включения (1.5)  $\dot{x} \in f(t, x) - N_x$  называется определенная на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (1.5) почти всюду.

## 2.8. Эквивалентность двух записей системы с диодной нелинейностью.

**Утверждение.** *Дифференциальное уравнение* (1.4)  $\dot{x} = \tau_x f(t, x)$  *эквивалентно дифференциальному включению* (1.5)  $\dot{x} \in f(t, x) - N_x$  в том смысле, что они имеют одно и то же множество решений.

Доказательство. 1) Покажем, что любое решение (1.4) является решением (1.5). Предположим, что абсолютно непрерывная на некотором промежутке  $J$  функция  $x$  является решением дифференциального уравнения (1.4), т.е. для почти всех  $t \in J$  выполнено равенство  $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t, x(t))$ . Из утверждения (а) пункта 2.5  $\tau_{x(t)} f(t, x(t)) = f(t, x(t)) - v_{x(t)} f(t, x(t)) \in f(t, x(t)) - N_{x(t)}$ , поэтому выполнено дифференциальное включение (1.5)  $\dot{x}(t) \in f(t, x(t)) - N_{x(t)}$ .

2) Теперь покажем, что любое решение (1.5) является решением (1.4). Пусть функция  $x$  есть решение дифференциального включения (1.5), т.е. для почти всех  $t \in J$  выполнено включение  $\dot{x}(t) \in f(t, x(t)) - N_{x(t)}$ . Тогда найдётся вектор  $u \in N_{x(t)}$  такой, что  $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) - u$ . В точке  $t$   $\dot{x}(t) = x'_+(t) = x'_-(t)$ , по свойствам 1 и 2 пункта 2.6 имеем,  $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}$  и  $\langle \dot{x}(t), u \rangle \leq 0$ , кроме того  $-\dot{x}(t) \in T_{x(t)}$  и  $\langle \dot{x}(t), u \rangle \geq 0$ . Следовательно,  $\langle \dot{x}(t), u \rangle = 0$ , что означает ортогональность векторов  $\dot{x}(t) \perp u$ . С учётом  $f(t, x(t)) = \dot{x}(t) + u$ ,  $u \in N_{x(t)}$ ,  $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}$ ,  $\dot{x}(t) \perp u$  и утверждения (в) 2.5, имеем  $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t, x(t))$ , что и требовалось доказать.

### 3. Модель одного класса электрических цепей с диодными преобразователями

#### 3.1. Примеры диодных преобразователей тока.

В качестве первого примера рассмотрим мостовую схему однофазного двухполупериодного выпрямителя, изображённого на рисунке 3.1. Все узлы 0, 1, 2 и 3 являются в нём внешними, т.е. через них преобразователь может быть присоединён к другим электрическим элементам для образования более сложной цепи.

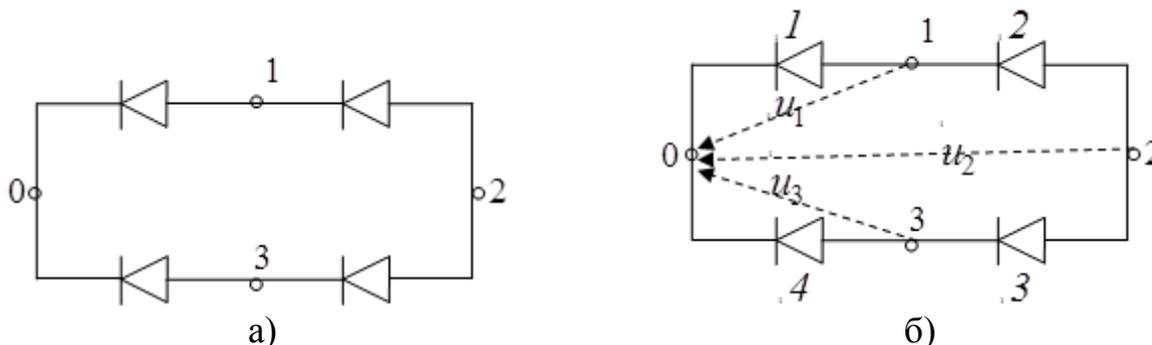


Рис. 3.1

Пронумеруем диоды преобразователя цифрами 1, 2, 3, 4 (рис. 3.1 б)) и обозначим через  $u_1, u_2, u_3$  напряжения между нулевым узлом и узлами 1, 2, 3 соответственно. Тогда напряжения на диодах 1, 2, 3, 4 равны соответственно  $y_1 = u_1$ ,  $y_2 = u_2 - u_1$ ,  $y_3 = u_2 - u_3$ ,  $y_4 = u_3$ . Из того, что напряжение идеальной модели диода (см. 1.1) принимает неположительные значения, получаем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} u_1 \leq 0, \\ u_2 \leq u_1, \\ u_3 \leq 0, \\ u_2 \leq u_3. \end{cases}$$

Каждому неравенству соответствует полупространство в  $\mathbb{R}^3$ , а множеством решений системы является пересечение этих полупространств, т.е. гранёный конус, который обозначим  $K^*$ .

Обозначим вектор внешних токов, входящих в узлы 1, 2 и 3, как  $i = (i_1 \ i_2 \ i_3)$ . Значения этих токов согласно первому закону Кирхгофа, по которому сумма выходящих из любого узла цепи токов равна нулю, выписываются через токи диодов следующим образом (ток, входящий в нулевой узел равен  $-(i_1 + i_2 + i_3)$ )

$$\begin{cases} i_1 = x_1 - x_2, \\ i_2 = x_2 + x_3, \\ i_3 = x_4 - x_3. \end{cases} \text{ или в матричном виде } i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ток на каждом диоде неотрицателен, вектор токов  $i$  принадлежит конической оболочке  $K$  столбцов матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Заметим, что пер-

вый столбец матрицы  $A$  является вектором внешней нормали к подпространству  $u_1 \leq 0$ , второй столбец – к подпространству  $u_2 \leq u_1$ , третий – к подпространству  $u_2 \leq u_3$  и четвёртый – к подпространству  $u_3 \leq 0$ . Это доказывает, что конус  $K^*$  является сопряжённым  $K$ . Кроме того вектор токов  $i$  ортогонален вектору напряжений  $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ . Действительно, выразив из соотношений приведённых выше  $u_2 = y_1 + y_2$  и  $u_3 = y_1 + y_2 - y_4$ , вычислим скалярное произведение  $(i, u)$ , при этом будем помнить, что произведение тока на напряжение для каждого идеального диода равно нулю (1.1).

$$\begin{aligned} \langle i, u \rangle &= i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3 = (x_1 - x_2) y_1 + (x_2 + x_3)(y_1 + y_2) + (x_4 - x_3) y_4 = \\ &= x_1 y_1 - x_2 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_4 - x_3 y_4 = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_4 y_4 + x_3 (y_1 + y_2 - y_4) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили связь между внешними токами и напряжениями рассматриваемого диодного преобразователя в виде:

$$\begin{cases} i \in K, \\ u \in K^*, \\ \langle i, u \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

В качестве второго примера диодного преобразователя возьмём схему трёхфазного двухполупериодного мостового выпрямителя (схема Ларионова) (рис. 3.2).

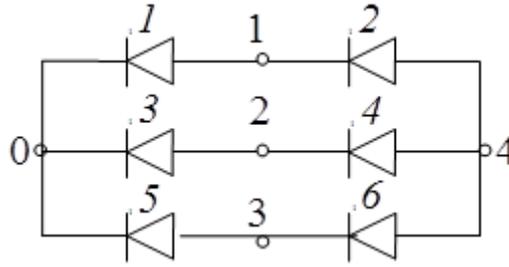


Рис. 3.2

Вводя обозначения  $i = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4)$  – вектор внешних токов, входящих в узлы 1, 2, 3, 4 соответственно, и  $u = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)$  – вектор напряжений между нулевым узлом и узлами 1, 2, 3, 4 читателю предлагается самостоятельно вывести для этого преобразователя соотношение (3.1), в котором  $K$  – коническая оболочка столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а  $K^*$  – пересечение полупространств  $u_1 \leq 0$ ,  $u_4 \leq u_1$ ,  $u_2 \leq 0$ ,  $u_4 \leq u_2$ ,  $u_5 \leq 0$ ,  $u_4 \leq u_5$  является сопряжённым к  $K$  конусом.

Ближайшая наша цель – обоснование того, что сохранение внешним током и напряжением диодного преобразователя основного свойства идеального диода в виде (3.1) не является случайным, присущим только рассмотренным примерам.

Но прежде поговорим о некоторых свойствах конусов и линейных операторов, которые нам потребуются для решения этой поставленной задачи.

### 3.2. Дополнительные сведения о конусах.

Сначала дадим несколько определений, которые в той или иной форме упоминались в упражнениях пункта 2.1.

**Определение.** *Выпуклой комбинацией* произвольного конечного числа точек

$x_1, x_2, \dots, x_s$  называют сумму  $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$  с неотрицательными коэффициентами

$\lambda_i \geq 0$ , сумма которых равна единице  $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ .

**Определение.** *Выпуклой оболочкой*  $coA$  множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  называют множество всех возможных выпуклых комбинаций произвольного конечного числа точек из  $A$ .

**Утверждение.** *Выпуклое множество совпадает со своей выпуклой оболочкой.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  – выпуклое множество. Включение  $A \subset coA$  очевидно. Покажем обратное включение. Выберем произвольно точки  $x_1, x_2, \dots, x_s$

из множества  $A$ . Доказательство того, что их выпуклая комбинация тоже содержится в  $A$  проведём индукцией по числу точек  $s$ .

*База индукции.* Для  $s=1$  выпуклая комбинация совпадает с элементом  $x_1 \in A$ , а при  $s=2$  выпуклая комбинация  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2 \in A$  по определению выпуклости.

*Шаг индукции.* Предположим, что для  $s=k$  любая выпуклая комбинация  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in A$  ( $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ). Покажем, что тогда  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$  ( $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ ) тоже

содержится в  $A$ . Из равенства  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$  имеем  $1 - \lambda_{k+1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k > 0$ , по-

этому  $x = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_{k+1}} x_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k$  является выпуклой комбинацией

из  $k$  элементов, по предположению индукции принадлежащей множеству  $A$ . То-

гда  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{k+1}) x + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in A$ , так как  $A$  выпуклое.

**Определение.** *Конической комбинацией* произвольного конечного числа точек  $x_1, x_2, \dots, x_s$  называют сумму  $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$  с неотрицательными коэффициентами  $\lambda_i \geq 0$ .

Заметим, что выпуклая комбинация является частным случаем конической.

**Определение.** Множество всех конических комбинаций элементов множества  $M$  называют его *конической оболочкой*  $\text{con } M$ .

Напомним, что  $\text{con } M$  – выпуклое множество и что конусом мы называли множество пространства  $\mathbb{R}^n$ , содержащее вместе с любыми двумя своими элементами их коническую комбинацию (упражнения из 2.1). В дальнейшем мы будем пользоваться только замкнутыми выпуклыми конусами, поэтому дадим следующее определение.

**Определение.** Замкнутое выпуклое множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  будем называть *конусом*, если для любого элемента  $x \in K$  и  $\lambda \geq 0$  вектор  $\lambda x \in K$ .

При таком определении выполнено равенство  $K^{**} = (K^*)^* = K$ . Напомним, что мы определили в 2.4 сопряжённый к  $K$  конус равенством

$$K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \forall (x \in K) [\langle x, y \rangle \leq 0] \right\}.$$

Конусы  $K$  и  $K^*$  будем называть взаимно сопряжёнными.

Следующее простое утверждение даёт эквивалентное определение конуса.

**Утверждение.** Если  $K$  – конус, то коническая комбинация  $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$  произвольного конечного числа  $s$  его элементов  $x_1, x_2, \dots, x_s$  тоже принадлежит  $K$ . Другими словами  $K = \text{con}K$ .

Доказательство. Если все коэффициенты конической комбинации нулевые, то она принадлежит  $K$ , так как ноль по определению содержится в любом конусе. В противном случае  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s > 0$  и коническую сумму можно записать в виде  $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ , где  $\sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$  – выпуклая комбинация, принадлежащая  $K$  в силу его выпуклости.

**Утверждение об отделимости.** Если  $y$  не принадлежит конусу  $K$ , то найдётся  $g \in K^*$  такой, что  $\langle y, g \rangle > 0$ .

Доказательство. По утверждению (б) из 2.5  $y$  представим в виде суммы ортогональных элементов  $x = P(y, K)$ ,  $z = P(y, K^*)$ .  $z$  отличен от нуля, так как иначе  $y = x + 0 = x$  был бы элементом  $K$ . В качестве  $g$  возьмём элемент  $z = P(y, K^*) \in K^*$ , тогда скалярное произведение

$$\langle y, g \rangle = \langle x + z, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle z, z \rangle = 0 + \|z\|^2 > 0.$$

**Утверждение.** Любой конус  $K \subset \mathbb{R}^n$  есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств.

Доказательство. Обозначим через  $Q$  пересечение замкнутых полупространств, содержащих  $K$ . Включение  $K \subset Q$  очевидно. Покажем обратное включение. Пусть  $x \notin K$ , тогда по утверждению об отделимости найдётся  $g \in K^*$ , такое, что  $\langle x, g \rangle > 0$ . Полупространство  $\{v : \langle v, g \rangle \leq 0\}$  содержит  $K$ , но не содержит  $x$  (подпространство  $\{v : \langle v, g \rangle = 0\}$  отделяет  $x$  от  $K$ ), поэтому  $x \notin Q$ .

Из этого утверждения следует, что образ конуса при линейном отображении является конусом.

### 3.3. Образ и ядро линейного оператора.

В этом пункте мы кратко напомним хорошо известные определения и свойства линейного оператора в конечномерном пространстве, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть оператор  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  является линейным.

**Определение.** *Образом*  $\text{Im}A$  линейного оператора  $A$  называют множество его значений  $\text{Im}A = \{b \in \mathbb{R}^n : \exists (x \in \mathbb{R}^m) [Ax = b]\}$ . Другими словами  $b \in \text{Im}A$  в том случае, когда линейная неоднородная система  $Ax = b$  разрешима.

**Определение.** Ядром  $\text{Ker}A$  линейного оператора  $A$  называют множество всех решений однородной системы  $Ay = 0$ , т.е.  $\text{Ker}A = \{y \in \mathbb{R}^m : Ay = 0\}$ .

**Определение.** Для линейного оператора  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  сопряжённым ему  $A^*$  называют такой оператор  $A^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , для которого выполнено равенство  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$  для всех  $x \in \mathbb{R}^m$  и  $y \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Если  $E$  – подпространство  $\mathbb{R}^n$ , то  $E^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n : \forall (x \in E)[y \perp x]\}$  называется ортогональным дополнением  $E$ .

Справедливы два утверждения:  $(E^\perp)^\perp = E$  и  $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ , т.е. для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  найдётся единственная пара  $y \in E$  и  $z \in E^\perp$  таких, что  $x = y + z$ .

Если подпространства  $E$  и  $E^\perp$  рассматривать как сопряжённые конуса  $K$  и  $K^*$  (см. задание 5 в упражнении пункта 2.4), то, как мы видели ранее (задания 4 в упражнениях пунктов 2.4 и 2.5), получаются аналогичные утверждения.

**Утверждение.** Для линейного оператора  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  справедливы равенства:

$$1) (\text{Im}A)^\perp = \text{Ker}A^*; 2) (AE)^\perp = (A^*)^{-1}E^\perp; 3) (AK)^* = (A^*)^{-1}K^*. \quad (3.2)$$

Первые два равенства хорошо известны, первое эквивалентно альтернативе Фредгольма для линейного оператора “либо уравнение  $Ax = b$  имеет решение при любой правой части  $b$ , либо сопряжённое к нему уравнение  $A^*y = 0$  имеет нетривиальное решение”. Поэтому здесь приведём доказательство только третьего равенства.

**Доказательство.** Для произвольного  $z \in (AK)^*$  по определению сопряжённого конуса скалярное произведение  $\langle z, y \rangle \leq 0$  при любом  $y \in AK$  ( $y = Ax, x \in K$ ). Это означает, что для всех  $x \in K$   $\langle z, Ax \rangle \leq 0$  или  $\langle A^*z, x \rangle \leq 0$ , откуда  $A^*z \in K^*$  или  $z \in (A^*)^{-1}K^*$ . В этой цепочке рассуждений везде были эквивалентные переходы

$$\begin{aligned} z \in (AK)^* &\Leftrightarrow \forall (y \in AK)[\langle z, y \rangle \leq 0] \Leftrightarrow \forall (x \in K)[\langle z, Ax \rangle \leq 0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (x \in K)[\langle A^*z, x \rangle \leq 0] \Leftrightarrow A^*z \in K^* \Leftrightarrow z \in (A^*)^{-1}K^*, \end{aligned}$$

поэтому равенство  $(AK)^* = (A^*)^{-1}K^*$  доказано.

### 3.4. Граненые конусы.

**Определение.** Конус  $K$  называется *гранёным* (многогранным), если он представим в виде пересечения конечного набора замкнутых полупространств.

Другими словами конус  $K$  в этом случае определяется системой нестрогих неравенств

$$\begin{cases} \langle x, c_1 \rangle \geq 0, \\ \langle x, c_2 \rangle \geq 0, \\ \dots \\ \langle x, c_m \rangle \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

**Упражнения.** Покажите, что следующие множества являются гранёными конусами.

1. Любое замкнутое полупространство.
2. Любое подпространство в  $\mathbb{R}^n$ .
3. Произвольный луч, выходящий из нуля.
4. Пересечение конечного числа гранёных конусов.

**Определение.** Множество  $K'$  решений системы, которая получена из (3.3) заменой некоторых неравенств на равенства, называют *гранью* конуса  $K$ .

**Определение.** Грань  $K'$  называется *минимальной*, если в системе, определяющей её все неравенства (3.3) заменены равенствами.

Минимальная грань, очевидно, содержится в любой другой грани конуса  $K$  и является подпространством  $\mathbb{R}^n$ . Отметим, что каждая грань  $K'$  конуса  $K$  вместе с ним тоже является гранёным конусом, так как равенство  $\langle x, c_i \rangle = 0$  эквива-

лентно системе неравенств  $\begin{cases} \langle x, c_i \rangle \geq 0, \\ \langle x, -c_i \rangle \geq 0. \end{cases}$  Кроме того каждая грань конуса  $K'$  яв-

ляется гранью  $K$ . Заметим ещё, что у гранёного конуса конечное число граней.

**Определение.** Гранёный конус  $K$  называют *заострённым*, если его минимальная грань состоит только из нулевой точки.

**Определение.** Одномерные грани конуса  $K \subset \mathbb{R}^n$  (получаемые заменой  $n-1$  линейно независимых неравенств в (3.3) равенствами) называют *рёбрами*  $K$ .

Заострённый конус имеет рёбра, так как ранг матрицы системы, определяющей минимальную грань для него, равен  $n$ .

**Определение.** Конусом, *натянутым* на множество  $M$  назовём замыкание конической оболочки этого множества, т.е.  $K(M) = \overline{\text{con } M}$ .

**Упражнение.**

5. Покажите, что  $\mathbb{R}^n$  является конусом, натянутым на объединение любого своего базиса  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  с вектором  $x = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ .

**Утверждение.** Любой многогранный конус  $K$  натянут на объединение его минимальной грани с некоторым заострённым конусом.

**Доказательство.** Обозначим через  $K'_{\min}$  минимальную грань и определим  $K_1 = (K'_{\min})^\perp \cap K$ .  $K_1$  – гранёный конус (упражнение 4), причём заострённый, так

как  $K'_{\min}$  пересекается с  $(K'_{\min})^{\perp}$  только в нулевой точке, а как нетрудно проверить система уравнений для минимальной грани конуса  $K_1$  совпадает с системой, описывающей  $\overline{K'_{\min} \cap (K'_{\min})^{\perp}}$ .

Очевидно, что  $\text{con}\{K'_{\min} \cup K_1\} \subset K$ . С другой стороны, для произвольного  $x \in \mathbb{R}^n$  существует разложение  $x = y + z$ ,  $y \in K'_{\min}$ ,  $z \in (K'_{\min})^{\perp}$ . Если  $x \in K$ , то  $z = x + (-y)$ , где  $(-y) \in K'_{\min} \subset K$ , поэтому  $z \in K$ , и следовательно  $z \in K_1$ , а  $x \in \text{con}\{K'_{\min} \cup K_1\}$ .

**Утверждение.** Произвольный элемент  $x$  заострённого конуса  $K$  размерности не меньше двух представим в виде суммы двух элементов  $x = x_1 + x_2$ , принадлежащих граням меньшей, чем  $K$ , размерности.

**Доказательство.** Если  $x$  лежит на одной из граней  $K$  с меньшей размерностью, то  $x = x + 0$  и утверждение выполнено. При ином положении  $x$  возьмём произвольно  $y \in K$ ,  $y \neq 0$  и не коллинеарный  $x$ , построим двумерную плоскость  $E$  по трём точкам ноль,  $x$  и  $y$ .  $K_1 = K \cap E$  является двумерным заострённым конусом (**докажите это**). Построив на его рёбрах параллелограмм с вершиной  $x$ , получим нужные слагаемые (рис. 3.3).

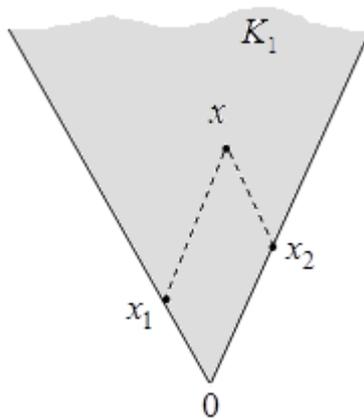


Рис. 3.3

Более строгое аналитическое доказательство можно найти в главе V [1].

**Утверждение.** Любой заострённый конус натянут на свои рёбра.

**Доказательство.** Конус, натянутый на рёбра заострённого конуса  $K$ , содержится в  $K$  очевидным образом. Покажем, что любой элемент  $x \in K$  принадлежит конической комбинации рёбер  $K$ . Доказательство этого факта проведём методом индукции по размерности конуса  $K$ . Если  $K$  одномерный, то он состоит только из ребра и утверждение выполнено. Пусть для заострённых конусов размерности  $r$  утверждение верно, и пусть  $K$  имеет размерность  $2 \leq r+1 \leq n$ . В этом случае по предыдущему утверждению возможно представление  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат граням конуса  $K$  размерности не большей  $r$ . Тогда по предположению

индукции  $x_1$  и  $x_2$  представимы в виде конической комбинации рёбер соответствующих граней и конуса  $K$ , а вместе с ними  $x$  тоже.

**Утверждение.** Любой гранёный конус натянут на конечное множество векторов.

Действительно, гранёный конус  $K$  натянут на  $K'_{\min} \cup K_1$ , где  $K_1$  – заострённый, и поэтому натянут на конечное число векторов,  $K'_{\min}$  является подпространством и тоже натянуто на конечное множество (см. упражнение 5).

**Утверждение.** Если  $K$  – натянут на конечное множество, то  $K^*$  – гранёный конус.

Доказательство. Пусть  $K$  натянут на множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ , и  $P_1, P_2, \dots, P_s$  – полупространства с внешними нормальными  $x_1, x_2, \dots, x_s$  соответственно ( $\langle x_i, y \rangle \leq 0$  при всех  $y \in P_i, i=1, \dots, s$ ). Очевидно  $K^* = \bigcap_{i=1}^s P_i$ .

**Следствие.** Из двух предыдущих утверждений следует, что если один из сопряжённых конусов – гранёный, то и второй тоже.

### 3.5. Диодная нелинейность.

Как показано в п. 2.8, обобщенная система с диодной нелинейностью для выпуклого замкнутого множества  $Q$  может быть записана в виде дифференциального включения (1.5)  $\dot{x} \in f(t, x) - N_x$ .

Значение многозначного оператора  $x \mapsto N_x$ , сопоставляющего любой точке  $x \in Q$  нормальный конус к  $Q$  в этой точке, мы будем обозначать  $N(Q)x$  и называть сам оператор  $N(Q)$  (обобщенной) *диодной нелинейностью, порожденной множеством  $Q$* . В этом параграфе мы рассмотрим важный частный случай – диодную нелинейность  $N(K)$ , порожденную конусом  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Для этого случая отметим

**Свойства диодной нелинейности:**

(а) следующие утверждения эквивалентны

$$y \in N(K)x \Leftrightarrow x = P(y+x, K) \Leftrightarrow x \in K \wedge y \in K^* \wedge y \perp x;$$

$$(б) (N(K))^{-1} = N(K^*).$$

Доказательство. Первая эквивалентность в (а) следует из определения нормального конуса (2.2) и эквивалентного определения проекции (2.1):

$$y \in N(K)x \Leftrightarrow \forall (z \in K) [\langle y, z-x \rangle \leq 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (z \in K) [\langle y+x-x, z-x \rangle \leq 0] \Leftrightarrow x = P(y+x, K).$$

Вторая вытекает из утверждений (а) и (в) об ортогональном разложении по сопряженным конусам (2.5).

Утверждение (б) вытекает из определения обратного отображения и второй эквивалентности в (а):

$$x \in (N(K))^{-1} y \Leftrightarrow y \in N(K)x \Leftrightarrow (x \in K \wedge y \in K^* \wedge x \perp y) \Leftrightarrow x \in N(K^*)y.$$

**Упражнение.**

6. Покажите, что для гранёного конуса  $K$  диодная нелинейность  $N(K)$  ставит в соответствие каждому элементу  $x \in K$  ортогональную  $x$  грань сопряжённого конуса  $K^*$  (пересечение  $(n-1)$ -мерного ортогонального  $x$  подпространства с  $K^*$ ).

### 3.6. Утверждение о линейном преобразовании диодной нелинейности.

Пусть  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  линейные операторы,  $K$  – конус в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда:

$$1) N(AK) = (A^*)^{-1} N(K); \quad (3.4)$$

$$2) N\left(\left(B^*\right)^{-1} K\right) = BN(K). \quad (3.5)$$

Доказательство. Заметим, что первое утверждение другими словами означает (свойство (а) из 3.5), что из соотношений

$$\begin{aligned} i \in K, u \in K^*, i \perp u, \\ Ai = I, u = A^*U \end{aligned} \quad (3.6)$$

следует

$$I \in AK, U \in (AK)^*, I \perp U; \quad (3.7)$$

Действительно,

$$I = Ai \in AK, U \in (A^*)^{-1} K^*, \langle U, I \rangle = \langle U, Ai \rangle = \langle A^*U, i \rangle = \langle u, i \rangle = 0.$$

Остается заметить (см. (3.2)), что

$$(A^*)^{-1} K^* = (AK)^*,$$

и мы получаем соотношения (3.7), а вместе с ними доказательство равенства (3.4).

Второе утверждение (3.5) доказывается аналогично с учетом того, что оно утверждает следование из (3.6) и равенств

$$i = B^*I, U = Bi$$

соотношения

$$I \in (BK^*)^*, U \in BK^*, I \perp U,$$

а также с учётом равенства  $K^{**} = K$  (см. 3.2).

### 3.7. Теорема о внешней характеристике диодного преобразователя

Рассмотрим *диодный преобразователь*, представляющий из себя электрическую цепь из  $t$  идеальных диодов. Все узлы этой цепи мы считаем ее *входами*, т.е. контактами, через которые данный диодный преобразователь может соединяться с другими цепями. Входы (узлы) пронумерованы в каком-то порядке це-

лыми числами от 0 до  $n$ . В каждом диоде положительным направлением тока считается направление от анода к катоду. Ток  $j$ -того диода обозначим через  $x_j$ , напряжение (от анода к катоду) – через  $y_j$ . *Входной ток*, т.е. ток, идущий от внешней цепи к диодному преобразователю через  $k$ -тый вход, будем обозначать  $i_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ); *входное напряжение*, т.е. напряжение между  $k$ -м и нулевым входами –  $u_k$ . Связь между вектором  $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$  анодных токов диодов и вектором  $i=(i_1,i_2,\dots,i_n)$  входных токов по первому закону Кирхгофа запишем в виде уравнения

$$Ax = i. \quad (3.8)$$

Здесь  $A$  – матрица с элементами

$$a_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если анод } j\text{-того диода соединен с } k\text{-тым узлом,} \\ -1, & \text{если катод } j\text{-того диода соединен с } k\text{-тым узлом,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Для нулевого узла мы не пишем уравнение токов, поскольку оно является следствием уже написанных и того факта (гипотезы), что сумма всех входных токов равна нулю.

**Теорема.** *Векторы входных напряжений и входных токов диодного преобразователя связаны оператором диодной нелинейности*

$$u \in N(K)i, \quad (3.10)$$

где конус  $K$  определяется равенством:

$$K = AR_+^m = \text{con}\{A^1, A^2, \dots, A^m\}, \quad A^j - \text{столбцы матрицы } A.$$

Доказательство. Вольтамперную характеристику идеального диода можно записать в виде:

$$x_k \in R_+, y_k \in -R_+, x_k y_k = 0.$$

Это означает, что

$$x \in R_+^m, y \in -R_+^m = (R_+^m)^*, \langle x, y \rangle = 0.$$

Следовательно, зависимость  $y$  от  $x$  описывается оператором диодной нелинейности:

$$y \in N(R_+^m)x. \quad (3.11)$$

Отметим связь анодных напряжений диодов с входными напряжениями. Пусть  $k(j,+)$  есть номер узла, с которым соединен анод  $j$ -того диода, а  $k(j,-)$  – соответствующий номер узла для катода. Тогда

$$y_j = u_{k(j,+)} - u_{k(j,-)}.$$

В матрице  $A$  у столбца с номером  $j$  ненулевыми могут быть только элементы с номерами  $k(j,+)$  и  $k(j,-)$ . Если один из этих номеров равен нулю, то соответ-

ствующее входное напряжение также равно нулю. Сказанное позволяет сделать вывод, что

$$y = A^* u. \quad (3.12)$$

Теперь из (3.11) и (3.12) в силу утверждения о линейном преобразовании диодной нелинейности вытекает (3.10).

### 3.8. Пример: двухполупериодный выпрямитель с цепями питания и нагрузки.

На примере электрической цепи, изображенной на рисунке 3.4, продемонстрируем процесс получения модели в виде СДН.

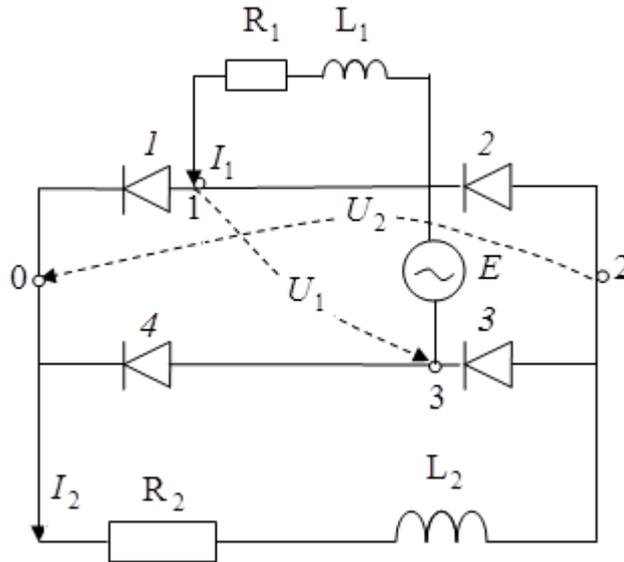


Рис. 3.4

Итак, составим систему уравнений цепи (рис. 3.4), для этого введём обозначения. Ток *цепи питания*  $EL_1R_1$  обозначим через  $I_1$ , *цепи нагрузки*  $L_2R_2$  – через  $I_2$ . Выбор положительных направлений отмечен стрелками. Входное напряжение цепи питания (между узлами 1 и 3) обозначим через  $U_1$ , цепи нагрузки (между узлами 0 и 2) – через  $U_2$ . Уравнения этих цепей можно записать в виде:

$$\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 + R_1 I_1 + U_1 &= E(t), \\ L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 + U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используем обозначения,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  – векторы анодных токов и напряжений диодов,  $i = (i_1, i_2, i_3)$  и  $u = (u_1, u_2, u_3)$  – внешних токов и напряжений диодного преобразователя. По теореме о внешней характеристике диодного преобразователя 3.7  $u \in N(K)i$  (21), где  $K = AR_+^4$ , а линейный оператор

$A$  определяется матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  (см. упражнение 1 пункта 3.1).

Заметим, что входные токи и напряжения  $I, U$  внешних цепей связаны с входными токами и напряжениями  $i, u$  диодного преобразователя равенствами:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} I, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} u.$$

Из утверждения о линейном преобразовании диодной нелинейности 3.6 получаем:

$$U \in BK^*, I \in (BK^*)^*, \text{ где } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение  $K_1 := (BK^*)^*$ . Тогда математическая модель рассматриваемой цепи будет представлена уравнениями (3.13) и соотношениями

$$I \in K_1, U \in K_1^*, I \perp U.$$

В дифференциальных уравнениях этой системы коэффициенты при производных не равны единице, поэтому она еще не полностью приведена к виду системы с диодной нелинейностью. Чтобы завершить преобразование, сделаем еще одну линейную замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{L_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{L_2} \end{pmatrix} I =: X, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{L_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{L_2} \end{pmatrix} Y =: U.$$

Тогда модель запишется в виде дифференциального включения:

$$\dot{X} \in e(t) - rX - N(K_2)X, \text{ где} \quad (3.14)$$

$$e(t) := \begin{pmatrix} E(t)/\sqrt{L_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r := \begin{pmatrix} R_1/L_1 & 0 \\ 0 & R_2/L_2 \end{pmatrix}, \quad K_2 := \begin{pmatrix} \sqrt{L_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{L_2} \end{pmatrix} K_1.$$

Ее можно также записать в виде уравнения:

$$\dot{X} = \tau_x [e(t) - rX]. \quad (3.15)$$

Здесь  $\tau_x$  – оператор проектирования на конус, касательный к  $K_2$  в точке  $X$ .

Для данного примера цепи конус  $K_1$  можно найти непосредственно, не производя последовательно приведенных выше преобразований. Заметим (см. рисунок 3.4), что справедливы следующие равенства:

$$I_1 = x_1 - x_2, \quad I_2 = x_1 + x_4 = x_2 + x_3.$$

Из них получаются соотношения между  $I_1, I_2$ :

$$I_1 + I_2 = x_1 + x_3 \geq 0, \quad I_1 - I_2 = -x_2 - x_4 \leq 0.$$

Итак,

$$I \in K_1 \Rightarrow I_2 \geq -I_1 \wedge I_2 \geq I_1.$$

Аналогичные соотношения справедливы для напряжений  $U_1, U_2$ :

$$U_1 = y_1 - y_4, \quad U_2 = y_2 + y_1 = y_3 + y_4; \\ U_1 + U_2 = y_1 + y_3 \leq 0, \quad U_1 - U_2 = -y_4 - y_2 \geq 0;$$

$$U \in K_1^* \Rightarrow U_2 \leq -U_1 \wedge U_2 \leq U_1 .$$

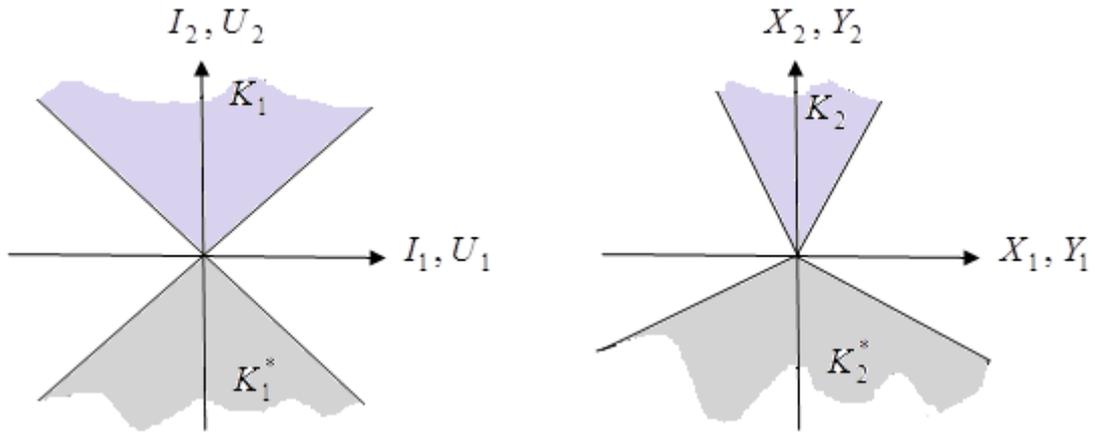
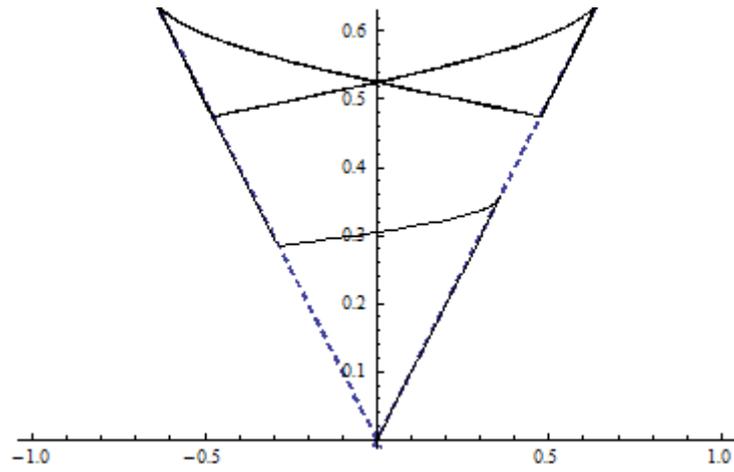
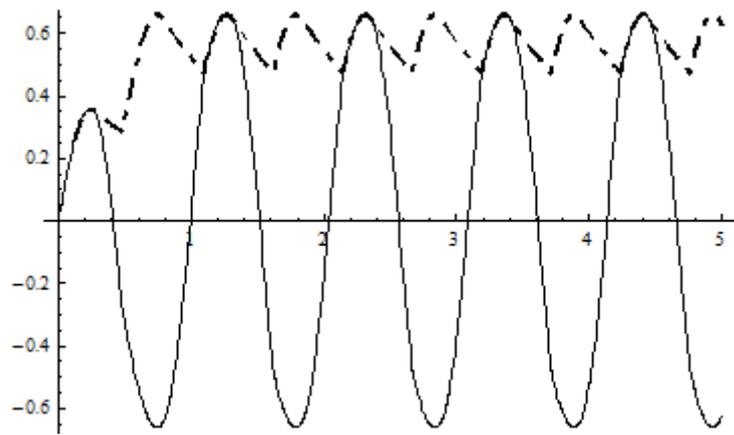
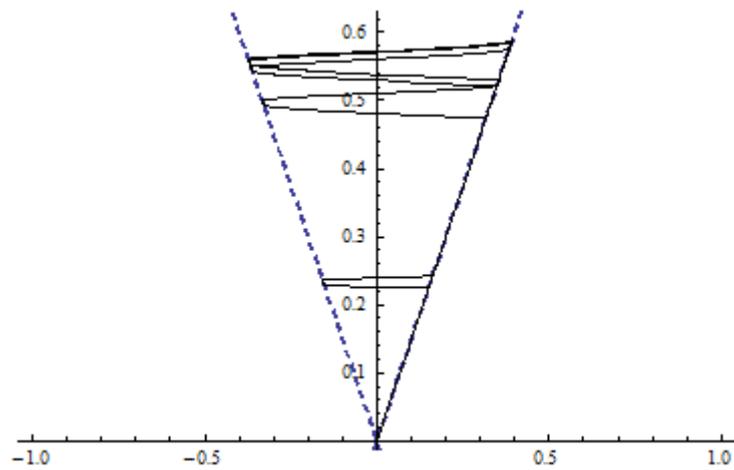


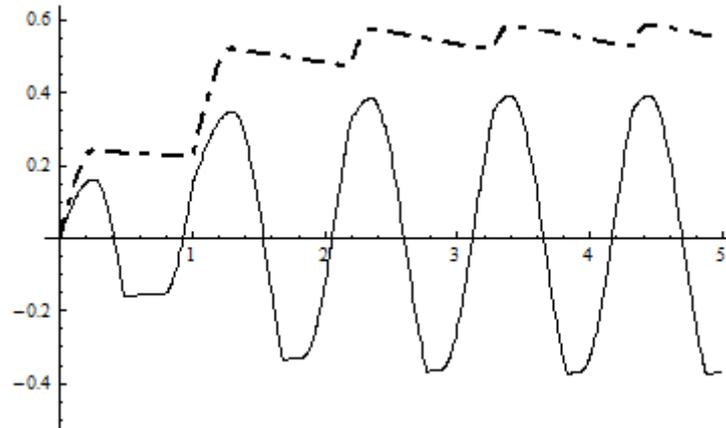
Рис. 3.5

### 3.9. Численные эксперименты.

Здесь приведены результаты работы компьютерной программы, реализующей математическую модель электрической цепи, описанной в предыдущем пункте 3.8, в виде графиков. Модель цепи реализована для частного случая  $L_1 = R_1 = L_2 = R_2 = 1$ ,  $E(t) = 5 \cos 6t$  и нулевым начальным условием. На рисунке 3.6 изображена фазовая траектория вектора  $X$  (совпадающего при данных параметрах с  $I$ ), которая совершает начальный подъём по правой границе конуса  $K_2$  с последующим переходом на периодические колебания между правым и левым ограничивающими конус лучами. На рисунке 3.7 изображены графики координат вектора  $X$ , демонстрирующие основную задачу диодного преобразователя данной цепи как выпрямителя тока: сплошной линией отмечена первая координата  $X_1$ , совпадающая с током цепи питания, пунктирная – вторая координата  $X_2$ , совпадающая с током цепи нагрузки.

График на рисунке 3.8 иллюстрирует деформацию конуса  $K_2$  при изменении параметров индуктивностей  $L_1 = 4$ ,  $L_2 = 9$ . Асимметричность периодических колебаний на этом графике объясняется изменением соотношения между параметрами индуктивностей. Рисунок 3.9 аналогичен рисунку 3.7 и соответствует изменённым параметрам индуктивностей.

Рис. 3.6 Фазовый портрет  $I$ .Рис. 3.7 Графики токов  $I_1$  и  $I_2$ .Рис. 3.8 Фазовый портрет  $X$ .

Рис. 3.9 Графики координат  $X$ .

### 3.10. Условие существования модели в виде СДН для электрической цепи с диодами.

Элементы источников тока и напряжения будем обозначать буквой  $S$ , сопротивления –  $R$ , ёмкости –  $C$ , индуктивности –  $L$ , диодов –  $D$ .

Рассмотрим электрическую связную цепь, состоящую из элементов  $S$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $L$  и  $D$ .

В теории электрических цепей для того, чтобы выписать законы Кирхгофа, строят тем или иным образом дерево графа цепи, включающее в себя все узлы графа и не содержащее ни одного контура. Ветви (элементы), не вошедшие в дерево, называют *ветвями связи*, каждая из них замыкает в точности один *главный контур*, содержащий помимо данной ветви только ветви дерева. С другой стороны, каждая ветвь дерева образует ровно одно *главное сечение* – набор ветвей, включающий помимо данной ветви дерева все те ветви связи, главные контуры которых содержат выбранную ветвь дерева. Если обозначить через  $\bar{U}$  вектор напряжений, через  $\bar{I}$  – вектор токов в ветвях связи, а за через  $U$  и  $I$  – в ветвях дерева, то уравнения главных контуров  $\bar{U} = M \cdot U$  будут связаны с уравнениями главных сечений  $I = -M^* \cdot \bar{I}$  общей матрицей  $M$  [2].

Обозначим через  $D_1$  множество всех диодов, параллельно подключенных в рассматриваемой цепи к ёмкостям (то есть образующих контур с одной из ёмкостей цепи), а количество диодов в  $D_1$  через  $k_1$ . Остальную часть диодов цепи обозначим  $D_2$  и число элементов в ней –  $k_2$ . Пронумеровав отдельно диоды в  $D_1$  и  $D_2$  в произвольном порядке, сформируем диодный преобразователь  $D$  следующим образом. Все элементы  $D_1$  присоединим к преобразователю, считая их его ветвями и обозначим эту часть через  $D_1$ , а из элементов  $D_2$  построим диодный преобразователь  $D_2$  так, как описано в 3.7, присоединив его к  $D$ . Рассмотрим вектора  $x := (y_1, y_2, \dots, y_{k_1}, x_1, x_2, \dots, x_{k_2})$  –  $k_1$  анодных напряжений диодов  $D_1$ ,  $k_2$  анодных токов диодов  $D_2$  и  $y := (x_1, x_2, \dots, x_{k_1}, y_1, y_2, \dots, y_{k_2})$  –  $k_1$  анодных токов

диодов  $D_1$ ,  $k_2$  анодных напряжений диодов  $D_2$ . Эти вектора принадлежат взаимно сопряжённым конусам  $\mathbf{R}_-^{k_1} \times \mathbf{R}_+^{k_2}$ ,  $\mathbf{R}_+^{k_1} \times \mathbf{R}_-^{k_2}$  и их скалярное произведение равно нулю, то есть они связаны оператором диодной нелинейности. Тогда смешанный вектор анодных напряжений на диодах части  $D_1$  и токов на входах преобразователя  $D_2$  выражается через  $x$  равенством

$$v := (u_1, u_2, \dots, u_{k_1}, i_1, i_2, \dots, i_n) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot x,$$

здесь матрица  $A$  из 3.7, а  $E$  – единичная матрица размерности  $k_1$ .

$u := (i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, u_1, u_2, \dots, u_n)$  – вектор токов диодов части преобразователя  $D_1$ , и напряжений в ветвях части  $D_2$  связан с  $u$  равенством

$$y = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^* u = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} u \quad (\text{смотри 3.7}).$$

Поэтому в силу утверждения 3.6 оператором диодной нелинейности связаны вектора  $u$  и  $v$ .

Будем предполагать, что электрическая цепь удовлетворяет следующему условию:

*любой путь цепи из линейных элементов  $S$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $L$ , соединяющий два входа части  $D_2$  диодного преобразователя, содержит хотя бы одну индуктивность.* (LC-условие)

Теперь разобьём все элементы цепи на шесть групп: 1)  $C$ ; 2)  $D_2$ ; 3)  $S$ ; 4)  $R$ ; 5)  $L$ ; 6)  $D_1$ . Внутри группы 1) первыми пронумеруем ёмкости, параллельно присоединённые к диодам из  $D_1$ , а затем остальные ёмкости в произвольном порядке. Внутри групп 3), 4), 5) пронумеруем элементы в произвольном порядке, а во второй и шестой группах оставим нумерацию от формирования преобразователя  $D$ . Построим дерево цепи, перебирая группы и элементы внутри групп согласно выбранной нумерации, будем присоединять элемент к дереву всякий раз, когда он не образует ни одного контура с включёнными ранее в дерево элементами.

Например, для каждой из двух изображённых на рисунке 3.10 цепей выполняется LC-условие, их деревья отмечены жирными линиями. По приведённому алгоритму в дерево цепи слева сначала включаются ветви 1, 2 и 3 диодного преобразователя, построенного на множестве диодов цепи (они отмечены серым цветом), затем ветвь источника напряжения  $E$ . Наконец последними присоединяются ветви сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ . Ветви  $L_1$  и  $L_2$  являются здесь ветвями связей. Для этой цепи множества  $C$  и  $D_1$  пусты. Дерево цепи справа состоит только из одной ветви ёмкости  $C$ , остальные являются ветвями связи. Для этой цепи множества  $L$  и  $D_2$  пусты.

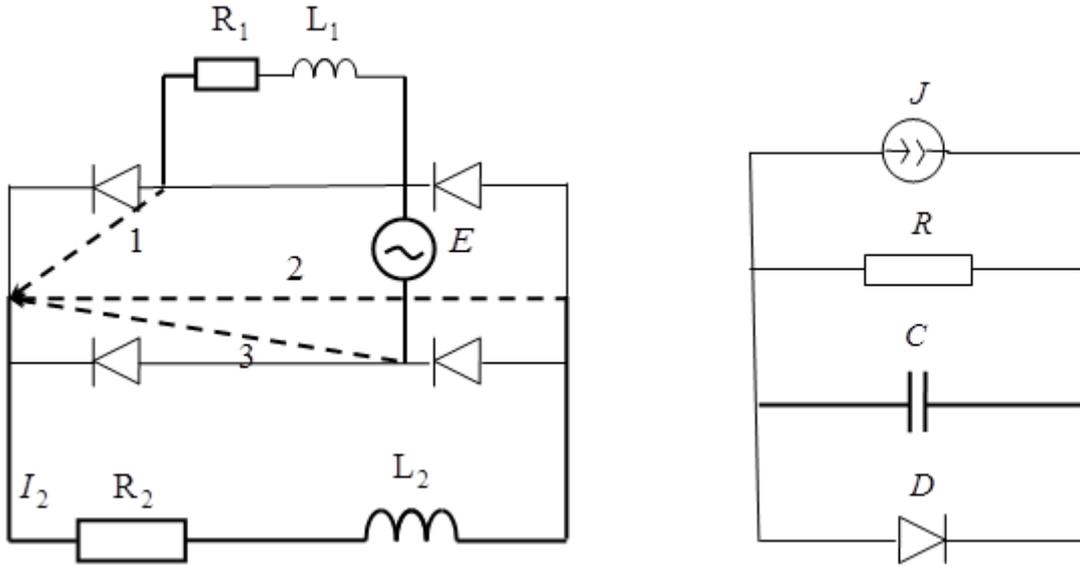


Рис. 3.10

Из описания процедуры построения дерева и  $LC$ -условия очевидно следует, что все ветви  $D_2$  войдут в дерево, а все диоды  $D_1$  будут ветвями связи.

После того как дерево будет построено, перенумеруем в каждой группе отдельно элементы дерева и элементы связи (не вошедшие в дерево) в порядке старой нумерации. Токи и напряжения ветвей связи будем помечать чертой вверх. Отметим, что нумерация в диодном преобразователе не изменится.

В результате уравнения главных контуров и главных сечений по построенному дереву запишутся в следующем виде.

$$\bar{u}_C = M_{11}u_C, \quad (1к)$$

$$(2к)$$

$$\bar{u}_S = M_{31}u_C + M_{33}u_S, \quad (3к)$$

$$\bar{u}_R = M_{41}u_C + M_{43}u_S + M_{44}u_R, \quad (4к)$$

$$\bar{u}_L = M_{51}u_C + M_{52}u_{D_2} + M_{53}u_S + M_{54}u_R + M_{55}u_L, \quad (5к)$$

$$\bar{u}_{D_1} = M_{61}u_C, \quad (6к)$$

$$i_C = -M_{11}^* \bar{i}_C - M_{31}^* \bar{i}_S - M_{41}^* \bar{i}_R - M_{51}^* \bar{i}_L - M_{61}^* \bar{i}_{D_1}, \quad (1с)$$

$$i_{D_2} = -M_{52}^* \bar{i}_L, \quad (2с)$$

$$i_S = -M_{33}^* \bar{i}_S - M_{43}^* \bar{i}_R - M_{53}^* \bar{i}_L, \quad (3с)$$

$$i_R = -M_{44}^* \bar{i}_R - M_{54}^* \bar{i}_L, \quad (4с)$$

$$i_L = -M_{55}^* \bar{i}_L. \quad (5с)$$

Добавим для полноты математического описания уравнения индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений цепи

$$\bar{L} \cdot \bar{i}_L' = \bar{u}_L, \quad L \cdot i_L' = u_L, \quad \bar{C} \cdot \bar{u}_C' = \bar{i}_C, \quad C \cdot u_C' = i_C, \quad \bar{u}_R = \bar{R} \cdot \bar{i}_R, \quad u_R = R \cdot i_R. \quad (уэ)$$

Здесь  $\bar{L}$ ,  $L$ ,  $\bar{C}$ ,  $C$ ,  $\bar{R}$ ,  $R$  – диагональные матрицы с положительными числами на диагонали.  $u_S$  и  $\bar{i}_S$  будем считать известными функциями, это означает, что все

источники напряжения входят в дерево, а источники тока являются ветвями связи, в противном случае схема может оказаться противоречивой.

Теперь займёмся преобразованием системы выписанных нами уравнений. Сначала исключим  $u_L$  и  $\bar{i}_c$  из уравнений (5к), (1с) продифференцировав (1к), (5с) и воспользовавшись (уэ).

$$\begin{aligned}\bar{u}_C' &= M_{11}u_C' \Rightarrow \bar{C}\bar{u}_C' = \bar{C}M_{11}C^{-1}Cu_C' \Rightarrow \bar{i}_c = \bar{C}M_{11}C^{-1}i_c, \\ i_L' &= -M_{55}^*\bar{i}_L' \Rightarrow Li_L' = -LM_{55}^*\bar{L}^{-1}\bar{L}\bar{i}_L' \Rightarrow u_L = -LM_{55}^*\bar{L}^{-1}\bar{u}_L.\end{aligned}$$

Подставим найденные выражения  $u_L$ ,  $\bar{i}_c$  в (5к), (1с)

$$\left(\bar{L} + M_{55}LM_{55}^*\right)\bar{L}^{-1}\bar{u}_L = M_{51}u_C + M_{52}u_{D1} + M_{53}u_S + M_{54}u_R, \quad (3.16)$$

$$\left(C + M_{11}^*\bar{C}M_{11}\right)C^{-1}i_c = -M_{31}^*\bar{i}_S - M_{41}^*\bar{i}_R - M_{51}^*\bar{i}_L - M_{61}^*\bar{i}_{D1}. \quad (3.17)$$

Введём обозначения  $A = \bar{L} + M_{55}LM_{55}^*$  и  $B = C + M_{11}^*\bar{C}M_{11}$ , умножим уравнения элементов индуктивностей связи и ёмкостей дерева на  $A\bar{L}^{-1}$ ,  $BC^{-1}$  соответственно, после чего воспользуемся равенствами (3.16), (3.17)

$$A\bar{i}_L' = M_{51}u_C + M_{52}u_{D2} + M_{53}u_S + M_{54}u_R, \quad (3.18)$$

$$Bu_C' = -M_{31}^*\bar{i}_S - M_{41}^*\bar{i}_R - M_{51}^*\bar{i}_L - M_{61}^*\bar{i}_{D1}. \quad (3.19)$$

Исключим из этих равенств  $\bar{i}_R$ ,  $u_R$ . Сначала найдём  $\bar{i}_R$  из (4к) с использованием уравнений элементов сопротивлений и уравнения (4с)

$$\left(\bar{R} + M_{44}RM_{44}^*\right)\bar{i}_R = M_{41}u_C + M_{43}u_S - M_{44}RM_{54}^*\bar{i}_L,$$

здесь матрица  $R_1 = \left(\bar{R} + M_{44}RM_{44}^*\right)$  симметрична и положительно определена, поэтому имеет обратную

$$\bar{i}_R = R_1^{-1}M_{41}u_C + R_1^{-1}M_{43}u_S - R_1^{-1}M_{44}RM_{54}^*\bar{i}_L. \quad (3.20)$$

Теперь выразим напряжения и остальные токи сопротивлений. Подставляя (3.20) в уравнение сопротивления, получим

$$\bar{u}_R = \bar{R}R_1^{-1}M_{41}u_C + \bar{R}R_1^{-1}M_{43}u_S - \bar{R}R_1^{-1}M_{44}RM_{54}^*\bar{i}_L,$$

а подставляя (3.20) в (4с), получим

$$i_R = -M_{44}^*R_1^{-1}M_{41}u_C - M_{44}^*R_1^{-1}M_{43}u_S + \left(M_{44}^*R_1^{-1}M_{44}R - E\right)M_{54}^*\bar{i}_L.$$

Наконец  $u_R = -RM_{44}^*R_1^{-1}M_{41}u_C - RM_{44}^*R_1^{-1}M_{43}u_S + R\left(M_{44}^*R_1^{-1}M_{44}R - E\right)M_{54}^*\bar{i}_L.$

Введём дополнительные обозначения  $x = \left(\bar{i}_L, u_C\right)$ ,  $y = \left(\bar{i}_S, u_S\right)$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ,

$$A_2 = \begin{pmatrix} M_{54}R\left(M_{44}^*R_1^{-1}M_{44}R - E\right)M_{54}^* & M_{51} & -M_{54}RM_{44}^*R_1^{-1}M_{41} \\ M_{41}^*R_1^{-1}M_{44}RM_{54}^* - M_{51}^* & & -M_{41}^*R_1^{-1}M_{41} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -M_{52} \\ M_{61}^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & M_{53} - M_{54} R M_{44}^* R_1^{-1} M_{43} \\ -M_{31}^* & -M_{41}^* R_1^{-1} M_{43} \end{pmatrix} \text{ и запишем вектора } u \text{ и } v \text{ в виде}$$

$u = (\bar{i}_{D_1}, u_{D_2})$ ,  $v = (\bar{u}_{D_1}, i_{D_2})$ . Теперь равенства (3.18) и (3.19) запишем следующим образом

$$A_1 x' = A_2 x - A_3 u + A_4 y. \quad (3.21)$$

А уравнения (6к), (2с) в виде  $v = A_3^* x$ .

Напомним, что мы считаем  $y$  известной функцией времени  $t$ , определяющей работу источников тока и напряжения. Заметим, что  $A_1$  является симметричной положительно определённой матрицей и имеет обратную. Вводя обозначения  $X = A_1^{1/2} x$ ,  $U = A_1^{-1/2} A_3 u$ ,  $f(t, X) = A_1^{-1/2} A_2 A_1^{-1/2} X + A_1^{-1/2} A_4 y$ , заметим, что  $v = A_3^* A_1^{-1/2} X$ . Умножая (3.21) на  $A_1^{-1/2}$ , получим

$$X' = f(t, X) - A_1^{-1/2} A_3 u. \quad (3.22)$$

Вектора диодного преобразователя  $u$ ,  $v$  связаны, как мы выяснили ранее, оператором диодной нелинейности, поэтому в силу утверждения 3.6 с учётом выражения  $v$  через  $X$  можно утверждать, вектор  $A_1^{-1/2} A_3 u$  связан с  $X$  оператором диодной нелинейности  $N(K)$ , порождённым некоторым конусом  $K$ . Поэтому (3.22) можно записать в виде СДН

$$X' \in f(t, X) - N_X. \quad (3.23)$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Теорема.** *Если для электрической цепи выполнено LC-условие, то математическая модель цепи может быть представлена в виде СДН.*

Заметим, что найдя решение включения (3.23), без труда можно вычислить все токи и напряжения цепи.

Следующий пример показывает, что для существования модели (3.23) наложенные на цепь условия являются достаточными, но не необходимыми условиями.

**Пример.** Для цепи рисунка 3.11 LC-условие не выполняется, так как три пути, состоящих из элементов  $J_1$ ,  $J_2$  и соединяющих входы диодного преобразователя части  $D_2$  не содержат индуктивностей.

Уравнения падений напряжения в контуре  $E, R, L, D_2, D_1$  имеет вид  $u_R + u_L + u_{D_2} - u_{D_1} = -u_E$ , где  $u_E = u_E(t)$  некоторая заданная функция времени  $t$ . Обозначим через  $i := i_R = i_L = i_{D_2} - J_2 = -i_{D_1} + J_1$ . Где  $J_1$  и  $J_2$  некоторые заданные константы. Выражая напряжения через  $i$  из уравнений элементов  $u_R = i \cdot R$ ,  $u_L = i' \cdot L$ , получим равенство

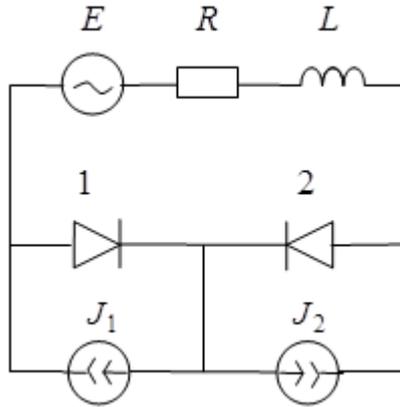


Рис. 3.11

$$i \cdot R + i' \cdot L + u_{D_2} - u_{D_1} = -u_E. \quad (3.24)$$

Анодные токи диодов  $i_{D_1} = J_1 - i$  и  $i_{D_2} = J_2 + i$  принимают неотрицательные значения, поэтому  $-J_2 \leq i \leq J_1$ . Для корректной работы цепи потребуем, чтобы константы  $J_1, J_2$  удовлетворяли неравенству  $-J_2 \leq J_1$ .

Если  $i \in (-J_2, J_1)$ , то  $i_{D_1} > 0$  и  $i_{D_2} > 0$  и, следовательно,  $u_{D_1} = u_{D_2} = 0$ . Если  $i = -J_2$ , то  $i_{D_1} > 0$  и  $u_{D_1} = 0$ , а  $i_{D_2} = 0$  и  $u_{D_2} \leq 0$ . Наконец, если  $i = J_1$ , то  $i_{D_2} > 0$  и  $u_{D_2} = 0$ , а  $i_{D_1} = 0$  и  $u_{D_1} \leq 0$ . Из этих рассуждений вытекает, что в любом случае вектор  $u := u_{D_2} - u_{D_1} \in N_{[-J_2, J_1]}(i)$ .

Запишем равенство (3.24) в виде  $i' = -\frac{u_E}{L} - i \cdot \frac{R}{L} - \frac{u}{L}$  и обозначим  $f(t, i) = \frac{u_E}{L} - i \cdot \frac{R}{L}$ . Отметим, что по-прежнему  $\frac{u}{L} \in N_{[-J_2, J_1]}(i)$  в силу положительности параметра  $L$ . В результате получаем модель рассматриваемой цепи в виде СДН  $i' = f(t, i) - N_{[-J_2, J_1]}(i)$ .

Стоит отметить, что в этом примере множество, порождающее оператор диодной нелинейности, не является конусом.

## 4. Задача выпуклого программирования и СДН

### 4.1. Описание уравнения

Задачу выпуклого программирования можно трактовать как поиск минимального значения выпуклой функции  $f(x)$  на некотором выпуклом замкнутом множестве  $Q \subset \mathbb{R}^n$ .

Напомним, что *выпуклой* на множестве  $Q$  называют функцию  $f(x)$ , которая удовлетворяет неравенству

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \text{ при всех } x_1, x_2 \in Q \text{ и } \alpha \in [0, 1].$$

Здесь мы рассмотрим в качестве модели задачи выпуклого программирования систему с диодной нелинейностью. На основании этой модели рассмотрим

целый класс систем для приближённого вычисления оптимального значения, близких к методам «градиентного спуска» и «штрафных функций» [3]. Для систем этого класса введём ограничение позволившее доказать корректность методов поиска приближённого решения по таким системам, в том смысле, что за некоторое время с заданной скоростью достигается значение оптимальной точки с желаемой точностью.

Итак, пусть для выпуклой дифференцируемой функции  $f(x)$  требуется найти минимальное на выпуклом замкнутом ограниченном множестве  $Q$  значение. Будем предполагать, что  $Q$  содержится в области определения  $f(x)$  вместе с некоторой окрестностью, т.е. существует  $r > 0$  такое, что  $Q^r := \{x: \rho(x, Q) \leq r\} \subset D(f)$ , и градиент  $\nabla f(x)$  ограничен в этой окрестности.

Система с диодной нелинейностью

$$\dot{x} \in -\nabla f(x) - N_x \quad (4.1)$$

служит моделью задачи о поиске минимального на  $Q$  значения функции  $f(x)$  в том смысле, что траектории решений этой системы, лежащие в множестве  $Q$ , под воздействием градиента стремятся к точке минимума функции  $f(x)$ . Если значение решения (4.1) лежит внутри области  $Q$ , то для него  $N_x$  состоит только из нулевой точки, а направление и скорость движения к оптимальной точке определяет только  $-\nabla f(x)$ . При выходе решения (4.1) на границу области  $Q$  из  $-\nabla f(x)$  вместе с  $N_x$  вычитается в частности его проекция  $P_{N_x}(-\nabla f(x))$  на  $N_x$ . Поэтому одним из возможных вариантов (а при некоторых ограничениях на  $f(x)$  единственным) является движение точки  $x$  со скоростью  $-\nabla f(x) - P_{N_x}(-\nabla f(x))$ , принадлежащей касательной к  $Q$  плоскости и направленной в сторону оптимального значения [4].

Определим на  $Q^r$  функцию  $F(x) = f(x) + M \cdot h(x)$ , здесь  $h$  некоторая дифференцируемая функция, определённая на  $Q^r$ , с градиентом  $\nabla h(x) \in N_{P_x}$  и  $M \in \mathbb{R}$  – некоторый большой положительный параметр. Рассмотрим систему (4.2)

$$\dot{x} = -\nabla F(x) \quad (4.2)$$

в качестве инструмента поиска приближённого решения системы (4.1).

Наша цель – доказать, что любое решение системы (4.2) стремится к точке минимума функции  $f$  на множестве  $Q$  при  $t \rightarrow \infty$ . Очевидно, когда  $x$  находится внутри области  $Q$ ,  $P_x = x$ ,  $N_{P_x} = N_x = \{0\}$ , а, следовательно,  $\nabla h(x) = 0$ . Поэтому пока  $x$  является внутренней точкой  $Q$ , её движение определяется системой (4.1), принимающей вид  $\dot{x} = -\nabla f(x)$ . Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда градиент  $\nabla f(x) \neq 0$  на  $Q$  и  $x$  выходит за пределы  $Q$ . Покажем, что в этом случае решение системы (4.2)  $x(t)$  при некоторых ограничениях на функцию  $h$

движется к области  $Q$ , удовлетворяя вблизи  $Q$  при достаточно больших значениях времени  $t$  неравенству  $f(x(t)) < f_o$ , где  $f_o$  – минимум  $f$  на множестве  $Q$ .

Для этого, прежде всего, рассмотрим функцию  $V(x) = \|x - Px\|^2$  и докажем для неё некоторые утверждения.

#### 4.2. Лемма о дифференцировании функции $V(x)$

*Функция  $V(x)$  непрерывно дифференцируема для выпуклого замкнутого множества  $Q$  и*

$$\nabla V(x) = 2(x - Px). \quad (4.3)$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Delta = V(y) - V(x) - \langle 2(x - Px), y - x \rangle$$

и докажем, что

$$\frac{\Delta}{\|y - x\|} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow x. \quad (4.4)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta &= \langle y - Py, y - Py \rangle - \langle x - Px, x - Px \rangle - 2\langle x - Px, y - x \rangle = \langle y - x + Px - Py, y - x \rangle + \\ &+ \langle y - x + Px - Py, x - Py \rangle + \langle x - Px, y - x + Px - Py \rangle - 2\langle x - Px, y - x \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно скалярное произведение  $\langle y - x + Px - Py, y - x \rangle$  и воспользуемся тем фактом, что оператор проектирования на выпуклое множество является нерастягивающим (см. 2.2)

$$\begin{aligned} \langle y - x + Px - Py, y - x \rangle &= \langle y - x, y - x \rangle + \langle Px - Py, y - x \rangle \leq \|y - x\|^2 + \\ &+ \|Px - Py\| \cdot \|y - x\| \leq \|y - x\|^2 + \|y - x\|^2 = 2\|y - x\|^2 = o(\|y - x\|). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta &= o(\|y - x\|) + \langle y - x + Px - Py, x - Py \rangle + \langle y - x + Px - Py, x - Px \rangle - \\ &- 2\langle x - Px, y - x \rangle = o(\|y - x\|) + \langle y - x + Px - Py, x - Py \rangle + \langle Px - Py, x - Px \rangle - \\ &- \langle y - x, x - Px \rangle = o(\|y - x\|) + \langle y - x, Px - Py \rangle + \langle Px - Py, 2x - Px - Py \rangle = \\ &= o(\|y - x\|) + \langle Px - Py, y - x + 2x - Px - Py \rangle. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\Delta = o(\|y - x\|) + \langle Px - Py, x - Px \rangle + \langle Px - Py, y - Py \rangle. \quad (4.5)$$

Покажем теперь, что  $\langle Px - Py, x - Px \rangle = o(\|y - x\|)$  и  $\langle Px - Py, y - Py \rangle = o(\|y - x\|)$ .

Действительно, если  $\alpha$  – предельная точка скалярного произведения  $\left\langle \frac{Px - Py}{\|y - x\|}, x - Px \right\rangle$  при  $y \rightarrow x$ , то для некоторой сходящейся к  $x$  последовательности  $(y_n)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{Px - Py_n}{\|y_n - x\|}, x - Px \right\rangle = \alpha$ .

Из эквивалентного определения проекции (см. 2.2) очевидно следует, что  $\alpha \geq 0$ . С другой стороны, ввиду того же свойства и непрерывности оператора проектирования, которая очевидным образом следует из свойства не растягивать, имеем  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{Px - Py_n}{\|y_n - x\|}, y_n - Py_n \right\rangle \leq 0$ . Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{Px - Py_n}{\|y_n - x\|}, x - Px \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{Px - Py_n}{\|y_n - x\|}, y_n - Py_n \right\rangle = 0$ .

Отсюда и из (4.5) следует (4.4).

### 4.3. Лемма о дифференциальном неравенстве для функции $V(x)$

На функцию  $h(x)$  наложим следующие ограничения:

1.  $h(x)$  – определена, дифференцируема и выпукла (нестрого) на множестве  $Q^r$ , а её градиент  $\nabla h(x) \in N_{P(x)}$  и  $h(x) = 0$  для всех  $x \in Q$ ;
2. для любого сколь угодно малого  $r > \varepsilon > 0$  найдётся число  $\mu(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\langle \nabla h(x), x - Px \rangle \geq \mu(\varepsilon) \|x - Px\|^2 = \mu(\varepsilon) V(x)$  для всех  $x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon \leq \rho(x, Q) \leq r\}$ .

Рассмотрим производную  $\dot{V}(x) := \langle \nabla V(x), \dot{x} \rangle$  вдоль траектории решения  $x(t)$  системы (4.2).

**Лемма 4.** Если  $x \in X$  – значение решения  $x(t)$  системы (38), то

$$\dot{V}(x) \leq -2M\mu(\varepsilon)V(x) + 2S\sqrt{V(x)}, \text{ где } S := \max_{x \in Q^r} \{\|\nabla f(x)\|\} > 0. \quad (4.6)$$

Доказательство. Из (4.2) и (4.3) следует:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle \nabla V, \dot{x} \rangle = \langle 2(x - Px), -\nabla f(x) - M \cdot \nabla h(x) \rangle \leq -2M\mu(\varepsilon) \|x - Px\|^2 + \\ &2 \langle x - Px, -\nabla f(x) \rangle \leq -2M\mu(\varepsilon)V(x) + 2\sqrt{V(x)} \|\nabla f(x)\| \leq -2M\mu(\varepsilon)V(x) + 2S\sqrt{V(x)} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

### 4.4. Теорема о верхней предельной оценке

Пусть  $f_o$  – минимум функции  $f(x)$  на множестве  $Q$ .

**Теорема.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такие  $M > 0$  и  $T > 0$ , что для решения  $x(t)$  системы (4.2) с начальным значением  $x(0) = x_0 \in X$  при всех  $t \geq T$  выполнено неравенство  $f(x(t)) < f_o$  и  $\rho(x(t), Q) \leq \varepsilon$ .

Доказательство. Из неравенства(4.6) и теоремы о нестрогом дифференциальном неравенстве ([5], стр.16,17) вытекает оценка:

$$\begin{aligned} \rho(x(t), Q) &= \sqrt{V(x(t))} \leq \frac{S}{M\mu(\varepsilon)} + \left( \|x_0 - Px_0\| - \frac{S}{M\mu(\varepsilon)} \right) \cdot e^{-M\mu(\varepsilon)t} \leq \\ &\leq \frac{S}{M\mu(\varepsilon)} + \left( r - \frac{S}{M\mu(\varepsilon)} \right) \cdot e^{-M\mu(\varepsilon)t}. \end{aligned}$$

Поэтому существуют такие  $M > 0$  и  $T > 0$ , что при  $t \geq T$   $\rho(x(t), Q) \leq \varepsilon$ .

Функция  $F(x)$  является выпуклой на  $Q^r$  вместе с  $f(x)$ ,  $h(x)$  и имеет непустое ограниченное выпуклое замкнутое множество точек минимума, к которому в силу того, что производная  $F(x)$  по траекториям решений (4.2) равна  $(-\|\nabla F(x)\|^2)$ , асимптотически стремится любая траектория системы (4.2). Пусть  $\bar{x}$  – одна из точек минимума  $F(x)$ . Если  $\tilde{x} \in Q$  и  $f(\tilde{x}) = f_o$ , то  $F(\tilde{x}) = f_o$ . С другой стороны  $F(\bar{x}) < F(\tilde{x})$ , так как  $\tilde{x}$  не может быть точкой минимума функции  $F(x)$  из-за того, что  $\nabla F(\tilde{x}) = \nabla f(\tilde{x}) \neq 0$ . Поскольку  $h(\bar{x}) \geq h(\tilde{x}) = 0$ , мы получаем неравенство  $f(\bar{x}) < f(\tilde{x}) = f_o$ . Следовательно, при достаточно больших  $t$  будет выполнено неравенство  $f(x(t)) < f_o$ .

Теорема доказана.

#### 4.5. Примеры функций $h(x)$

**Первый пример.** Рассмотрим функцию  $h(x) = \frac{1}{2}V(x) = \frac{1}{2}\|x - Px\|^2$ , проверим для неё выполнение ограничений 1, 2 пункта 4.3.  $h(x)$  определена на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$  и является дифференцируемой.  $h(x) = 0$  для всех  $x \in Q$ . Для всех  $x \in \mathbb{R}^n$   $\nabla h(x) = (x - Px) \in N_x$ , так как по определению (2.2) нормального конуса для произвольного  $z \in Q$  должно быть выполнено неравенство  $\langle x - Px, z - Px \rangle \leq 0$ , и оно выполнено в силу определения проекции (6). Таким образом, ограничение 1 выполнено. Ограничение 2 выполнено очевидным образом с любым  $0 < \mu(\varepsilon) \leq 1$ .

Функция  $f(x) = 2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$  на круге  $Q$ , заданном неравенством  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4$ , очевидно, достигает в точке  $x = (2, 4)$  свой условный минимум  $f_{\min} = 3$ .

На рисунке 4.1 изображена траектория приближённого решения системы  $\dot{x} = -\nabla f(x) - 1000 \cdot (x - P_Q(x))$ , удовлетворяющая начальному условию (не являющемуся допустимым)  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 3$  и полученная с помощью компьютерной программы. В этой точке  $-\nabla f(0, 3) = (4, 10)$ , а значение второго слагаемого системы  $-1000 \cdot (x - P_Q(x)) = (720, 360)$ . По мере приближения решения к  $Q$  второе слагаемое уменьшается до нулевого значения, и движение внутри  $Q$  происходит только под действием  $-\nabla f(x)$ . После выхода на границу решение с небольшими, практически незаметными, колебаниями идёт по малой окрестности окружности к точке минимума  $(2, 4)$ .

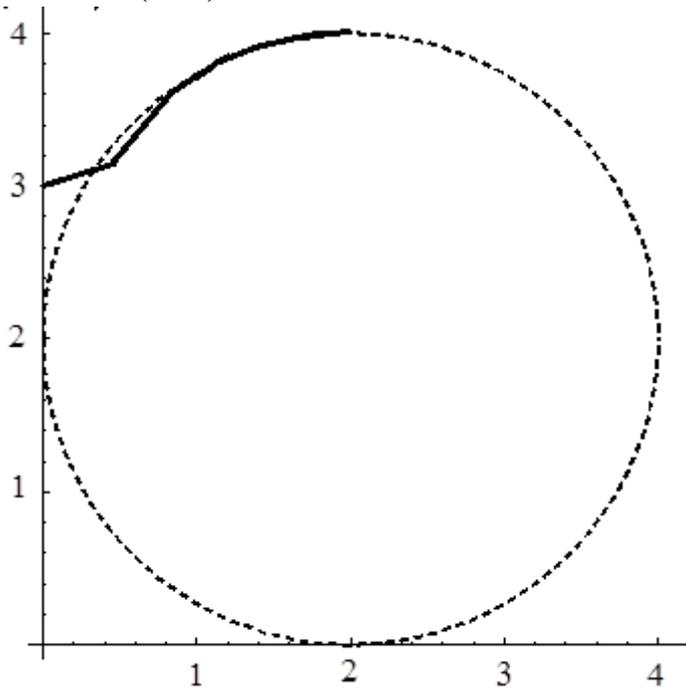


Рис. 4.1

**Второй пример.** Пусть  $Q$  – выпуклый многогранник, определённый системой неравенств  $\langle x, n_k \rangle \leq c_k, k = 1, 2, \dots, m$ , с заданными векторами  $n_k$  единичной длины и заданными числами  $c_k$ . Для  $x \in \mathbb{R}^n$  определим  $h(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \xi_k^2$ , где  $\xi_k = \max\{0, \langle x, n_k \rangle - c_k\}$ . Эта функция определена, дифференцируема и выпукла на всём пространстве  $\mathbb{R}^n$ , для  $x \in Q$   $h(x) = 0$ . Её градиент  $\nabla h(x) = \sum_{k=1}^m \xi_k n_k$  явля-

ется конической комбинацией внешних нормалей к  $(n-1)$ -мерным граням многогранника, для которых  $\langle x, n_k \rangle > c_k$ . Конус, натянутый на эти нормали, содержит вектор  $x - Px$  и является частью  $N_{Px}$  [1]. Поэтому  $h(x) \in N_{Px}$ . Заметим, что  $\langle n_k, x - Px \rangle \geq \langle n_k, x \rangle - c_k = \xi_k$ , поскольку  $Px \in Q$  и  $\langle n_k, Px \rangle \leq c_k$ . Тогда  $\langle \nabla h(x), x - Px \rangle \geq \sum_{k=1}^m \xi_k^2 = 2h(x)$ . Рассмотрим функцию  $\frac{2h(x)}{V(x)}$  на компакте  $X := \{x : \varepsilon \leq \rho(x, Q) \leq r\}$ . Нетрудно видеть, что она непрерывна и строго положительна, поэтому достигает своего минимума  $\mu(\varepsilon) = \min_{x \in X} \left\{ \frac{2h(x)}{V(x)} \right\} > 0$ . Итак,

ограничение 2 для  $h(x)$  выполнено  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle h(x), x - Px \rangle &\geq 2h(x) \geq \\ &\geq \mu(\varepsilon)V(x) = \mu(\varepsilon)\|x - Px\|^2. \end{aligned}$$

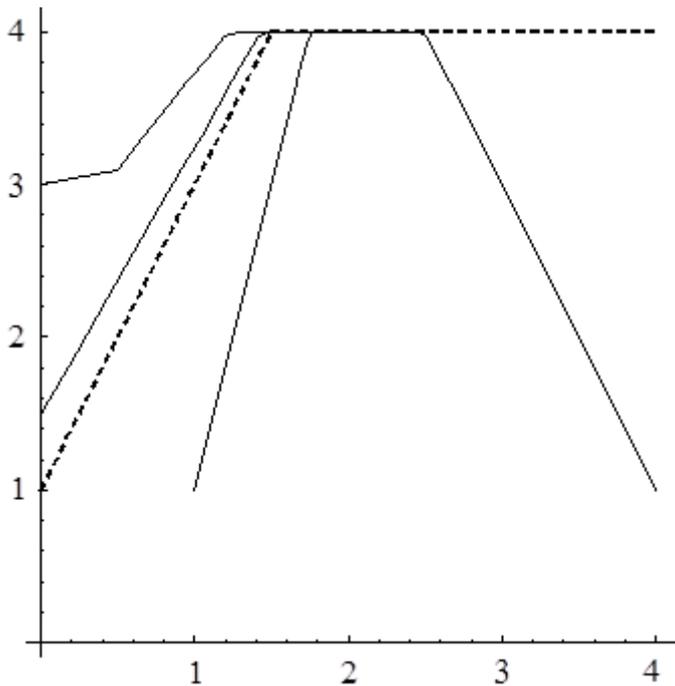


Рис. 4.2 Сходимость траекторий к точке оптимума  $(2, 4)$ .

На рисунке 4.2 изображены траектории системы  $\dot{x} = -\nabla f(x) - 1000 \cdot \sum_{k=1}^2 \xi_k n_k$  с функцией  $f(x) = 2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$  предыдущего примера.  $Q$  – многогранник, расположенном в 1-ой четверти  $\mathbb{R}^2$ , определяемый внешними нормальями

$n_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ,  $n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  и числами  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 4$ . Начальными значениями траекторий взяты точки  $(0, 3)$ ,  $(0, 1.5)$ ,  $(1, 1)$  и  $(4, 1)$ .

Отметим в заключении, что строя систему (4.2), параметр  $M > 0$  следует выбирать согласно оценке близости  $\varepsilon$  (см. доказательство теоремы п.4.4) и некоторому, произвольно выбранному значению  $T > 0$ . Этот выбор гарантирует, что решение системы (4.2) при выходе из области  $Q$  при  $t \geq T$  будет приближаться к множеству точек минимума функции  $F(x)$ , не выходя за  $\varepsilon$ -окрестность множества  $Q$ .

## 5. Существование и единственность решения начальной задачи

### 5.1. Формулировка и план доказательства локальной теоремы.

**Теорема.** На непустом выпуклом замкнутом множестве  $Q \subset \mathbb{R}^m$  рассматривается задача Коши для обобщенной системы с диодной нелинейностью:

$$\dot{x} = \tau_x f(t, x), \quad (5.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \in Q. \quad (5.2)$$

Предполагается, что функция  $f : [t_0, t_0 + H] \times Q \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывна по первому аргументу и удовлетворяет локальному условию Липшица по второму:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (5.3)$$

(константа  $L$  для некоторой окрестности любой точки своя). Утверждается, что задача (5.1), (5.2) имеет на некотором отрезке  $[t_0, t_0 + h]$  ( $h > 0$ ) единственное решение.

Напомним, что решением системы с диодной нелинейностью называется локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая этой системе почти всюду. Доказательство теоремы будет состоять из следующих шагов.

- 1) Продолжение системы (5.1) с множества  $Q$  на множество  $Q_1 \supset Q$ .
- 2) Построение «бочки» – множества, в котором будут лежать графики приближенных решений рассматриваемой задачи.
- 3) Построение приближенных решений – «ломаных Эйлера» и доказательство относительной компактности.
- 4) Предельный переход – доказательство того, что предел ломаных Эйлера есть решение данной задачи (в множестве  $Q_1$ ).
- 5) Доказательство того, что построенное решение не выходит из  $Q$ .
- 6) Доказательство единственности.

### 5.2. Продолжение системы.

Положим  $Q_1 = \{x \in \mathbb{R}^m : \rho(x, Q) \leq 1\}$ . Для  $x \in Q_1$  обозначим  $\bar{x} = P(x, Q)$

и определим

$$e_x = \begin{cases} (x - \bar{x}) / \|x - \bar{x}\|, & \text{если } x \in Q_1 \setminus Q, \\ 0, & \text{если } x \in Q. \end{cases};$$

$$\tilde{f}(t, x) = f(t, \bar{x}) - (\|x - \bar{x}\| + (f(t, \bar{x}), e_x)_+) e_x,$$

здесь мы используем обозначение  $(a, b)_+ = \max\{0, (a, b)\}$ . Отметим, что

$\tilde{f}(t, x) = f(t, x)$  для  $x \in Q$ , а для  $x \in Q_1 \setminus Q$  вектор  $(f(t, \bar{x}), e_x)_+ e_x$  является проекцией  $f(t, \bar{x})$  на луч  $\{M(x - \bar{x}) : M \geq 0\}$  с направляющим вектором  $e_x$ .

Однозначная функция  $\tilde{f}$  непрерывна на  $\text{int } Q$  и на  $Q_1 \setminus Q$ , а на границе  $Q$ , возможно, имеет разрывы.

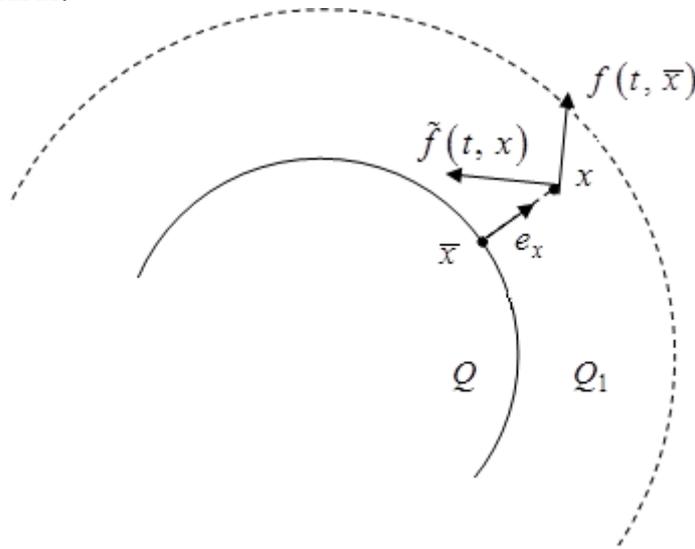


Рис. 5.1

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \text{ где} \quad (5.4)$$

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x) - N_x, & \text{если } x \in Q, \\ \{\tilde{f}(t, x)\}, & \text{если } x \in Q_1 \setminus Q. \end{cases} \quad (5.5)$$

Покажем, что эта многозначная функция имеет замкнутый график.

**Определение.** Говорят, что многозначная функция

$F : (D(F) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$  имеет замкнутый график, если для любой точки

$(t, x) \in D(F)$  из соотношений  $(t_k, x_k) \in D(F)$ ,  $y_k \in F(t_k, x_k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),

$t_k \rightarrow t$ ,  $x_k \rightarrow x$ ,  $y_k \rightarrow y$  при  $k \rightarrow \infty$ , следует, что  $y \in F(t, x)$ .

**Упражнения.** Покажите, что графики следующих операторов замкнуты.

1. Любое однозначное непрерывное отображение, определённое на замкнутом множестве.

2. Оператор диодной нелинейности, т.е. отображение  $x \mapsto N_x$ , определённый на произвольном выпуклом замкнутом множестве  $Q$ .

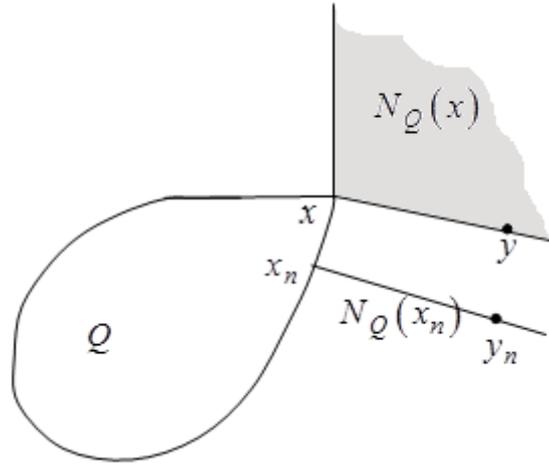


Рис. 5.2

**Упражнение.**

3. Приведите пример того, что отображение  $x \mapsto T(Q)x$  может не иметь замкнутого графика на выпуклом замкнутом множестве  $Q$ .

**Утверждение.** Мнозначная функция  $F$ , определённая формулой (5.5), имеет замкнутый график.

Доказательство. Достаточно рассмотреть три случая:

- 1)  $\{x_k\} \subset Q$  (и, следовательно,  $x \in Q$ );
- 2)  $\{x_k\} \subset Q_1 \setminus Q$ ,  $x \in Q$ ;
- 3)  $\{x_k\} \subset Q_1 \setminus Q$ ,  $x \in Q_1 \setminus Q$ .

В первом случае из условия  $y_k \in F(t_k, x_k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) следует, что

$$f(t_k, x_k) - y_k =: u_k \in N_{x_k},$$

то есть для любого  $z \in Q$  справедливо неравенство  $(u_k, z - x_k) \leq 0$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем:  $(u, z - x) \leq 0$ , поэтому

$u := f(t, x) - y \in N_x$ . Это означает, что  $y \in F(t, x)$ .

Во втором случае

$$y_k = f(t_k, \bar{x}_k) - \left( \|x_k - \bar{x}_k\| + \left( f(t_k, \bar{x}_k), e_{x_k} \right)_+ \right) e_{x_k} \rightarrow y,$$

причем  $f(t_k, \bar{x}_k) \rightarrow f(t, \bar{x}) = f(t, x)$  и  $\|x_k - \bar{x}_k\| \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\left( f(t_k, \bar{x}_k), e_{x_k} \right)_+ e_{x_k} \rightarrow f(t, x) - y.$$

Из ранее сделанного нами замечания о том, что  $\left( f(t_k, \bar{x}_k), e_{x_k} \right)_+ e_{x_k}$  есть проекция  $f(t_k, \bar{x}_k)$  на луч  $\{M(x - \bar{x}) : M \geq 0\} \subset N_{\bar{x}_k}$ , следует  $\left( f(t_k, \bar{x}_k), e_{x_k} \right)_+ e_{x_k} =: u_k \in N_{\bar{x}_k}$ . Отсюда, как и в первом случае, получаем, что  $f(t, x) - y \in N_x$ , т.е.  $y \in F(t, x)$ .

Наконец, в третьем случае доказываемое утверждение вытекает из непрерывности функции  $\tilde{f}$ .

### 5.3. Построение «бочки».

Положим

$$\bar{B}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq a\}, \text{ где } a > 0 \text{ произвольно,}$$

и

$$M = \max \{ \|f(t, x)\| : t \in [t_0, t_0 + H], x \in Q \cap \bar{B}(x_0) \}.$$

Заметим, что если  $x \in \bar{B}(x_0)$ , то (в силу свойства оператора проектирования на  $Q$  не растягивать) расстояние между  $\bar{x} = P(x, Q)$  и  $x_0 = P(x_0, Q)$  не превышает  $\|x - x_0\| \leq a$ , поэтому  $\bar{x} \in \bar{B}(x_0)$  вместе с  $x$ . С учётом этого факта для  $t \in [t_0, t_0 + H]$ ,  $x \in \bar{B}(x_0)$  получим оценку

$$\|\tilde{f}(t, x)\| \leq M + a. \quad (5.6)$$

Действительно,  $\|\tilde{f}(t, x)\| = \|f(t, \bar{x}) - (\|x - \bar{x}\| + (f(t, \bar{x}), e_x)_+) e_x\| \leq \|f(t, \bar{x}) - (f(t, \bar{x}), e_x)_+ e_x\| + \|x - \bar{x}\|$ .

Как мы отмечали выше  $(f(t, \bar{x}), e_x)_+ e_x$  есть проекция  $f(t, \bar{x})$  на  $N_x$ , по теореме о разложении на ортогональные проекции из пункта 2.5  $f(t, \bar{x}) - (f(t, \bar{x}), e_x)_+ e_x \in T_x$  и  $\|f(t, \bar{x}) - (f(t, \bar{x}), e_x)_+ e_x\| \leq \|f(t, \bar{x})\|$ , а поскольку  $\bar{x} \in Q \cap B(x_0)$ , получаем  $\|f(t, \bar{x})\| \leq M$ . Осталось заметить, что расстояние от точки  $x$  до её проекции  $\bar{x}$  на множество  $Q$  не может превосходить расстояния от  $x$  до  $x_0 \in Q$ , а поскольку  $\|x - x_0\| \leq a$ , то получаем  $\|x - \bar{x}\| \leq a$ .

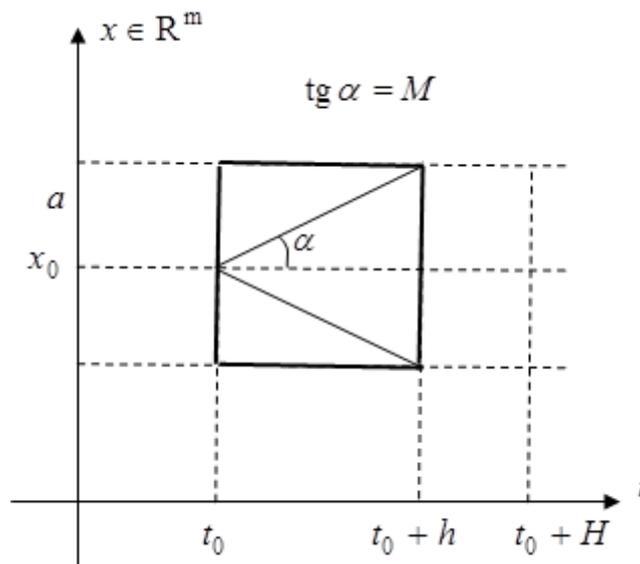


Рис. 5.3

Наконец с высотой  $h = \min \left\{ H, \frac{a}{M+a} \right\}$  построим цилиндр (“бочку”)

$$Z = [t_0, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0).$$

#### 5.4. Ломаные Эйлера.

Разобьём промежуток  $[t_0, t_0 + h]$  на  $k$  равных частей ( $k \in \mathbb{N}$ ) точками  $t_{k,i}$  ( $i = 0, \dots, k$ ):  $h_k := h/k$ ,  $t_{k,0} = t_0$ ,  $\dots$ ,  $t_{k,i} = t_{k,i-1} + h_k$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

Построим ломанную Эйлера  $x_k(t)$  на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$ , положив  $x_k(t_0) = x_0$ , и в предположении, что ломанная уже построена на промежутке  $[t_{k,0}, t_{k,i-1}]$  продолжим её построение на очередном отрезке, определив для  $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$

$$x_k(t) = x_k(t_{k,i-1}) + \tilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))(t - t_{k,i-1}). \quad (5.7)$$

Построенная таким образом функция обладает следующими свойствами:

- 1)  $\dot{x}_k(t) = \tilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))$  для  $t \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ ;
- 2)  $\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leq (M+a)|t' - t''|$  для  $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_0 + h$ ;
- 3)  $x_k(t) \in \bar{B}(x_0)$  при  $t \in [t_0, t_0 + h]$ .

Первое свойство непосредственно следует из (5.7). Второе из теоремы Лагранжа, свойства 1) и неравенства (5.6). Для  $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_0 + h$

$$\|x_k(t') - x_k(t'')\| \leq \|\dot{x}_k(\xi)\| \cdot |t' - t''| = \|\tilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))\| \cdot |t' - t''| \leq (M+a)|t' - t''|,$$

здесь  $\xi \in [t', t'']$  и  $\xi \in [t_{k,i-1}, t_{k,i}]$  при некотором  $i$ . Наконец третье свойство следует из второго

$$\|x_0 - x_k(t)\| = \|x_k(0) - x_k(t)\| \leq (M+a)|t_0 - t| \leq (M+a) \frac{a}{M+a} = a$$

Из этих свойств вытекает, что последовательность  $(x_k(t))$  равномерно непрерывна и равномерно ограничена и, следовательно, из нее по теореме Арцела можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции  $x(t)$  [6], [7].

#### 5.5. Предельный переход.

Перенумеровав, если требуется, члены сходящейся подпоследовательности, будем считать, что

$$x_k(t) \rightarrow x(t) \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ равномерно на } [t_0, t_0 + h].$$

Нетрудно видеть, что предельная функция  $x(t)$ , как и ломаные Эйлера, удовлетворяет условию Липшица с константой  $M+a$  (и, следовательно, абсолютно непрерывна). Покажем, что эта функция удовлетворяет включению (5.4).

Пусть в точке  $\bar{t} \in [t_0, t_0 + h]$  существует  $\dot{x}(\bar{t})$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и докажем, что

$$\dot{x}(\bar{t}) \in \bar{F}^\varepsilon(\bar{t}, x(\bar{t}))$$

(черта над  $F$  означает замыкание). Тогда предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$  даст (5.4). Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы из  $|t - \bar{t}| < \delta$ ,  $\|x(t) - x(\bar{t})\| < (M + a + 1)\delta$  вытекало включение  $F(t, x) \subset F^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x})$ . Пусть  $K$  таково, чтобы при  $k \geq K$  было  $h_k < \delta / 2$  и  $\|x_k(t) - x(t)\| < \delta$  для любого  $t \in [t_0, t_0 + h]$ .

Если  $|t - \bar{t}| < \delta / 2$  и  $k \geq K$ , то ближайший к  $t$  слева узел  $t_{k, i-1}$  ломаной  $x_k(t)$  лежит в открытой  $\delta$ -окрестности точки  $\bar{t}$ . Поэтому

$$\|x_k(t_{k, i-1}) - x(\bar{t})\| \leq \|x_k(t_{k, i-1}) - x_k(\bar{t})\| + \|x_k(\bar{t}) - x(\bar{t})\| \leq (M + a + 1)\delta,$$

$$\dot{x}_k(t) = \tilde{f}(t_{k, i-1}, x_k(t_{k, i-1})) \in F(t_{k, i-1}, x_k(t_{k, i-1})) \subset F^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x}).$$

Воспользуемся равенством:

$$\frac{x_k(t) - x_k(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \frac{1}{t - \bar{t}} \int_{\bar{t}}^t \dot{x}_k(s) ds.$$

Нетрудно видеть, что стоящее в правой части интегральное среднее принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества значений подынтегральной функции (интеграл в данном случае можно понимать как предел интегральных сумм Римана, т.е. с учетом множителя перед интегралом выпуклых комбинаций значений подынтегральной функции). Итак,

$$\frac{x_k(t) - x_k(\bar{t})}{t - \bar{t}} \in \bar{F}^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x}).$$

Переходя к пределу сначала при  $k \rightarrow \infty$ , а затем при  $t \rightarrow \bar{t}$ , получаем требуемое:

$$\dot{x}(\bar{t}) \in \bar{F}^\varepsilon(\bar{t}, \bar{x}).$$

### 5.6. Разрешимость в исходном множестве.

Итак, функция  $x(t)$ , полученная как предел ломаных Эйлера, является решением задачи (5.4), (5.2) в  $Q_1$ . Докажем, что ее значения лежат в  $Q$  – это будет означать, что фактически найдено решение (5.1), (5.2).

Пусть на некотором интервале  $(\alpha, \beta) \subset [t_0, t_0 + h]$   $x(t) \notin Q$ , обозначим

$$d(t) = \rho(x(t), Q) = \|x(t) - P(x(t), Q)\| = \|x(t) - \bar{x}(t)\|. \quad \text{Покажем, что}$$

$d(t + \Delta t) < d(t)$ , если  $t \in (\alpha, \beta)$  и  $\Delta t > 0$  достаточно мало. Действительно,

$$\begin{aligned} d^2(t + \Delta t) &= \|x(t + \Delta t) - \bar{x}(t + \Delta t)\|^2 \leq \|x(t + \Delta t) - \bar{x}(t)\|^2 = \\ &= (x(t + \Delta t) - \bar{x}(t), x(t + \Delta t) - \bar{x}(t)) = \\ &= (x(t + \Delta t) - x(t) + x(t) - \bar{x}(t), x(t + \Delta t) - x(t) + x(t) - \bar{x}(t)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|x(t + \Delta t) - x(t)\|^2 + \|x(t) - \bar{x}(t)\|^2 + 2(x(t + \Delta t) - x(t), x(t) - \bar{x}(t)) = \\
&= o(\Delta t) + d^2(t) + 2(\tilde{f}(t, x(t))\Delta t, x(t) - \bar{x}(t)) = \\
&= o(\Delta t) + d^2(t) + 2\left(f(t, \bar{x}(t)) - \left(f(t, \bar{x}(t)), e_x\right)_+ e_x - d(t)e_x, d(t)e_x\right)\Delta t
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d^2(t + \Delta t) \leq d^2(t)(1 - 2\Delta t) + o(\Delta t) < d^2(t).$$

Итак, всюду вне  $Q$  функция  $d(t)$  является невозрастающей, из-за чего значения  $x(t)$  не могут выйти из  $Q$ . Тем самым доказано существование решения рассматриваемой задачи (5.1), (5.2) на  $[t_0, t_0 + h]$ .

### 5.7. Единственность решения.

Доказательство единственности решения задачи (1.34), (1.35) проведём в четыре этапа:

1) доказательство монотонности оператора  $N_x$ ;

2) доказательство дифференциального неравенства

$$\frac{d}{dt} \|x(t) - \bar{x}(t)\|^2 \leq 2L \|x(t) - \bar{x}(t)\|^2 \quad \text{для решений } x(t), \bar{x}(t) \quad \text{включения}$$

$$\dot{x} \in f(t, x) - N_x;$$

3) доказательство леммы о линейном дифференциальном неравенстве;

4) получение оценки нормы разности решений включения, из которой как следствие вытекает единственность решения задачи Коши.

1) **Монотонность оператора  $N_x$ .**

**Определение.** Многочисленный оператор  $F: D(F) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *монотонным*, если

$$\forall(x, \hat{x} \in D(F)) \left[ (F(x) - F(\hat{x}), x - \hat{x}) \geq 0 \right], \text{ т.е.}$$

$$\forall(x, \hat{x} \in D(F), y \in F(x), \hat{y} \in F(\hat{x})) \left[ (y - \hat{y}, x - \hat{x}) \geq 0 \right].$$

**Утверждение.** Оператор диодной нелинейности  $N(Q)$ , порождённый непустым выпуклым замкнутым множеством  $Q \subset \mathbb{R}^m$  является монотонной многозначной функцией переменной  $x$ .

Действительно, для произвольных  $x, \hat{x} \in Q$  и  $y \in N_x, \hat{y} \in N_{\hat{x}}$  из определения нормального конуса имеем

$$(y - \hat{y}, x - \hat{x}) = -(y, \hat{x} - x) - (\hat{y}, x - \hat{x}) \geq 0.$$

2) **Дифференциальное неравенство для квадрата нормы разности решений.**

**Утверждение.** Пусть  $x(t), \hat{x}(t)$  – два решения дифференциального включения  $\dot{x} \in f(t, x) - N_x$  на отрезке  $[t_0, t_1]$ , тогда почти всюду на этом отрезке с некоторой константой  $L$  справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 \leq 2L \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2. \quad (5.8)$$

**Доказательство.** Рассмотрим (абсолютно непрерывную) функцию  $z(t) = \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2$ . Если в точке  $t$  она дифференцируема, то

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= 2(x(t) - \hat{x}(t), \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)) \in 2(x(t) - \hat{x}(t), f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))) - \\ &- 2(x(t) - \hat{x}(t), N_{x(t)} - N_{\hat{x}(t)}) \leq 2\|x(t) - \hat{x}(t)\| \cdot \|f(t, x(t)) - f(t, \hat{x}(t))\| \leq \\ &\leq 2L\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = 2Lz(t). \end{aligned}$$

Здесь использовано условие Липшица функции  $f(t, x)$  по второму аргументу для замкнутого множества, содержащего графики функций  $x(t), \hat{x}(t)$  – для любого замкнутого ограниченного множества из локального условия Липшица вытекает глобальное.

3) **Лемма о линейном дифференциальном неравенстве.**

**Утверждение.** Пусть абсолютно непрерывная функция  $z$  удовлетворяет почти всюду на отрезке  $[t_0, t_1]$  дифференциальному неравенству

$$\dot{z}(t) \leq az(t), \text{ тогда} \quad (5.9)$$

$$z(t) \leq z(t_0)e^{a(t-t_0)} \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (5.10)$$

**Доказательство.** Из (5.9) следует, что

$$\dot{z}(t) = az(t) + b(t), \quad (5.11)$$

где функция  $b(t) = \dot{z}(t) - az(t)$  суммируема и неположительна на  $[t_0, t_1]$ . Проверим, что функция

$$z_1(t) = z(t_0)e^{a(t-t_0)} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} b(s) ds$$

удовлетворяет уравнению (5.11):

$$\dot{z}_1(t) = z(t_0)ae^{a(t-t_0)} + ae^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} b(s) ds + e^{at} e^{-at} b(t) = az_1(t) + b(t).$$

Более того,  $z_1$  является единственным решением этого уравнения, принимающим в точке  $t_0$  значение  $z(t_0)$ . Действительно, если  $z_2$  – ещё одно такое решение, то функция  $w = z_1 - z_2$  абсолютно непрерывна, почти всюду удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = aw \quad (5.12)$$

и принимает в точке  $t_0$  нулевое значение. Поэтому

$$w(t) = a \int_{t_0}^t w(s) ds.$$

Следовательно, функция  $w$  непрерывно дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) и удовлетворяет уравнению (5.12) *всюду*. Но в такой ситуации единственность решения задачи Коши следует из классической теории дифференциальных уравнений. Итак,

$$w(t) \equiv 0 \Rightarrow z_1(t) \equiv z_2(t) \equiv z(t) \equiv z(t_0)e^{a(t-t_0)} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} b(s) ds.$$

Поскольку подынтегральная функция в последнем интеграле неположительная и  $t \geq t_0$ , окончательно получаем, что верно неравенство (5.10).

#### 4) Оценка нормы разности решений и следствие о единственности решения задачи Коши.

В условиях теоремы 5.1 норма разности любых решений  $x(t)$ ,  $\bar{x}(t)$  системы (5.1), определенных на отрезке  $[t_0, t_1]$ , допускает оценку

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\|, \quad (5.13)$$

где  $L$  – константа из условия Липшица (5.3) на замкнутом множестве, содержащем графики функций  $x(t)$ ,  $\bar{x}(t)$ . В частности, задача Коши (5.1), (5.2) на любом отрезке  $[t_0, t_1]$  имеет не более одного решения.

Доказательство. Из доказанного дифференциального неравенства (5.8) и леммы о линейном дифференциальном неравенстве вытекает

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\|^2 \leq e^{2L(t-t_0)} \|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\|^2.$$

Отсюда непосредственно получается (1.46). Если  $x(t_0) = \bar{x}(t_0) = x_0$ , то в качестве следствия получается тождество  $x(t) \equiv \bar{x}(t)$  (т.е. единственность *вправо* решения задачи Коши).

## 6. Пример исследования нелинейной электрической цепи с использованием СДН

### 6.1. Построение модели цепи с ограничителем тока.

Простое устройство из параллельно соединённых диода  $D$  и источника тока  $J$ , изображённое на рисунке 1, служит ограничителем величины тока, текущего слева направо, в ветви электрической цепи, содержащем это устройство.

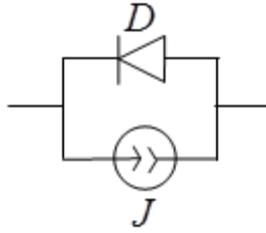


Рис. 6.1 Идеальный ограничитель тока.

Если поменять узлы подключения этого устройства, то ограничение на ток будет осуществляться в обратном направлении. Наконец, если подключить последовательно два противоположно направленных *ограничителя тока*, то на величину тока в ветви цепи будут наложены ограничения как в одну, так и в другую стороны.

В качестве примера рассмотрим цепь, изображённую на рисунке 6.2.

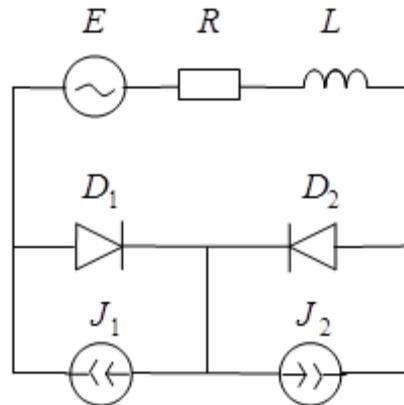


Рис. 6.2 Цепь с двусторонним идеальным ограничителем тока.

Примем идеальную модель диодов, т.е. будем считать, что ток от анода к катоду диода имеет неотрицательные значения, а напряжение неположительные, причём только одна из этих величин может быть отличной от нуля. Выбрав положительное направление в контуре с источником напряжения  $E$ , сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и двумя диодами  $D_2$ ,  $D_1$  против часовой стрелки, получим уравнение второго закона Кирхгофа  $u_E + u_R + u_L + u_{D_1} - u_{D_2} = 0$ . Подставим в него выражения напряжений сопротивления и индуктивности из уравнений элементов  $u_R = i_R R$ ,  $u_L = i_L' L$  с учётом того, что ток на элементах  $E$ ,  $R$  и  $L$  имеет одинаковое значение  $i := i_E = i_R = i_L$  в любой момент времени (это следует из первого закона Кирхгофа для узлов между ними) [2]. Получим

$$i'L + iR + u_{D_1} - u_{D_2} = E(t). \quad (6.1)$$

Здесь  $u_E = -E(t)$  заданная функция напряжения источника питания. Кроме уравнения (6.1) на ток  $i$  наложено ограничение

$$i \in [-J_1, J_2], \quad (6.2)$$

как это следует из первого закона Кирхгофа для узлов, соединённых с анодами диодов, и не отрицательности токов на диодах (положительное направление на источниках тока выбрано по изображённым в них стрелкам).

Запишем (6.1) и (6.2) в виде СДН. Для этого в качестве множества  $Q$  выберем отрезок вещественной оси  $[-J_1, J_2] \subset \mathbf{R}$ . Нормальный конус, построенный для внутренних точек  $Q$ , содержит только нулевую точку,  $N_Q(-J_1) = (-\infty, 0]$  и  $N_Q(J_2) = [0, \infty)$ . Выразим из (1)  $i'$

$$i' = \delta i + \bar{E}(t) + u_2 - u_1, \quad (6.3)$$

где  $\delta := -\frac{R}{L}$ ,  $\bar{E}(t) := \frac{E(t)}{L}$ ,  $u_1 := \frac{u_{D_1}}{L}$ ,  $u_2 := \frac{u_{D_2}}{L}$ . Обозначим  $f(t, i) := \bar{E}(t) + \delta i$  и покажем, что  $u_1 - u_2 \in N_Q(i)$ .

### 6.2. Исследование работы цепи с ограничителем тока.

Рассмотрим отдельно три возможных случая для значений тока  $i$ .

1) Если  $i \in (-J_1, J_2)$  внутренняя точка  $Q$ , то  $i_{D_1} = i + J_1 > 0$  и  $i_{D_2} = J_2 - i > 0$ , поэтому  $u_{D_1} = u_{D_2} = 0$  и  $u_1 - u_2 \in N_Q(i) = \{0\}$ . А функция

$i = i_0 e^{\delta(t-t_0)} + e^{\delta t} \int_{t_0}^t \bar{E}(s) e^{-\delta s} ds$  в этом случае будет решением уравнения (6.3)

$i' = \delta i + \bar{E}(t)$ , удовлетворяющее начальному условию  $i(t_0) = i_0 \in (-J_1, J_2)$ .

2) Если  $i = -J_1$ , то  $i_{D_1} = 0$  и  $u_{D_1} \leq 0$ ,  $i_{D_2} > 0$  и  $u_{D_2} = 0$ , поэтому  $u_1 - u_2 \in N_Q(i) = (-\infty, 0]$ . Случай 2 возможен пока  $E(t) + RJ_1 \leq 0$  или  $\bar{E}(t) - \delta J_1 \leq 0$ , как это следует из (6.3).

3) Если  $i = J_2$ , то  $i_{D_2} > 0$ ,  $u_{D_2} = 0$ , а  $i_{D_1} = 0$ ,  $u_{D_1} \leq 0$ . В этом случае  $u_1 - u_2 \in N_Q(i) = [0, \infty)$ , что возможно при  $\bar{E}(t) + \delta J_2 \geq 0$  или  $E(t) - RJ_2 \geq 0$ .

Итак, уравнение (6.3) можно записать в виде СДН

$$i' \in f(t, i) - N_Q(i). \quad (6.4)$$

### 6.3. Модель цепи с относительным ограничителем тока в виде СДН.

Рассмотрим теперь устройство, изображённое на рисунке 6.3. При относительно большом значении параметра сопротивления  $R$  (по сравнению с параметрами внешней цепи, к которой подключено рассматриваемое устройство) и при относительно малом значении параметра ёмкости  $C$  данное устройство способно тоже выполнять функции ограничителя тока.

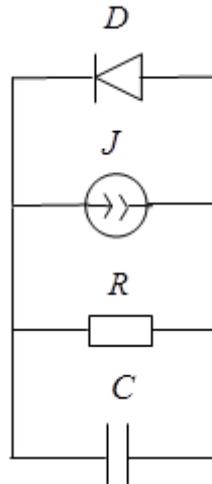


Рис. 6.3 Относительный ограничитель тока.

Подключим в качестве примера два противоположно ориентированных устройства рисунка 6.3 к внешней цепи предыдущего примера (см. рис. 6.4).

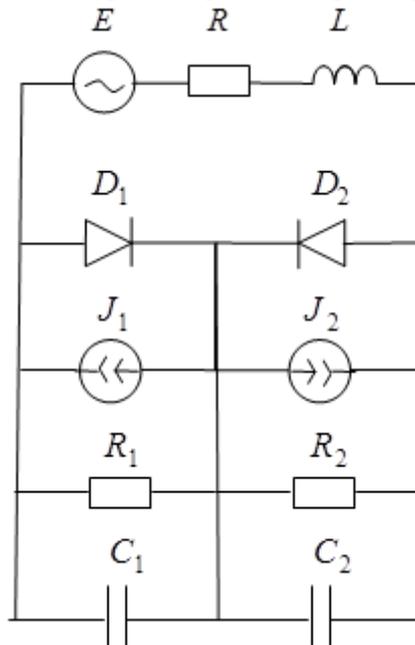


Рис. 6.4 Цепь с двусторонним относительным ограничителем тока.

Положительно направление на новых элементах  $R_1$ ,  $C_1$  положим слева направо, а на  $R_2$ ,  $C_2$  – в противоположную сторону. Выпишем систему из уравнения внешнего контура и уравнений крайних левого и правого узлов, подставляя в них выражения некоторых токов и напряжений из уравнений элементов.

$$\begin{cases} Li' + Ri + u_{C_1} - u_{C_2} = E(t), \\ C_1 u'_{C_1} - i + \frac{u_{C_1}}{R_1} + i_{D_1} = J_1, \\ C_2 u'_{C_2} + i + \frac{u_{C_2}}{R_2} + i_{D_2} = J_2. \end{cases} \quad (6.5)$$

Введя обозначения:  $X := \begin{pmatrix} i \\ u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ u_{D_1} \\ u_{D_2} \end{pmatrix}$   $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} R & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}$ ,

$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_D := \begin{pmatrix} i_{D_1} \\ i_{D_2} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{E} := \begin{pmatrix} E(t) \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$ , запишем систему в матричной форме

$$\mathbf{A}\dot{X} + \mathbf{B}X + \mathbf{D}I_D = \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

При этом вектор  $X \in Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , здесь  $Q$  является конусом. Далее, обозначим  $f(t, X) := \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{B}X)$  и  $Y := \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}I_D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i_{D_1}}{C_1} & \frac{i_{D_2}}{C_2} \end{pmatrix}^T$  и заметим, что  $Y \in N_Q(X)$ , так как  $\langle X, Y \rangle = 0$ , что говорит об ортогональности этих векторов, и  $Y \in Q^*$  – сопряжённому к  $Q$  конусу. Теперь систему (6.6) можно записать в виде системы с диодной нелинейностью

$$\dot{X} \in f(t, X) - N_Q(X). \quad (6.7)$$

Ни в этой модели, ни при её построении не возникало ограничения на значения тока  $i$  верхней ветви цепи рисунка 6.4.

#### 6.4. Исследование работы цепи с относительным ограничителем тока.

Для удобства в качестве начальных значений переменных системы (6.5) выберем нулевые  $u_{C_1}(0) = u_{C_2}(0) = 0$  для напряжений в ветвях, параллельных диодам и  $i(0) = i_0 \in (-J_1, J_2)$  для тока верхней ветви цепи рисунка 6.4. Хотя в ходе исследования будет понятно, что можно задавать произвольные допустимые ( $u_{C_1}, u_{C_2} \leq 0$ ) начальные значения, которые лишь на некотором начальном промежутке времени могут дать существенное отклонение от экспоненциально устойчивых решений системы.

1) Итак, в начальный момент времени  $i(0) = i_0 \in (-J_1, J_2)$ . В этом случае второе и третье уравнения системы (6.5) дают следующие неравенства

$$\begin{cases} C_1 u'_{C_1} + i_{D_1} = J_1 + i - \frac{u_{C_1}}{R_1} > 0, \\ C_2 u'_{C_2} + i_{D_2} = J_2 - i - \frac{u_{C_2}}{R_2} > 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Учитывая, что  $u_{C_1}, u_{C_2} \leq 0$  в любой момент времени и  $i_{D_1} u_{C_1} = i_{D_2} u_{C_2} = 0$ , а также начальное значение  $u_{C_1}(0) = u_{C_2}(0) = 0$ , приходим к выводу: пока  $i(t)$  не выйдет из интервала  $(-J_1, J_2)$  сохраниться равенство  $u_{C_1}(t) = u_{C_2}(t) = 0$ , а

$i = i_0 e^{\delta(t-t_0)} + e^{\delta t} \int_{t_0}^t \bar{E}(s) e^{-\delta s} ds$ . Таким образом, работа цепей рис.6.4 и рис.6.2 идентична.

2) Значение тока  $i$  на некотором промежутке времени находится вне интервала  $(-J_1, J_2)$ , например,  $i(t) \geq J_2$  на этом интервале. Тогда из второго уравнения системы (6.5)  $C_1 u'_{C_1} + i_{D_1} = J_1 + i - \frac{u_{C_1}}{R_1} > 0$  по-прежнему следует, что  $u_{C_1}(t) = 0$ , из третьего уравнения  $C_2 u'_{C_2} + \frac{u_{C_2}}{R_2} + i_{D_2} = J_2 - i \leq 0$  следует  $i_{D_2}(t) = 0$ , а система (6.5) принимает вид

$$\begin{cases} Li' + Ri - u_{C_2} = E(t), \\ C_2 u'_{C_2} + i + \frac{u_{C_2}}{R_2} = J_2. \end{cases} \quad (6.9)$$

Не трудно вычислить собственные значения матрицы этой системы

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{R}{L} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{R}{L} - \frac{1}{R_2 C_2} \right)^2 - \frac{4}{LC_2}} \right],$$

в любом случае вещественные части их отрицательны и, следовательно, все решения системы экспоненциально устойчивы. Скорость сближения решений зависит от значения произведения  $R_2 C_2$ , чем оно ближе к нулю, тем выше скорость сближения.

$$i(t) = \frac{R_2}{R_2 + R} J_2, \quad u_{C_2}(t) = \frac{R_2 R}{R_2 + R} J_2 - \text{частное решение, соответствующее, сла-$$

гаемому  $\begin{pmatrix} 0 \\ J_2 \end{pmatrix}$  правой части системы. Частное решение, соответствующее сла-

гаемому  $\begin{pmatrix} E(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  с  $E(t) = A \sin \omega t$  имеет вид  $i(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ ,

$u_{C_2}(t) = c \cos \omega t + d \sin \omega t$ , коэффициенты которого удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a \left( \frac{H}{\omega(L + R_2^2 C_2 G)} (R_2 G - R) - L\omega - R_2 C_2 R \omega \right) = A, \\ b = -a \frac{R + R_2 + R R_2^2 C_2^2 \omega^2}{\omega(L + R_2^2 C_2 G)}, \\ c = b L \omega + a R, \\ d = b R_2 (L C_2 \omega^2 - 1) + a R R_2 C_2 \omega, \end{cases}$$

где  $G = (L C_2 \omega^2 - 1)$  и  $H = (R + R_2 + R R_2^2 C_2^2 \omega^2)$ .

Если  $R_2$  взять существенно больше остальных параметров, а к нему подобрать  $C_2$  так, что  $R_2 C_2$  достаточно близко к нулю, то кроме того, что решения однородной системы быстро устремляются к нулю, коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  будут близки к нулю (за исключением коэффициента  $d$ , который мало отличается от амплитуды

питания  $A$ ). Поэтому решение  $i(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + \frac{R_2}{R_2 + R} J_2$  будет мало от-

личаться от  $J_2$ , а решение  $u_{C_2}(t)$  близко к функции  $R J_2 - A \sin \omega t$ . Отметим, что система (6.9) остаётся на короткое время в силе при возвращении тока  $i(t)$  в промежуток  $(-J_1, J_2)$  при отрицательном значении  $u_{C_2}(t)$ . В этом случае производная  $u'_{C_2}(t)$  имеет большое положительное значение в силу второго неравенства в (6.8), в следствии чего  $u_{C_2}(t)$  быстро достигает нулевого значения, и ситуация возвращается к рассмотренной в предыдущем случае 1). Возможны попеременные переходы между случаями 1) и 2) до тех пор, пока разность  $R J_2 - A \sin \omega t$  не станет существенно положительной (сравните со случаем 2 исследования модели первой цепи) и ситуация окончательно вернётся к случаю 1).

3) При выходе  $i(t)$  из промежутка  $(-J_1, J_2)$  с неравенством  $i(t) \leq -J_1$  поведение модели аналогично предыдущему рассмотренному случаю. Из третьего уравнения системы (6.5) следует  $C_2 u'_{C_2} + i_{D_2} = J_2 - i - \frac{u_{C_2}}{R_2} > 0$ , и это означает  $u_{C_2}(t) = 0$ . А из

второго уравнения следует  $C_1 u'_{C_1} + \frac{u_{C_1}}{R_1} + i_{D_1} = J_1 + i < 0$ , откуда  $i_{D_1} = 0$ . Поэтому си-

стема (6.5) принимает вид

$$\begin{cases} Li' + Ri + u_{C_1} = E(t), \\ C_1 u'_{C_1} - i + \frac{u_{C_1}}{R_1} = -J_1. \end{cases} \quad (6.10)$$

Результат исследования этой системы аналогичен полученному в предыдущем пункте.

На основании проведённых нами анализов работы цепей рисунков 6.2 и 6.4 для конкретных значений параметров цепей без труда можно поучить оценку близости токов в верхних ветвях этих цепей.

### 6.5. Сравнение результатов численных экспериментов для двух ограничителей тока.

Для моделей двух рассмотренных выше цепей легко строятся программные реализации. Приведём некоторые результаты численных экспериментов с ними. При следующих значениях параметров  $L = R = 1$ ,  $R_1 = R_2 = 100$ ,  $C_1 = C_2 = 0.001$ , функции питания  $E(t) = 4 \sin t$ , ограничений тока  $J_1 = J_2 = 2$  и с нулевыми начальными условиями график решения  $i(t)$  системы (4) на графике представлен жирной пунктирной линией, а график решения  $i(t)$  системы (6.7) сплошной тонкой линией. Из результата эксперимента видно, что параметры относительного ограничителя подобраны удачно. Незначительные отклонения от работы «строгого» ограничителя происходят на выходах тока за границы интервала  $(-J_1, J_2)$  в результате влияния решения однородных систем, соответствующих (6.9) и (6.10).

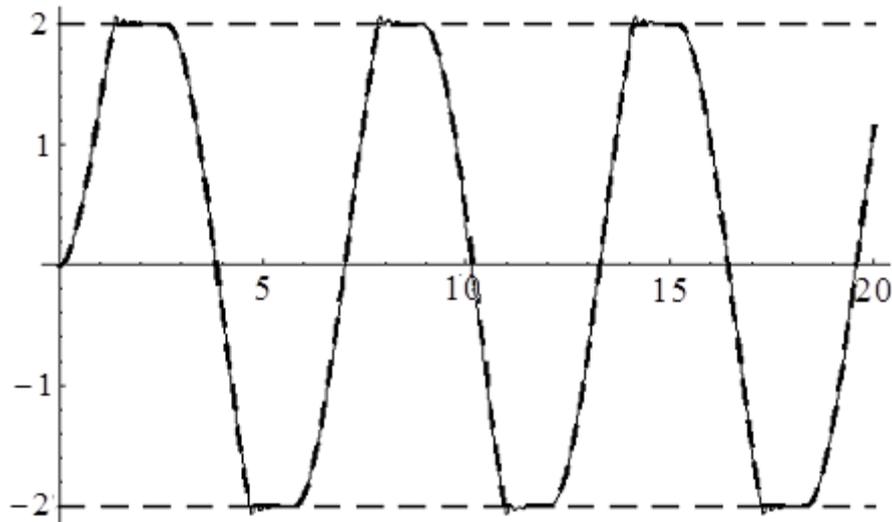


Рис. 6.5 Графики токов цепей с рекомендуемой подборкой параметров.

На следующем графике представлен результат с увеличенными в 10 раз параметрами ёмкостей  $C_1 = C_2 = 0.01$ , что увеличивает значения решений однородных систем и частных решений, отвечающих слагаемому

к слагаемому  $\begin{pmatrix} E(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ .

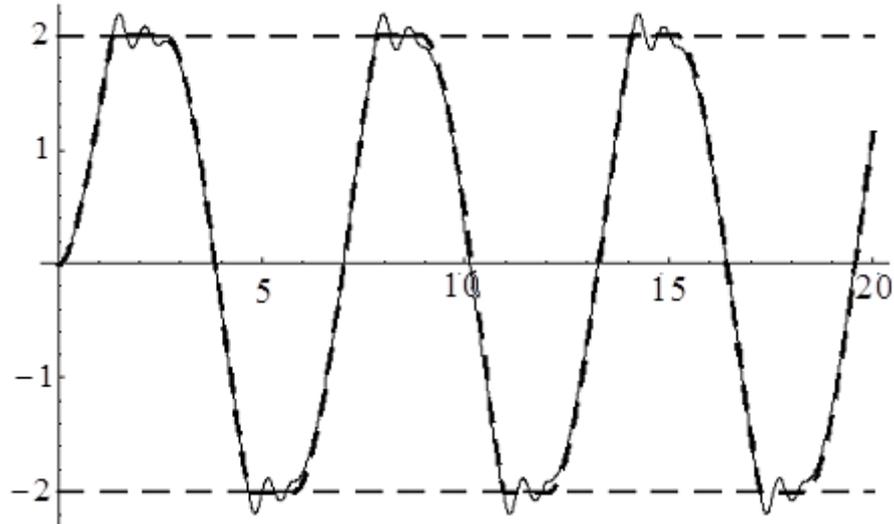


Рис. 6.6 Ухудшение близости токов при плохом выборе параметров.

Наконец, вопреки рекомендациям, полученным при исследовании, придадим параметрам относительного ограничителя сравнимые с основной ветвью цепи значения  $R_1 = R_2 = C_1 = C_2 = 1$ . Влияние общего решения и частного, отвечающих слагаемому  $\begin{pmatrix} E(t) \\ 0 \end{pmatrix}$  возросло до такой степени, что говорить об ограничении тока не приходится.

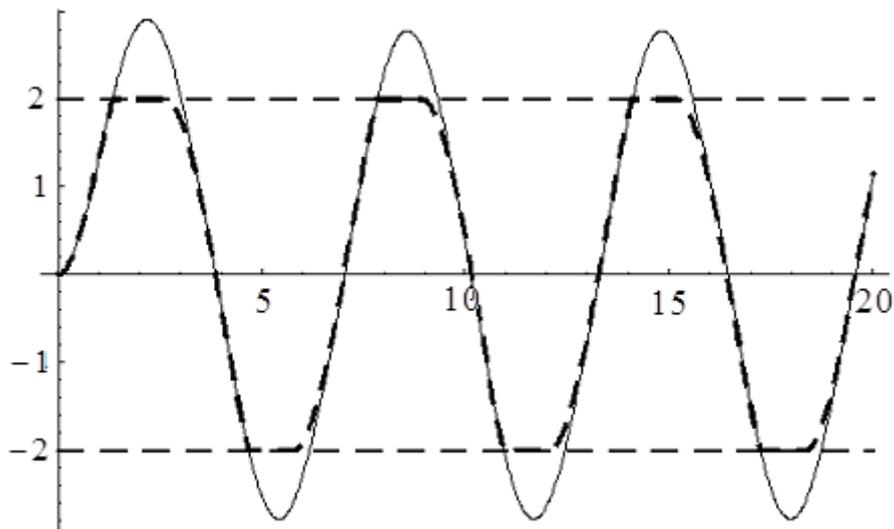


Рис. 6.7 Отсутствие близости токов с неправильными параметрами.

### Упражнения.

1. Построить модели в виде СДН для цепей, изображённых на рисунке 6.8, с диодными ограничителями напряжения.
2. Провести исследование режимов работы цепи, изображённой на рисунке 6.8 слева.
3. Провести исследование режимов работы цепи, изображённой на рисунке 6.8 справа.

4. Построить компьютерные программы, реализующие модели цепей изображённых на рисунке 6.8.
5. Провести серию экспериментов, сравнить их результаты для обеих цепей, сделать выводы из полученных результатов экспериментов.

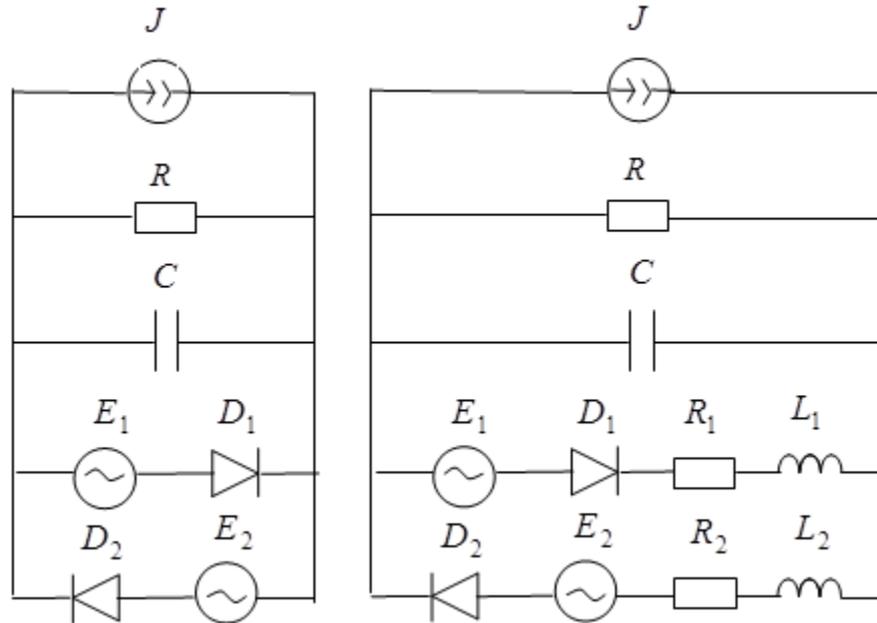


Рис. 6.8 Цепи с диодными ограничителями напряжения.

## 7. Модели биологических систем с ограничениями численности

В этом параграфе рассмотрим в качестве примера ещё одну из возможных областей применения систем с диодными нелинейностями.

### 7.1. Классическая модель биологической системы «хищник-жертва».

Напомним классическую модель биологической системы «хищник-жертва». Предполагается, что в некоторой местности в основном существуют два вида животных, один из которых – хищник, второй – жертва. Если бы в среде, где обитают эти два вида, находились бы только животные вида жертва, то коэффициент их прироста предполагается постоянной положительной величиной, которую обозначим  $\varepsilon_1$ . Другой вид (хищник), питающийся только (или в основном) жертвой, в предположении, что он существует изолированно, имеет некоторый коэффициент прироста ( $-\varepsilon_2$ ), который предполагают постоянным и отрицательным. Когда такие два вида сосуществуют в ограниченной среде, жертвы будет размножаться тем медленнее, чем больше будет хищников, а хищники – тем быстрее, чем многочисленнее будет вид жертв. Гипотеза В. Вольтерра состоит в том, что коэффициенты прироста жертв и хищников равны, соответственно,  $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$  и  $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$  ( $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – положительные постоянные,  $N_1, N_2$  – численность жертв и хищников на текущий момент времени). Поэтому численность животных обоих видов описывается системой дифференциальных уравнений [8]

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \\ \frac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1), \end{cases} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0). \quad (7.1)$$

Задача В. Вольтерра состояла в том, чтобы полностью исследовать эту систему и выяснить закономерности выживания первого и второго видов.

### 7.2. Положения равновесия классической модели, анализ их устойчивости.

Система

$$\begin{cases} N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) = 0, \\ -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) = 0, \end{cases}$$

очевидно, имеет два решения  $N_1 = 0, N_2 = 0$  и  $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ , являющиеся по-

ложениями равновесия системы (7.1). Будем использовать следующие обозначения для координат второго из найденных положений равновесия:

$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} := \bar{X}_1, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} := \bar{X}_2$ . Для анализа устойчивости положений равновесия воспользуем-

ся теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Найдём матрицу частных производных от правых частей уравнений (7.1):

$A \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{pmatrix}$ . Для положения равновесия  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  получаем:

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$ . Поскольку  $\varepsilon_1 > 0$ , это положение равновесия не устойчиво. Для

$\bar{X} =: \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix}$  имеем:  $A(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}$ . Собственные значения этой матрицы,

как нетрудно видеть, равны  $\pm i\omega$ , где  $\omega =: \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ . Это означает, что теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению не даёт возможности судить об устойчивости данного положения равновесия.

### 7.3. Фазовый портрет системы.

Линеаризация системы (7.1) вблизи положения равновесия  $\bar{X}$  приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} y, \\ \dot{y} = \frac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} x. \end{cases} \quad (7.2)$$

Здесь  $x$  и  $y$  – приближённые значения  $N_1 - \bar{X}_1$  и  $N_2 - \bar{X}_2$ , соответственно. Исключив из (7.2)  $y$ , получаем уравнение второго порядка  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  для  $x$ . Его общее решение можно записать в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (7.3)$$

где  $A, \varphi_0$  зависят от начальных значений  $x, y$ . Возвращаясь к первому из уравнений (7.2), получаем выражение для  $y$

$$y = B \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (7.4)$$

здесь коэффициент  $B$  связан с  $A$  соотношением  $B = \omega \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \varepsilon_2} A$ .

Из (7.3) и (7.4) следует, что фазовые траектории линеаризованной системы в плоскости  $(N_1, N_2)$  представляют собой эллипсы с полуосями  $A, B$  и центром в точке  $\bar{X}$ .

Рисунок 7.1 соответствует параметрам  $\varepsilon_1 = \gamma_1 = 1, \varepsilon_2 = \gamma_2 = 2$ . Нетрудно видеть, что движение по этим траекториям происходит против часовой стрелки.

Решения линеаризованной системы называются малыми *флуктуациями*, их период определяется явной формулой  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$ .

Для нелинейной системы (7.1) поведение траекторий, мало отклоняющихся от положения равновесия  $\bar{X}$ , близко к поведению траекторий линеаризованной системы.

В книге В. Вольтерра [8] для системы (7.1) найден интеграл вида

$$N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}. \quad (7.5)$$

На рисунке 7.2 изображены траектории для нескольких начальных значений. Рисунок соответствует параметрам  $\varepsilon_1 = \gamma_1 = 1, \varepsilon_2 = \gamma_2 = 2$ .

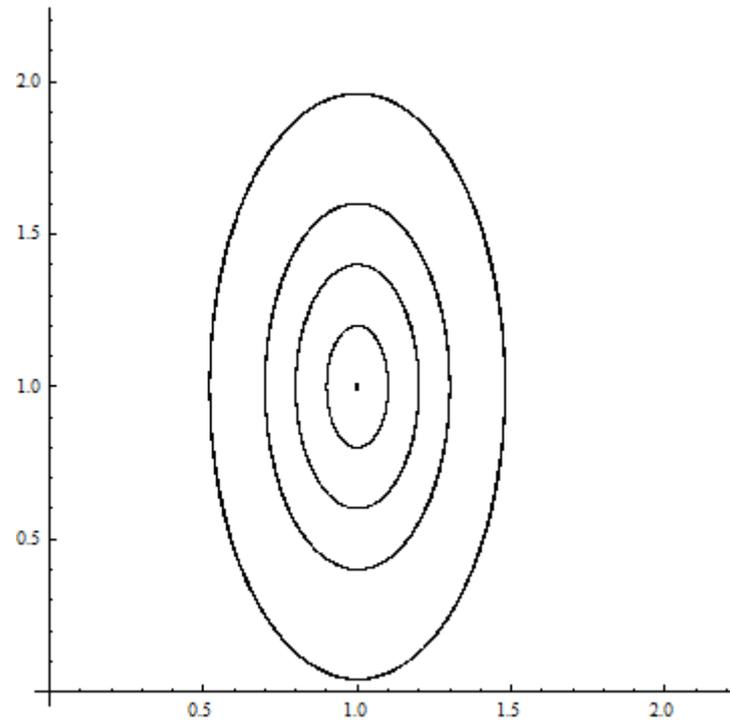


Рис. 7.1

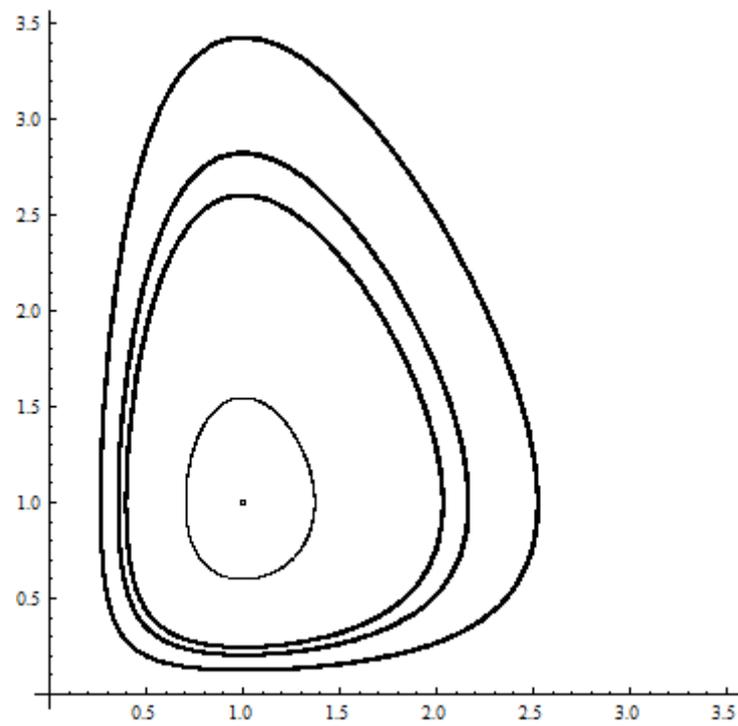


Рис. 7.2

#### 7.4. О причинах возникновения предельных циклов.

**Пример 7.1.** Рассмотрим СДН

$$\dot{x} = \tau_x f(x)$$

(7.6)

с функцией  $f(x) = \left( 0.1(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})x_1 - x_2, 0.1(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})x_2 + x_1 \right)$  для  $x \in Q = \mathbb{R}^2$ .  $\tau_x f(x) = f(x)$  для всех точек  $x \in Q$ . С помощью компьютерной программы построены фазовые картинки двух решений этого уравнения с начальными значениями  $(0.1, 0.1)$  и  $(2, 0)$ , изображённые на рисунке 7.3. Траектории этих решений не замкнуты, но неограниченно приближаются к окружности с радиусом 1 и центром в нулевой точке. Не трудно проверить, что эта окружность является фазовой траекторией решения (7.6)  $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ , которую называют в подобных случаях предельным циклом. В данном примере наличие единственного предельного цикла обусловлено характером функции  $f(x)$  правой части системы (7.6).

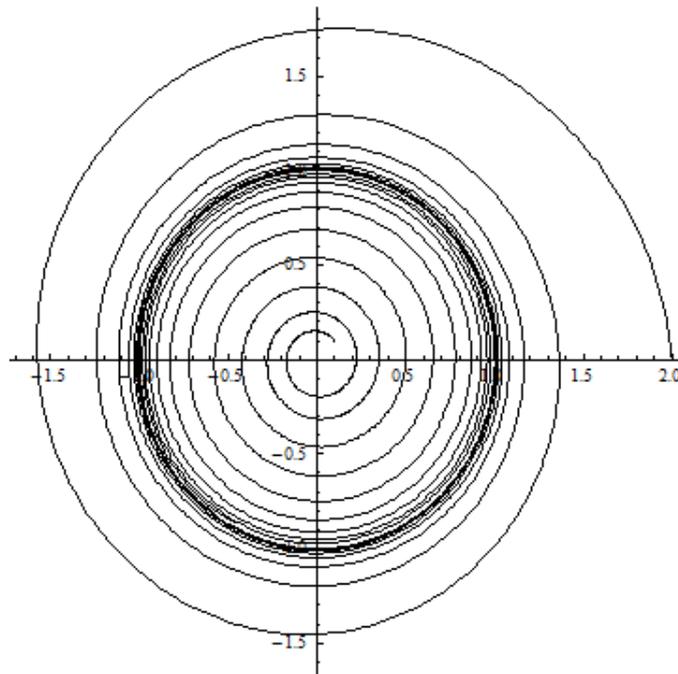


Рис. 7.3

**Пример 7.2.** Если же рассмотреть (7.6) с функцией  $f(x) = (0.1x_1 - x_2, 0.1x_2 + x_1)$ , то решениями её являются функции  $\varphi(t) = e^{0.1t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t, C_1 \sin t - C_2 \cos t)$  с траекториями в виде раскручивающихся против часовой стрелки от нулевой точки в бесконечность спиралей. С  $Q = \mathbb{R}^2$  у системы (7.6) нет циклов. Но с  $Q = \{x = (x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  в виде круга радиуса  $r > 0$  с центром в нулевой точке (в том числе и в виде единичного круга), система (7.6) приобретает предельный цикл, которым становится окружность, ограничивающая множество  $Q$ . В этом примере не функция  $f(x)$ , а ограничивающее множество  $Q$  становится виновником образования цикла, в который вливаются остальные траектории системы (7.6). На рисунке 7.4 изображено втекание решения  $\varphi(t) = 0.1 \cdot e^{0.1t} (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$  в единичную окружность, являю-

щуюся границей  $Q$ . Отметим, что в этом случае  $\tau_x f(x) = f(x)$  только для внутренних точек  $Q$ , а для граничных точек  $\tau_x f(x) = (-x_2, x_1)$ .

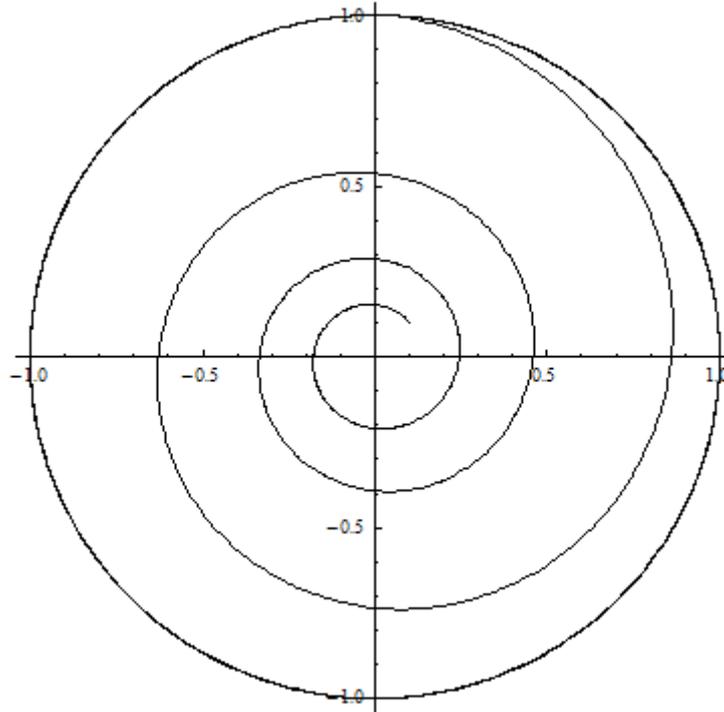


Рис. 7.4

**Пример 7.3.** Вернёмся к примеру 7.1. Выбрав в качестве ограничивающего множества полуплоскость  $Q = \{(x_1, x_2) : -0.8 \leq x_1\}$ , получим цикл, отличный от цикла примера 7.1 и изображённый на рисунке 7.5 более чёрным, чем остальные линии, цветом.

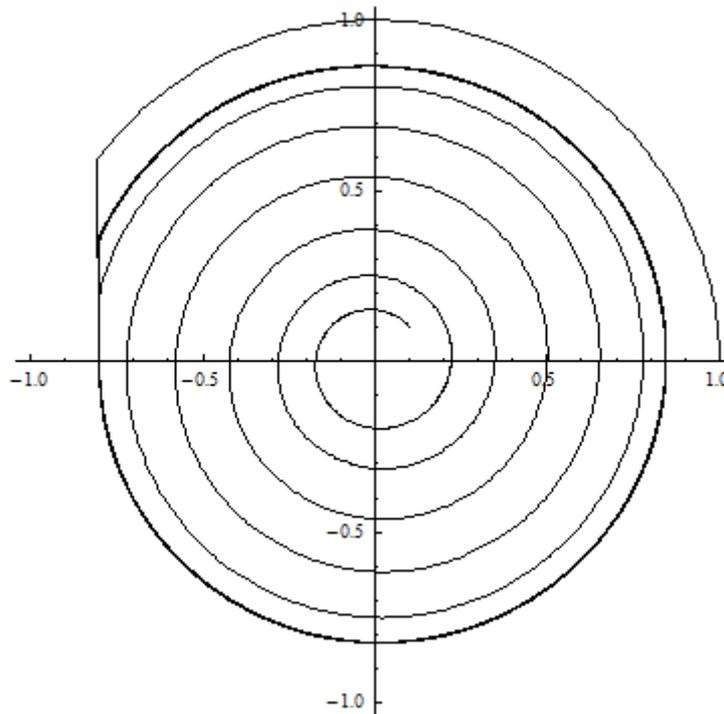


Рис. 7.5

В него вливаются все траектории системы (на рисунке 7.5 изображены две из них с начальными значениями  $(0.1, 0.1)$  и  $(1, 0)$ ).

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод, что ограничивающее множество  $Q$  может не оказывать влияния на формирование предельного цикла, как в примере 7.1 (например,  $Q = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  с  $r > 1$ ). Может исказить вид и характер предельного цикла (траектории не бесконечно приближаются, а вливаются в цикл), как в примере 7.3. И наконец, может образовывать цикл в паре с определённым характером функции  $f(x)$  правой части системы (7.6).

### 7.5. Автоколебания в обобщённой системе «хищник-жертва».

На выпуклом замкнутом множестве  $Q \subset \mathbb{R}_+^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$  рассмотрим

$$\dot{X} = \tau_X [F(X) + \delta(X - \bar{X})] \quad (7.7)$$

СДН, в которой  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  – численности в момент  $t$  «жертвы»  $X_1$  и «хищника»

$X_2$ ;  $F(X) = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 - \gamma_1 X_2) X_1 \\ -(\varepsilon_2 - \gamma_2 X_1) X_2 \end{pmatrix}$  – правая часть классической модели Лотки-

Вольтерра системы «хищник-жертва»;  $\bar{X}$  – положение равновесия классической модели;  $\varepsilon_1, \gamma_1, \varepsilon_2, \gamma_2, \delta$  – неотрицательные параметры; слагаемое  $\delta(X - \bar{X})$  учитывает внешние факторы, влияющие на численность видов, имеющие характер центробежной силы, отталкивающей решения системы от положения равновесия  $\bar{X}$ . Ограничение  $X \in Q$  моделирует определённый способ искусственного регулирования численности видов  $X_1, X_2$ . Если  $\delta = 0$  и  $Q = \mathbb{R}_+^2$ , то (7.7) представляет классическую модель системы «хищник-жертва».

Рассмотрим примеры наличия и отсутствия предельных циклов в обобщённой систем «хищник-жертва».

**Пример 7.4.** Рассмотрим частный случай системы 7.7

$$\dot{X} = \tau_X [F(X) + 0.25(X - \bar{X})] \text{ с } \delta = 0.25 \text{ и } F(X) = \begin{pmatrix} X_1 - X_1 X_2 \\ -X_2 + X_1 X_2 \end{pmatrix} \text{ соответствует}$$

единичным значениям параметров. Точка  $\bar{X} = (1, 1)$  является положением равновесия системы. Выберем в качестве ограничивающего численность особей множество  $Q = \{(X_1, X_2) : 0.75 \leq X_1 \leq 1.7, 0.5 \leq X_2 \leq 1.2\}$ . Численный эксперимент, результаты которого можно наблюдать на рисунке 7.6, показал наличие у системы предельного цикла, выделенного на рисунке интенсивным чёрным цветом.

**Пример 7.5.** По сравнению с примером 7.4 увеличим значение параметра внешних факторов  $\delta$  до 0.6 при сохранении всех прочих значений параметров системы. Как видно из рисунка 7.7, предельный цикл исчез по причине появления нового устойчивого положения равновесия  $(1.7, 1.2)$  – правый верхний угол  $Q$

(см. рис. 7.7). А при  $\delta = 0.8$  появляется ещё одно устойчивое положение равновесия  $(1.7, 0.5)$  – правый нижний угол  $Q$ , как видно из рисунка 7.8.

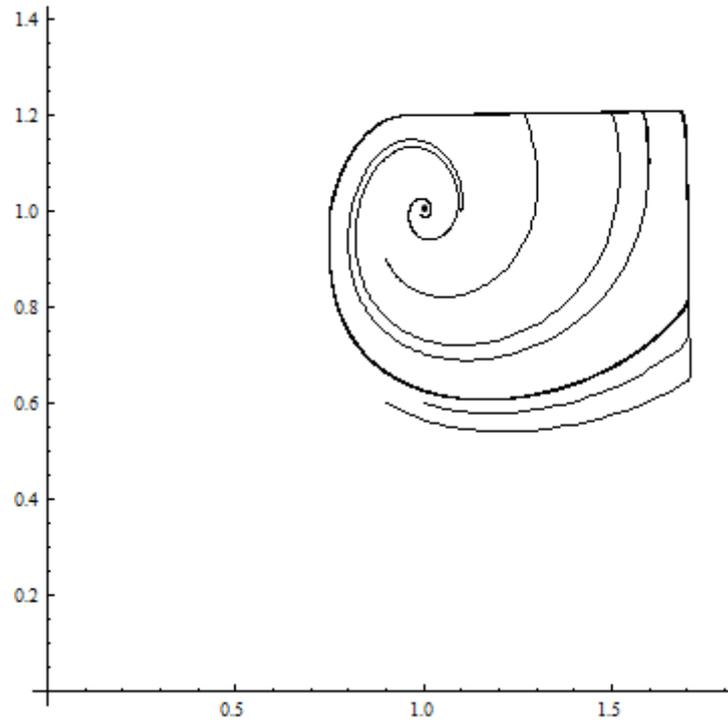


Рис. 7.6

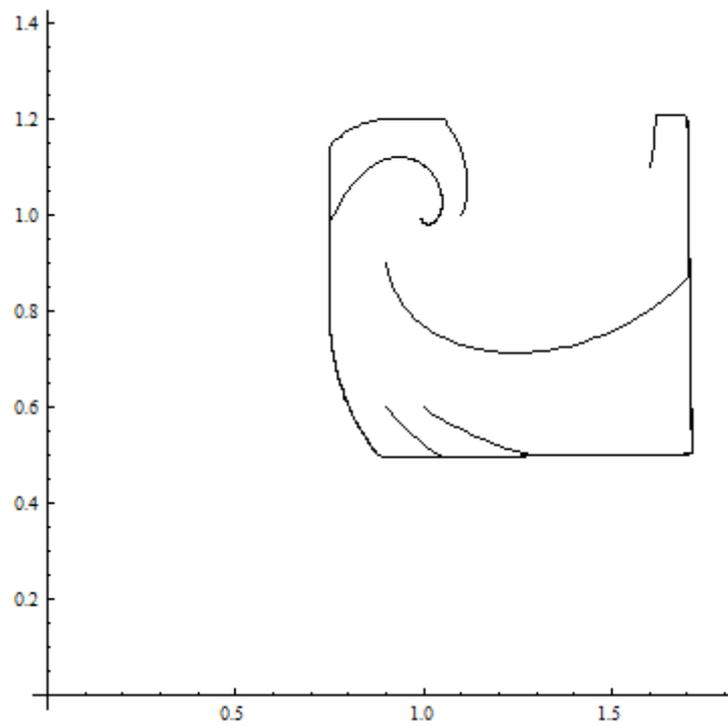


Рис. 7.7

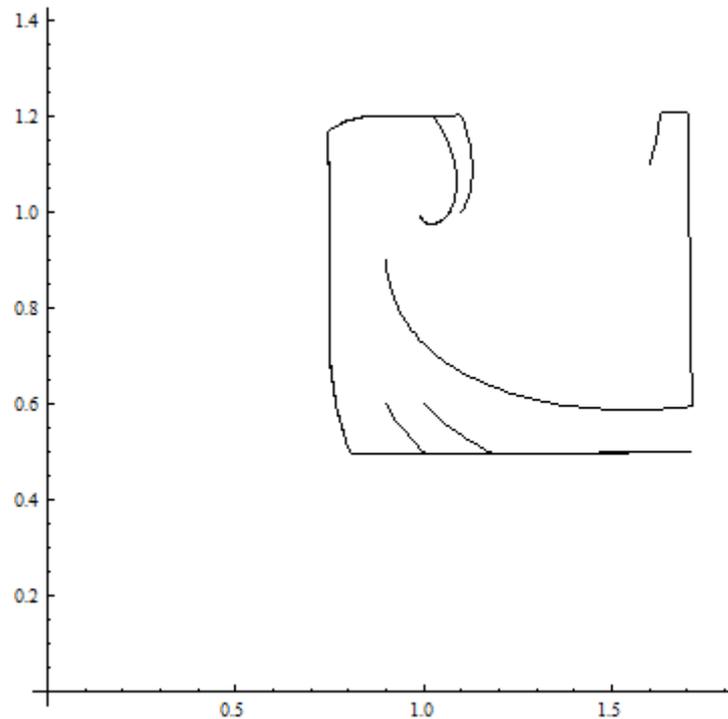


Рис. 7.8

### 7.6. Упражнения.

С помощью компьютерной программы провести следующие исследования с обобщённой системой примера 7.4 «хищник-жертва».

- 1) Исследовать появление новых точек равновесия при дальнейшем увеличении параметра  $\delta$ .
- 2) Описать характер изменения предельного цикла при изменении  $\delta$  от значения 0.6 до значения 0.5
- 2) Заменить в примере 7.4 ограничивающее множество  $Q$  на круг с центром в точке  $(1, 1)$  единичного радиуса и провести серию экспериментов с уменьшением и увеличением значения параметра  $\delta$ . Охарактеризовать связь изменения предельного цикла с изменением значений  $\delta$ . Выяснить, появляются ли дополнительные точки устойчивого равновесия при увеличении  $\delta$ .

### Литература

1. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
2. Лисицкая И.Н., Сеницкий Л.А., Шумков Ю.М. Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами. Киев: Наукова думка. 1969. – 440 с.
3. С. Гасс Линейное программирование (методы и приложения). – М.: ФИЗМАТ–ЛИТ, 1961. 304с.
4. Петрова Л.П., Прядко И.Н., Макринова Д.Л., Гулимова Е.Н. Системы с диодными нелинейностями в обосновании корректности некоторого класса прибли-

жённых методов решения задач выпуклого программирования. Системы управления и информационные технологии №2 (76). 2019. с 7–11.

5. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. 331с.
6. Иосида К. Функциональный анализ/К. Иосида. – М.: Мир, 1967. 624 с.
7. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебное пособие для студ. мат. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука. – 1968. – 496 с.
8. Вольterra В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. 288с.

Составители: Петрова Любовь Петровна,  
Прядко Ирина Николаевна

Редакция авторов