Оглавление

1. Системы с диодными нелинейностями

1.1. Введение

1.1.1. Пример: электрическая цепь с идеальным диодом.

Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке 1. Напомним, что входящие в нее линейные элементы L (*индуктивность*), R (*сопротивление*), E (*источник эдс – электродвижущей силы*) описываются уравнениями:

$$L\frac{di_L}{dt}=u_L,\ Ri_R=u_R,\ u_E=-e(t).$$

Параметры L (Гн, *генри*), R (Ом, *ом*) – заданные положительные константы; значения известной функции времени $e(t)$ измеряются в *вольтах* (В). Функции времени i (А, *ампер*), u (В, *вольт*) с соответствующими индексами обозначают *токи* и *напряжения* элементов в выбранном направлении, которое на рисунке обозначено стрелкой.

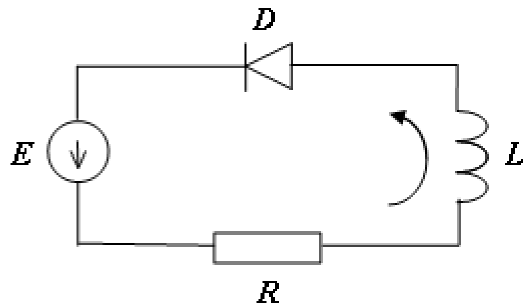


Рис. 1

Идеальный диод D – это элемент, свободно проводящий ток в направлении стрелки (от *анода* к *катоду*) и не проводящий его в обратном направлении. При отрицательном *анодном* напряжении $(u_D<0)$ *анодный* ток равен нулю $(i_D=0)$; при нулевом $(u_D=0)$ – может принимать любое неотрицательное значение $(i_D\geq 0)$; положительное значение анодного напряжения невозможно. Другими словами, для идеального диода зависимость анодного тока от анодного напряжения можно описать системой трех соотношений:

$$\begin{cases} i \ge 0, \\ u \le 0, \\ iu = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Графически эта зависимость изображена на следующем рисунке.

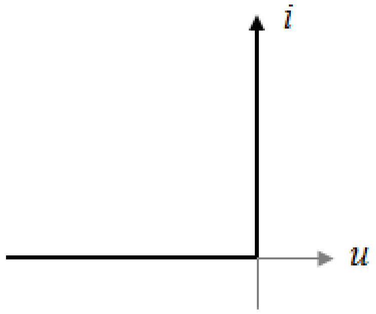


Рис 2

Полученную ломаную можно трактовать как график многозначной функции

$$i \in D(u) := \begin{cases} \{0\}, если\ u < 0, \\ [0,+\infty), если\ u = 0, \\ \varnothing, если\ u > 0 \end{cases}$$

или обратной многозначной функции

$$u \in D^{-1}(i) := \begin{cases} \{0\},\ если\ i > 0, \\ (-\infty, 0],\ если\ i = 0, \\ \varnothing,\ если\ i < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Для данной цепи воспользуемся вторым законом Кирхгофа, по которому сумма напряжений элементов по замкнутому контуру равна нулю:

$$u_L + u_R + u_D + u_E = 0.$$

Воспользовавшись уравнениями линейных элементов и замечая, что токи всех элементов в неразветвленной цепи одинаковы $(i_L = i_R = i_D =: i)$, получаем уравнение с двумя неизвестными i и $u := u_D$:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e(t) - u\,.$$

Для полноты описания цепи к нему нужно присоединить соотношения (1) или многозначную зависимость (2) u от i. В последнем случае математическая модель цепи принимает вид *дифференциального включения*:

$$L\frac{di}{dt}\in e(t)-Ri-D^{-1}i.$$

В дальнейшем нам будет удобно записывать его с единичным коэффициентом при производной:

$$\frac{di}{dt}\in E(t)-\delta i-D^{-1}(i);$$

здесь

$$E(t):=\frac{e(t)}{L},\ \delta:=\frac{R}{L}$$

и, заметим, $D^{-1}(i)/L=D^{-1}(i)$.

Для связи с дальнейшим нам будет удобно также использовать следующие обозначения и термины: $[0,+\infty)=:Q$ – *фазовое пространство* данной цепи, $D^{-1}(i)=N_i$ – *нормальный конус к фазовому пространству* Q *точке* $i\in Q$. Окончательно математическая модель рассматриваемой цепи принимает вид дифференциального включения в фазовом пространстве Q:

$$\frac{di}{dt}\in E(t)-\delta i-N_i. \tag{3}$$

1.1.2. Частная ситуация.

Рассмотрим изменение тока в цепи рис.1 для того частного случая, когда $e(t)\equiv-1,\ L=1,\ R=1,\ i(0)=1$. Соотношение (3) при этом имеет вид

$$\frac{di}{dt}\in-1-i-N_i;$$

при $i>0$ оно эквивалентно равенству

$$\frac{di}{dt}=-1-i\quad\left(N_i=\{0\}\right), \tag{*}$$

а при $i=0$ – соотношению

$$\frac{di}{dt}\in\left[-1,+\infty\right)\quad\left(N_i=N_0=\left(-\infty,0\right]\right). \qquad (**)$$

Решив дифференциальное уравнение (*) при заданном начальном значении $i(0)=1$, получим:

$$i=2e^{-t}-1.$$

Эта функция положительна при $t\in\left[0,\ln 2\right)$, т.е. является на этом промежутке решением включения (3). Далее, функция $i\equiv 0$ удовлетворяет включению (**). Поэтому непрерывную функцию

$$i=\begin{cases}2e^{-t}-1, \text{ } если \text{ } 0\le t<\ln 2,\\ 0, \text{ } если \text{ } t\ge\ln 2\end{cases}$$

естественно считать решением рассматриваемой задачи, хотя в точке $t=\ln 2$ она не имеет производной в обычном смысле: левая производная равна -1, а правая – нулю.

Описанная здесь ситуация характерна для систем с диодными нелинейностями, поэтому определение решения для таких систем должно допускать отсутствие производной в некоторых точках (но включать требование непрерывности во всех точках). Строгое определение дается ниже в пункте 1.2.7.

1.1.3. Запись в виде дифференциального уравнения с разрывной правой частью.

Пусть решение $i(t)$ включения (3) имеет в точке $t=t_1$ (двустороннюю) производную. Если при этом $i(t_1)>0$, то в данной точке выполнено равенство $\frac{di}{dt}=E(t)-\delta i$. Если же $i(t_1)=0$, то и $i'(t_1)=0$, поскольку в этом случае t_1 есть точка минимума неотрицательной функции $i(t)$. Заметим, что этом случае из включения (3) вытекает, что $E(t_1)$ не может иметь положительное значение, поскольку в противном случае $i' = 0 \notin E(t) - \delta \cdot 0 - N_i = \left[E(t), +\infty\right)$.

Итак, любое решение включения (3) во всех точках, в которых оно имеет двустороннюю производную, удовлетворяет уравнению

$$i' = \begin{cases} E(t) - \delta i, \textit{ если } i > 0, \\ 0, \textit{ если } i = 0. \end{cases}$$

Для любой точки i фазового пространства $Q = [0, +\infty)$ введем понятие *касательного конуса* T_i *к* Q *в этой точке*:

$$T_i := \begin{cases} (-\infty, +\infty), \textit{ если } i > 0, \\ [0, +\infty), \textit{ если } i = 0; \end{cases}$$

и обозначим через τ_i оператор проектирования на касательный конус T_i, определяющий для любого вещественного числа ближайшую к нему точку из T_i. Такая точка всегда существует, причём единственная.

Для $i > 0$ $\tau_i\left(E(t) - \delta i\right) = E(t) - \delta i$, и, следовательно $i' = \tau_i\left(E(t) - \delta i\right)$, если производная i' существует.

При $i = 0$ $\tau_i\left(E(t) - \delta i\right) = \tau_0\left(E(t)\right) = \begin{cases} E(t), \textit{ если } E(t) \in [0, +\infty), \\ 0, \textit{ если } E(t) < 0. \end{cases}$

Если в момент t_2 обнуления i (т.е. $i(t) > 0$ на некотором промежутке $(t_2 - \delta, t_2)$ и $i(t_2) = 0$) значение функции $E(t_2) < 0$ отделено от нуля, то оператор τ_i терпит в точке t_2 разрыв.

С учётом замечания $E(t_1) \le 0$ для точек с нулевым значением i и существующей двусторонней производной i' приходим к выводу, что решения (3) в точках существования i' удовлетворяет уравнению с разрывной правой частью

$$i' = \tau_i\left(E(t) - \delta i\right).$$

1.1.4. Общий вид системы с диодной нелинейностью.

Будем полагать теперь, что Q является некоторым произвольным выпуклым замкнутым множеством пространства R^{n}, N_x – конус внешних нормалей к Q в точке $x \in Q$

и T_x – касательный конус к Q в точке x. τ_x – оператор проектирования точек R^{n} на касательный конус T_x.

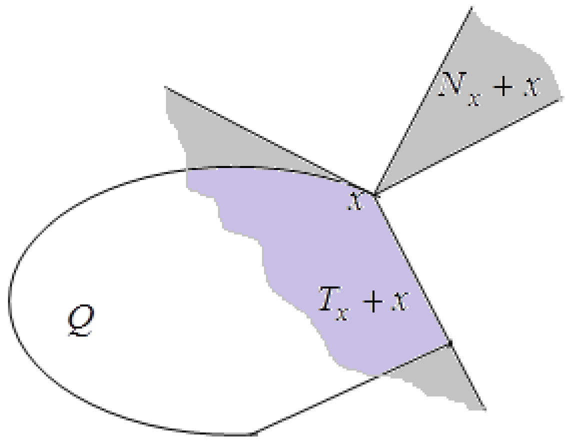


Рис. 3

Строгие определения этих объектов и их свойства мы рассмотрим в параграфе 1.2.

Для функции $f(t,x)$ систему, записанную в виде дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \tau_x f(t,x) \tag{4}$$

или в виде дифференциального включения

$$\dot{x} \in f(t,x) - N_x \tag{5}$$

будем называть системой с диодной нелинейностью (СДН).

Эквивалентность (4) и (5) будет доказана в 1.2.8, а вначале следующего параграфа поговорим об объектах, входящих в понятие СДН.

1.2. Выпуклые множества и СДН

1.2.1. Определение и примеры.

Определение. Подмножество Q пространства R^{n} называется *выпуклым,* если $\forall(x \in Q, y \in Q, t \in [0,1])\left[tx + (1-t)y \in Q\right]$, т.е. если с любыми двумя своими элементами оно содержит соединяющий их отрезок.

Примеры. Докажите, что следующие множества выпуклы.

1. Пустое множество.
2. Все пространство R^{n}.
3. Подпространство единичной коразмерности, которое можно описать как множество элементов x, удовлетворяющих при некотором фиксированном ненулевом $n \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ уравнению $(n,x)=0$. Вектор n называется *нормалью* к данному подпространству.
4. Пересечение любого семейства выпуклых множеств.
5. В частности, любое линейное подпространство L – пересечение конечного множества подпространств единичной коразмерности; его можно описать системой уравнений $(n_i,x)=0\ (i=1,...,k)$. Здесь и в дальнейшем круглыми скобками обозначается стандартное скалярное произведение в R^{n} – сумма попарных произведений соответствующих координат. Подпространство L можно также описать векторным уравнением $Nx=0$ с матрицей N, строками которой являются векторы n_i.
6. Сдвиг $Q+s$ выпуклого множества Q на вектор $s \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.
7. В частности, сдвинутое подпространство (аффинное подпространство) $L+s$, которое можно также описать неоднородным векторным уравнением $Nx=c$ с вектором $c=Ns$.
8. Полупространство, т.е. множество векторов x, удовлетворяющих при некотором фиксированном ненулевом $n \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ неравенству $(n,x) \le 0$. Вектор n называется *внешней нормалью* к данному полупространству.
9. *Граненый (многогранный) конус* – пересечение конечного набора полупространств.
10. Сдвинутое полупространство $P+s$ – сдвиг полупространства на некоторый вектор s. Может быть описано через внешнюю нормаль n и константу $c=(n,s)$ неравенством $(n,x) \le c$.

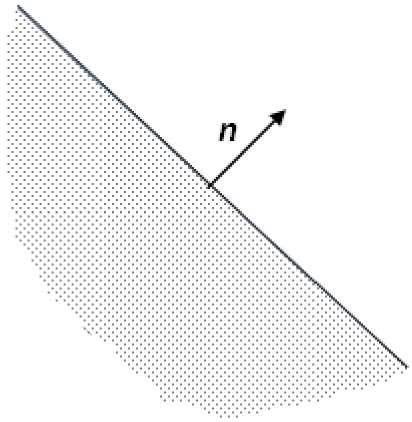


Рис. 4: сдвинутое полупространство

11. *Многогранник* – пересечение конечного множества сдвинутых полупространств. Может быть описан системой неравенств $(n_i, x) \le c_i \ (i = 1,...,k)$.
12. *Выпуклая оболочка* $\mathrm{co}V$ множества $V \subset \mathrm{R}^n$, т.е. множество всех выпуклых комбинаций конечных подмножеств множества V: $x \in \mathrm{co}V$ означает, что x допускает представление

$$x = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j v_j,\ v_j \in V,\ \alpha_j \ge 0,\ \sum_{j=0}^{m} \alpha_j = 1$$

(m может зависеть от x).

13. *Симплекс* размерности $0 \le r \le \mathrm{n}$ – выпуклая оболочка множества *вершин* $V = \{v_0, v_1, ..., v_r\}$, находящихся *в общем положении*, т.е. таких, что векторы $\{v_1 - v_0, ..., v_r - v_0\}$ линейно независимы.
14. Множество, описываемое неравенством $f(x) \le 0$ с *выпуклой* функцией $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, т.е. такой, что

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

для любых $x, y \in \mathrm{R}^n$.

15. В частности, шар радиуса R с центром в нуле – в этом случае

$$f(x) = x^2 - R^2,\ x^2 = (x, x).$$

16. *Конус* – множество $K \subset \mathrm{R}^n$, содержащее вместе с любыми своими элементами x, y их линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами. В частности, все пространство, подпространство, полупространство и граненый конус являются конусами.

В дальнейшем, как правило, рассматриваются *замкнутые* выпуклые множества, т.е. такие, которые содержат все свои предельные точки.

1.2.2. Проекция на выпуклое замкнутое множество.

Определение. Точка $x \in \mathrm{R}^n$ называется *проекцией* точки $y \in \mathrm{R}^n$ на множество $Q \subset \mathrm{R}^n$, если она является единственной ближайшей к y точкой этого множества. В таком случае будем использовать обозначение $x = P(y,Q)$.

Привести примеры, когда ближайшей точки не существует, и когда ближайшая точка не единственна.

Утверждение о существовании проекции. *Если Q – непустое выпуклое замкнутое множество, то любая точка y имеет проекцию на это множество.*

Доказательство. Пусть $d = \inf\{\|y-z\| : z \in Q\}$, $z_n \in Q$, $\|y - z_n\| < d + 1/n$. Последовательность (z_n) лежит в шаре радиуса $d+1$ с центром в точке y. Поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу x (пространство конечномерно). Это и есть искомая проекция y на Q, поскольку $x \in Q$ (множество Q замкнуто) и $d \le \|y-x\| \le d$, т.е.
$\|y-x\| = d = \min\{\|y-z\| : z \in Q\}$. Если предположить, что в Q есть еще один элемент $\bar{x}$, удаленный от y на такое же расстояние d, то мы получим, что середина $\tilde{x}$ отрезка $[x,\bar{x}]$, принадлежащая (выпуклому) множеству Q, удалена от y на меньшее расстояние – оно равно высоте равнобедренного треугольника $x\,y\,\bar{x}$, опущенной из вершины y.

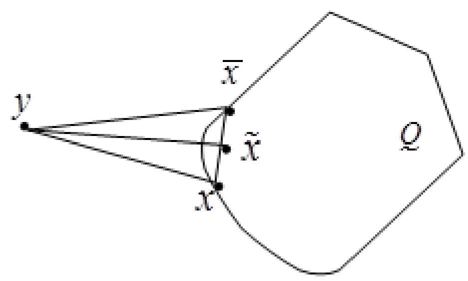


Рис. 5

В последнем рассуждении мы применили аргументацию, основанную на элементарной геометрии, и будем пользоваться подобными наглядными соображениями впредь. Они вполне законны, поскольку все евклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны, т.е., в частности, плоскость в R^n, содержащая треугольник $x\,y\,\bar{x}$, изоморфна плоскости, изучаемой в элементарной геометрии.

Утверждение об эквивалентном определении проекции. *если Q – выпуклое замкнутое множество в R^{n}, то*

$$x = P(y,Q) \Leftrightarrow x \in Q \wedge \forall(z \in Q)\left[(y-x, z-x) \le 0\right] \tag{6}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $x = P(y,Q)$. Рассмотрим точку $x_t = x + t(z-x) = = (1-t)x + tz$. Очевидно, если $t \in [0,1]$, то $x_t \in Q$. Из определения проекции следует, что функция $\varphi(t) = \|y - x_t\|^2$ при $t = 0$ принимает минимальное значение, то есть $\varphi(t) \ge \varphi(0)$ при $t \in [0,1]$. Следовательно, $\varphi'(0) \ge 0$. Но

$$\varphi'(0) = \frac{d}{dt}\|y - x - t(z-x)\|^2 |_{t=0} = 2(y - x - t(z-x), -(z-x)) |_{t=0} = -2(y-x, z-x).$$

Итак, $(y-x, z-x) \le 0$.

В другую сторону, если $x \in Q \wedge \forall(z \in Q)\left[(y-x, z-x) \le 0\right]$, то заметим, что для $z \in Q$, в силу выполнения неравенства $(y-x, z-x) \le 0$ вектора $(y-x)$ и $(z-x)$ образуют тупой угол, поэтому $\|y-z\| \ge \|y-x\|$ (сторона, лежащая против тупого или прямого угла треугольника).

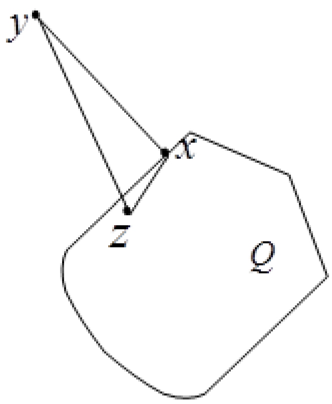


Рис. 6

Утверждение. *Оператор проектирования на непустое выпуклое замкнутое множество $Q \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ является нерастягивающим.*

<u>Доказательство</u>. Построим две $(n-1)$-мерные плоскости L_x и L_y, проходящие через точки $P(x,Q)$ и $P(y,Q)$ ортогонально отрезку соединяющему их. Согласно предыдущему утверждению $(x - P(x, Q), P(y, Q) - P(x, Q)) \le 0$, поэтому точка x лежит в замкнутой области с одной стороны от L_x, а $P(y,Q)$ с другой стороны. Аналогично, в силу $(y - P(y, Q), P(x, Q) - P(y, Q)) \le 0$ точка y расположена с одной стороны от L_y, а $P(x,Q)$ с другой. Отсюда следует, что отрезок $[x, y]$ име-

ет с плоскостями L_x и L_y общие точки, а поскольку расстояние между этими плоскостями равно $\|P(x,Q)-P(y.Q)\|$, то $\|P(x,Q)-P(y.Q)\| \le \|x-y\|$.

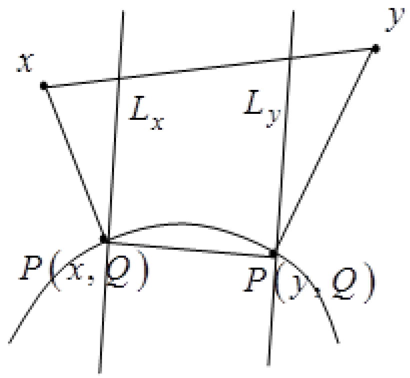


Рис. 1.6.1

1.2.3. Нормальный конус.

Определение. Пусть Q – выпуклое замкнутое множество в R^n, $x \in Q$. *Нормальный конус* $N_x = N_x(Q)$ *к* Q *в точке* x определяется соотношением:

$$n \in N_x \Leftrightarrow \forall(z \in Q)\big[(n, z-x) \le 0\big]. \tag{7}$$

Иными словами, N_x есть множество всех таких векторов n, что проекции точек $x+n$ на Q совпадают с x.

Утверждение. N_x *есть замкнутый конус.*

Понятие конуса можно трактовать и определять по-разному. Мы некоторое время будем придерживаться определения, данного в примере 16 (1.2.1), но затем дадим другое более удобное для наших задач определение (1.3.2).

Доказательство. Действительно, если $n, \bar{n} \in N_x$, $\alpha, \bar{\alpha} \ge 0$ и $z \in Q$, то

$$(\alpha n + \bar{\alpha}\bar{n}, z-x) = \alpha(n, z-x) + \bar{\alpha}(\bar{n}, z-x) \le 0.$$

Следовательно, N_x есть конус. Далее, если $n_i \in Q$ и $n_i \to n$ при $i \to \infty$, то

$$(n, z-x) = \lim_{i\to\infty}(n_i, z-x) \le 0,$$

т.е. $n \in N_x$. Итак, N_x – замкнутый конус.

Примеры. Докажите следующие утверждения.

1. Если $x \in \operatorname{int} Q$ (т.е. x есть внутренняя точка множества Q), то $N_x = \{\theta\}$ – конус, состоящий из одной нулевой точки.

2. Если x есть точка сдвинутого подпространства $Q=\{x:(n,x)=c\}$ единичной коразмерности, то $N_x = \operatorname{lin}\{n\}$ (линейная оболочка одноэлементного множества $\{n\}$, т.е. проходящая через нуль прямая с направляющим вектором n).
3. Если x есть граничная точка сдвинутого полупространства $Q=\{x:(n,x)\le c\}$ (т.е. $(n,x)=c$), то $N_x = \operatorname{con}\{n\}$ – выходящий из нуля луч с направляющим вектором n, коническая оболочка множества $\{n\}$.
4. Если Q есть пересечение выпуклых замкнутых множеств Q_1, Q_2 и $x \in Q$, то
$$N_x = \operatorname{con}\left[N_x(Q_1) \cup N_x(Q_2)\right].$$
Коническая оболочка произвольного множества $M \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ определяется как множество всех конечных линейных комбинаций элементов M с неотрицательными коэффициентами, т.е. $\operatorname{con} M = \left\{ n : n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i n_i,\ n_i \in M,\ \lambda_i \ge 0,\ k \in \mathrm{N} \right\}$.
5. Если Q состоит из единственной точки x, то $N_x = \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.
6. Если $x \in Q_1 \subset Q_2$, то $N_x(Q_2) \subseteq N_x(Q_1)$.

1.2.4. Сопряженный конус.

Определение. *Сопряженный конус* K^* *к конусу* $K \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ определяется соотношением:
$$y \in K^* \Leftrightarrow \forall (z \in K)\left[(y,z) \le 0\right]. \tag{8}$$

Утверждение. $K^* = N_0(K)$. (9)

Действительно, при $x=0$ определения N_x и K^* совпадают.

Примеры. Докажите следующие утверждения.

1. Конус K^*, сопряжённый к произвольному конусу K является замкнутым множеством.
2. Замыкание $\bar{K}$ конуса K тоже является конусом и $\left(\bar{K}\right)^* = K^*$.
3. $\left(\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{+}\right)^* = \mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{-}$.
4. Если K подпространство, то K^* тоже, причём каждая пара $x \in K$ и $y \in K^*$ ортогональна $x \perp y$.

5. K^* равно пересечению полупространств, внешние нормали которых пробегают конус K.
6. K^* является конической оболочкой множества всех внешних нормалей к полупространствам, содержащим конус K.

1.2.5. Ортогональное разложение по сопряженным конусам.

Для замкнутого конуса K пространства R^n докажем справедливость следующих утверждений

Утверждение (а). *Разность* $z = y - x$ *между произвольным элементом* $y \in \mathrm{R}^n$ *и его проекцией* x *на конус* K *ортогональна вектору* x *и является проекцией* y *на сопряженный конус* K^*.

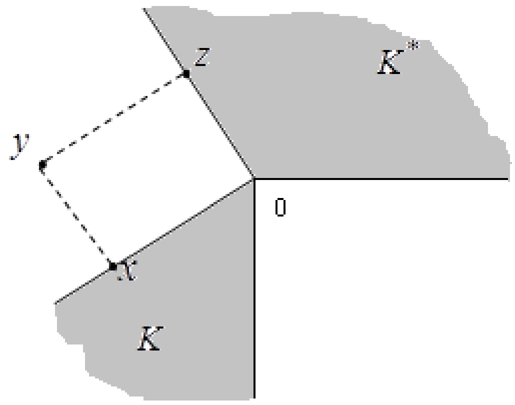


Рис. 7: Ортогональное разложение по сопряженным конусам

Доказательство. Заметим во-первых, что $z \in N_x(K)$, так как проекция точки $z + x = y$ на K совпадает с x. По этой причине $(z, u - x) \le 0$ для любого $u \in K$. Взяв в качестве u сначала $2x$, а затем 0, получим: $(z, 2x - x) = (z, x) \le 0$ и $(z, 0 - x) = -(z, x) \le 0$. Следовательно, $(z, x) = 0$, т.е. $z \perp x$.

Проверим далее, что $z \in K^*$, т.е. $(z, \bar{x}) \le 0$ для любого $\bar{x} \in K$. Действительно, $(z, \bar{x}) = (y - x, \bar{x} - x) \le 0$, по эквивалентному определению проекции (6) для x.

Наконец, по этому же определению убедимся, что z есть проекция y на K^*. Для любого $\bar{z} \in K^*$ имеем $(y - z, \bar{z} - z) = (x, \bar{z} - z) = (x, \bar{z}) - (x, z) = (x, \bar{z}) - 0 \le 0$.

Утверждение (б). *Любой элемент* $y \in \mathrm{R}^n$ *есть ортогональная сумма своих проекций на* K *и* K^*.

Доказательство. Положим $x = P(y,K)$, $z = P(y,K^*)$, $\bar{z} = y - x$. Тогда по предыдущему свойству $\bar{z} \perp x$, $\bar{z} = P(y,K^*)$ и, в силу единственности проекции, $\bar{z} = z$, $y = x + z$, $x \perp z$.

Утверждение (в). *Если элемент y представлен в виде ортогональной суммы элементов x из K и z* из K^**, то слагаемые x, z являются проекциями этого элемента на соответствующие конусы.*

Доказательство. Взяв произвольные $\bar{x} \in K$ и $\bar{z} \in K^*$, убедимся в выполнении свойства проекций (6):
$(y - x, \bar{x} - x) = (z, \bar{x} - x) = (z, \bar{x}) - (z, x) = (z, \bar{x}) - 0 \le 0$,
аналогично $(y - z, \bar{z} - z) = (x, \bar{z}) \le 0$.

Примеры. Докажите, что если конус K замкнут, то сопряжённый к конусу K^* совпадает с K, т.е. $K^{**} = \left(K^*\right)^* = K$.

1.2.6. Касательный конус.

Определение. *Касательный конус T_x к выпуклому замкнутому множеству $Q \subset \mathrm{R}^n$ в точке $x \in Q$* есть, по определению, конус, сопряженный к N_x:

$$z \in T_x \Leftrightarrow \forall (y \in N_x) \left[(z, y) \le 0 \right] \tag{10}$$

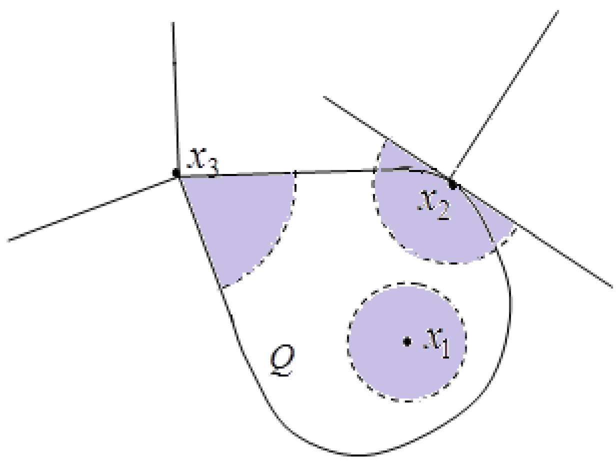


Рис. 8

На рисунке 8 серым цветом и пунктирной линией указаны касательные конуса к области Q в точках x_1, x_2, x_3, сдвинутые в соответствующие точки. Касательный конус к внутренней точке x_1 совпадает со всем пространством $T_{x_1} = \mathrm{R}^n$, а конус T_{x_2} является полупространством.

Примеры и свойства. Докажите следующие утверждения.

1. Касательный конус T_x замкнут.
2. Если $x \in \operatorname{int} Q$ (т.е. x есть внутренняя точка множества Q), то $T_x = \mathrm{R}^n$ – конус, совпадающий со всем пространством.
3. Если x есть точка сдвинутого подпространства $Q = \{x : (n, x) = c\}$ единичной коразмерности, то касательный конус совпадает с подпространством $T_x = \{x : (n, x) = 0\}$.
4. Если x есть граничная точка сдвинутого полупространства $Q = \{x : (n, x) \le c\}$ (т.е. $(n, x) = c$), то касательный конус совпадает с полупространством $T_x = \{x : (n, x) \le 0\}$.
5. Если Q есть пересечение выпуклых замкнутых множеств Q_1, Q_2 и $x \in Q$, то
$$T_x = T_x(Q_1) \bigcap T_x(Q_2).$$
7. Если Q состоит из единственной точки x, то $T_x = \{\theta\}$ – множество, состоящее только из нулевой точки.

Отметим два существенных для нас свойства касательного конуса. Для функции $x(t)$, определённой в окрестности точки $\bar{t}$, выполнены следующие утверждения:

Свойство 1. если существует правосторонняя производная $x'_+(\bar{t})$ и $x(\bar{t} + s) \in Q$ $(0 \le s < \varepsilon)$, то $x'_+(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$; (11)

Свойство 2. если существует левосторонняя производная $x'_-(\bar{t})$ и $x(\bar{t} + s) \in Q$ $(-\varepsilon \le s < 0)$, то $-x'_-(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$. (12)

<u>Доказательство</u>. Если существует $x'_+(\bar{t})$, то по определению нормального конуса (7) для произвольного вектора $u \in N_{x(\bar{t})}$ справедливо $\left(\dfrac{x(\bar{t} + s) - x(\bar{t})}{s}, u \right) \le 0$, из этого неравенства в пределе при $s \to +0$ получаем $\forall \left(u \in N_{x(\bar{t})} \right) \left[\left(x'_+(\bar{t}), u \right) \le 0 \right]$, что означает по (10) $v \in T_{x(\bar{t})}$. Доказательство свойства 2 отличается тем, что для вектора $u \in N_{x(\bar{t})}$ выполняется неравенство $\left(\dfrac{x(\bar{t} + s) - x(\bar{t})}{-s}, u \right) \le 0$, поэтому $-x'_-(\bar{t}) \in T_{x(\bar{t})}$.

1.2.7. Определение решений систем с диодной нелинейностью.

Для вектора $y \in \mathrm{R}^n$ введём обозначения его проекций на сопряженные конуса N_x и T_x, построенных к выпуклому замкнутому множеству Q в точке x

$$\nu_x y := P(y, N_x), \quad \tau_x y := P(y, T_x).$$

Определение решения уравнения (4). *Решением* дифференциального уравнения (4) $\dot{x} = \tau_x f(t,x)$ (с разрывной по x правой частью) называется определенная на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (4) почти всюду.

Определение решения включения (5). *Решением* дифференциального включения (5) $\dot{x} \in f(t,x) - N_x$ называется определенная на некотором промежутке локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая (5) почти всюду.

1.2.8. Эквивалентность двух записей системы с диодной нелинейностью.

Утверждение. *Дифференциальное уравнение (4)* $\dot{x} = \tau_x f(t,x)$ *эквивалентно дифференциальному включению (5)* $\dot{x} \in f(t,x) - N_x$ в том смысле, что они имеют одно и то же множество решений.

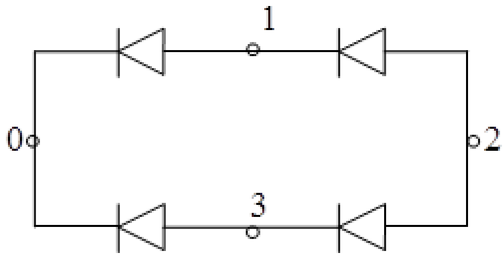
Доказательство. 1) Покажем, что любое решение (4) является решением (5). Предположим, что абсолютно непрерывная на некотором промежутке J функция x является решением дифференциального уравнения (4), т.е. для почти всех $t \in J$ выполнено равенство $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t, x(t))$. Из утверждения (а) пункта 1.2.5 $\tau_{x(t)} f(t,x(t)) = f(t,x(t)) - \nu_{x(t)} f(t,x(t)) \in f(t,x(t)) - N_{x(t)}$, поэтому выполнено дифференциальное включение (5) $\dot{x}(t) \in f(t,x(t)) - N_{x(t)}$.

2) Теперь покажем, что любое решение (5) является решением (4). Пусть функция x есть решение дифференциального включения (5), т.е. для почти всех $t \in J$ выполнено включение $\dot{x}(t) \in f(t,x(t)) - N_{x(t)}$. Тогда найдётся вектор $u \in N_{x(t)}$ такой, что $\dot{x}(t) = f(t,x(t)) - u$. В точке t $\dot{x}(t) = x'_+(t) = x'_-(t)$, по свойствам 1 и 2 пункта 1.2.6 имеем, $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}$ и $(\dot{x}(t), u) \le 0$, кроме того $-\dot{x}(t) \in T_{x(t)}$ и $(\dot{x}(t), u) \ge 0$. Следовательно, $(\dot{x}(t), u) = 0$, что означает ортогональность векторов $\dot{x}(t) \perp u$. С учётом $f(t,x(t)) = \dot{x}(t) + u$, $u \in N_{x(t)}$, $\dot{x}t \in T_{x(t)}$, $\dot{x}(t) \perp u$ и утверждения (в) 1.2.5, имеем $\dot{x}(t) = \tau_{x(t)} f(t,x(t))$, что и требовалось доказать.

1.3. Модель одного класса электрических цепей с диодными преобразователями

1.3.1. Примеры диодных преобразователей тока.

В качестве первого примера рассмотрим мостовую схему однофазного двухполупериодного выпрямителя, изображённого на рисунке 9. Все узлы 0, 1, 2 и 3 являются в нём внешними, т.е через них преобразователь может быть присоединён к другим электрическим элементам для образования более сложной цепи.



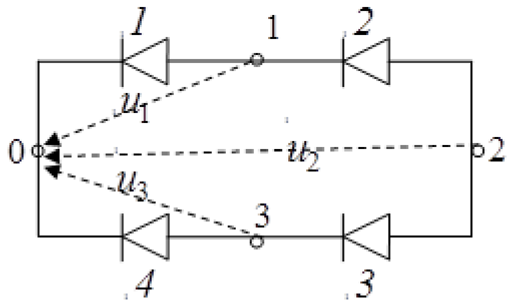


Рис. 9

Пронумеруем диоды преобразователя цифрами *1, 2, 3, 4* (рис. 9 б)) и обозначим через u_1, u_2, u_3 напряжения между нулевым узлом и узлами 1, 2, 3 соответственно. Тогда напряжения на диодах *1, 2, 3, 4* равны соответственно $y_1 = u_1$, $y_2 = u_2 - u_1$, $y_3 = u_2 - u_3$, $y_4 = u_3$. Из того, что напряжение идеальной модели диода (см. 1.1.1) принимает неположительные значения, получаем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} u_1 \le 0, \\ u_2 \le u_1, \\ u_3 \le 0, \\ u_2 \le u_3. \end{cases}$$

Каждому неравенству соответствует полупространство в R^3, а множеством решений системы является пересечение этих полупространств, т.е. гранёный конус, который обозначим K^*.

Обозначим вектор внешних токов, входящих в узлы 1, 2 и 3, как $i = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$. Значения этих токов согласно первому закону Кирхгофа, по которому сумма выходящих из любого узла цепи токов равна нулю, выписываются через токи диодов следующим образом (ток, входящий в нулевой узел равен $-\left(i_1+i_2+i_3\right)$)

$$\begin{cases} i_1 = x_1 - x_2, \\ i_2 = x_2 + x_3, \\ i_3 = x_4 - x_3. \end{cases} \quad \text{или в матричном виде } i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ток на каждом диоде неотрицателен, вектор токов i принадлежит конической оболочке K столбцов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что первый столбец матрицы A является вектором внешней нормали к подпространству $u_1 \le 0$, второй столбец – к подпространству $u_2 \le u_1$, третий – к подпространству $u_2 \le u_3$ и четвёртый – к подпространству $u_3 \le 0$. Это доказывает, что конус K^* является сопряжённым K. Кроме того вектор токов i ортогонален вектору напряжений $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$. Действительно, выразив из соотношений приведённых выше $u_2 = y_1 + y_2$ и $y_3 = y_1 + y_2 - y_4$, вычислим скалярное произведение (i, u), при этом будем помнить, что произведение тока на напряжение для каждого идеального диода равно нулю (1.1.1).

$$\begin{aligned} &(i, u) = i_1u_1 + i_2u_2 + i_3u_3 = \\ &= (x_1 - x_2)y_1 + (x_2 + x_3)(y_1 + y_2) + (x_4 - x_3)y_4 = \\ &= x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_4 - x_3y_4 = \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_4y_4 + x_3(y_1 + y_2 - y_4) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили связь между внешними токами и напряжениями рассматриваемого диодного преобразователя в виде:

$$\begin{cases} i \in K, \\ u \in K^*, \\ (i, u) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

В качестве второго примера диодного преобразователя возьмём схему трёхфазного двухполупериодного мостового выпрямителя (схема Ларионова) (рис. 10).

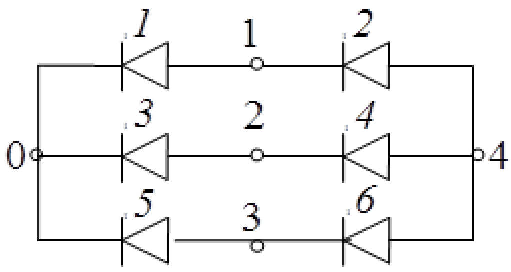


Рис. 10

Вводя обозначения $i = (i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4)$ – вектор внешних токов, входящих в узлы 1, 2, 3, 4 соответственно, и $u = (u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4)$– вектор напряжений между нулевым узлом и узлами 1, 2, 3, 4 читателю предлагается самостоятельно вывести для этого преобразователя соотношение (13), в котором K – коническая оболочка столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а K^*– пересечение полупространств $u_1 \le 0,\ u_4 \le u_1,\ u_2 \le 0,\ u_4 \le u_2,\ u_5 \le 0,\ u_4 \le u_5$ является сопряжённым к K конусом**.**

Ближайшая наша цель – обоснование того, что сохранение внешним током и напряжением диодного преобразователя основного свойства идеального диода в виде (13) не является случайным, присущим только рассмотренным примерам.

Но прежде поговорим о некоторых свойствах конусов и линейных операторов, которые нам потребуются для решения этой поставленной задачи.

1.3.2. Дополнительные сведения о конусах.

Сначала дадим несколько определений, которые в той или иной форме упоминались в примерах пункта 1.2.1.

Определение. *Выпуклой комбинацией* произвольного конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_s$ называют сумму $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$ с неотрицательными коэффициентами $\lambda_i \ge 0$, сумма которых равна единице $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$.

Определение. *Выпуклой оболочкой* coA множества $A \subset \mathrm{R}^n$ называют множество всех возможных конечных выпуклых комбинаций точек из A.

Утверждение. *Выпуклое множество совпадает со своей выпуклой оболочкой.*

Доказательство. Пусть A – выпуклое множество. Включение $A \subset coA$ очевидно. Покажем обратное включение. Выберем произвольно точки $x_1, x_2, \ldots, x_s$ из множества A. Доказательство того, что их выпуклая комбинация тоже содержится в A проведём индукцией по числу точек s.

База индукции. Для $s=1$ выпуклая комбинация совпадает с элементом $x_1 \in A$, а при $s=2$ выпуклая комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2 \in A$ по определению выпуклости.

Шаг индукции. Предположим, что для $s=k$ любая выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in A$ ($\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$). Покажем, что тогда $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$ ($\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$) тоже содержится в A. Из равенства $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ имеем $1-\lambda_{k+1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k > 0$, поэтому $x = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} x_k$ является выпуклой комбинацией из k элементов, по предположению индукции принадлежащей множеству A.

Тогда $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{k+1}) x + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in A$, так как A выпуклое.

Определение. *Конической комбинацией* произвольного конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_s$ называют сумму $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$ с неотрицательными коэффициентами $\lambda_i \geq 0$.

Заметим, что выпуклая комбинация является частным случаем конической.

Определение. Множество всех конических комбинаций элементов множества M называют его *конической оболочкой* $conM$.

Напомним, что $conM$ – выпуклое множество и что конусом мы называли множество пространства R^n, содержащее вместе с любыми двумя своими элементами их коническую комбинацию (примеры из 1.2.1). В дальнейшем мы будем пользоваться только замкнутыми выпуклыми конусами, поэтому дадим следующее определение.

Определение. Замкнутое выпуклое множество $K \subset \mathrm{R}^n$ будем называть *конусом*, если для любого элемента $x \in K$ и $\lambda \geq 0$ вектор $\lambda x \in K$.

При таком определении выполнено равенство $K^{**} = \left(K^*\right)^* = K$. Напомним, что мы определили в 1.2.4 сопряжённый к K конус равенством

$$K^* = \left\{ y \in \mathrm{R}^n : \forall \left(x \in K \right) \left[\left(x,\, y \right) \le 0 \right] \right\}.$$

Конусы K и K^* будем называть взаимно сопряжёнными.

Следующее простое утверждение даёт эквивалентное определение конуса.

Утверждение. *Если K – конус, то коническая комбинация $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$ произвольного конечного числа s его элементов $x_1, x_2, \dots, x_s$ тоже принадлежит K.* Другими словами $K = conK$.

<u>Доказательство</u>. Если все коэффициенты конической комбинации нулевые, то она принадлежит K, так как ноль по определению содержится в любом конусе. В противном случае $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s > 0$ и коническую сумму можно записать в виде $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$, где $\sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ – выпуклая комбинация, принадлежащая K в силу его выпуклости.

Утверждение об отделимости. *Если y не принадлежит конусу K, то найдётся $g \in K^*$ такой, что $\left(y,\, g \right) > 0$.*

<u>Доказательство</u>. По утверждению (б) из 1.2.5 y представим в виде суммы ортогональных элементов $x = P(y, K)$, $z = P(y, K^*)$. z отличен от нуля, так как иначе $y = x + 0 = x$ был бы элементом K. В качестве g возьмём элемент $z = P(y, K^*) \in K^*$, тогда скалярное произведение

$$\left(y,\, g \right) = \left(x + z,\, z \right) = \left(x,\, z \right) + \left(z,\, z \right) = 0 + \|z\|^2 > 0.$$

Утверждение. *Любой конус $K \subset \mathrm{R}^n$ есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств.*

<u>Доказательство</u>. Обозначим через Q пересечение замкнутых полупространств, содержащих K. Включение $K \subset Q$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $x \notin K$, тогда по утверждению об отделимости найдётся $g \in K^*$, такое, что $\left(x,\, g \right) > 0$. Полупространство $\left\{ v : \left(v,\, g \right) \le 0 \right\}$ содержит K, но не содержит x (подпространство $\left\{ v : \left(v,\, g \right) = 0 \right\}$ отделяет x от K), поэтому $x \notin Q$.

1.3.3. Образ и ядро линейного оператора.

В этом пункте мы кратко напомним хорошо известные определения и свойства линейного оператора в конечномерном пространстве, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть оператор $A:\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\to\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ является линейным.

Определение. *Образом* $\operatorname{Im}A$ линейного оператора A называют множество его значений $\operatorname{Im}A=\left\{b\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}:\ \exists\left(x\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\right)\left[Ax=b\right]\right\}$. Другими словами $b\in\operatorname{Im}A$ в том случае, когда линейная неоднородная система $Ax=b$ разрешима.

Определение. *Ядром* $\mathrm{Ker}A$ линейного оператора A называют множество всех решений однородной системы $Ay=0$, т.е. $\mathrm{Ker}A=\left\{y\in R^m:\ Ay=0\right\}$.

Определение. Для линейного оператора $A:\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\to\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ *сопряжённым* ему A^* называют такой оператор $A^*:\mathrm{R}^{\mathrm{n}}\to\mathrm{R}^{\mathrm{m}}$, для которого выполнено равенство $\left(Ax,y\right)=\left(x,A^*y\right)$ для всех $x\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ и $y\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.

Определение. Если E – подпространство R^{n}, то $E^{\perp}:=\left\{y:\forall(x\in E)\left[y\perp x\right]\right\}$, которое тоже является подпространством R^{n}, называется *ортогональным* E.

Справедливы два утверждения: $\left(E^{\perp}\right)^{\perp}=E$ и $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}=E\oplus E^{\perp}$, т.е. для любого $x\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ найдётся единственная пара $y\in E$ и $z\in E^{\perp}$ таких, что $x=y+z$.

Если подпространства E и $E^{\perp}$ рассматривать как сопряжённые конуса K и K^* (пример 5 1.2.4), то, как мы видели ранее (пример 4 1.2.4, 1.2.5), получаются аналогичные утверждения.

Утверждение. *Для линейного оператора* $A:\mathrm{R}^{\mathrm{m}}\to\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ *справедливы равенства*: 1) $\left(\operatorname{Im}A\right)^{\perp}=\operatorname{Ker}A^*$; 2) $\left(AE\right)^{\perp}=\left(A^*\right)^{-1}E^{\perp}$; 3) $\left(AK\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}K^*$. (14)

Первые два равенства хорошо известны, первое эквивалентно альтернативе Фредгольма для линейного оператора “ либо уравнение $Ax=b$ имеет решение при любой правой части b, либо сопряжённое к нему уравнение $A^*y=0$ имеет нетривиальное решение ” .

Докажем только третье равенство.

Доказательство. Для произвольного $z \in (AK)^*$ по определению сопряжённого конуса скалярное произведение $(z, y) \le 0$ при любом $y \in AK$ ($y = Ax,\ x \in K$). Это означает, что для всех $x \in K$ $(z, Ax) \le 0$ или $\left(A^* z, x\right) \le 0$, откуда $A^* z \in K^*$ или $z \in \left(A^*\right)^{-1} K^*$. В этой цепочке рассуждений везде были эквивалентные переходы

$$z \in (AK)^* \Leftrightarrow \forall (y \in AK)\left[(z, y) \le 0\right] \Leftrightarrow \forall (x \in K)\left[(z, Ax) \le 0\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall (x \in K)\left[\left(A^* z, x\right) \le 0\right] \Leftrightarrow A^* z \in K^* \Leftrightarrow z \in \left(A^*\right)^{-1} K^*,$$

поэтому равенство $(AK)^* = \left(A^*\right)^{-1} K^*$ доказано.

1.3.4. Граненые конусы.

Определение. Конус K называется *гранёным* (многогранным), если он представим в виде пересечения конечного набора замкнутых полупространств.

Другими словами конус K в этом случае определяется системой нестрогих неравенств

$$\begin{cases} (x,\ c_1) \ge 0, \\ (x,\ c_2) \ge 0, \\ \dots \\ (x,\ c_m) \ge 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Примеры. Покажите, что следующие множества являются гранёными конусами.

1) Любое замкнутое полупространство.
2) Любое подпространство R^{n}.
3) Произвольный луч, выходящий из нуля.
4) Пересечение конечного числа гранёных конусов.

Определение. Множество K' решений системы, которая получена из (15) заменой некоторых неравенств на равенства, называют гранью конуса K.

Пример. 5) Покажите, что пересечение конуса K с подпространством является гранью K.

Определение. Грань K' называется *минимальной*, если в системе, определяющей её все неравенства (15) заменены равенствами.

Минимальная грань, очевидно, содержится в любой другой грани конуса K и является подпространством R^{n}. Отметим, что каждая грань K' конуса K вместе с ним тоже является гранёным конусом, так как равенство $\left(x,\ c_i\right)=0$ эквивалентно системе неравенств $\begin{cases}\left(x,\ c_i\right)\geq 0,\\ \left(x,\ -c_i\right)\geq 0.\end{cases}$ Кроме того каждая грань конуса K' является гранью K. Заметим ещё, что у гранёного конуса конечное число граней.

Определение. Гранёный конус K называют заострённым, если его минимальная грань состоит только из нулевой точки.

Определение. Одномерные грани конуса $K\subset\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ (получаемые заменой $n-1$ линейно независимых неравенств в (15) равенствами) называют рёбрами K.

Заострённый конус имеет рёбра, так как ранг матрицы системы, определяющей минимальную грань для него, равен n.

Определение. Конусом, *натянутым* на множество M назовём замыкание конической оболочки этого множества, т.е. $K\left(M\right)=\overline{conM}$.

Пример. 6) Покажите, что R^{n} является конусом, натянутым на объединение любого своего базиса $\left\{x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n\right\}$ с вектором $x=-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)$.

Утверждение. Любой многогранный конус K натянут на объединение его минимальной грани с некоторым заострённым конусом.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через $K'_{\min}$ минимальную грань и определим $K_1=\left(K'_{\min}\right)^{\perp}\bigcap K$. K_1 – гранёный конус (пример 4), причём заострённый, так как $K'_{\min}$ пересекается с $\left(K'_{\min}\right)^{\perp}$ только в нулевой точке, а как нетрудно проверить система уравнений для минимальной грани конуса K_1 совпадает с системой, описывающей $K'_{\min}\bigcap\left(K'_{\min}\right)^{\perp}$.

Очевидно, что $\overline{con\left\{K'_{\min} \cup K_1\right\}} \subset K$. С другой стороны, для произвольного $x \in \mathrm{R}^n$ существует разложение $x = y + z,\ y \in K'_{\min},\ z \in \left(K'_{\min}\right)^{\perp}$. Если $x \in K$, то $z = x + \left(-y\right)$, где $\left(-y\right) \in K'_{\min} \subset K$, поэтому $z \in K$, и следовательно $z \in K_1$, а $x \in con\left\{K'_{\min} \cup K_1\right\}$.

Утверждение. Произвольный элемент x заострённого конуса K размерности не меньше двух представим в виде суммы двух элементов $x = x_1 + x_2$, принадлежащих граням меньшей, чем K, размерности.

<u>Доказательство</u>. Если x лежит на одной из граней K с меньшей размерностью, то $x = x + 0$ и утверждение выполнено. При ином положении x возьмём произвольно $y \in K$, $y \neq 0$ и не коллинеарный x, построим двумерную плоскость E по трём точкам ноль, x и y. $K_1 = K \cap E$ является двумерным заострённым конусом (пример 4). Построив на его рёбрах параллелограмм с вершиной x, получим нужные слагаемые (рис. 11).

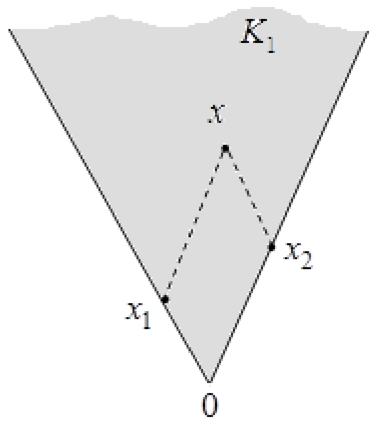


Рис. 11

Более строгое аналитическое доказательство можно найти в главе V [Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. –336 с.] оформить ссылку

Утверждение. Любой заострённый конус натянут на свои рёбра.

Доказательство. Конус, натянутый на рёбра заострённого конуса K, содержится в K очевидным образом. Покажем, что любой элемент $x \in K$ принадлежит конической комбинации рёбер K. Доказательство этого факта проведём методом индукции по размерности конуса K. Если K одномерный, то он состоит только из ребра и утверждение выполнено. Пусть для заострённых конусов размерности r утверждение верно, и пусть K имеет размерность $2 \le r+1 \le n$. В этом случае по предыдущему утверждению возможно представление $x = x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 принадлежат граням конуса K размерности не большей r. Тогда по предположению индукции x_1 и x_2 представимы в виде конической комбинации рёбер соответствующих граней и конуса K, а вместе с ними x тоже.

Утверждение. Любой гранёный конус натянут на конечное множество векторов. Действительно, гранёный конус K натянут на $K'_{\min} \bigcup K_1$, где K_1 – заострённый, и поэтому натянут на конечное число векторов, $K'_{\min}$ является подпространством и тоже натянуто на конечное множество (см. пример 6).

Утверждение. *Если K – натянут на конечное множество, то K^* – гранёный конус.*

Доказательство. Пусть K натянут на множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$, и $P_1, P_2, \ldots, P_s$ – полупространства с внешними нормалями $x_1, x_2, \ldots, x_s$ соответственно ($(x_i, y) \le 0$ при всех $y \in P_i$, $i = 1, \ldots, s$). Очевидно $K^* = \bigcap_{i=1}^{s} P_i$.

Следствие. Из двух предыдущих утверждений следует, что если один из сопряжённых конусов – гранёный, то и второй тоже.

1.3.5. Диодная нелинейность.

Как показано в п. 1.2.8, обобщенная система с диодной нелинейностью для выпуклого замкнутого множества Q может быть записана в виде дифференциального включения (5):

$$\dot{x} \in f(t, x) - N_x.$$

Значение многозначного оператора $x \mapsto N_x$, сопоставляющего любой точке $x \in Q$ нормальный конус к Q в этой точке, мы подробнее будем обозначать $N(Q)x$ и называть сам оператор $N(Q)$ (обобщенной) *диодной нелинейностью, порожденной множеством* Q. В этом параграфе мы рассмотрим важный частный случай – диодную нелинейность $N(K)$, порожденную конусом $K \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. Для этого случая отметим

свойства диодной нелинейности:

(а) *следующие утверждения эквивалентны*

$y \in N(K)x \;\Leftrightarrow\; x = P(y+x, K) \;\Leftrightarrow\; x \in K \wedge y \in K^{*} \wedge y \perp x$;

(б) $\left(N(K)\right)^{-1} = N(K^{*})$.

Доказательство. Первая эквивалентность в (а) следует из определения нормального конуса (7) и эквивалентного определения проекции (6):

$y \in N(K)x \Leftrightarrow \forall(z \in K)\left[(y, z-x) \le 0\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall(z \in K)\left[(y+x-x, z-x) \le 0\right] \Leftrightarrow x = P(y+x, K).$

Вторая вытекает из утверждений (а) и (в) об ортогональном разложении по сопряженным конусам (1.2.5).

Утверждение (б) вытекает из определения обратного отображения и второй эквивалентности в (а):

$$x \in \left(N(K)\right)^{-1} y \Leftrightarrow y \in N(K)x \Leftrightarrow \left(x \in K \wedge y \in K^{*} \wedge x \perp y\right) \Leftrightarrow x \in N(K^{*})y.$$

Пример. Покажите, что для гранёного конуса K диодная нелинейность $N(K)$ ставит в соответствие каждому элементу $x \in K$ ортогональную x грань сопряжённого конуса K^{*} (пересечение $(n-1)$-мерного ортогонального x подпространства с K^{*}).

1.3.6. Утверждение о линейном преобразовании диодной нелинейности.

Пусть $A: \mathrm{R}^{\mathrm{m}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ и $B: \mathrm{R}^{\mathrm{m}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ линейные операторы, $K-$ конус в R^{m}. Тогда:

1) $N(AK) = \left(A^{*}\right)^{-1} N\left(K\right)$; (16)

2) $N\left(\left(B^{*}\right)^{-1} K\right) = BN\left(K\right)$. (17)

Доказательство. Заметим, что первое утверждение другими словами означает (свойство (а) из 1.3.5), что из соотношений

$$i \in K, u \in K^*, i \perp u \quad , \tag{18}$$
$$Ai = I, u = A^* U$$

следует

$$I \in AK, U \in (AK)^*, I \perp U \quad ; \tag{19}$$

Действительно,

$$I = Ai \in AK,\ U \in \left(A^*\right)^{-1} K^*,\ \left(U, I\right) = \left(U, Ai\right) = \left(A^* U, i\right) = \left(u, i\right) = 0 .$$

Остается заметить (см. ((14)), что

$$\left(A^*\right)^{-1} K^* = \left(AK\right)^*,$$

и мы получаем соотношения (19), а вместе с ними доказательство равенства (16). Второе утверждение (17) доказывается аналогично с учетом того, что оно утверждает следование из (18) и равенств

$$i = B^* I, U = Bu$$

соотношения

$$I \in \left(BK^*\right)^*,\ U \in BK^*,\ I \perp U ,$$

а также с учётом равенства $K^{**} = K$ (см. 1.3.2).

1.3.7. Теорема о внешней характеристике диодного преобразователя

Рассмотрим *диодный преобразователь*, представляющий из себя электрическую цепь из m идеальных диодов. Все узлы этой цепи мы считаем ее *входами*, т.е. контактами, через которые данный диодный преобразователь может соединяться с другими цепями. Входы (узлы) пронумерованы в каком-то порядке целыми числами от 0 до n. В каждом диоде положительным направлением тока считается направление от анода к катоду. Ток j-того диода обозначим через x_j, напряжение (от анода к катоду) – через y_j. *Входной ток*, т.е. ток, идущий от внешней цепи к диодному преобразователю через k-тый вход, будем обозначать i_k $(k = 1, 2, ..., n)$; *входное напряжение*, т.е. напряжение между k-м и нулевым входами – u_k. Связь между вектором $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ анодных токов диодов и вектором $i = (i_1, i_2, ..., i_n)$ входных токов по первому закону Кирхгофа запишем в виде уравнения

$$Ax = i . \tag{20}$$

Здесь $A-$ матрица с элементами

$$a_{kj}=\begin{cases}1, & \textit{если анод } j-\textit{того диода соединен с } k-\textit{тым узлом,}\\ -1, & \textit{если катод } j-\textit{того диода соединен с } k-\textit{тым узлом,}\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{21}$$

Для нулевого узла мы не пишем уравнение токов, поскольку оно является следствием уже написанных и того факта (гипотезы), что сумма всех входных токов равна нулю.

Теорема. *Векторы входных напряжений и входных токов диодного преобразователя связаны оператором диодной нелинейности*

$$u\in N(K)i\,, \tag{22}$$

где конус K определяется равенством:

$$K=A\mathrm{R}_+^{\mathrm{m}}=\mathrm{con}\left\{A^1,A^2,\ldots,A^m\right\},\ \ A^j-\textit{столбцы матрицы } A\,.$$

<u>Доказательство</u>. Вольтамперную характеристику идеального диода можно записать в виде:

$$x_k\in\mathrm{R}_+,\ y_k\in-\mathrm{R}_+,\ x_ky_k=0\,.$$

Это означает, что

$$x\in\mathrm{R}_+^{\mathrm{m}},\ y\in-\mathrm{R}_+^{\mathrm{m}}=\left(\mathrm{R}_+^{\mathrm{m}}\right)^*,\ (x,y)=0\,.$$

Следовательно, зависимость y от x описывается оператором диодной нелинейности:

$$y\in N\left(\mathrm{R}_+^{\mathrm{m}}\right)x\,. \tag{23}$$

Отметим связь анодных напряжений диодов с входными напряжениями. Пусть $k(j,+)$ есть номер узла, с которым соединен анод j-того диода, а $k(j,-)$ – соответствующий номер узла для катода. Тогда

$$y_j=u_{k(j,+)}-u_{k(j,-)}\,.$$

В матрице A у столбца с номером j ненулевыми могут быть только элементы с номерами $k(j,+)$ и $k(j,-)$. Если один из этих номеров равен нулю, то соответствующее входное напряжение также равно нулю. Сказанное позволяет сделать вывод, что

$$y=A^*u\,. \tag{24}$$

Теперь из (23) и (24) в силу утверждения о линейном преобразовании диодной нелинейности вытекает (22).

1.3.8. Пример: двухполупериодный выпрямитель с цепями питания и нагрузки.

На примере электрической цепи, изображенной на рисунке 12, продемонстрируем процесс получения модели в виде СДН.

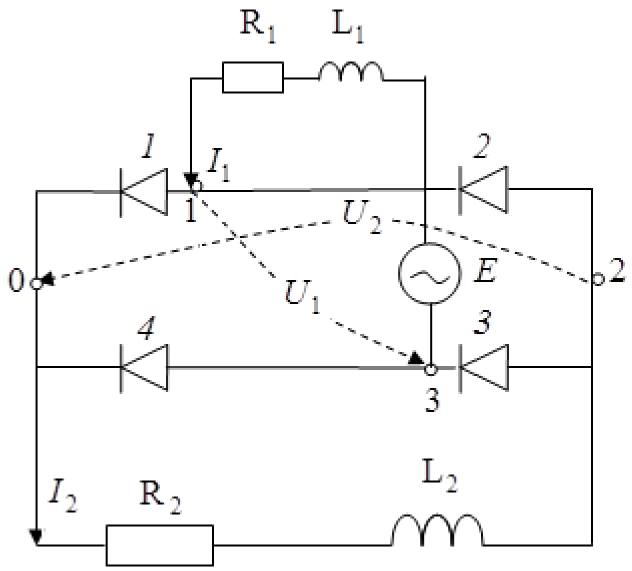


Рис. 12

Итак, составим систему уравнений цепи (рис.12), для этого введём обозначения. Ток *цепи питания* EL_1R_1 обозначим через I_1, *цепи нагрузки* L_2R_2 – через I_2. Выбор положительных направлений отмечен стрелками. Входное напряжение цепи питания (между узлами 1 и 3) обозначим через U_1, цепи нагрузки (между узлами 0 и 2) – через U_2. Уравнения этих цепей можно записать в виде:

$$\begin{aligned} L_1\dot{I}_1 + R_1 I_1 + U_1 &= E(t), \\ L_2\dot{I}_2 + R_2 I_2 + U_2 &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Используем обозначения, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ – векторы анодных токов и напряжений диодов, $i=(i_1,i_2,i_3)$ и $u=(u_1,u_2,u_3)$ – внешних токов и напряжений диодного преобразователя. По теореме о внешней характеристике диодного преобразователя 1.3.7 $u \in N(K)i$ (21), где $K = A\mathrm{R}_+^4$, а линейный оператор A определяется матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (см. первый пример 1.3.1).

Заметим, что входные токи и напряжения I,U внешних цепей связаны с входными токами и напряжениями i,u диодного преобразователя равенствами:

$$i=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}I,\qquad U=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}u\,.$$

Из утверждения о линейном преобразовании диодной нелинейности 1.3.6 (17) получаем:

$$U\in BK^{*},\ I\in\left(BK^{*}\right)^{*},\ \text{где } B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Введем обозначение $K_1:=\left(BK^{*}\right)^{*}$. Тогда математическая модель рассматриваемой цепи будет представлена уравнениями (25) и соотношениями

$$I\in K_1,\ U\in K_1^{*},\ I\perp U\,.$$

В дифференциальных уравнениях этой системы коэффициенты при производных не равны единице, поэтому она еще не полностью приведена к виду системы с диодной нелинейностью. Чтобы завершить преобразование, сделаем еще одну линейную замену переменных:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{L_1}&0\\0&\sqrt{L_2}\end{pmatrix}I=X,\ \begin{pmatrix}\sqrt{L_1}&0\\0&\sqrt{L_2}\end{pmatrix}Y=U\,.$$

Тогда модель запишется в виде дифференциального включения:

$$\dot X\in e(t)-rX-N\left(K_2\right)X\,,\ \text{где}\tag{26}$$

$$e(t)=\begin{pmatrix}E(t)/\sqrt{L_1}\\0\end{pmatrix},\ r=\begin{pmatrix}R_1/L_1&0\\0&R_2/L_2\end{pmatrix},\ K_2=\begin{pmatrix}\sqrt{L_1}&0\\0&\sqrt{L_2}\end{pmatrix}K_1.$$

Ее можно также записать в виде уравнения:

$$\dot X=\tau_X\left[e(t)-rX\right].\tag{27}$$

Здесь τ_X − оператор проектирования на конус, касательный к K_2 в точке X.

Для данного примера цепи конус K_1 можно найти непосредственно, не производя последовательно приведенных выше преобразований. Заметим (см. рисунок 12), что справедливы следующие равенства:

$$I_1=x_1-x_2,\ I_2=x_1+x_4=x_2+x_3\,.$$

Из них получаются соотношения между I_1,I_2:

$$I_1+I_2=x_1+x_3\ge 0,\ I_1-I_2=-x_2-x_4\le 0\,.$$

Итак,

$$I\in K_1\Rightarrow I_2\ge -I_1\wedge I_2\ge I_1\,.$$

Аналогичные соотношения справедливы для напряжений U_1,U_2:

$$U_1 = y_1 - y_4,\ U_2 = y_2 + y_1 = y_3 + y_4;$$
$$U_1 + U_2 = y_1 + y_3 \le 0,\ U_1 - U_2 = -y_4 - y_2 \ge 0;$$
$$U \in K_1^* \Rightarrow U_2 \le -U_1 \wedge U_2 \le U_1 .$$

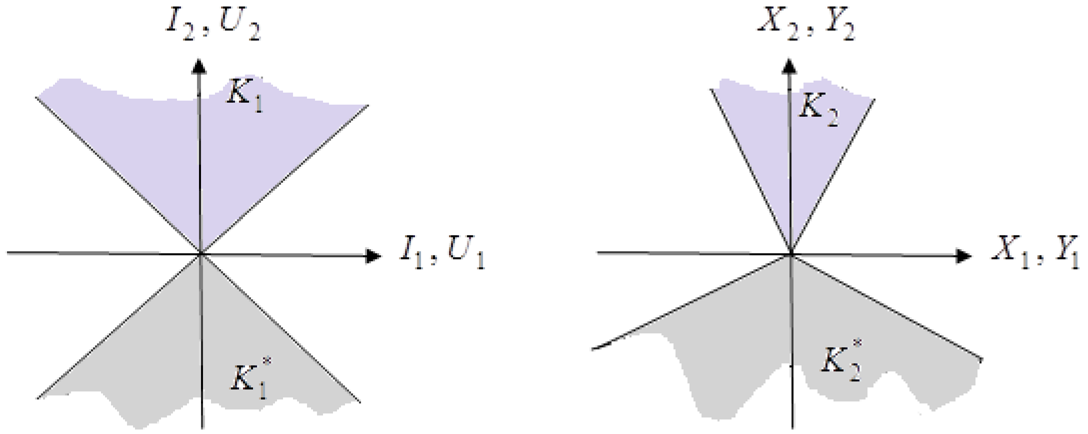


Рис. 13

1.3.9. Численные эксперименты.

Здесь приведены программа использования системы символьной математики “Mathematica 6” для численного выражения математической модели электрической цепи, описанной в предыдущем пункте 1.5.8, и полученные с её помощью графики. Модель цепи реализована для частного случая $L_1 = R_1 = L_2 = R_2 = 1,\ E(t) = 5\cos 6t$, с нулевым начальным условием. На первой картинке изображена фазовая траектория вектора X (совпадающего при данных параметрах с I), которая совершает начальный подъёма по правой границе конуса K_2 с последующим переходом на периодические колебания между правым и левым ограничивающими конус лучами. На втором рисунке изображены графики координат вектора X , демонстрирующие основную задачу диодного преобразователя данной цепи как выпрямителя тока: красным цветом отмечена первая координата X_1, совпадающая с током цепи питания, зелёным – вторая координата X_2, совпадающая с током цепи нагрузки.

$\mathrm{L1} = 1; \mathrm{L2} = 1; \mathrm{R1} = 1; \mathrm{R2} = 1; \mathrm{E0} = 5; Q = 6;$

```
x0=0;y0=0;T=5;M=1000;

G4=Plot[x*(Sqrt[L2]/Sqrt[L1]),{x,-1,1},PlotStyle□Blue];
G5=Plot[-(Sqrt[L2]/Sqrt[L1])*x,{x,-1,1},PlotStyle□Blue];
NDSolve[{x'[t] ==- (R1/L1)*x[t]-M*Max[0,x[t]*Sqrt[L2]-y[t]*Sqrt[L1]]-
M*Min[0,x[t]*Sqrt[L2]+y[t]*Sqrt[L1]]+(E0/Sqrt[L1])*Cos[Q*t],
y'[t] ==- (R2/L2)*y[t]+M*Max[0,x[t]*Sqrt[L2]-y[t]*Sqrt[L1]]-
(M)*Min[0,y[t]*Sqrt[L1]+x[t]*Sqrt[L1]],x[0] ==x0,y[0] ==y0},{x,y},{t,0,T}];

G1=Plot[{Evaluate[{x[t]}/.%]},{t,0,T},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
G2=Plot[{Evaluate[{y[t]}/.%%]},{t,0,T},PlotStyle->RGBColor[0,1,0]];

G3=ParametricPlot[{Evaluate[{x[t],y[t]}/.%%%]},{t,0,T},PlotStyle- >
    RGBCol or[0,1,0]];

Show[G4,G5,G3,PlotRange->{{-1,1},{0,0.4}}]
Show[G1,G2,PlotRange->{{0,5},{-0.2,0.4}}]
```

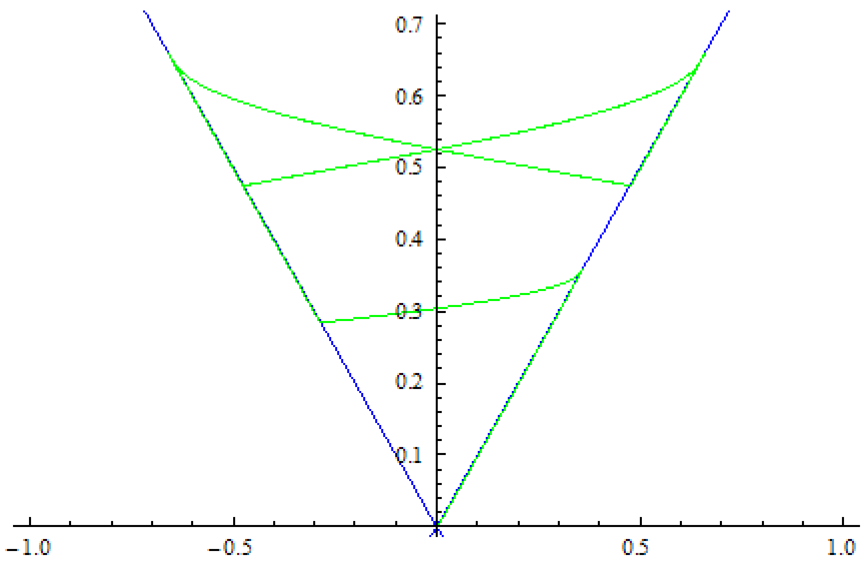


Рис. 14 фазовый портрет *I*

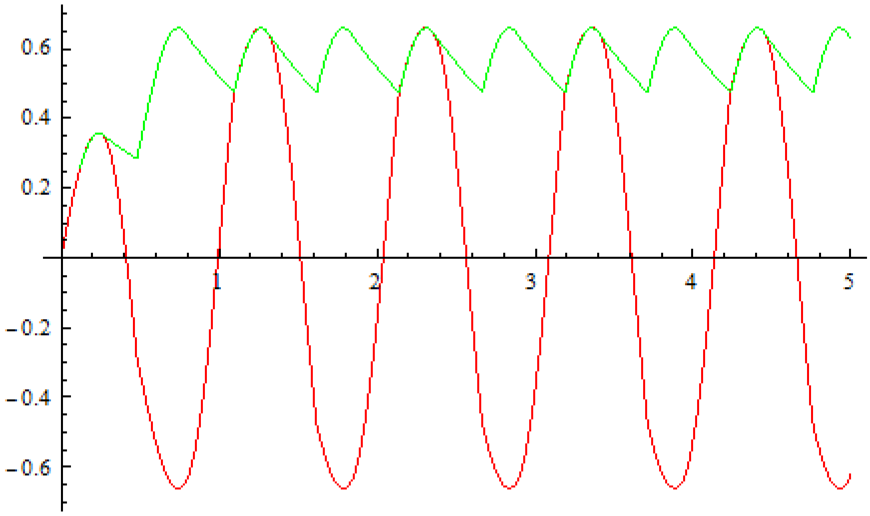


Рис. 15 графики токов I_1 и I_2

Следующий график иллюстрирует деформацию конуса K_2 при изменении параметров индуктивностей. Асимметричность периодических колебаний на этом графике объясняется изменением соотношения между параметрами индуктивностей.

$\mathbf{L1 = 4; L2 = 9; R1 = 1; R2 = 1; E0 = 5;} \boldsymbol{Q} \mathbf{= 6;}$

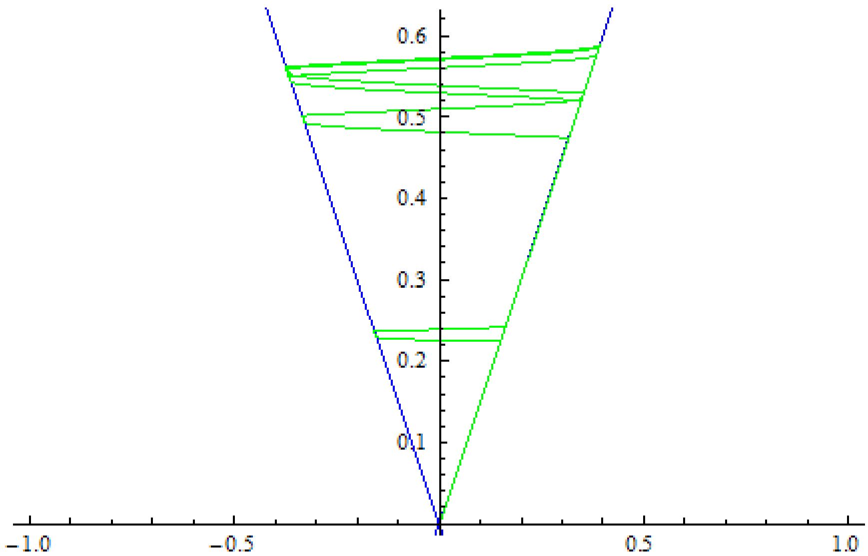


Рис. 16 фазовый портрет X

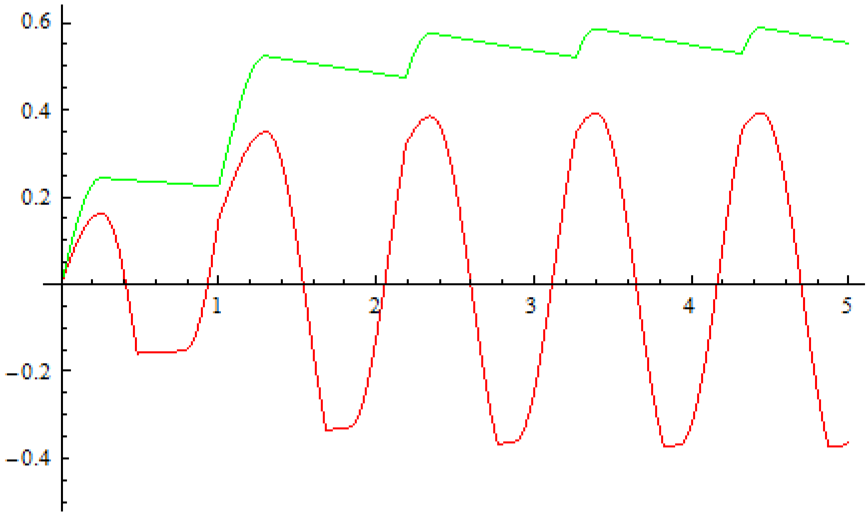


Рис. графики координат X

1.3.10. Условие существования модели в виде СДН для электрической цепи с диодами.

Элементы источников тока и напряжения будем обозначать буквой S, сопротивления – R, ёмкости – C, индуктивности – L, диодов – D.

Рассмотрим электрическую связную цепь, состоящую из элементов S, R, C, L и D.

В теории электрических цепей для того, чтобы выписать законы Кирхгофа, строят тем или иным образом дерево графа цепи, включающее в себя все узлы графа и не содержащее ни одного контура. Ветви (элементы), не вошедшие в дерево, называют *ветвями связи*, каждая из них замыкает в точности один *главный контур*, содержащий помимо данной ветви только ветви дерева. С другой стороны, каждая ветвь дерева образует ровно одно *главное сечение* – набор ветвей, включающий помимо данной ветви дерева все те ветви связи, главные контуры которых содержат выбранную ветвь дерева. Если обозначить через $\bar{U}$ вектор напряжений, через $\bar{I}$ – вектор токов в ветвях связи, а за через U и I – в ветвях дерева, то уравнения главных контуров $\bar{U} = M \cdot U$ будут связаны с уравнениями главных сечений $I = -M^{*} \cdot \bar{I}$ общей матрицей M [Лисицкая И.Н., Синицкий Л.А., Шумков Ю.М.

Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами. Киев: Наукова думка. 1969].

Обозначим через D_1 множество всех диодов, параллельно подключенных в рассматриваемой цепи к ёмкостям (то есть образующих контур с одной из ёмкостей цепи), а количество диодов в D_1 через k_1. Остальную часть диодов цепи обозначим D_2 и число элементов в ней – k_2. Пронумеровав отдельно диоды в D_1 и D_2 в произвольном порядке, сформируем диодный преобразователь D следующим образом. Все элементы D_1 присоединим к преобразователю, считая их его ветвями и обозначим эту часть через D_1, а из элементов D_2 построим диодный преобразователь D_2 так, как описано в 1.3.7, присоединив его к D. Рассмотрим вектора $x := \left(y_1, y_2, \ldots, y_{k_1}, x_1, x_2, \ldots, x_{k_2}\right)^T$ – k_1 анодных напряжений диодов D_1, k_2 анодных токов диодов D_2 и $y := \left(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{k_2}\right)$ – k_1 анодных токов диодов D_1, k_2 анодных напряжений диодов D_2. Эти вектора принадлежат взаимно сопряжённым конусам $\mathrm{R}_-^{k_1} \times \mathrm{R}_+^{k_2}$, $\mathrm{R}_+^{k_1} \times \mathrm{R}_-^{k_2}$ и их скалярное произведение равно нулю, то есть они связаны оператором диодной нелинейности. Тогда смешанный вектор анодных напряжений на диодах части D_1 и токов на входах преобразователя D_2 выражается через x равенством

$$v := \left(u_1, u_2, \ldots, u_{k_1}, i_1, i_2, \ldots, i_n\right)^T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot x,$$

здесь матрица A из 1.3.7, а E – единичная матрица размерности k_1. $u := \left(i_1, i_2, \ldots, i_{k_1}, u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$ – вектор токов диодов части преобразователя D_1, и напряжений в ветвях части D_2 связан с y равенством $y = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^* u = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} u$ (смотри 1.3.7). Поэтому в силу утверждения 1.3.6 оператором диодной нелинейности связаны вектора u и v.

Будем предполагать, что электрическая цепь удовлетворяет следующему условию:

любой путь цепи из линейных элементов S, R, C, L,
соединяющий два входа части D_2 диодного (LC-условие)
преобразователя, содержит хотя бы одну индуктивность.

Теперь разобьём все элементы цепи на шесть групп: 1) C; 2) D_2; 3) S; 4) R; 5) L; 6) D_1. Внутри группы 1) первыми пронумеруем ёмкости, параллельно присоединённые к диодам из D_1, а затем остальные ёмкости в произвольном порядке. Внутри групп 3), 4), 5) пронумеруем элементы в произвольном порядке, а во второй и шестой группах оставим нумерацию от формирования преобразователя D. Построим дерево цепи, перебирая группы и элементы внутри групп согласно выбранной нумерации, будем присоединять элемент к дереву всякий раз, когда он не образует ни одного контура с включёнными ранее в дерево элементами.

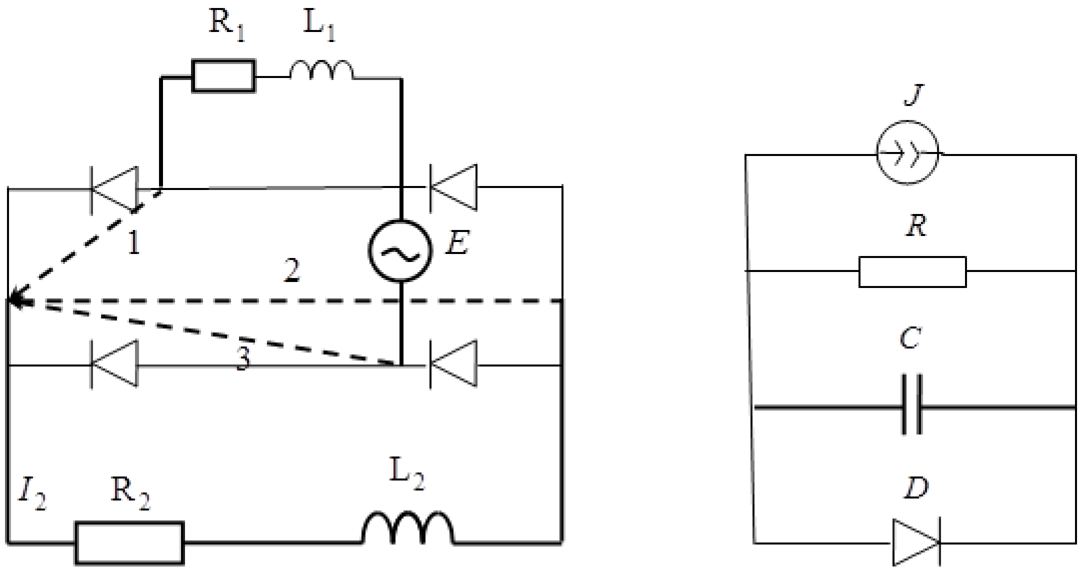


Figura 2.

Например, для каждой из двух изображённых цепей выполняется LC-условие, их деревья отмечены жирными линиями. По приведённому алгоритму в дерево цепи слева сначала включаются ветви 1, 2 и 3 диодного преобразователя, построенного на множестве диодов цепи (они отмечены серым цветом), затем ветвь источника напряжения E. Наконец последними присоединяются ветви сопротивлений R_1 и

R_2. Ветви L_1 и L_2 являются здесь ветвями связей. Для этой цепи множества C и D_1 пусты. Дерево цепи справа состоит только из одной ветви ёмкости C, остальные являются ветвями связи. Для этой цепи множества L и D_2 пусты.

Из описания процедуры построения дерева и LC-условия очевидно следует, что все ветви D_2 войдут в дерево, а все диоды D_1 будут ветвями связи.

После того как дерево будет построено, перенумеруем в каждой группе отдельно элементы дерева и элементы связи (не вошедшие в дерево) в порядке старой нумерации. Токи и напряжения ветвей связи будем помечать чертой вверху. Отметим, что нумерация в диодном преобразователе не изменится.

В результате уравнения главных контуров и главных сечений по построенному дереву запишутся в следующем виде.

$$\bar{u}_C = M_{11}u_C, \qquad (1к)$$

$$(2к)$$

$$\bar{u}_S = M_{31}u_C + M_{33}u_S, \qquad (3к)$$

$$\bar{u}_R = M_{41}u_C + M_{43}u_S + M_{44}u_R, \qquad (4к)$$

$$\bar{u}_L = M_{51}u_C + M_{52}u_{\mathrm{D}_2} + M_{53}u_S + M_{54}u_R + M_{55}u_L, \qquad (5к)$$

$$\bar{u}_{\mathrm{D}_1} = M_{61}u_C, \qquad (6к)$$

$$i_C = -M_{11}^*\bar{i}_C - M_{31}^*\bar{i}_S - M_{41}^*\bar{i}_R - M_{51}^*\bar{i}_L - M_{61}^*\bar{i}_{\mathrm{D}_1}, \qquad (1с)$$

$$i_{\mathrm{D}_2} = -M_{52}^*\bar{i}_L, \qquad (2с)$$

$$i_S = -M_{33}^*\bar{i}_S - M_{43}^*\bar{i}_R - M_{53}^*\bar{i}_L, \qquad (3с)$$

$$i_R = -M_{44}^*\bar{i}_R - M_{54}^*\bar{i}_L, \qquad (4с)$$

$$i_L = -M_{55}^*\bar{i}_L. \qquad (5с)$$

Добавим для полноты математического описания уравнения индуктивностей, ёмкостей и сопротивлений цепи

$$\bar{L}\cdot\bar{i}_L{}' = \bar{u}_L,\ L\cdot i_L{}' = u_L,\ \bar{C}\cdot\bar{u}_C{}' = \bar{i}_C,\ C\cdot u_C{}' = i_C,\ \bar{u}_R = \bar{R}\cdot\bar{i}_R,\ u_R = R\cdot i_R. \qquad (уэ)$$

Здесь $\bar{L},\ L,\ \bar{C},\ C,\ \bar{R},\ R$ – диагональные матрицы с положительными числами на диагонали.

u_S и $\bar{i}_S$ будем считать известными функциями, это означает, что все источники напряжения входят в дерево, а источники тока являются ветвями связи, в противном случае схема может оказаться противоречивой.

Теперь займёмся преобразованием системы выписанных нами уравнений. Сначала исключим u_L и $\bar{i}_c$ из уравнений (5к), (1с) продифференцировав (1к), (5с) и воспользовавшись (уэ).

$$\bar{u}_C{}' = M_{11}u_C{}' \Rightarrow \bar{C}\bar{u}_C{}' = \bar{C}M_{11}C^{-1}Cu_C{}' \Rightarrow \bar{i}_C = \bar{C}M_{11}C^{-1}i_C,$$

$$i_L{}' = -M_{55}^*\bar{i}_L{}' \Rightarrow Li_L{}' = -LM_{55}^*\bar{L}^{-1}\,\bar{L}\,\bar{i}_L{}' \Rightarrow u_L = -LM_{55}^*\bar{L}^{-1}\bar{u}_L.$$

Подставим найденные выражения u_L, $\bar{i}_c$ в (5к), (1с)

$$\left(\bar{L} + M_{55}LM_{55}^*\right)\bar{L}^{-1}\,\bar{u}_L = M_{51}u_C + M_{52}u_{\mathrm{D}1} + M_{53}u_S + M_{54}u_R, \tag{28}$$

$$\left(C + M_{11}^*\bar{C}M_{11}\right)C^{-1}\,i_C = -M_{31}^*\bar{i}_S - M_{41}^*\bar{i}_R - M_{51}^*\bar{i}_L - M_{61}^*\bar{i}_{\mathrm{D}_1}. \tag{29}$$

Введём обозначения $A = \bar{L} + M_{55}LM_{55}^*$ и $B = C + M_{11}^*\bar{C}M_{11}$, умножим уравнения элементов индуктивностей связи и ёмкостей дерева на $A\bar{L}^{-1},\ BC^{-1}$ соответственно, после чего воспользуемся равенствами (28), (29)

$$A\bar{i}_L{}' = M_{51}u_C + M_{52}u_{\mathrm{D}_2} + M_{53}u_S + M_{54}u_R, \tag{30}$$

$$Bu_C' = -M_{31}^*\bar{i}_S - M_{41}^*\bar{i}_R - M_{51}^*\bar{i}_L - M_{61}^*\bar{i}_{\mathrm{D}_1}. \tag{32}$$

Исключим из этих равенств $\bar{i}_R,\ u_R$. Сначала найдём $\bar{i}_R$ из (4к) с использованием уравнений элементов сопротивлений и уравнения (4с)

$$\left(\bar{R} + M_{44}RM_{44}^*\right)\bar{i}_R = M_{41}u_C + M_{43}u_S - M_{44}RM_{54}^*\bar{i}_L,$$

здесь матрица $R_1 = \left(\bar{R} + M_{44}RM_{44}^*\right)$ симметрична и положительно определена, поэтому имеет обратную

$$\bar{i}_R = R_1^{-1}M_{41}u_C + R_1^{-1}M_{43}u_S - R_1^{-1}M_{44}RM_{54}^*\bar{i}_L. \tag{33}$$

Теперь выразим напряжения и остальные токи сопротивлений. Подставляя (32) в уравнение сопротивления, получим

$$\bar{u}_R = \bar{R}R_1^{-1}M_{41}u_C + \bar{R}R_1^{-1}M_{43}u_S - \bar{R}R_1^{-1}M_{44}RM_{54}^*\bar{i}_L,$$

а подставляя (32) в (4c), получим

$$i_R = -M_{44}^*R_1^{-1}M_{41}u_C - M_{44}^*R_1^{-1}M_{43}u_S + \left(M_{44}^*R_1^{-1}M_{44}R - E\right)M_{54}^*\bar{i}_L.$$

Наконец $u_R = -RM_{44}^*R_1^{-1}M_{41}u_C - RM_{44}^*R_1^{-1}M_{43}u_S + R\left(M_{44}^*R_1^{-1}M_{44}R - E\right)M_{54}^*\bar{i}_L$.

Введём дополнительные обозначения $x = \left(\bar{i}_L,\ u_C\right)$, $y = \left(\bar{i}_S,\ u_S\right)$, $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$,

$A_2 = \begin{pmatrix} M_{54}R\left(M_{44}^*R_1^{-1}M_{44}R - E\right)M_{54}^* & M_{51} - M_{54}RM_{44}^*R_1^{-1}M_{41} \\ M_{41}^*R_1^{-1}M_{44}RM_{54}^* - M_{51}^* & -M_{41}^*R_1^{-1}M_{41} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -M_{52} \\ M_{61}^* & 0 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & M_{53} - M_{54}RM_{44}^*R_1^{-1}M_{43} \\ -M_{31}^* & -M_{41}^*R_1^{-1}M_{43} \end{pmatrix}$ и запишем вектора u и v в виде

$u = \left(\bar{i}_{D_1},\ u_{D_2}\right)$, $v = \left(\bar{u}_{D_1},\ i_{D_2}\right)$. Теперь равенства (30) и (31) запишем следующим образом

$$A_1x' = A_2x - A_3u + A_4y. \tag{28}$$

А уравнения (6к), (2с) в виде

$$v = A_3^*x.$$

Напомним, что мы считаем y известной функцией времени t, определяющей работу источников тока и напряжения. Заметим, что A_1 является симметричной положительно определённой матрицей и имеет обратную. Вводя обозначения

$X = A_1^{1/2}x$, $U = A_1^{-1/2}A_3u$, $f(t,\ X) = A_1^{-1/2}A_2A_1^{-1/2}X + A_1^{-1/2}A_4y$, заметим, что

$v = A_3^*A_1^{-1/2}X$. Умножая (33) на $A_1^{-1/2}$, получим

$$X' = f(t,\ X) - A_1^{-1/2}A_3u \tag{29}$$

Вектора диодного преобразователя $u,\ v$ связаны, как мы выяснили ранее, оператором диодной нелинейности, поэтому в силу утверждения 1.3.6 с учётом выражения v через X можно утверждать, вектор $A_1^{-1/2}A_3u$ связан с X оператором диодной нелинейности $N(K)$, порождённым некоторым конусом K. Поэтому (34) можно записать в виде СДН

$$X' \in f(t,\ X) - N_X. \tag{30}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Если для электрической цепи выполнено* LC*-условие, то математическая модель цепи может быть представлена в виде СДН.*

Наконец заметим, что найдя решение включения (35), без труда можно вычислить все токи и напряжения цепи.

Следующий пример показывает, что для существования модели (35) наложенные на цепь условия являются достаточными, но не необходимыми условиями.

Пример. Для цепи рисунка 12.1 LC-условие не выполняется, так как три пути, состоящих из элементов $J_1,\ J_2$ и соединяющих входы диодного преобразователя части D_2 не содержат индуктивностей.

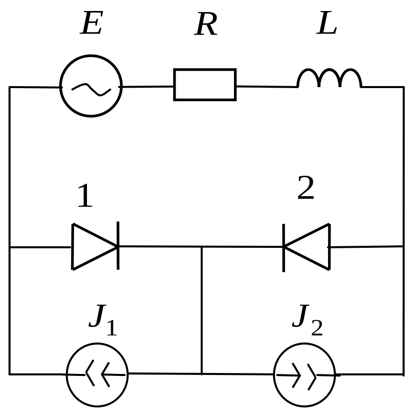


Рис. 12.1

Уравнения падений напряжения в контуре $E,\ R,\ L,\ D_2,\ D_1$ имеет вид $u_R + u_L + u_{D_2} - u_{D_1} = -u_E$, где $u_E = u_E(t)$ некоторая заданная функция времени t.

Обозначим через $i := i_R = i_L = i_{D_2} - J_2 = -i_{D_1} + J_1$. Где J_1 и J_2 некоторые заданные константы. Выражая напряжения через i из уравнений элементов $u_R = i \cdot R$, $u_L = i' \cdot L$, получим равенство

$$i \cdot R + i' \cdot L + u_{D_2} - u_{D_1} = -u_E . \tag{36}$$

Анодные токи диодов $i_{D_1} = J_1 - i$ и $i_{D_2} = J_2 + i$ принимают неотрицательные значения, поэтому $-J_2 \le i \le J_1$. Для корректной работы цепи потребуем, чтобы константы J_1, J_2 удовлетворяли неравенству $-J_2 \le J_1$.

Если $i \in (-J_2, J_1)$, то $i_{D_1} > 0$ и $i_{D_2} > 0$ и, следовательно, $u_{D_1} = u_{D_2} = 0$. Если $i = -J_2$, то $i_{D_1} > 0$ и $u_{D_1} = 0$, а $i_{D_2} = 0$ и $u_{D_2} \le 0$. Наконец, если $i = J_1$, то $i_{D_2} > 0$ и $u_{D_2} = 0$, а $i_{D_1} = 0$ и $u_{D_1} \le 0$. Из этих рассуждений вытекает, что в любом случае вектор $u := u_{D_2} - u_{D_1} \in N_{[-J_2,\, J_1]}(i)$.

Запишем равенство (36) в виде $i' = -\dfrac{u_E}{L} - i \cdot \dfrac{R}{L} - \dfrac{u}{L}$ и обозначим

$f(t,\, i) - \dfrac{u_E}{L} - i \cdot \dfrac{R}{L}$. Отметим, что по-прежнему $\dfrac{u}{L} \in N_{[-J_2,\, J_1]}(i)$ в силу положительности параметра L. В результате получаем модель рассматриваемой цепи в виде СДН $i' = f(t,\, i) - N_{[-J_2,\, J_1]}(i)$.

Стоит отметить, что в этом примере множество, порождающее оператор диодной нелинейности, не является конусом.

1.4. Задача выпуклого программирования и СДН

1.4.1. Описание уравнения

Задачу выпуклого программирования можно трактовать как поиск минимального значения выпуклой функции $f(x)$ на некотором выпуклом замкнутом множестве $Q \subset \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$.

Напомним, что *выпуклой* на множестве Q называют функцию $f(x)$, которая удовлетворяет неравенству

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ при всех $x_1, x_2 \in Q$ и $\alpha \in [0, 1]$.

Известен ряд методов поиска приближенного решения этой задачи, которые носят характер громоздких вычислений из-за необходимости постоянного контроля за тем, чтобы процесс поиска не вышел за границы области Q.

Здесь мы предлагаем путь поиска приближённых решений задач динамического программирования с помощью СДН, который обеспечивает успех даже при выходе за пределы границ Q.

Будем полагать, что $f(x)$ дифференцируемая в некоторой окрестности Q, и имеет на ней ограниченный градиент $\nabla f(x)$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -\nabla f(x) - M \cdot (x - P(x,Q)) \tag{28}$$

при большом значении положительного параметра M (по сравнению с величиной градиента $\nabla f(x)$). Заметим, что для $x \in Q$ $x - P(x,Q) = 0 \in N_x$ и вместе с ним $M(x - P(x,Q)) = 0 \in N_x$. Поэтому решение (28), не выходящее за пределы множества Q, будет также решением СДН $\dot{x} \in -\nabla f(x) - N_x$. Поскольку мы хотим разрешить x выходить за пределы Q, где нормальный конус N_x нами не определён, мы будем пользоваться $N_x = \{k(x - P(x,Q)) :\ k \in \mathrm{R}_+\}$ в качестве естественного доопределения N_x в некоторой окрестности области Q.

Если решение x системы (28) находится в области Q, то оно движется по закону $\dot{x} = -\nabla f(x)$ к точке минимума $f \in Q$.

Покажем, что в случае, когда градиент $\nabla f(x) \ne 0$ на Q, решение x (28) находясь за пределами Q, движется к области, удовлетворяя вблизи Q неравенству $f(x) < f_o$, где f_o – минимум f на Q.

Сначала рассмотрим функцию

$V(x)=\|x-Px\|^2$. Для простоты будем обозначать $Px=P(x,Q)$

1.4.2. Лемма о дифференцировании функции $V(x)$

Функция $V(x)$ *непрерывно дифференцируема для выпуклого замкнутого множества* Q *и*

$$\nabla V(x)=2(x-Px). \tag{29}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$\Delta=V(y)-V(x)-(2(x-Px),\,y-x)$

и докажем, что

$$\frac{\Delta}{\|y-x\|}\to 0 \text{ при } y\to x. \tag{30}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\Delta&=(y-Py,\,y-Py)-(x-Px,\,x-Px)-2(x-Px,\,y-x)=(y-Py,\,y-Py)-\\&-(x-Px,\,y-Py)+(x-Px,\,y-Py)-(x-Px,\,x-Px)-2(x-Px,\,y-x)=\\&=(y-x+Px-Py,\,y-Py)+(x-Px,\,y-x+Px-Py)-2(x-Px,\,y-x)=\end{aligned}$$

$$=(y-x+Px-Py,\,y-x)+(y-x+Px-Py,\,x-Py)+(x-Px,\,y-x+Px-Py)-$$
$$-2(x-Px,\,y-x).$$

Рассмотрим отдельно скалярное произведение $(y-x+Px-Py,\,y-x)$ и воспользуемся тем фактом, что оператор проектирования на выпуклое множество является нерастягивающим (1.2.2).

$$\begin{aligned}&(y-x+Px-Py,\,y-x)=(y-x,\,y-x)+(Px-Py,\,y-x)\le\|y-x\|^2+\\&+\|Px-Py\|\cdot\|y-x\|\le\|y-x\|^2+\|y-x\|^2=2\|y-x\|^2=o(\|y-x\|).\end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta = o\left(\|y-x\|\right) + \left(y-x+Px-Py,\, x-Py\right) + \left(y-x+Px-Py,\, x-Px\right) -$$
$$-2\left(x-Px,\, y-x\right) =$$
$$= o\left(\|y-x\|\right) + \left(y-x+Px-Py,\, x-Py\right) + \left(Px-Py,\, x-Px\right) -$$
$$-\left(y-x,\, x-Px\right) =$$
$$= o\left(\|y-x\|\right) + \left(y-x,\, x-Py\right) + \left(Px-Py,\, x-Py\right) + \left(Px-Py,\, x-Px\right) -$$
$$-\left(y-x,\, x-Px\right) =$$
$$= o\left(\|y-x\|\right) + \left(y-x,\, Px-Py\right) + \left(Px-Py,\, 2x-Px-Py\right) =$$
$$= o\left(\|y-x\|\right) + \left(Px-Py,\, y-x+2x-Px-Py\right),$$

Окончательно получаем

$$\Delta = o\left(\|y-x\|\right) + \left(Px-Py,\, x-Px\right) + \left(Px-Py,\, y-Py\right). \tag{31}$$

Покажем теперь, что $\left(Px-Py,\, x-Px\right) = o\left(\|y-x\|\right)$ и

$\left(Px-Py,\, y-Py\right) = o\left(\|y-x\|\right)$.

Действительно, если α – предельная точка выражения $\left(\dfrac{Px-Py}{\|y-x\|},\, x-Px\right)$ при

$y \to x$, то для некоторой сходящейся к x последовательности $\left(y_n\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Px-Py_n}{\|y_n-x\|},\, x-Px\right) = \alpha .$$

Из свойства оператора проектирования (1.2.2) очевидно следует, что $\alpha \ge 0$. С другой стороны, ввиду того же свойства и непрерывности оператора проектирования, которая очевидным образом следует из свойства не растягивать, имеем

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{Px-Py_n}{\|y_n-x\|},\, y_n-Py_n\right) \le 0$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Px-Py_n}{\|y_n-x\|},\, x-Px\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{Px-Py_n}{\|y_n-x\|},\, y_n-Py_n\right) = 0$$

Отсюда и из (31) следует (30).

1.4.3. Лемма о дифференциальном неравенстве для функции $V(x)$

Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ обозначим через $X = \{x : \varepsilon \le \rho(x, Q) \le r\}$ компактное множество из окрестности Q (r – некоторое положительное число), положим $S = \max_{x \in X} \{\|\nabla f(x)\|\}$. И рассмотрим производную $\dot{V}(x) := \langle \nabla V(x), \dot{x} \rangle$ по траекториям системы 28.

Лемма. *Если* $x \in X$ *– значение решения* $x(t)$ *системы (28), то*

$$\dot{V}(x) \le -2MV(x) + 2S\sqrt{V(x)} \tag{32}$$

Доказательство. Из (28) и (29) следует:

$$\dot{V}(x) = (\nabla V, \dot{x}) = \big(2(x - Px), -\nabla f(x) - M \cdot (x - Px)\big) = -2M\|x - Px\|^2 +$$
$$+2\big(x - Px, -\nabla f(x)\big) \le -2MV(x) + 2\sqrt{V(x)}\|-\nabla f(x)\| \le -2MV(x) + 2S\sqrt{V(x)}$$

Лемма доказана.

1.4.4. Теорема о верхней предельной оценке

Пусть f_o – минимум функции $f(x)$ на множестве Q.

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $M > 0$ и $T > 0$, что если $x(0) = x_0 \in X$ и $t \ge T$, то

$f(x(t)) < f_o$ и $\rho(x(t), Q) \le \varepsilon$

Доказательство. Из (32) и теоремы о нестрогом дифференциальном неравенстве ([x 81], с.16,17) вытекает оценка:

$$\rho(x(t), Q) = \sqrt{V(x(t))} \le \frac{S}{M} + \left(\|x_0 - Px_0\| - \frac{S}{M}\right) \cdot e^{-Mt} \le \frac{S}{M} + \left(r - \frac{S}{M}\right) \cdot e^{-Mt}.$$

Поэтому существуют такие $M > 0$ и $T > 0$, что при $t \ge T$ $\rho(x(t), Q) \le \varepsilon$.

Запишем систему (28) в виде

$$\dot{x} = -\nabla Z(x), \tag{33}$$

где $Z(x)=f(x)+\frac{1}{2}MV(x)$ с градиентом в силу (29)

$$\nabla Z(x)=\nabla f(x)+\frac{1}{2}M\nabla V(x)=\nabla f(x)+M(x-Px).$$

Нетрудно видеть, что $Z(x)$ вместе с $f(x)$ является выпуклой функцией, кроме того $\|Z(x)\|\to\infty$ при неограниченном удалении x от множества Q. Поэтому $Z(x)$ имеет непустое выпуклое замкну тое множество точек минимума, к которому асимптотически стремится любая траектория системы (33). Заметим, что если $\bar{x}$ – одна из точек минимума $Z(x)$, то $f(\bar{x})<f_o$. Действительно, если $\tilde{x}\in Q$ и $f(\tilde{x})=f_o$, то $Z(\tilde{x})=f_o$. С другой стороны $Z(\bar{x})<Z(\tilde{x})$, так как $\tilde{x}$ не может быть точкой минимума функции $Z(x)$
($\nabla Z(\tilde{x})=\nabla f(\tilde{x})\neq 0$ по предположению в 1.4.1). Поскольку $V(\bar{x})>V(\tilde{x})=0$, мы получаем неравенство $f(\bar{x})<f(\tilde{x})=f_o$. Следовательно, при достаточно больших t будет выполнено неравенство $f(x(t))<f_o$.

Теорема доказана.

1.4.5. Численные эксперименты

Рассмотрим задачу о поиске минимального значения функции $f(x,y)=2+(x-2)^2+(y-5)^2$ на круге Q, удовлетворяющему неравенству $(x-2)^2+(y-2)^2\leq 4$. Очевидно, $f_{\min}=3$ достигается при $x=2,\ y=4$.

Из приведённых ниже результатов численного эксперимента с программой пакета “Mathematica” видно, что оператор диодной нелинейности действует, как ”магнит”, притягивающий траекторию к множеству Q.

```
x0=0;y0=3;T=200;M=1000;

G4=Plot[Sqrt[4-(x-2)^2]+2,{x,0,4},PlotStyle->RGBColor[0,1,0]];
```

```
G5=Plot[2-Sqrt[4-(x-2)^2],{x,0,4},PlotStyle->RGBColor[0,1,0]];

NDSolve[{x'[t] ==-2*(x[t]-2)+(2-x[t])*M*Max[0,(x[t]-2)*(x[t]-2)+(y[t]-2)*(y[t]-2)-4],y'[t] ==-2*(y[t]-5)+(2-y[t])*M*Max[0,(x[t]-2)*(x[t]-2)+(y[t]-2)*(y[t]-2)-4],x[0==x0,y[0] ==y0},{x,y},{t,0,T}];

G3=ParametricPlot[{Evaluate[{x[t],y[t]}/.%]},{t,0,T},PlotStyle->
RGBColor[1,0,0]];
Show[G4, G5, G3, PlotRange -> {{0, 4.5}, {0, 4.5}}, AspectRatio -> 1,
AxesOrigin -> {0, 0}]
```

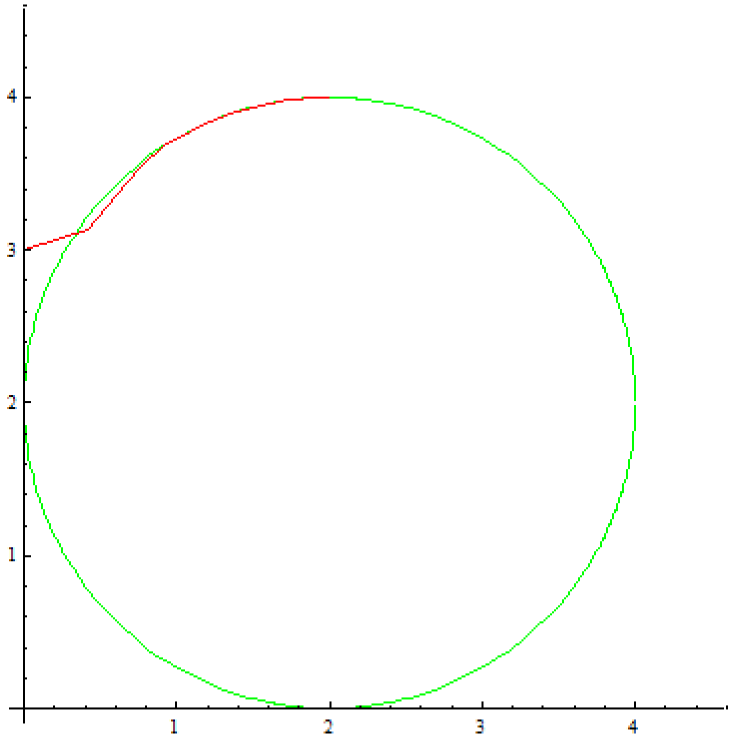


Рис. 18

1.5. Существование и единственность решения начальной задачи

1.5.1. Формулировка и план доказательства локальной теоремы.

Теорема. *На непустом выпуклом замкнутом множестве* $Q \subset \mathrm{R}^m$ *рассматривается задача Коши для обобщенной системы с диодной нелинейностью:*

$$\dot{x} = \tau_x f(t,\, x), \tag{1.34}$$

$$x(t_0) = x_0 \in Q. \tag{1.35}$$

Предполагается, что функция $f: [t_0, t_0 + H] \times Q \to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ *непрерывна по первому аргументу и удовлетворяет локальному условию Липшица по второму:*

$$\| f(t,\, x) - f(t,\, y) \| \le L \| x - y \| \tag{1.36}$$

(константа L *для некоторой окрестности любой точки своя). Утверждается, что задача* (1.34), (1.35) *имеет на некотором отрезке* $[t_0, t_0 + h]$ $(h > 0)$ *единственное решение.*

Напомним, что решением системы с диодной нелинейностью называется локально абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая этой системе почти всюду. Доказательство теоремы будет состоять из следующих шагов.

1) Продолжение системы (1.34) с множества Q на множество $Q_1 \supset Q$.

2) Построение «бочки» – множества, в котором будут лежать графики приближенных решений рассматриваемой задачи.

3) Построение приближенных решений – «ломаных Эйлера» и доказательство относительной компактности.

4) Предельный переход – доказательство того, что предел ломаных Эйлера есть решение данной задачи (в множестве Q_1).

5) Доказательство того, что построенное решение не выходит из Q.

6) Доказательство единственности.

1.5.2. Продолжение системы.

Положим

$$Q_1 = \left\{ x \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}} : \rho(x,\, Q) \le 1 \right\}.$$

Для $x \in Q_1$ обозначим $\bar{x} = P(x, Q)$ и определим

$$e_x = \begin{cases} (x - \bar{x}) / \|x - \bar{x}\|, \textit{если } x \in Q_1 \setminus Q, \\ 0, \ \textit{если } x \in Q. \end{cases} ;$$

$$\tilde{f}(t,\, x) = f(t,\, \bar{x}) - \left(\|x - \bar{x}\| + \left(f(t,\, \bar{x}),\, e_x \right)_+ \right) e_x,$$

здесь мы используем обозначение $(a,b)_+ = \max\{0,\ (a,b)\}$. Отметим, что $\tilde{f}(t,\, x) = f(t,\, x)$ для $x \in Q$, а для $x \in Q_1 / Q$ вектор $\left(f(t,\bar{x}), e_x \right)_+ e_x$ является проекцией $f(t,\bar{x})$ на конус N_x, нормальный к Q в точке x, который в 1.4.1 мы определили как луч $M(x - \bar{x})$ для $M \ge 0$.

Однозначная функция $\tilde{f}$ непрерывна на $\operatorname{int} Q$ и на $Q_1 \setminus Q$, а на границе Q, возможно, имеет разрывы.

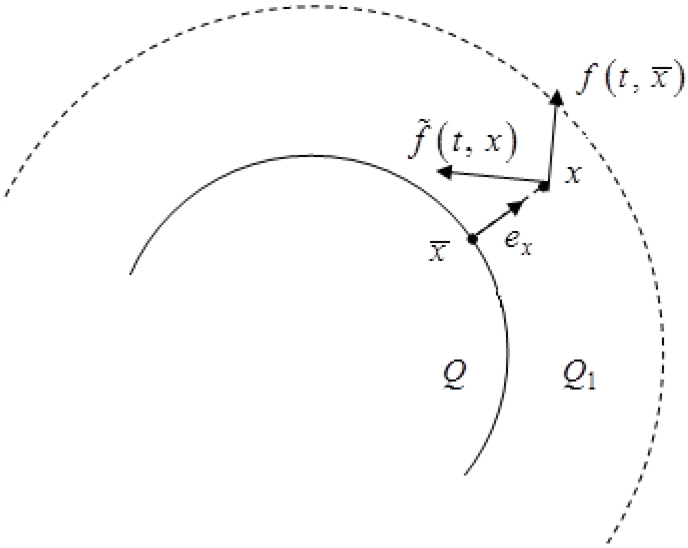


Рис. 19

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) , \tag{1.37}$$

где

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t, x) - N_x, \; если \;\; x \in Q, \\ \{\tilde{f}(t, x)\}, \; если \; x \in Q_1 \setminus Q. \end{cases} \tag{1.38}$$

Покажем, что эта многозначная функция *полунепрерывна сверху* .

Определение. Многозначная функция $F : \left(D(F) \subset \mathrm{R}^{\mathrm{m}} \times \mathrm{R}^{\mathrm{m}} \right) \to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ называется *полунепрерывной сверху*, если для любой точки $(t, x) \in D(F)$ из соотношений $(t_k, x_k) \in D(F)$, $y_k \in F(t_k, x_k)$ $(k \in \mathrm{N})$, $t_k \to t$, $x_k \to x$, $y_k \to y$ при $k \to \infty$, следует, что $y \in F(t, x)$.

Это свойство также называют *замкнутостью графика* многозначной функции F.

Примеры.

1. Каждое однозначное непрерывное отображение замкнутого множества можно трактовать как многозначное полунепрерывное сверху отображение.
2. Отображение $x \mapsto N_x$ для выпуклого замкнутого множества Q полунепрерывно сверху.

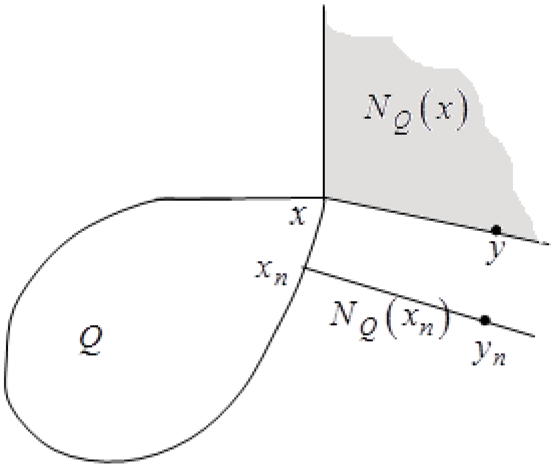


Рис. 20

3. Отображение $x \mapsto T(Q)x$ может не быть полунепрерывным сверху.

Условие полунепрерывности сверху отображения F эквивалентно следующему:

$$\forall((\bar{t},\, \bar{x}) \in D(F))\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall((t,\, x) \in D(F))$$
$$\left[|t-\bar{t}| < \delta \wedge \|x-\bar{x}\| < \delta \to F(t,\, x) \subset F(\bar{t},\, \bar{x}) + B_\varepsilon =: F^\varepsilon(\bar{t},\, \bar{x})\right].$$

Здесь B_ε – открытый шар радиуса ε в R^{m} [x91].

Утверждение. Многозначная функция F, определённая формулой (1.38), является полунепрерывной сверху.

Доказательство. Достаточно рассмотреть три случая:

1) $\{x_k\} \subset Q$ (и, следовательно, $x \in Q$);
2) $\{x_k\} \subset Q_1 \setminus Q,\ x \in Q$;
3) $\{x_k\} \subset Q_1 \setminus Q,\ x \in Q_1 \setminus Q$.

В первом случае из условия $y_k \in F(t_k,\, x_k)$ $(k \in \mathrm{N})$ следует, что

$$f(t_k,\, x_k) - y_k =: u_k \in N_{x_k},$$

то есть для любого $z \in Q$ справедливо неравенство $(u_k,\, z - x_k) \le 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем: $(u,\, z - x) \le 0$, поэтому $u := f(t,\, x) - y \in N_x$. Это означает, что $y \in F(t,\, x)$.

Во втором случае

$$y_k = f(t_k,\, \bar{x}_k) - \left(\|x_k - \bar{x}_k\| + \left(f(t_k,\, \bar{x}_k),\, e_{x_k}\right)_+\right)e_{x_k} \to y,$$

причем $f(t_k,\, \bar{x}_k) \to f(t,\, \bar{x}) = f(t,\, x)$ и $\|x_k - \bar{x}_k\| \to 0$. Следовательно,

$$\left(f(t_k,\, \bar{x}_k),\, e_{x_k}\right)_+ e_{x_k} \to f(t,\, x) - y.$$

Из ранее сделанного нами замечания о том, что $\left(f\left(t_k,\, \bar{x}_k\right),\, e_{x_k} \right)_+ e_{x_k}$ есть проекция $f\left(t_k,\, \bar{x}_k\right)$ на конус $N_{x_k} \subset N_{\bar{x}_k}$, следует $\left(f\left(t_k,\, \bar{x}_k\right),\, e_{x_k} \right)_+ e_{x_k} =: u_k \in N_{\bar{x}_k}$. Отсюда, как и в первом случае, получаем, что $f\left(t,\, x\right) - y \in N_x$, т.е. $y \in F\left(t,\, x\right)$.
Наконец, в третьем случае доказываемое утверждение вытекает из непрерывности функции $\tilde{f}$.

1.5.3. Построение «бочки».

Положим

$$\bar{B}(x_0) = \left\{ x \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}} : \left\| x - x_0 \right\| \le a \right\},\ \text{где } a > 0 \text{ произвольно,}$$

и

$$M = \max\left\{ \left\| f\left(t,\, x\right) \right\| : t \in \left[t_0,\, t_0 + H\right],\, x \in Q \cap \bar{B}\left(x_0\right) \right\}.$$

Заметим, что если $x \in \bar{B}(x_0)$, то (в силу свойства оператора проектирования на Q не растягивать) расстояние между $\bar{x} = P\left(x,\, \mathrm{Q}\right)$ и $x_0 = P\left(x_0,\, \mathrm{Q}\right)$ не превышает $\left\| x - x_0 \right\| \le a$, поэтому $\bar{x} \in \bar{B}(x_0)$ вместе с x. С учётом этого факта для $t \in \left[t_0,\, t_0 + H\right],\, x \in \bar{B}\left(x_0\right)$ получим оценку

$$\left\| \tilde{f}(t,x) \right\| \le M + a. \tag{1.39}$$

Действительно, $\left\| \tilde{f}\left(t,\, x\right) \right\| = \left\| f\left(t,\, \bar{x}\right) - \left(\left\| x - \bar{x} \right\| + \left(f\left(t,\, \bar{x}\right),\, e_x \right)_+ \right) e_x \right\| \le$

$\le \left\| f\left(t,\, \bar{x}\right) - \left(f\left(t,\, \bar{x}\right),\, e_x \right)_+ e_x \right\| + \left\| x - \bar{x} \right\|$.

Как мы отмечали выше $\left(f\left(t,\bar{x}\right), e_x \right)_+ e_x$ есть проекция $f\left(t,\bar{x}\right)$ на N_x, по теореме о разложении на ортогональные проекции из 1.2.5 $f\left(t,\, \bar{x}\right) - \left(f\left(t,\, \bar{x}\right),\, e_x \right)_+ e_x \in T_x$ и $\left\| f\left(t,\, \bar{x}\right) - \left(f\left(t,\, \bar{x}\right),\, e_x \right)_+ e_x \right\| \le \left\| f\left(t,\, \bar{x}\right) \right\|$, а поскольку $\bar{x} \in Q \cap B\left(x_0\right)$, получаем $\left\| f\left(t,\, \bar{x}\right) \right\| \le M$. Осталось заметить, что расстояние от точки x до её проекции $\bar{x}$ на множество Q не может превосходить расстояния от x до $x_0 \in Q$, а поскольку $\left\| x - x_0 \right\| \le a$, то получаем $\left\| x - \bar{x} \right\| \le a$.

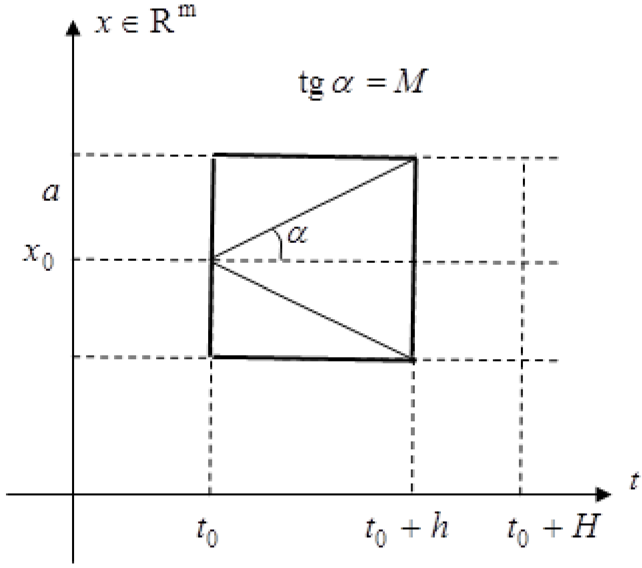


Рис. 21

Наконец с высотой $h = \min\left\{H, \dfrac{a}{M+a}\right\}$ построим цилиндр (“бочку”) $Z = \left[t_0,\ t_0+h\right] \times \bar{B}\left(x_0\right)$.

1.5.4. Ломаные Эйлера.

Разобьём промежуток $\left[t_0,\ t_0+h\right]$ на k равных частей ($k \in \mathrm{N}$) точками $t_{k,i}$ ($i = 0,\ \ldots,\ k$):

$h_k := h / k$, $t_{k,0} = t_0$, $\ldots$, $t_{k,i} = t_{k,i-1} + h_k$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Построим ломанную Эйлера $x_k(t)$ на отрезке $\left[t_0,\ t_0+h\right]$, положив $x_k(t_0) = x_0$, и в предположении, что ломанная уже построена на промежутке $\left[t_{k,0},\ t_{k,i-1}\right]$ продолжим её построение на очередном отрезке, определив для $t \in \left[t_{k,i-1},\ t_{k,i}\right]$

$$x_k(t) = x_k(t_{k,i-1}) + \tilde{f}(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1}))(t - t_{k,i-1}). \tag{1.40}$$

Построенная таким образом функция обладает следующими свойствами:

1) $\dot{x}_k(t) = \tilde{f}\left(t_{k,i-1}, x_k(t_{k,i-1})\right)$ для $t \in \left[t_{k,i-1},\ t_{k,i}\right]$;
2) $\left\|x_k(t') - x_k(t'')\right\| \le (M+a)\left|t' - t''\right|$ для $t_0 \le t' \le t'' \le t_0 + h$;
3) $x_k(t) \in \bar{B}(x_0)$ при $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Первое свойство непосредственно следует из (1.40). Второе из теоремы Лагранжа, свойства 1) и неравенства (1.39). Для $t_0 \le t' \le t'' \le t_0 + h$

$$\left\|x_k(t') - x_k(t'')\right\| \le \left\|\dot{x}_k\left(\xi\right)\right\| \cdot \left|t' - t''\right| = \left\|\tilde{f}\left(t_{k,\,i-1},\ x_k\left(t_{k,\,i-1}\right)\right)\right\| \cdot \left|t' - t''\right| \le (M+a)\left|t' - t''\right|,$$

здесь $\xi \in [t',\ t'']$ и $\xi \in \left[t_{k,i-1},\ t_{k,i}\right]$ при некотором i. Наконец третье свойство следует из второго

$$\|x_0 - x_k(t)\| = \|x_k(0) - x_k(t)\| \le (M+a)|t_0 - t| \le (M+a)\frac{a}{M+a} = a$$

Из этих свойств вытекает, что *последовательность* $(x_k(t))$ *равностепенно непрерывна и равномерно ограничена и, следовательно, из нее по теореме Арцела можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции* $x(t)$.

1.5.5. Предельный переход.

Перенумеровав, если требуется, члены сходящейся подпоследовательности, будем считать, что

$$x_k(t) \to x(t) \text{ при } k \to \infty \text{ равномерно на } [t_0,\ t_0 + h].$$

Нетрудно видеть, что предельная функция $x(t)$, как и ломаные Эйлера, удовлетворяет условию Липшица с константой $M + a$ (и, следовательно, абсолютно непрерывна). Покажем, что эта функция удовлетворяет включению (1.37).

Пусть в точке $\bar{t} \in [t_0, t_0 + h]$ существует $\dot{x}(\bar{t})$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что

$$\dot{x}(\bar{t}) \in \bar{F}^{\varepsilon}(\bar{t}, x(\bar{t}))$$

(черта над F означает замыкание). Тогда предельный переход при $\varepsilon \to 0$ даст (1.37). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы из $|t - \bar{t}| < \delta,\ \|x(t) - x(\bar{t})\| < (M + a + 1)\delta$ вытекало включение $F(t, x) \subset F^{\varepsilon}(\bar{t}, \bar{x})$. Пусть K таково, чтобы при $k \ge K$ было $h_k < \delta / 2$ и $\|x_k(t) - x(t)\| < \delta$ для любого $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Если $|t - \bar{t}| < \delta / 2$ и $k \ge K$, то ближайший к t слева узел $t_{k,\,i-1}$ ломаной $x_k(t)$ лежит в открытой δ–окрестности точки $\bar{t}$. Поэтому

$$\left\|x_k\left(t_{k,\,i-1}\right) - x(\bar{t})\right\| \le \left\|x_k\left(t_{k,\,i-1}\right) - x_k(\bar{t})\right\| + \left\|x_k(\bar{t}) - x(\bar{t})\right\| \le (M + a + 1)\delta,$$

$$\dot{x}_k(t) = \tilde{f}\left(t_{k,\,i-1}, x_k\left(t_{k,\,i-1}\right)\right) \in F\left(t_{k,\,i-1},\ x_k\left(t_{k,\,i-1}\right)\right) \subset F^{\varepsilon}(\bar{t},\ \bar{x}).$$

Воспользуемся равенством:

$$\frac{x_k(t) - x_k(\bar{t})}{t - \bar{t}} = \frac{1}{t - \bar{t}} \int_{\bar{t}}^{t} \dot{x}_k(s)\, ds.$$

Нетрудно видеть, что стоящее в правой части интегральное среднее принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества значений подынтегральной функции (интеграл в данном случае можно понимать как предел интегральных сумм Римана, т.е. с учетом множителя перед интегралом выпуклых комбинаций значений подынтегральной функции). Итак,

$$\frac{x_k(t)-x_k(\bar{t})}{t-\bar{t}} \in \bar{F}^{\varepsilon}(\bar{t}, \bar{x}).$$

Переходя к пределу сначала при $k \to \infty$, а затем при $t \to \bar{t}$, получаем требуемое:

$$\dot{x}(\bar{t}) \in \bar{F}^{\varepsilon}(\bar{t}, \bar{x}).$$

1.5.6. Разрешимость в исходном множестве.

Итак, функция $x(t)$, полученная как предел ломаных Эйлера, является решением задачи (1.37), (1.35) в Q_1. Докажем, что ее значения лежат в Q – это будет означать, что фактически найдено решение (1.34), (1.35).

Пусть на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset [t_0, t_0+h]$ $x(t) \notin Q$, обозначим $d(t) = \rho(x(t), Q) = \|x(t) - P(x(t), Q)\| = \|x(t) - \bar{x}(t)\|$. Покажем, что $d(t+\Delta t) < d(t)$, если $t \in (\alpha, \beta)$ и $\Delta t > 0$ достаточно мало. Действительно,

$$\begin{aligned}
& d^2(t+\Delta t) = \|x(t+\Delta t) - \bar{x}(t+\Delta t)\|^2 \le \|x(t+\Delta t) - \bar{x}(t)\|^2 = \\
& = \big(x(t+\Delta t) - \bar{x}(t), x(t+\Delta t) - \bar{x}(t)\big) = \\
& = \big(x(t+\Delta t) - x(t) + x(t) - \bar{x}(t), x(t+\Delta t) - x(t) + x(t) - \bar{x}(t)\big) = \\
& = \|x(t+\Delta t) - x(t)\|^2 + \|x(t) - \bar{x}(t)\|^2 + 2\big(x(t+\Delta t) - x(t), x(t) - \bar{x}(t)\big) = \\
& = o(\Delta t) + d^2(t) + 2\big(\tilde{f}(t, x(t))\Delta t, x(t) - \bar{x}(t)\big) = \\
& = o(\Delta t) + d^2(t) + 2\Big(f(t, \bar{x}(t)) - \big(f(t, \bar{x}(t)), e_x\big)_+ e_x - d(t)e_x, d(t)e_x\Big)\Delta t
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d^2(t+\Delta t) \le d^2(t)(1-2\Delta t) + o(\Delta t) < d^2(t).$$

Итак, всюду вне Q функция $d(t)$ является невозрастающей, из-за чего значения $x(t)$ не могут выйти из Q. Тем самым доказано существование решения рассматриваемой задачи (1.34), (1.35) на $[t_0, t_0+h]$.

1.5.7. Единственность решения.

Доказательство единственности решения задачи (1.34), (1.35) проведём в четыре этапа:

1) доказательство монотонности оператора N_x;

2) доказательство дифференциального неравенства $\frac{d}{dt}\left\|x(t)-\overline{x}(t)\right\|^2 \le 2L\left\|x(t)-\overline{x}(t)\right\|^2$ для решений $x(t),\ \overline{x}(t)$ включения $\dot{x}\in f(t,\ x)-N_x$;

3) доказательство леммы о линейном дифференциальном неравенстве;

4) получение оценки нормы разности решений включения, из которой как следствие вытекает единственность решения задачи Коши.

1) **Монотонность оператора N_x.**

Определение. Многозначный оператор $F:\ D(F)\subset \mathrm{R}^{\mathrm{m}}\to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ называется *монотонным*, если

$$\forall(x,\ \hat{x}\in D(F))\left[\left(F(x)-F(\hat{x}),\ x-\hat{x}\right)\ge 0\right], \text{ т.е.}$$

$$\forall\left(x,\ \hat{x}\in D(F),\ y\in F(x),\ \hat{y}\in F(\hat{x})\right)\left[\left(y-\hat{y},\ x-\hat{x}\right)\ge 0\right].$$

Утверждение. *Нормальный конус N_x в точке x к непустому выпуклому замкнутому множеству $Q\subset \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ является монотонной многозначной функцией переменной x.*

Действительно, для произвольных $x,\ \hat{x}\in Q$ и $y\in N_x,\ \hat{y}\in N_{\hat{x}}$ из определения нормального конуса имеем

$$\left(y-\hat{y},\ x-\hat{x}\right)=-\left(y,\ \hat{x}-x\right)-\left(\hat{y},\ x-\hat{x}\right)\ge 0.$$

2) **Дифференциальное неравенство для квадрата нормы разности решений.**

Утверждение. *Пусть $x(t),\ \hat{x}(t)$ – два решения дифференциального включения $\dot{x}\in f(t,\ x)-N_x$ на отрезке $[t_0,\ t_1]$, тогда почти всюду на этом отрезке с некоторой константой L справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|^2 \le 2L\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|^2 . \tag{1.41}$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим (абсолютно непрерывную) функцию $z(t)=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|^2$. Если в точке t она дифференцируема, то

$$\dot{z}(t)=2\left(x(t)-\hat{x}(t),\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)\right)\in 2\left(x(t)-\hat{x}(t), f\left(t,x(t)\right)-f\left(t,\hat{x}(t)\right)\right)-$$
$$-2\left(x(t)-\hat{x}(t),N_{x(t)}-N_{\hat{x}(t)}\right)\le 2\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|\cdot\left\|f\left(t,x(t)\right)-f\left(t,\hat{x}(t)\right)\right\|\le$$
$$\le 2L\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|^2=2Lz(t).$$

Здесь использовано условие Липшица функции $f(t,\, x)$ по второму аргументу для замкнутого множества, содержащего графики функций $x(t),\ \overline{x}(t)$ – для любого замкнутого ограниченного множества из локального условия Липшица вытекает глобальное.

3**) Лемма о линейном дифференциальном неравенстве.**

Утверждение. *Пусть абсолютно непрерывная функция z удовлетворяет почти всюду на отрезке $[t_0,\ t_1]$ дифференциальному неравенству*

$$\dot{z}(t)\le az(t), \tag{1.42}$$

тогда

$$z(t)\le z(t_0)e^{a(t-t_0)} \quad (t_0\le t\le t_1) \tag{1.43}$$

<u>Доказательство</u>. Из (1.42) следует, что

$$\dot{z}(t)=az(t)+b(t), \tag{1.44}$$

где функция $b(t)=\dot{z}(t)-az(t)$ суммируема и неположительна на $[t_0,\ t_1]$. Проверим, что функция

$$z_1(t)=z(t_0)e^{a(t-t_0)}+e^{at}\int_{t_0}^{t}e^{-as}b(s)ds$$

удовлетворяет уравнению (1.44):

$$\dot{z}_1(t)=z(t_0)ae^{a(t-t_0)}+ae^{at}\int_{t_0}^{t}e^{-as}b(s)ds+e^{at}e^{-at}b(t)=az_1(t)+b(t).$$

Более того, z_1 является единственным решением этого уравнения, принимающим в точке t_0 значение $z(t_0)$. Действительно, если z_2 – еще одно такое решение, то функция $w = z_1 - z_2$ абсолютно непрерывна, почти всюду удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} = aw \tag{1.45}$$

и принимает в точке t_0 нулевое значение. Поэтому

$$w(t) = a\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds\,.$$

Следовательно, функция w непрерывно дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) и удовлетворяет уравнению (1.45) *всюду*. Но в такой ситуации единственность решения задачи Коши следует из классической теории дифференциальных уравнений. Итак,

$$w(t) \equiv 0 \Rightarrow z_1(t) \equiv z_2(t) \equiv z(t) \equiv z(t_0)e^{a(t-t_0)} + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-as}b(s)\,ds\,.$$

Поскольку подынтегральная функция в последнем интеграле неположительна и $t \ge t_0$, окончательно получаем, что верно неравенство (1.43).

4**) Оценка нормы разности решений и следствие о единственности решения задачи Коши.**

В условиях теоремы 1.6.1 *норма разности любых решений* $x(t)$, $\overline{x}(t)$ *системы* (1.34), *определенных на отрезке* $[t_0,\ t_1]$, *допускает оценку*

$$\left\|x(t) - \overline{x}(t)\right\| \le e^{L(t-t_0)}\left\|x(t_0) - \overline{x}(t_0)\right\|, \tag{1.46}$$

где L *– константа из условия Липшица* (1.36) *на замкнутом множестве, содержащем графики функций* $x(t)$, $\overline{x}(t)$. *В частности, задача Коши* (1.34), (1.35) *на любом отрезке* $[t_0,\ t_1]$ *имеет не более одного решения.*

<u>Доказательство</u>. Из доказанного дифференциального неравенства (1.41) и леммы о линейном дифференциальном неравенстве вытекает

$$\|x(t)-\bar{x}(t)\|^2 \le e^{2L(t-t_0)}\|x(t_0)-\bar{x}(t_0)\|^2.$$

Отсюда непосредственно получается (1.46). Если $x(t_0)=\bar{x}(t_0)=x_0$, то в качестве следствия получается тождество $x(t)\equiv\bar{x}(t)$ (т.е. единственность *вправо* решения задачи Коши).

1.6. Колебания в СДН

В прикладных задачах часто возникает необходимость в исследовании периодических и близких к ним процессов. Рассмотрим это на примере известного электрического колебательного контура.

1.6.1. Вынужденные колебания.

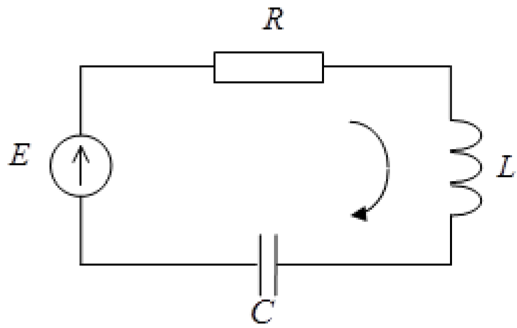


Рис. 22

Для контура, изображённого на рисунке 22, второй закон Кирхгофа запишем в виде $Ri+L\dfrac{di}{dt}+u=E(t)$ (здесь u – напряжение на конденсаторе C). Подставляя в него выражение тока i из уравнения элемента $C\dfrac{du}{dt}=i$, получим

$LC\dfrac{d^2u}{dt^2}+RC\dfrac{du}{dt}+u=E(t)$ или, разделив на произведение LC, –

$\ddot{u}+\dfrac{R}{L}\dot{u}+\dfrac{1}{LC}u=\dfrac{1}{LC}E(t)$. Вводя обозначения $\delta=\dfrac{R}{2L}$**,** $\omega^2=\dfrac{1}{LC}$ **(**$\delta\ge 0,\ \omega>0$**)**, запишем уравнение в виде

$$\ddot{u}+2\delta\dot{u}+\omega^2u=\omega^2E(t) \tag{1.47}$$

Число ω называют частотой свободных колебаний контура.

1.6.1.1. Анализ свободных колебаний

Положим $E(t)=0$ и найдём решение однородного уравнения

$$\ddot{u}+2\delta\dot{u}+\omega^2 u=0. \qquad (1.48)$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2+2\delta\lambda+\omega^2=0$ являются числа $\lambda_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega^2}$, поэтому функции $\varphi_1(t)=e^{\lambda_1 t}$ и $\varphi_2(t)=e^{\lambda_2 t}$ образуют фундаментальную систему решений при $\delta\neq\omega$ (1.48).

Рассмотрим варианты значений корней λ_1,λ_2:

1) $\delta>\omega$, тогда λ_1,λ_2 – вещественные, меньшие нуля, и все решения (1.48) стремятся к нулю при $t\to\infty$ (“затухающий режим”);

2) $\delta<\omega$, в этом случае λ_1,λ_2 – комплексно сопряжённые $\lambda_{1,2}=-\delta\pm i\sqrt{\omega^2-\delta^2}=:-\delta\pm i\bar{\omega}$, и при $\delta>0$ решения $e^{-\delta t}\cdot\left(C_1\cos\bar{\omega}t+C_2\sin\bar{\omega}t\right)=e^{-\delta t}\sqrt{C_1^2+C_2^2}\cos\left(\bar{\omega}t-\alpha\right)=:e^{-\delta t}A\cos\left(\bar{\omega}t-\alpha\right)$ совершая колебания, стремятся к нулю (“затухающий колебательный режим”), при $\delta=0$ решения (1.48) являются периодическими (“незатухающие колебания”). Здесь α определяется равенством $\cos\alpha=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$. Отметим, однако, что $\delta=0$ влечёт $R=0$ – практически невыполнимое условие;

3) $\delta=\omega$ (практически невыполнимое условие), и решения $e^{-\delta t}\left(C_1+C_2 t\right)$ сходятся к нулю (“затухающий режим”).

1.6.1.2. Вынужденные колебания

Пусть напряжение источника является периодической функцией $E(t)=U\cos\Omega t$ времени t (U и Ω – параметры), тогда уравнение (1.47) имеет вид

$$\ddot{u}+2\delta\dot{u}+\omega^2 u=\omega^2 U\cos\Omega t, \qquad (1.49)$$

и периодическая функция $u_{чн}=\dfrac{\omega^2 U}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\delta\Omega\right)^2}}\cos\left(\Omega t-\beta\right)$ – его частное решение для $\delta>0$ (“вынужденные колебания”), где β определяется равенством

$$\cos\beta=\frac{\omega^2-\Omega^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\delta\Omega\right)^2}}.$$

1.6.1.3. Переходный процесс

Для случая $0<\delta<\omega$ общее решение (1.49) можно записать в виде

$$u_{он}=e^{-\delta t}A\cos\left(\bar{\omega}t-\alpha\right)+\frac{\omega^2 U}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\delta\Omega\right)^2}}\cos\left(\Omega t-\beta\right).$$

Как видим, все решения (1.49) асимптотически приближается к вынужденным колебаниям.

1.6.1.4. Резонанс токов

Для рассматриваемого нами колебательного контура интересен вопрос, при каком значении параметра ёмкости C амплитуда вынужденных колебаний тока максимальна. Рассматривая амплитуду тока

$$i_{чн}=C\dot{u}_{чн}=-\frac{C\omega^2 U\Omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\left(2\delta\Omega\right)^2}}\sin\left(\Omega t-\beta\right)=$$

$$=\frac{U\Omega}{L\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC}-\Omega^2\right)^2+\left(2\dfrac{R}{2L}\Omega\right)^2}}\sin\left(\Omega t-\beta\right)$$

в колебательном контуре для вынужденных колебаний, как функцию параметра C

$$A\left(C\right)=\frac{U\Omega}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{C}-L\Omega^2\right)^2+\left(R\Omega\right)^2}}\ ,$$

нетрудно видеть, что её максимальное значение достигается при $C=\dfrac{1}{L\Omega^2}$ (так как $A'(C)=\dfrac{U\Omega}{C^2\left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{C}-L\Omega^2\right)^2+(R\Omega)^2}\right)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{C}-L\Omega^2\right)$), т.е. при совпадении частот свободного и вынужденного колебаний $\omega^2=\Omega^2$.

1.6.2. Существование замкнутой траектории у двумерной автономной системы.

Исследуем двумерную автономную СДН

$$\dot{x}=\tau_x f(x) \tag{1.50}$$

с выпуклым замкнутым множеством $Q\in \mathrm{R}^2$, имеющим непустую внутренность ($\operatorname{Int} Q\neq\varnothing$), и изучим для неё вопрос существования, единственности и устойчивости замкнутой траектории [x24]. В этом пункте доказывается обобщение известной теоремы Пуанкаре – Бендиксона [Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970. — 720 с.] о существовании замкнутой траектории. В следующем пункте 1.6.3. описано одно достаточное условие, при выполнении которого гарантируется существование единственного орбитально устойчивого в усиленном смысле цикла.

Определение. *Траекторией системы* (1.50) будем называть множество точек в R^2, которое является множеством значений какого-либо решения этой системы.

Определение. *Замкнутой траекторией* будем называть траекторию, отвечающую какому-нибудь решению φ системы (1.50), определенному на отрезке $[0,\ T]$ и такому, что $\varphi(0)=\varphi(T)$ и $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$ при $0\le t_1<t_2<T$.

Определение. Как обычно [x92? или книга Хартман Ф.], точку $p \in \mathrm{R}^2$ будем называть *ω-предельной точкой решения* ψ, если существует последовательность $t_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, такая, что $\psi(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} p$.

Определение. Множество всех ω-предельных точек решения ψ будем называть его *ω-предельным множеством* и обозначать Ω_ψ .

Теорема о существовании замкнутой траектории. *Пусть выполнены условия:*

(а) $f : Q \to \mathrm{R}^2$ — *непрерывная функция*;

(б) *система* (1.50) *имеет на* $[0, +\infty)$ *ограниченное решение* φ, *ω-предельное множество* Ω_φ *которого не содержит стационарных точек, то есть если* $p \in \Omega_\varphi$, *то* $f(p)$ *не принадлежит* N_p *— нормальному конусу к множеству Q в точке* p (*см.* 1.2.3);

тогда система (1.50) *имеет замкнутую траекторию.*

Доказательство этой теоремы занимает весь пункт 1.6.2 и будет разбито на несколько этапов (подпунктов). В 1.6.2.1 строится функция $\overline{\varphi}$, содержащаяся в ω -предельном множестве Ω_φ решения φ, как равномерный на каждом отрезке предел решений системы. Затем доказывается замкнутость множества решений системы (см. 1.6.2.2), из чего следует, что $\overline{\varphi}$ является решением (1.50). Замкнутость траектории решения $\overline{\varphi}$ доказывается с помощью, так называемой, трансверсали — отрезка, который будет сначала построен для произвольной ω-предельной точки $p \in \Omega_\varphi$, а потом доказано, что $\overline{\varphi}$ пересекает его только в точке p бесконечное число раз. А поскольку траектория $\overline{\varphi}$ состоит из ω-предельных точек φ, то это означает, что траектория $\overline{\varphi}$ совпадает $\Omega_{\overline{\varphi}}$ и является замкнутой [Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.].

1.6.2.1. Построение функции $\bar{\varphi}$

Пусть $p_0 \in \Omega_\varphi$ (очевидно, $\Omega_\varphi \neq \varnothing$ и является ограниченным множеством), и последовательность (t_n) такова, что $t_n \to +\infty$ и $\varphi(t_n) \to p_0$. Определим последовательность функций $\varphi_n(t) = \varphi(t + t_n)$. Тогда $\varphi_n(0) = \varphi(t_n) \to p_0$. Построенная последовательность равномерно ограничена в силу ограниченности $\varphi(t)$ и равностепенно непрерывна в силу ограниченности на ограниченных множествах функции $f(x)$, а следовательно, и правой части системы (1.50) $\tau_x f(x)$. Таким образом, для последовательности (φ_n) выполнены условия леммы Арцела, согласно которой для произвольного $T > 0$ из (φ_n) можно выделить равномерно сходящуюся на конечном промежутке $[0,\ T]$ подпоследовательность функций. Выделим из (φ_n) подпоследовательность равномерно сходящуюся на отрезке $[0,\ 1]$ и упорядоченное множество номеров её элементов обозначим через A_1. Из выделенной подпоследовательности выберем в свою очередь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,\ 2]$, и упорядоченное множество номеров её элементов обозначим через A_2. Действуя далее аналогичным образом построим последовательность бесконечных упорядоченных подмножеств натуральных чисел $A_k \subset \mathrm{N}$ $(k \in \mathrm{N})$, удовлетворяющую условиям: $A_{k+1} \subset A_k$; последовательность функций $(\varphi_n :\ n \in A_k)$ равномерно сходится на отрезке $[0; k]$. Обозначим через n_k k-тый (в порядке возрастания) элемент множества A_k. Тогда последовательность $(\varphi_{n_k} : k \in \mathrm{N})$ сходится на $[0,\ +\infty)$ к некоторой функции $\bar{\varphi}$, причем равномерно на каждом отрезке $[0,\ m]$ $(m \in \mathrm{N})$. Нетрудно видеть, что траектория $\bar{\varphi}$ лежит в Ω_φ и $\bar{\varphi}(0) = p_0$. Это означает, в частности, что $\bar{\varphi}$ ограничена и её ω-предельное множество $\Omega_{\bar{\varphi}}$ не пусто и включено в Ω_φ.

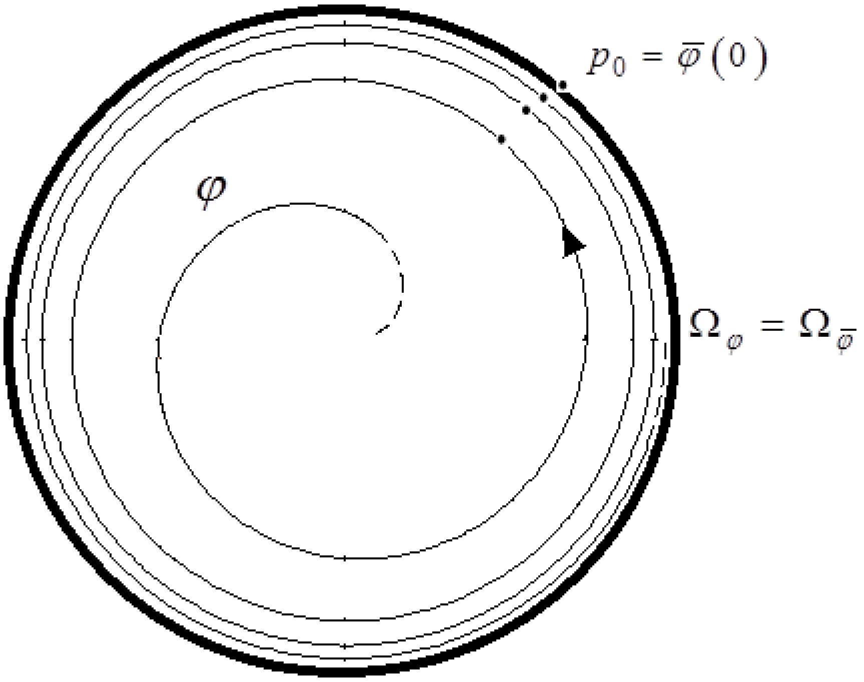


Рис. 23.

На рисунке точками обозначены первые три элемента последовательности $\varphi(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} p_0$. Начиная от каждой точки $\varphi(t_n)$ влево вверх уходит траектория $\varphi_n(t) = \varphi(t + t_n)$ при $t \geq 0$. Траектория $\overline{\varphi}$ на изображённом примере совпадает с $\Omega_{\overline{\varphi}} = \Omega_{\varphi}$. При $t \to \infty$ точка $\overline{\varphi}(t)$ вращается по окружности $\Omega_{\overline{\varphi}}$ против часовой стрелки.

Для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$ определим $Cx := (-x_2,\, x_1)$ — при стандартной ориентации осей координат на плоскости это есть вектор, полученный из x поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

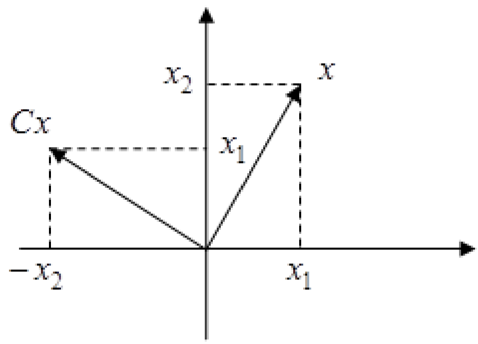


Рис. 24

Определение. *Трансверсалью* системы (1.50) называется отрезок $[a,\ b]\subset Q$, во всех точках x которого скалярное произведение $\left(C(b-a),\ \tau_x f(x)\right)$ сохраняет знак.

Примеры.

а) Для постоянной вектор-функции $f(x)=(c_1,\ c_2)$ трансверсалью будет являться любой отрезок, расположенный во внутренности Q.

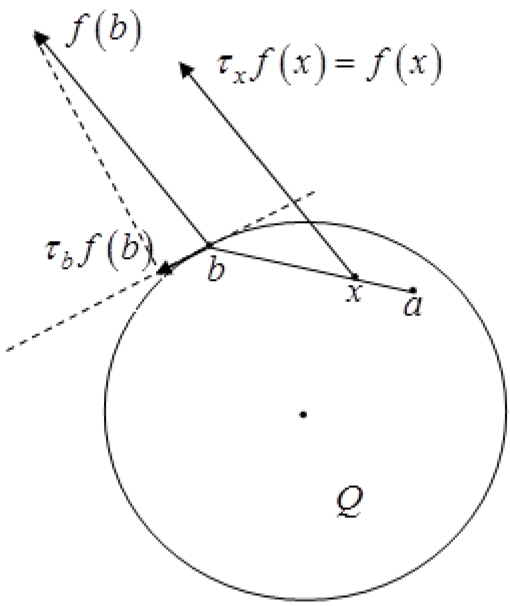


Рис. ??

На рисунке отрезок $[a,\ b]$ не является трансверсалью, так как в точке b, расположенной на границе множества Q, проекция $\tau f(x)$меняет остроту угла с вектором $C(b-a)$, так $\left(C(b-a),\ \tau_x f(x)\right)<0$ для всех $x\in[a,\ b)$, а $\left(C(b-a),\ \tau_b f(b)\right)>0$.

б) Пусть $f(x)=Cx$, и $Q=B[0,\ 1]$ — круг с центром в $(0,\ 0)$ радиуса 1. Любой отрезок, совпадающий по расположению с радиусом $B[0,\ 1]$ и не содержащий точку $(0,\ 0)$ в качестве своей внутренней точки, является трансверсалью (но не только указанные отрезки в этом примере являются трансверсалью).

1.6.2.2. Лемма о замкнутости множества решений

Решения системы (1.50) *образуют замкнутое множество в топологии равномерной сходимости на отрезках, то есть если последовательность решений* $x_n(t)$ *системы* (1.50), *определенных на промежутке* J, *равномерно сходится к некоторой функции* $x(t)$ *на каждом отрезке, включенном в* J, *то* $x(t)$ *является решением* (1.50).

Доказательство. Уравнение (1.50) эквивалентно включению (см. 1.2.8)

$$f(x) \in \dot{x} + N_x \tag{1.51}$$

с максимальным монотонным оператором $N(Q)$. Монотонность оператора диодной нелинейности $N(Q): x \to N_x$ была показана в 1.5.7, а максимальность его следует из того факта, что $N(Q)$ определён нами для любой точки $z \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ (см. 1.2.3 и 1.4.1) и значением его является конус, содержащий нулевую точку. Поэтому образ оператора $I + N(Q)$ накрывают всё пространство R^{m}, что по теореме Минти эквивалентно максимальности монотонного оператора (невозможности расширения графика оператора с сохранением его монотонности) [Brezis H. Operaterus maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. — Amsterdam-London-New York: Noth-Holland, 1973., стр.22].

Очевидно,

$$b_n(t) \in \dot{x}_n(t) + N_{x_n(t)}, \text{ где } b_n(t) := f(x_n(t)). \tag{1.52}$$

Заметим, что на любом отрезке $\Delta \subset J$ мы имеем равномерную сходимость $b_n(t) \to b(t) := f(x(t))$. Рассмотрим включение

$$b(t) \in \dot{y} + N_y \tag{1.53}$$

с начальным условием $y(t_0) = x(t_0)$, где t_0 — произвольная точка промежутка J. У данной задачи на $J \cap [t_0, +\infty)$ существует единственное решение $y = y(t)$ [Brezis H. Operaterus maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert. — Amsterdam-London-New York: Noth-Holland, 1973., Prop 3.13, с. 106].

$$b_n(t)-b(t)\in \dot{x}_n(t)-\dot{y}(t)+N_{x_n(t)}-N_{y(t)}.$$

Найдутся $z(t)\in N_{x_n(t)}$ и $u(t)\in N_{y(t)}$, для которых выполняются равенства $b_n(t)=\dot{x}_n(t)+z(t)$, $b(t)=\dot{y}(t)+u(t)$. Вычтем из первого равенства второе $b_n(t)-b(t)=\dot{x}_n(t)-\dot{y}(t)+z(t)-u(t)$ и скалярно умножим на $x_n(t)-y(t)$

$$(\dot{x}_n-\dot{y},\ x_n-y)+(z-u,\ x_n-y)=(b_n-b,\ x_n-y).$$

Второе слагаемое $(z-u,\ x_n-y)$ неотрицательно в силу монотонности $N(Q)$, поэтому:

$$\frac{1}{2}\left(\|x_n-y\|^2\right)'\le (b_n(t)-b(t),\ x_n-y)\le k(\Delta,\ n)\|x_n-y\|,$$

где $k(\Delta,\ n):=\max_{t\in\Delta}\|b_n(t)-b(t)\|\underset{n\to\infty}{\to} 0$. Получаем дифференциальное неравенство вида $\dot{\psi}\le 2k(\Delta,\ n)\sqrt{\psi}$. В силу теоремы о дифференциальном неравенстве [x81, с. 16,17] $\|x_n-y\|\le\|x_n(t_0)-x(t_0)\|+k(\Delta,\ n)(t-t_0)$. Следовательно, $x_n\to y$ на Δ. Таким образом, $x=y$; тогда x является решением включения (1.53) и, следовательно, решением (1.51) на $J\bigcap[t_0,\ +\infty)$,а ввиду произвольности t_0, на всем промежутке J.

Лемма доказана. Из неё в частности следует, что $\bar{\varphi}$ является решением (1.50).

1.6.2.3. Геометрическая трактовка полунепрерывности сверху оператора N_x

Утверждение. *Оператор N_x является полунепрерывным сверху в любой точке $x_0\in\partial Q$ в следующем смысле: для любого $\alpha>0$ существует окрестность V точки x_0, такая, что угол между любым вектором из N_x $(x\in V\bigcap\partial Q)$ и ближайшим к нему вектором из N_{x_0} меньше α.*

Доказательство. Предположим противное: для некоторого $x_0 \in \partial Q$ и $\alpha > 0$ не найдется такой окрестности. Тогда для любого натурального n существуют $x_n \in \partial Q$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ и $y_n \in N_{x_n}$, $\|y_n\| = 1$ такие, что угол между y_n и ближайшим к нему вектором из N_{x_0} не меньше α. При этом без ограничения общности можно считать, что последовательность (y_n) сходится к некоторому y_0. Угол между y_0 и ближайшим к нему вектором из N_{x_0} также не меньше α, следовательно, $y_0 \notin N_{x_0}$. Это противоречит замкнутости графика максимального монотонного оператора $N(Q)$ [Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988., с.360,369-371]. Утверждение доказано.

1.6.2.4. Невозможность значениям непрерывной функции скачком войти внутрь касательного конуса

Утверждение. *Если* $f(p) \in \operatorname{Int} T_p$, *то* $f(x) \in \operatorname{Int} T_x$ *для всех* $x \in Q$ *из некоторой окрестности точки* p.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} p$, такая, что $f(x_n) \notin \operatorname{Int} T_{x_n}$. Нетрудно видеть из определения касательного конуса (см. 1.2.6), что тогда существует последовательность векторов $y_n \in N_{x_n}$ и $\|y_n\| = 1$, удовлетворяющих неравенству $\left(f(x_n), y_n\right) \geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что y_n сходится к некоторому y, причем $y \in N_p$ в силу замкнутости графика оператора $N(Q)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство $\left(f(p), y\right) \geq 0$, которое противоречит условию $f(p) \in \operatorname{Int} T_p$. Утверждение доказано.

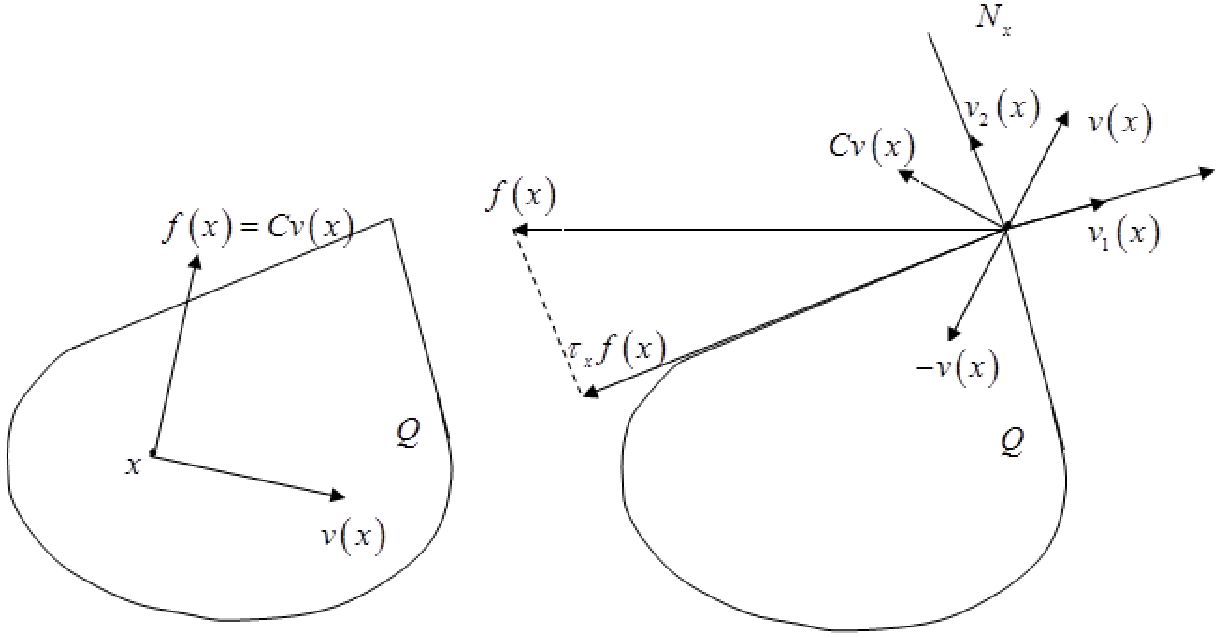
1.6.2.5. Терминология и обозначения

Будем использовать следующие термины и обозначения. Для ненулевых векторов u, $w \in \mathrm{R}^2$ выражение “v *лежит между* u и w” будет означать, что v есть нулевой вектор или при повороте вектора u против часовой стрелки до направления вектора w он пройдет через направление вектора v; *угол* $\underset{\to}{\angle}(u,\ w)$ — множество векторов v, лежащих между u и w; $\angle(u,\ w)$ — радианная мера угла $\underset{\to}{\angle}(u,\ w)$.

Для точки $x \in \partial Q$ будем обозначать через $v_1(x)$, $v_2(x)$ единичные векторы граней (сторон) конуса N_x, такие, что все вектора из N_x расположены между $v_1(x)$ и $v_2(x)$. Возможно, $v_1(x) = v_2(x)$, но в любом случае $v_1(x) \neq -v_2(x)$, так как множество Q имеет непустую внутренность.

Для ненулевого векторов $u \in \mathrm{R}^2$ выражение "v *лежит между* N_x и u "("v *лежит между* u и N_x") будет означать, что v лежит между вектором $v_2(x)$ и u (v лежит между вектором u и $v_1(x)$).

Если $x \in \operatorname{Int} Q$ (рис.25 а)), то положим $v(x) = C^{-1} f(x)$. При этом $\left(f(x),\ Cv(x)\right) = \left(f(x),\ f(x)\right) = \|f(x)\|^2 \geq 0$. В случае $x \in \partial Q$ (рис.25 б)) положим $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$. Нетрудно видеть, что $v(x) \in N_x$, а $-v(x) \in \operatorname{Int} T_x$ и является биссектрисой угла касательного конуса T_x также, как $v(x)$ — биссектриса угла-нормального конуса N_x.



a) b)

Рис. 25

1.6.2.6. Свойство граничной ω-предельной точки

Лемма. *Если* p — ω*-предельная точка решения системы* (1.50) *и* $p \in \partial Q$*, то* $f(p) \notin \operatorname{Int} T_p$.

Доказательство. Поскольку $p \in \partial Q$, то векторы $v_1(p)$, $v_2(p)$ отличны от нулевого и $v = v_1(p) + v_2(p)$, $-v$ тоже не являются нулевыми (см. 1.6.2.5). Отметим, что для всех $x \in T_p$ в этом случае выполняется неравенство $(x, -v) \geq 0$, так как $(-v)$ — биссектриса угла T_p, не превосходящего π.

Предположим противное, что $f(p) \in \operatorname{Int} T_p$ и, следовательно, отлично от нуля. Рассмотрим функцию $V(x, z) = \left(x - p, \dfrac{z}{\|z\|}\right)$, характеризующую проекцию удалённости x от p на вектор z. По утверждению 1.6.2.4. в точках x, близких к p, $f(x) \in \operatorname{Int} T_x \subset T_x$, следовательно, для них $\tau_x f(x) = f(x)$. Кроме того из непрерывности f следует, что для $\varepsilon > 0$, при котором число $a := (f(p), -v) - \varepsilon > 0$, найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in Q \cap B[p, \delta]$ и $z \in B[-v, \delta]$ выполнено не только $f(x) \in \operatorname{Int} T_x$, но и неравенство $(f(x), z) > a$. Поэтому для производной функций $V(x(t), z)$ по траекториям решений $x(t)$ (1.50) со значениями из $Q \cap B[p, \delta]$ при любом фиксированном $z \in B[-v, \delta]$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} V(x(t), z) = (\dot{x}(t), z) = (f(x(t)), z) > a. \tag{1.54}$$

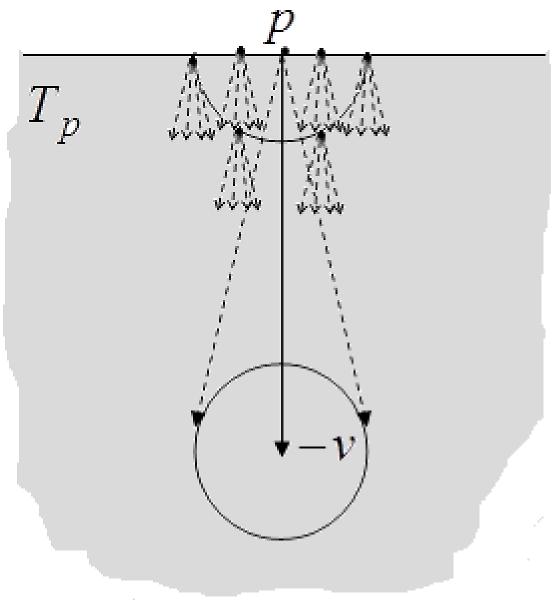


Рис. 26

Таким образом, множество $Q \bigcap B[p,\ \delta]$ является окрестностью точки p в Q, обладающей следующим свойством. Если точка решения $x(t)$ находится в этой окрестности, то скорость проекции её удаления $(x(t)-p)$ от p на произвольный вектор из окрестности $(-v)$ имеет значение, не меньшее положительного числа a. Поэтому ни одна траектория решения системы (1.50) не может войти в эту окрестность извне и любая траектория, начинающаяся в ней, обязательно выходит из этого множества. Это противоречит тому, что p есть ω-предельная точка. Лемма доказана.

1.6.2.7. Расположение векторов $f(p)$, $\tau_p f(p)$ и Cv

Лемма. *Для ω-предельной точки* p *решения φ системы (1.50) величина* $q := (\tau_p f(p),\ Cv)$ *имеет тот же знак, что и* $(f(p),\ Cv)$.

Здесь и далее $v := v(p)$.

<u>Доказательство</u>. Для $p \in \Omega_\varphi$ в силу условия **(б)** $f(p) \neq 0$ и при $p \in \operatorname{Int} Q$ $(f(p),\ Cv) = \|f(p)\|^2 > 0$. Если $p \in \partial Q$, то в силу условия **(б)** $f(p)$ не только отличен от нуля, но и не направлен по лучу v. В лемме 1.6.2.6 было показано, что

этот вектор не может идти и по лучу $-v$, поскольку $-v \in \operatorname{Int} T_p$. Следовательно, в любом случае $\left(f(p),\ Cv\right) \neq 0$.

Для $p \in \partial Q$ рассмотрим случай, когда

$$\left(f(p),\ Cv\right) > 0 \tag{1.55}$$

При этом вектор $f(p)$, а вместе с ним и $\tau_p f(p)$, находятся между $v_2(p),\ -v$. Следовательно, $\tau_p f(p)$ лежит между v и $-v$, не совпадая ни с одним из этих векторов. Это означает, что $q > 0$.

Если для $p \in \partial Q$

$$\left(f(p),\ Cv\right) < 0, \tag{1.56}$$

то $f(p)$ и $\tau_p f(p)$, находятся между $-v,\ v_1(p)$ и, следовательно, между $-v$ и v. Отсюда следует, что $q < 0$. Лемма доказана.

1.6.2.8. Построение трансверсали

Лемма. *Для* ω*-предельной точки* p *решения* φ *системы* (1.50) *существуют такие числа* $r > 0$ *и* $a > 0$, *что если* $x \in Q$ *и* $\|x - p\| < r$, *то* $\left(\tau_x f(x),\ Cv\right)q > a$. *В частности, отрезок* $L := \left\{p + sv \in Q:\ s \in \mathrm{R} \wedge \|sv\| \leq r\right\}$ *является трансверсалью системы* (1.50).

Напомним, что в 1.6.2.7 мы определили $q = \left(\tau_p f(p),\ Cv\right)$.

Доказательство. В предположении противного найдётся сходящаяся к p последовательность точек x_k, для которых $\left(\tau_{x_k} f(x_k),\ Cv\right)q < \frac{1}{k}$. При достаточно больших k точки x_k лежат на ∂Q. Действительно, если бы для бесконечного множества M номеров k было $x_k \in \operatorname{Int} Q$, то мы получили бы

$$\left(f(p),\ Cv\right)q = q \cdot \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in M}} \left(f(x_k),\ Cv\right) = q \cdot \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in M}} \left(\tau_{x_k} f(x_k),\ Cv\right) = \left(\tau_p f(p),\ Cv\right)q \leq 0,$$ что

противоречит лемме 1.6.2.7.

Будем считать, что $x_k \in \partial Q$ при всех k. Очевидно, что и $p \in \partial Q$. Рассмотрим случай, когда выполнено неравенство $\left(f(p),\ Cv\right) > 0$ и, следовательно, $q > 0$ по 1.6.2.7. Тогда $\left(\tau_{x_k} f(x_k),\ Cv\right)q = \left(C^{-1}\tau_{x_k} f(x_k),\ v\right)q = (\mu_k,\ v)q < \dfrac{1}{k}$, где $\mu_k \in N_{x_k}$. Последовательность (μ_k) ограничена, поэтому можно считать, что она сходится к некоторому μ. В силу замкнутости графика $N(Q)$ вектор $\mu \in N_p$, и $(\mu,\ v) = \lim\limits_{k\to\infty}(\mu_k,\ v) \le 0$. Если $\mu \ne 0$, то, поскольку v направлен по биссектрисе конуса N_p, это означает, что $\angle n_1 n_2 \ge \pi$, но это невозможно ввиду условия непустоты $\operatorname{Int} Q$. Следовательно, $\mu = 0$. Это значит, что $\left\|\tau_{x_k} f(x_k)\right\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Заметим, что $f(x_k) - \tau_{x_k} f(x_k) \in N_{x_k}$. По свойству замкнутости графика $N(Q)$ получаем $f(p) \in N_p$. Получаем противоречие с условием **(б)**. Итак, при $\left(f(p),\ Cv\right) > 0$ мы пришли к противоречию.

Предположим, выполнено $\left(f(p),\ Cv\right) < 0$ и, следовательно, $q < 0$. Тогда $\left(\tau_{x_k} f(x_k),\ Cv\right)q = \left(C\tau_{x_k} f(x_k),\ -v\right)q = (\mu_k,\ v)(-q) < \dfrac{1}{k}$, где $\mu_k \in N_{x_k}$. Отсюда, как и в предыдущем случае, получается противоречие. Лемма доказана.

Зафиксируем точку $p \in \Omega_\varphi$ и построенную для неё трансверсаль $L = \left\{p + sv \in Q:\ s \in \mathrm{R} \wedge \|sv\| \le r\right\}$ и определим $\tilde{L} := \left\{p + sv \in Q:\ s \in \mathrm{R} \wedge \|sv\| < r\right\}$ для формулировки и доказательства утверждений лемм 1.6.2.9 и 1.6.2.10.

1.6.2.9. О пересечении трансверсали траекториями решений φ и $\bar{\varphi}$

Лемма. *Пусть* $\bar{p} \in \Omega_\varphi \cap \tilde{L}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\psi = \varphi$ *или* $\psi = \bar{\varphi}$. *Тогда существуют* $T > 0$ *и* $\delta > 0$, *такие, что если* $\left\|\psi(t_1) - \bar{p}\right\| < \delta$ *и отрезок* $\left[t_1 - T,\ t_1 + T\right]$ *лежит в области определения решения* ψ, *то*

$$\exists\left(t_2 \in \left[t_1 - T,\ t_1 + T\right]\right)\left[\psi(t_2) \in L \wedge \left\|\psi(t_2) - \bar{p}\right\| < \varepsilon\right].$$

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\bar{p} \in \tilde{L}$, расстояние между $\bar{p}$ и p меньше r. Выберем $\varepsilon_1 \in (0,\ \varepsilon]$ так, чтобы выполнялось включение $B(\bar{p},\ \varepsilon_1) = \left\{ x \in \mathrm{R}^2 :\ \|x - \bar{p}\| < \varepsilon_1 \right\} \subset B(p,\ r)$. Положим $H := \max\limits_{x \in B(\bar{p},\ \varepsilon_1) \cap Q} \left\{ \| f(x) \| \right\}$ и $T := \dfrac{\varepsilon_1}{H}$. Если $0 < \delta < \varepsilon_1$ и

$$\|\psi(t_1) - \bar{p}\| < \delta, \tag{1.57}$$

то

$$\|\psi(t) - \bar{p}\| < \varepsilon_1 \text{ при } |t - t_1| \le T_1 := \frac{\varepsilon_1 - \delta}{H} \tag{1.58}$$

Действительно,

$$\|\psi(t) - \bar{p}\| = \left\| \psi(t_1) + \int_{t_1}^{t} \dot{\psi}(s)\,ds - \bar{p} \right\| \le \|\psi(t_1) - \bar{p}\| + \left| \int_{t_1}^{t} \left\| \tau_{\psi(s)} f\left[\psi(s)\right] \right\| ds \right| < \delta + H|t - t_1| \le$$
$$\delta + HT_1 = \varepsilon_1$$

Рассмотрим функцию $w(t) = \left(\psi(t) - \bar{p},\ Cv\right)$. Покажем, что существует $t_2 \in [t_1 - T_1,\ t_1 + T_1] \subset [t_1 - T,\ t_1 + T]$ такое, что $w(t_2) = 0$ (то есть $\psi(t_2) \in L$); при этом неравенство $\|\psi(t_2) - \bar{p}\| < \varepsilon$ будет вытекать из (1.58).

Заметим, что при выполнении (1.57) справедливо неравенство $|w(t_1)q| \le \delta \|v\| \cdot |q|$ ($q = \left(\tau_p f(p),\ Cv\right)$ см. 1.6.2.7). Пусть $w(t_1)q > 0$, тогда

$$w(t_1 - T_1)q = w(t_1)q + \left[w(t_1 - T_1) - w(t_1)\right]q \le \delta\|v\| \cdot |q| + \int_{t_1}^{t_1 - T_1} \left(\dot{\psi}(s),\ Cv\right) q\,ds =$$
$$= \delta\|v\| \cdot |q| - \int_{t_1 - T_1}^{t_1} \left(\tau_{\psi(s)} f\left[\psi(s)\right],\ Cv\right) q\,ds \le \delta\|v\| \cdot |q| - T_1 a$$

$\left(\left(\tau_{\psi(s)} f\left(\psi(s)\right), Cv\right)q > a$ см. лемму 1.6.2.8). Выберем δ так, чтобы

$w(t_1 - T_1)q \le \delta\|v\|q - T_1 a \le 0$. Из последнего неравенства и $T_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - \delta}{H}$ (см. (1.58))

$\delta H\|v\| \cdot |q| \le HT_1 a = \varepsilon_1 a - \delta a$, откуда

$$\delta \le \frac{\varepsilon_1 a}{H\|v\| \cdot |q| + a}, \tag{1.59}$$

при этом нет противоречия с ранее введённым ограничением $0 < \delta < \varepsilon_1$.

Итак, при выборе $0 < \delta \le \dfrac{\varepsilon_1 a}{H\|v\| \cdot |q| + a}$ на концах отрезка $[t_1 - T_1, t_1]$ непрерывная функция $w(t)q$ имеет разные знаки. Следовательно, на этом отрезке существует искомая точка t_2.

При $w(t_1)q < 0$ аналогично доказывается существование точки t_2 на отрезке $[t_1, t_1 + T_1]$. Лемма доказана. Из неё следует, что траектория ψ бесконечное число раз пересекает трансверсаль L.

1.6.2.10. О пересечении Ω_φ с трансверсалью

Лемма. *Если решение* φ *системы* (1.50) *не является замкнутой траекторией, то* $\tilde{L}$ *не содержит точек множества* Ω_φ*, отличных от* p.

Доказательство. Из леммы 1.6.2.9 следует, что множество $\{t:\ \varphi(t) \in L\}$ не пусто. Заметим, что оно дискретно, так как функция $u(x) = (x - p,\ Cv)q$ (см. 1.6.2.7 $q = \left(\tau_p f(p),\ Cv\right)$, Cv ортогонален L по построению трансверсали) строго возрастает на траектории решения φ в r-окрестности p, так как с учётом утверждения леммы 1.6.2.8 $u'(\varphi(t)) = (\dot{\varphi}(t),\ Cv)q = \left(\tau_{\varphi(t)} f(\varphi(t)),\ Cv\right)q > a > 0$ при $\|\varphi(t) - p\| < r$, и равна нулю на трансверсали. Единственной точкой сгущения множества $\{t:\ \varphi(t) \in L\}$ является $+\infty$, поскольку конечная точка сгущения была бы не изолированным элементом этого множества, и это противоречило бы неравенству $u'(\varphi(t)) > a$. Пронумеруем все элементы множества в порядке возрастания t — таким образом, построим монотонную последовательность $t_n \to \infty$ и соответствующую последовательность $\varphi(t_n) \in L$. Все точки $\varphi(t_n)$ различны, поскольку по предположению леммы траектория φ не является замкнутой. Определим положительное направление на трансверсали с помощью вектора $\varphi(t_2) - \varphi(t_1)$. Покажем методом математической индукции, что последовательность $\varphi(t_n)$ возрастает в смысле введенного направления, то есть $\varphi(t_i) < \varphi(t_{i+1})$ для всех i.

Для $i = 1$ это справедливо по определению. Пусть это верно для всех $i \le m$. Докажем, что неравенство справедливо и для $i = m+1$. Предположим противное, и пусть $(\varphi(t_k),\ \varphi(t_{k+1}))$ — интервал, содержащий $\varphi(t_{m+2})$ с $k \le m$. Пусть Γ — кривая, составленная из дуги траектории φ при $t \in [t_k,\ t_{k+1}]$ и отрезка $[\varphi(t_k),\ \varphi(t_{k+1})]$. Ввиду предположения о не замкнутости траектории φ это есть жорданова кривая (топологический образ плоской окружности при некотором непрерывном отображении). По теореме Жордана дополнение Γ до всей плоскости состоит из двух связных компонент — ограниченной Δ_1 и неограниченной Δ_2. Для каждой из них Γ является границей. Ограниченная компонента называется внутренней, неограниченная — внешней (см. [Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.], стр.181).

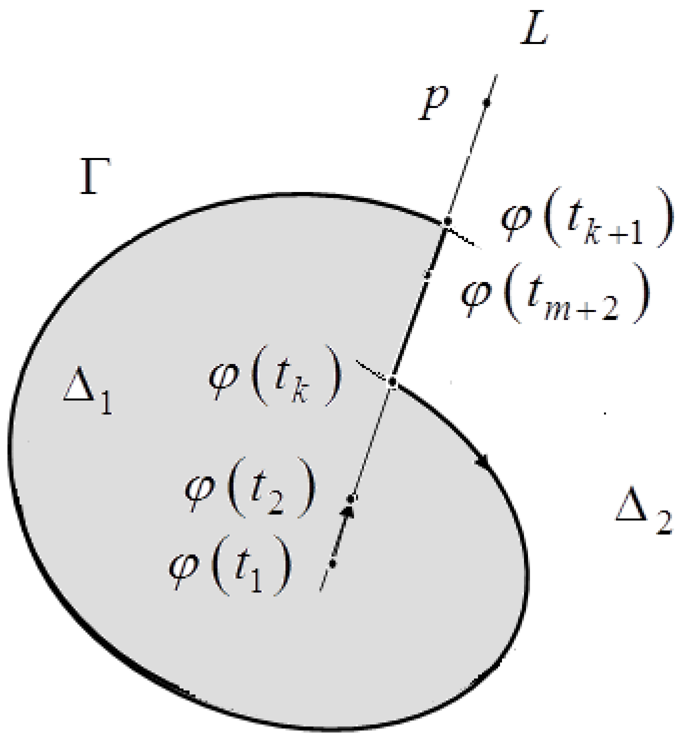


Рис. 27

Пусть $\xi \in \left(\varphi(t_k),\ \varphi(t_{k+1})\right)$. Докажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество $M_1 = \left\{x \in \mathrm{R}^2:\ u(x) > 0 \wedge \rho\left(x, \left[\varphi(t_{k+1}),\ \xi\right]\right) < \varepsilon\right\}$ целиком лежит в одной из компонент Δ_1, Δ_2. Достаточно выбрать ε так, чтобы указанное множество не содержало точек кривой $\left\{\varphi(t):\ t_k \le t \le t_{k+1}\right\}$. Если такого $\varepsilon > 0$ не существует, то найдется последовательность чисел $t_k \le s_j \le t_{k+1}$, такая, что $u\left(\varphi\left(s_j\right)\right) > 0$ и $\varphi\left(s_j\right) \to b \in \left[\varphi(t_{k+1}),\ \xi\right]$. Нетрудно видеть, что в этом случае $b = \varphi(t_{k+1})$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 > -u\left(\varphi\left(s_j\right)\right) = u\left(\varphi(t_{k+1})\right) - u\left(\varphi\left(s_j\right)\right) = \\ = \int_{s_j}^{t_{k+1}} \left(\tau_{\varphi(\sigma)} f\left(\varphi(\sigma)\right),\ Cv\right) q\, d\sigma > a\left(t_{k+1} - s_j\right) \end{aligned}, \qquad (1.60)$$

последнее неравенство справедливо при достаточно большом j в силу леммы 1.6.2.8. Так как $a > 0$, получаем противоречие. Аналогично доказывается, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ множество

$M_2 = \left\{ x \in \mathrm{R}^2 :\ u(x) < 0 \wedge \rho\left(x, \left[\varphi(t_{k+1}),\ \xi\right]\right) < \varepsilon \right\}$ целиком лежит в одной из компонент $\Delta_1,\ \Delta_2$. Очевидно, что множества $M_1,\ M_2$ лежат в разных компонентах.

Заметим, что решение $\varphi(t)$ пересекает L в направлении от M_2 к M_1 (иное противоречит возрастанию $u(\varphi(t))$). Множество $U = \Delta_1 \bigcup \Gamma$ называют *улиткой*. Улитку называют *развертывающейся*, если $M_1 \subset \Delta_2$ (рис. 27); и *свертывающейся*, если $M_1 \subset \Delta_1$.

Рассмотрим случай, когда U — развертывающаяся улитка. Тогда при достаточно малом $\delta > 0$ на интервале $(t_{k+1},\ t_{k+1} + \delta)$ $\varphi(t)$ лежит в Δ_2, а на интервале $(t_{m+2} - \delta,\ t_{m+2})$ — в Δ_1. Поэтому на интервале $(t_{k+1} + \delta,\ t_{m+2} - \delta)$ существует точка t_*, в которой $\varphi(t_*) \in \Gamma$, что противоречит предположению индукции, если $\varphi(t_*) \in \left[\varphi(t_k),\ \varphi(t_{k+1})\right]$, или предположению о не замкнутости траектории φ, если $\varphi(t_*) = \varphi(\bar{t}),\ \bar{t} \in (t_k,\ t_{k+1})$. Аналогичные рассуждения в случае свертывающейся улитки также приводят к противоречию. Таким образом, последовательность $\varphi(t_n)$ возрастает в смысле введенного направления.

В силу леммы 1.6.2.9 точка p и все точки множества $\Omega_\varphi \bigcap \tilde{L}$ являются предельными для последовательности $\varphi(t_n)$. Ввиду монотонности $\varphi(t_n)$ предельная точка может быть только одна, следовательно, в $\tilde{L}$ нет точек Ω_φ, кроме p. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы заметим, из двух последних лемм следует, что траектория $\bar{\varphi} \subset \Omega_\varphi$ неоднократно пересекает $\tilde{L}$ в точке p. Произвольность выбора p из Ω_φ означает, что $\left\{(t,\ \bar{\varphi}(t))\right\} = \Omega_\varphi$ и является замкнутой траекторией системы (1.50). Доказательство теоремы 1.6.2.1 завершено.

1.6.3. Условия (усиленной) орбитальной устойчивости.

В данном пункте устанавливаются достаточные условия существования, единственности и (в усиленном смысле) орбитальной устойчивости замкнутой траектории системы (1.50) $\dot{x} = \tau_x f(x)$.

Здесь мы будем предполагать, что для функции f выполнены следующие условия:

$$f: Q \to \mathrm{R}^2 \text{— удовлетворяет условию Липшица;} \tag{1.60}$$

$$Q \neq \mathrm{R}^2 \text{ — выпуклое замкнутое множество в } \mathrm{R}^2; \tag{1.61}$$

$$0 \in \operatorname{Int} Q; \tag{1.62}$$

$$f(x) \notin N_x \text{ при } x \neq 0; \tag{1.63}$$

существуют симметричная положительно определённая матрица B, скалярная функция μ: $\mu(a) > 0$ для $a > 0$ такие, что выполнено неравенство $\left(Bx,\ f(x)\right) > \mu(\|x\|)$ для всех $x \in Q \setminus \{0\}$; (1.64)

существует число $v_0 > 0$ такое, что $\left|\left(f(x),\ Cx\right)\right| \geq v_0 \|x\|^2$ для всех $x \in Q$. (*)

$\left(f(x),\ Cx\right)$ имеет на множестве $x \in Q \setminus \{0\}$ значения одного знака в силу условий (1.60), (1.62) и (*). Поэтому без ограничения общности можно считать, что в последнем условии (*) $\left(f(x),\ Cx\right) > 0$ при $x \in Q \setminus \{0\}$. Если это не так и $\left(f(x),\ Cx\right) < 0$, можно заменой переменных $y = Dx = (x_1,\ -x_2)$ свести рассматриваемую систему к системе $\dot{y} = \tau_y Df(Dy)$ в множестве DQ, для которой выполнены все перечисленные выше условия, причем последнее неравенство без знака модуля. Действительно, в силу очевидного равенства $D\tau(x,\ Q) f(x) = \tau(Dx,\ DQ) Df(x)$ (где оператор $\tau(x,\ Q)$ обозначает проектор на касательный конус к множеству Q в точке x) система (1.50) с учётом замены эквивалентна $\dot{y} = \tau_y Df(Dy)$. При этом $\left(Df(Dy),\ Cy\right) = \left(f(Dy),\ DCy\right) =$

$=-\left(f\left(Dy\right),\ CDy\right)=-\left(f\left(x\right),\ Cx\right)\geq v_0\|x\|^2=v_0\|y\|^2$. Поэтому последнее условие заменим на

$$\left(f\left(x\right),\ Cx\right)\geq v_0\|x\|^2,\ \text{где } v_0>0. \qquad (1.65)$$

Отображение D есть зеркальное отражение в одной из осей координат, поэтому оно сохраняет интересующие нас свойства системы (1.50) (свойства замкнутости траекторий, их орбитальной и т.п.).

Заметим также, что из условия (1.65) вытекает, что $f\left(x\right)\neq 0$ на $x\in Q\setminus\{0\}$.

Условие (1.64) означает: при движении по траектории решения (1.50) без выхода на границу квадратичная форма $\left(Bx,\ x\right)$ строго возрастает, так как в этом случае $\left(Bx(t),\ x(t)\right)'=2\Big(Bx(t),\ x'(t)\Big)=2\Big(Bx(t),\ f\left(x(t)\right)\Big)>\mu\Big(\|x(t)\|\Big)\geq 0$.

Условия (1.60)–(1.65) выполнены, например, если $f\left(x\right)=Ax$ и матрица A имеет комплексные собственные значения с положительной вещественной частью.

В приведенных условиях гарантировано существование единственного решения системы (1.50) с начальным условием $x\left(0\right)=x_0,\ x_0\in Q$, определенного на всей правой полуоси (см. параграф 1.5). Значение этого решения в момент $t\geq 0$ будем обозначать $g^t x_0$.

Приведём некоторые определения и докажем ряд лемм, которые помогут доказать теорему о существовании в условиях (1.60) — (1.65) единственной орбитально устойчивой траектории системы (1.50).

Определение. Замкнутую траекторию φ системы (1.50) будем называть орбитально устойчивой, если для произвольного $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что если точка x_0 находится от замкнутой траектории φ на расстоянии, не превышающем δ, то траектория решения $g^t x_0$ остаётся в ε-окрестности φ при $t\geq 0$.

Из этого определения следует, что замкнутая орбитально устойчивая траектория системы отвечает периодическому решению.

Определение. Решение $\varphi(t)$ системы (1.50) будем называть асимптотически орбитально устойчивым, если найдётся такое $\delta > 0$, что если точка x_0 находится от траектории φ на расстоянии, не превышающем δ, то расстояние от траектории решения $g^t x_0$ до траектории φ стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

Если условие одного из этих определений выполняется только для $x_0 \in \Delta_2$ — внешней компоненте траектории φ, то говорят об орбитальной устойчивости φ извне. Аналогично, при выполнении условия только для $x_0 \in \Delta_1$ — внутренней компоненте траектории φ говорят об орбитальной устойчивости φ изнутри.

Легко видеть, что в рамках введённых ограничений на систему из устойчивости решения по Ляпунову (асимптотической устойчивости) следует орбитальная устойчивость (асимптотическая орбитальная устойчивость) траектории этого решения.

1.6.3.1. Лемма о взаимном расположении N_x, $f(x)$, $\tau_x f(x)$ и $-x$.

Лемма. *В условиях* (1.60)–(1.65) *если* x *лежит на границе* Q, *то вектор* $f(x)$ *расположен между* N_x *и* $(-x)$ *и между* N_x *и* $\tau_x f(x)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $f(x)$ лежит между N_x и $(-x)$. Рассмотрим одну связную компоненту Γ множества ∂Q (∂Q не является связной в одном случае, когда состоит из двух параллельных прямых) и в ней одну из ближайших точек к началу координат. В этой точке x утверждение справедливо, так как, нетрудно видеть, в этом случае N_x совпадает с лучом, натянутым на вектор x. В силу условия (1.65) вектор $f(x)$ расположен строго между векторами x и $-x$ в каждой точке $x \in Q \setminus \{0\}$. Отсюда вытекает доказываемое утверждение для данной точки.

Множество всех точек границы Q, для которых вектор $f(x)$ лежит между N_x и $(-x)$, обозначим через M_1 (ввиду сделанного выше замечания $M_1 \neq \varnothing$), и положим $M_2 = \Gamma \setminus M_1$. Покажем, что эти множества открыты в индуцированной из R^2 топологии. Для каждой точки $x \in \partial Q$ рассмотрим попарно не пересекающиеся множества: U_1 — окрестность точки $(-x)$, U_2 — окрестность $f(x)$, U_3 — угловую α-окрестность нормального конуса N_x ($y \in U_3$ в том и только в том случае, когда угол между y и ближайшим к нему вектором из N_x меньше α или $y = 0$). Существование этих окрестностей гарантируют условия (1.62), (1.63), (1.65). Очевидно, между любыми элементами этих множеств сохраняется расположение, имеющее место для $(-x)$, $f(x)$ и N_x. В силу непрерывности функций $-x$, f и полунепрерывности сверху оператора N_x (утверждение 1.6.2.3) найдется такая окрестность U точки x, что для всех точек $x' \in U$ выполнено: $-x' \in U_1$; $f(x') \in U_2$ и $N_{x'} \in U_3$. Получаем, что множества M_1 и M_2 открыты.

Так как Γ связно, то M_2 пусто, то есть $f(x)$ лежит между N_x и $(-x)$ во всех точках x границы Q.

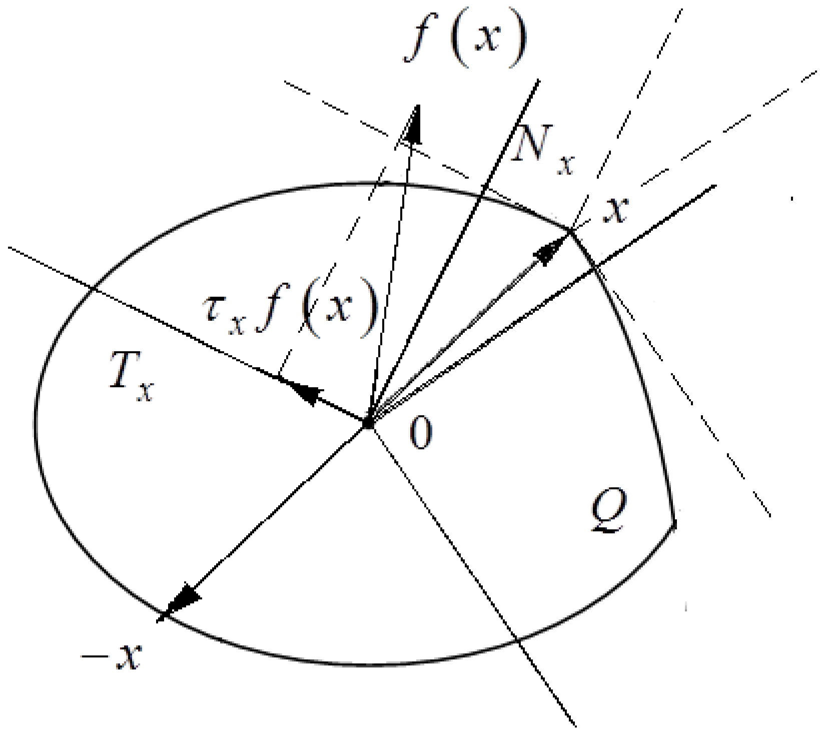


Рис. 28

Докажем теперь, что $f(x)$ лежит также между N_x и $\tau_x f(x)$. Действительно, отметим, что $-x \in T_x$, так как $0 \in Q$ и $0 - x \in T_x$ по определениям нормального N_x и касательного T_x конусов. Значит одно из рёбер T_x, образующий единичный вектор которого обозначим u_1, расположено вместе с $f(x)$ между N_x и $(-x)$. Если $f(x) \in T_x$, то $\tau_x f(x) = f(x)$ и утверждение выполнено. В противном случае $f(x)$ лежит строго между N_x и u_1. А поскольку угол между N_x и u_1 прямой, то угол между $f(x)$ и u_1 острый, и $\tau_x f(x)$ совпадает по направлению с u_1. Угол между вторым ребром конуса T_x и $f(x)$ не может быть тоже острым, так как внутренний угол T_x при $x \in \partial Q$ не превышает π, а внешний не менее π. Лемма доказана.

1.6.3.2. Оценка нормы вектора скорости системы

Утверждение. *В условиях* (1.60)–(1.65) *для любого компакта K существует $a_0 > 0$, такое, что для $x \in \partial Q \cap K$ справедлива оценка $\left\|\tau_x f(x)\right\| \geq a_0$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется последовательность (x_n) из $\partial Q \cap K$, такая, что $\left\|\tau_{x_n} f(x_n)\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \in \partial Q \cap K$, тогда $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$.

Заметим, что $f(x_n) - \tau_{x_n} f(x_n) \in N_{x_n}$. Так как $N(Q)$ — максимальный монотонный оператор, то по свойству замкнутости графика максимального монотонного оператора имеем: $f(x_0) \in N_{x_0}$. Получили противоречие с условием (1.63). Следовательно, $\left\|\tau_x f(x)\right\| \geq a_0 > 0$. Лемма доказана.

1.6.3.3. Оценка углов между векторами N_x и $-x$

Утверждение. *Пусть K — компакт в* R^2. *Тогда существует $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in K \cap \partial Q$ и любого $n \in N_x$, $\|n\| = 1$ верно неравенство $(-x,\ n) \leq -\delta$ или, что тоже $(x,\ n) \geq \delta$.*

<u>Доказательство</u>. Заметим, что так как 0 — внутренняя точка множества Q, то для любых векторов $x \in \partial Q$ и $n \in N_x$ $(0-x,\ n)=(-x,\ n)<0$. Положим $i = \sup\limits_{\substack{x\in K\bigcap \partial Q,\\ n\in N_x}} (-x,\ n)$. Очевидно, $i \le 0$.

Покажем, что $i<0$. Действительно, если это не так, то найдутся последовательности $x_k \in K \bigcap \partial Q$ и $n_k \in N_{x_k}$, $\|n_k\|=1$, такие, что $(-x_k,\ n_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Без ограничения общности, $x_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{x}$, $n_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{n}$, причем $\bar{n} \in N_{\bar{x}}$ в силу замкнутости графика оператора $N(Q)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в скалярном произведении $(-x_k,\ n_k)$, получаем противоречие с указанным в начале доказательства замечанием. Таким образом, $i < 0$, следовательно, для любых $x \in K \bigcap \partial Q$, $n \in N_x$, $\|n\|=1$ $(-x,\ n) \le -\delta$, где $\delta=-i$. Утверждение доказано.

1.6.3.4. Определение угловой скорости и угла поворота вектор-функции.

Сопоставим каждому вектору $x=(x_1,\ x_2) \ne 0$ множество $\Phi(x)$ всех углов поворота оси Ox до x (при повороте по часовой стрелке угол считается отрицательным). Очевидно, любое $\psi \in \Phi(x)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\sin\psi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \cos\psi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \tag{1.66}$$

Зафиксируем значения $\psi=\psi_0$ и $x=x_0$, удовлетворяющие (1.66). Тогда в некоторой их окрестности эти уравнения по теореме о неявных функциях однозначно разрешимы относительно ψ: $\psi=\psi(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{grad}\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2},\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) = C\frac{x}{\|x\|^2}.$$ Поскольку найденный градиент не зависит от ψ_0 и x_0, будем обозначать его $\operatorname{grad}\Phi(x)$.

Пусть $\varphi(t)$ — некоторая абсолютно непрерывная вектор-функция, всюду отличная от нуля. Тогда почти всюду однозначно определена производная $\dfrac{d\left(\Phi\left[\varphi(t)\right]\right)}{dt} = \left(\operatorname{grad}\Phi\left[\varphi(t)\right],\ \dot{\varphi}(t)\right)$, обозначим её через $w(t)$. Поэтому определен и угол поворота функции φ за время от t_0 до t:

$$\Delta\Phi(\varphi,\ t_0,\ t) := \int_{t_0}^{t} w(s)ds$$

Будем также использовать следующее обозначение для производной от $\Phi(x)$ в силу системы (1.50): $\dot{\Phi}(x) := \left(\operatorname{grad}\Phi(x),\ \tau_x f(x)\right)$; очевидно $w(t) = \dot{\Phi}\left(\varphi(t)\right)$ для φ — решения (1.50).

1.6.3.5. Лемма об оценке угловой скорости

Лемма. *Для произвольного компакта* $K \subset \mathrm{R}^2$ *найдётся положительное число* $v > 0$ *такое, что для всех* $x \in Q \bigcap K,\ x \neq 0$

$$\dot{\Phi}(x) = \frac{\left(Cx,\ \tau_x f(x)\right)}{\|x\|^2} \geq v \tag{1.67}$$

<u>Доказательство</u>. Оценим дробь $\dfrac{\left(Cx,\ \tau_x f(x)\right)}{\|x\|^2}$ снизу.

Если $f(x) = \tau_x f(x)$, то, очевидно, с учётом (1.65)

$$\frac{\left(Cx,\ \tau_x f(x)\right)}{\|x\|^2} = \frac{\left(Cx,\ f(x)\right)}{\|x\|^2} \geq v_0 > 0\,. \tag{1.68}$$

Если $f(x) \neq \tau_x f(x)$, то по аналогичным соображениям, приведенным в доказательстве леммы 1.6.2.8, учитывая, что вектор $f(x)$ расположен между N_x и $\tau_x f(x)$ (лемма 1.6.3.1), имеем: $C^{-1}\tau_x f(x) \in N_x$ и совпадает по направлению с единичным вектором $n_2 = v_2(x)$ грани конуса N_x. Тогда, используя утверждение 1.6.3.3, получаем:

$$\frac{(Cx,\ \tau_x f(x))}{\|x\|^2}=\frac{(x,\ C^{-1}\tau_x f(x))}{\|x\|^2}\geq\frac{\delta\|\tau_x f(x)\|}{\|x\|^2}\geq\frac{\delta a_0}{a_2^2}>0\ , \tag{1.69}$$

где a_2 — верхняя оценка нормы векторов $x\in K$, a_0 — нижняя оценка нормы проекции вектора скорости, утверждение 1.6.3.2.

Обозначив через $v=\min\left\{v_0,\ \frac{\delta a_0}{a_2^2}\right\}$, получим требуемое неравенство (1.67).

1.6.3.6. Лемма о выходе на границу

Лемма. *При выполнении условий (1.60) – (1.65) для любого* $x_0\in Q,\ x_0\neq 0$ *найдётся число* $\gamma\geq 0$ *такое, что* $g^\gamma x_0\in\partial Q$.

Доказательство. Напомним, что $\partial Q\neq\varnothing$ в силу условия (1.61). Предположим противное: пусть для некоторого $x_0\in Q\setminus\{0\}$ траектория $\{g^t x_0:\ t\geq 0\}$ целиком лежит внутри Q. Тогда в силу условия (1.64) функция $b(t)=\left(Bg^t x_0,\ g^t x_0\right)$ строго возрастает в окрестности любой точки t, в которой $b(t)>0$ (то есть $\|g^t x_0\|>0$). Поскольку $b(0)=(Bx_0,\ x_0)>0$, это означает, что при всех $t\geq 0$ $0<b(0)\leq b(t)$. Следовательно,

$$(Bx_0,\ x_0)\leq\left(Bg^t x_0,\ g^t x_0\right)\leq\|B\|\|g^t x_0\|^2 .$$

Отсюда следует, что $\|g^t x_0\|\underset{t\to+\infty}{\to}+\infty$. Действительно, если это не так, то $\|g^{t_n}x_0\|\leq M$ для некоторой последовательности $t_n\to+\infty$ и некоторого M. Тогда

$$\|B\|M^2\geq\|B\|\|g^t x_0\|^2\geq b(t_n)=b(0)+\int_0^{t_n}\dot b(s)ds\geq b(0)+\mu_0 t_n ,$$

где

$$\mu_0=\min\left\{\mu(a):\ (Bx_0,\ x_0)\leq\|B\|a^2\leq\|B\|M^2\right\}>0 .$$

Это противоречит тому, что $t_n\to+\infty$.

Почему любое решение мы охватываем?

Пусть $\overline{x} \in \mathrm{R}^2 \setminus Q$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что $\varepsilon\overline{x} \in Q$. Если t достаточно велико, то $\left\|g^t \varepsilon \overline{x}\right\| > \|\overline{x}\|$, причем в силу леммы об оценке угловой скорости 1.6.3.5 t можно выбрать так, что $g^t \varepsilon \overline{x} = E\overline{x}$, где $E > 1$. Получаем противоречие с условием выпуклости Q: $\varepsilon\overline{x}$ и $E\overline{x}$ лежат в Q, а точка соединяющего их отрезка $\overline{x} \notin Q$. Лемма доказана.

Доказанные леммы демонстрируют, что наложенные на систему (1.50) условия (1.60) – (1.65) предполагают поле направления, создаваемое функцией f на плоскости, в виде раскручивающегося вокруг нулевой точки против часовой стрелки “торнадо”.

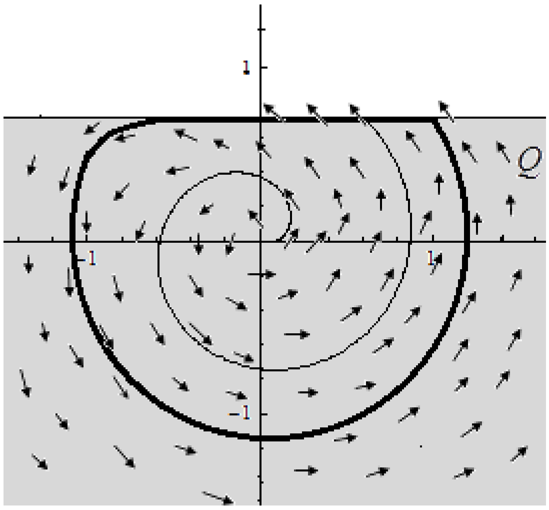


Рис. 29

А поскольку по этим же условиям граница множества Q не пуста, то любая ненулевая траектория системы рано или поздно прижимается этим “торнадо” к границе Q, благодаря чему траектория не уходит в бесконечность, а выходит, как мы увидим из следующей теоремы, на периодический режим с замкнутой траекторией.

1.6.3.7. Теорема о существовании, единственности и орбитальной устойчивости замкнутой траектории

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1.60) – (1.65). *Тогда система* (1.50) *имеет единственную замкнутую траекторию* l*, которая усиленно орбитально устойчива в том смысле, что в неё вливаются при* $t \to +\infty$ *все решения данной* *системы. Последнее означает, что для любого $x_0 \in Q$ существует $s \geq 0$, такое, что $g^{s+t} x_0 \in l$ при $t \geq 0$.*

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких частей, в которых показываются:

1) слияние любых двух траекторий системы;

2) существование и единственность замкнутой траектории для ограниченного множества Q;

3) существование у замкнутой траектории l окрестности, из точек которой траектории системы за одно и то же гарантированное время вливаются в l;

4) непрерывная зависимость решений системы от начальных условий;

5) орбитальная устойчивость замкнутой траектории системы;

6) некоторые вспомогательные оценки;

7) оценка траектории системы;

8) существование и единственность замкнутой траектории для неограниченного Q сведением к задаче с ограниченным множеством.

1.6.3.7.1. Лемма о слиянии любых двух траекторий системы

Пусть x_0, $\bar{x}_0 \in Q$ произвольны, покажем, что существуют такие $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, что $g^{t_1} x_0 = g^{t_2} \bar{x}_0$. Предположим противное: $g^{t_1} x_0 \neq g^{t_2} \bar{x}_0$ для любых $t_1 \geq 0$; $t_2 \geq 0$. Тогда любой луч r, выходящий из нуля, пересекается с одной из этих траекторий ближе к нулю, чем со второй, причем такое расположение точек пересечения сохраняется для всех лучей в силу сделанного предположения. Следовательно, одна из траекторий лежит строго внутри Q, что противоречит лемме 1.6.3.8 о выходе на границу. В рамках условий (1.60)–(1.65) справедлива теорема 1.5.1 о существовании и единственности вправо решения задачи Коши для системы (1.50), поэтому после пересечения $g^{t_1} x_0 = g^{t_2} \bar{x}_0$ траектории сливаются в одну $g^{t_1+t} x_0 = g^{t_2+t} \bar{x}_0$ для $t \geq 0$.

1.6.3.7.2. Существование и единственность замкнутой траектории в случае ограниченного множества Q

Предположим, что Q является ограниченным множеством. В этом случае условия теоремы о существовании замкнутой траектории (п. 1.6.2.1) выполнены — любое решение системы в рассматриваемом случае будет ограниченным, причем если оно начинается не из нуля, то его ω-предельное множество не содержит нулевой точки ввиду условия (1.64), это в сумме с условием (1.63) гарантирует выполнение условия (б). Следовательно, у системы (1.50) в Q существует замкнутая траектория. Из леммы о слиянии любых двух траекторий вытекает единственность замкнутой траектории, а также что любая ненулевая траектория вливается в замкнутую.

Для доказательства орбитальной устойчивости этой траектории покажем наличие у неё особой окрестности, из которой все траектории за один и тот же отрезок времени вливаются в замкнутую, кроме того покажем непрерывную зависимость решений системы от начальных условий.

1.6.3.7.3. Лемма о существование у замкнутой траектории специальной окрестности

Пусть $l := \left\{ \left(t,\ g^t \overline{x}_0 \right) :\ \mathrm{t} \geq 0 \right\}$ *— замкнутая траектория системы* (1.50)*. Тогда* $\exists \left(\delta_0 > 0,\ T_0 > 0 \right) \forall \left(x_0 \in Q :\ \rho\left(x_0,\ l \right) = \min\limits_{x \in l} \left\| x_0 - x \right\| < \delta_0 \right) \left[g^{T_0} x_0 \in l \right]$.

<u>Доказательство.</u> Числа δ_0, T_0 найдем отдельно для Δ_1 — ограниченной открытой связной компоненты плоскости, определяемой кривой l, и для Δ_2 — соответствующей неограниченной компоненты. Пусть $x_1 = g^{t_1} \overline{x}_0 \in l \cap \partial Q$ (существование этой точки гарантирует лемма 1.6.3.6). Положим $r := \left[0,\ +\infty \right) \cdot x_1$ — луч, начинающийся в нуле и направленный вдоль вектора x_1, и пусть произвольно выбрана точка $x_0 \in Q \cap \Delta_2$. В силу леммы 1.6.3.7 за время $\dfrac{2\pi}{v}$ вектор $g^t x_0$ совершит поворот вокруг нуля по меньшей мере на угол 2π, и, следовательно, пересечет

луч r в точке x_1. Таким образом, для Δ_2 в качестве δ_0 можно взять любое положительное число, а в качестве T_0 — произвольное большее или равное $\dfrac{2\pi}{v}$ число.

Для Δ_1 определим δ_0 следующим образом. Пусть точка $b \in (0,\ x_1)$ выбрана так, что эллипс $(Bx,\ x) = (Bb,\ b)$ целиком лежит в Δ_1. Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы оно было меньше кратчайшего расстояния между точками эллипса и кривой l. В силу леммы о слиянии любых двух траекторий существует T_1, такое, что $g^{T_1} b \in l$. Пусть $x_0 \in \Delta_1$ и $\rho(x_0,\ l) < \delta_0$. Кривая $g^t x_0$ за время, не превышающее $\dfrac{2\pi}{v_0}$, пересечет отрезок $[b,\ x_1]$ или выйдет на ∂Q, и, следовательно, вольётся в l. В первом случае за дополнительное время T_1 она также вольётся в l. Итак, в качестве T_0 для Δ_1 можно взять число не меньшее $\dfrac{2\pi}{v_0} + T_1$.

Итак, за время $T_0 = \max\left\{\dfrac{2\pi}{v},\ \dfrac{2\pi}{v_0} + T\right\}$ любая траектория, начинающаяся из δ_0-окрестности l вливается в l.

1.6.3.7.4. Лемма о непрерывной зависимости решений системы от начальных условий

$\forall (x_0,\ y_0 \in Q) \forall (t \ge 0) \left[\left\| g^t x_0 - g^t y_0 \right\| \le e^{Lt} \left\| x_0 - y_0 \right\| \right]$. *В частности, при* $y_0 = 0$, *выполнено неравенство*

$$\left\| g^t x_0 \right\| \le e^{Lt} \left\| x_0 \right\| , \tag{1.70}$$

здесь L *— константа Липшица из условия (1.60).*

<u>Доказательство.</u> Положим $x := g^t x_0$, $y := g^t y_0$. Будем использовать обозначение $v_x u = u - \tau_x u$ — это проекция вектора u на N_x. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x-y\|^2 = \left(\tau_x f(x) - \tau_y f(y),\ x-y\right) = \left(f(x) - f(y),\ x-y\right) -$$
$$-\left(v_x f(x) - v_y f(y),\ x-y\right) \le L\|x-y\|^2.$$

Здесь использована монотонность многозначного оператора $N(Q)$ и липшицевость f. Из полученного дифференциального неравенства очевидным образом вытекает доказываемое утверждение.

1.6.3.7.5. Орбитальная устойчивость замкнутой траектории системы

Используем обозначение замкнутой траектории из 1.6.3.7.3 $l = \left\{\left(t,\ g^t \overline{x}_0\right):\ \mathrm{t} \geq 0\right\}$. Для неё орбитальная устойчивость по определению означает, что

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall\left(x_0 \in Q:\ \rho(x_0,\ l) < \delta\right)\forall(t \geq 0)\left[\rho\left(g^t x_0,\ l\right) < \varepsilon\right].$$

Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы было $\delta \leq \delta_0$ и $e^{LT_0}\delta < \varepsilon$, где δ_0, T_0 найдены в 1.6.3.7.3. Пусть $\rho(x_0,\ l) < \delta$, то есть $\left\|x_0 - g^{t_1}\overline{x}_0\right\| < \delta$ при некотором $t_1 \geq 0$. Тогда из непрерывной зависимости решений системы от начальных данных следует, что $\rho\left(g^t x_0,\ l\right) \leq \left\|g^t x_0 - g^{t_1+t}\overline{x}_0\right\| \leq$ $e^{Lt}\left\|x_0 - g^{t_1}\overline{x}_0\right\| < e^{Lt}\delta$. Поэтому в силу выбора δ при $t \leq T_0$ величина $\rho\left(g^t x_0,\ l\right)$ меньше ε, а при $t \geq T_0$ она равна нулю из-за слияния траекторий. Таким образом, орбитальная устойчивость замкнутой траектории доказана.

1.6.3.7.6. Лемма о вспомогательных множествах Q_1, Q_2 и Q_3

Введём обозначения: $Q_1 = \left\{x \in Q:\ Cx \in T_x\right\}$, $Q_2 = Q \setminus Q_1$, Q_3 — множество всех точек локального минимума функции $\|x\|$, рассматриваемой на ∂Q.

Утверждается, что: 1) *если* $x \in Q_1$ *и* $x \neq 0$, *то* $\dot{\Phi}(x) \geq \nu_0$; 2) *если* $x_0 \in Q_2$, *то* $x_0 \in \partial Q$; 3) Q_3 *не пусто и ограничено.*

<u>Доказательство</u>. 1) В Q_1 по условию (1.65) и определению множества Q_1 при $x(t) = g^t x_0$ имеем:

$$\dot{\Phi}(x) = \frac{(Cx,\ \tau_x f(x))}{\|x\|^2} = \frac{(Cx,\ f(x))}{\|x\|^2} - \frac{(Cx,\ \nu_x f(x))}{\|x\|^2} \ge \nu_0 .$$

2) Очевидно, $\operatorname{int} Q \subset Q_1$, так как для $x \in \operatorname{int} Q$ касательный конус $T_x = \mathrm{R}^2$. Поэтому Q_2 либо пусто либо содержит только граничные точки Q.

3) Пусть $x_0 \in \partial Q$. На компактном множестве $\{x \in \partial Q:\ \|x\| \le \|x_0\|\}$ непрерывная функция $\|x\|$ имеет точку глобального минимума, которая, очевидно, будет точкой локального минимума этой функции и на всём множестве ∂Q. Итак, рассматриваемое множество не пусто.

Докажем, что Q_3 ограничено. Предположим противное, тогда в нём найдется последовательность $(x_n:\ n \in \mathrm{N})$, удовлетворяющая условию $\|x_{n+1}\| \ge 2\|x_n\|$ при $n \in \mathrm{N}$. Прямая, задаваемая уравнением $(x,\ x_n) = \|x_n\|^2$, очевидно, является опорной к Q, поэтому для любого $x \in Q$ выполняется неравенство $(x,\ x_n) \le \|x_n\|^2$. Следовательно, для угла $\alpha(n,\ m)$ между x_n и x_m при $n \ne m$, будет справедливо неравенство $\cos\alpha(n,\ m) \le \frac{1}{2}$. Но в такой последовательности не может быть больше шести векторов. Полученное противоречие доказывает ограниченность Q_3. Лемма доказана.

1.6.3.7.7. Лемма об оценке траектории системы

Пусть $r \ge r_0 := \max\limits_{x \in Q_3} \|x\|$, $R > e^{L\frac{2\pi}{\nu_0}} r$. *Тогда если* $\|x_0\| \le r$, *то* $\left\|g^t x_0\right\| < R$ *при* $t > 0$

.

<u>Доказательство</u>. Предположим противное, и пусть t_1, t_2 такие, что $\left\|g^{t_1} x_0\right\| = r$, $\left\|g^{t_2} x_0\right\| = R$ и $R > \left\|g^t x_0\right\| > r$ при $t \in (t_1,\ t_2)$. Положим $g^{t_1} x_0 = x_1$, $t_2 - t_1 = T$. Тогда

$$\left\|g^0 x_1\right\| = r,\ \left\|g^T x_1\right\| = R \text{ и } R > \left\|g^t x_1\right\| > r \text{ при } t \in (0,\ T). \tag{1.71}$$

Возможны два случая.

Случай 1. При всех $t \in (0,\ T)$ $g^t x_1 \in Q_1$. Из (1.70) и выбора R вытекает неравенство $T \ge \dfrac{2\pi}{v_0}$, используя которое, получаем оценку угла поворота траектории: $\Delta\Phi\left(\left(g^t x_1\right),\ 0,\ T\right) = \int\limits_0^T \dot{\Phi}\left[g^s x_1\right] ds \ge\ \ge v_0 T \ge 2\pi$. Следовательно, траектория решения $g^t x_1$ за время T сделает полный оборот вокруг нуля и в силу выбора r зайдет при некотором $t \in (0,\ T)$ в круг B_r радиуса r с центром в нуле, поскольку непустое множество Q_3 целиком лежит в этом круге. Получаем противоречие с (1.71).

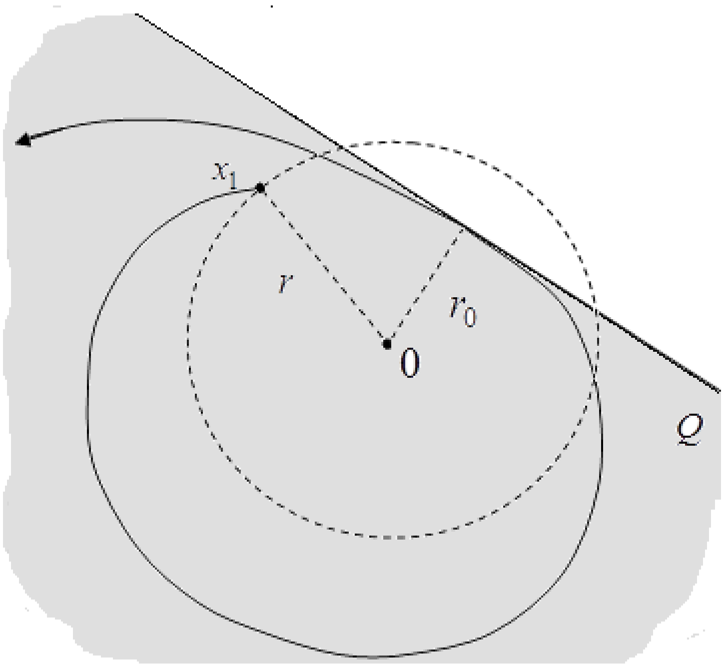


Рис. 30

Случай 2. Существует момент t_3 из интервала $(0,\ T)$, в который $g^{t_3} x_1 = x_3 \in Q_2$. Поскольку $Cx_3 \notin T_{x_3}$, Cx_3 образует с N_{x_3} острый угол, в то время как в силу леммы 1.6.3.3 угол между N_{x_3} и $-x_3$ тупой, но не превосходит π. Отсюда и леммы 1.6.3.1 вытекает, что угол между векторами $\tau_{x_3} f\left(x_3\right)$ и $-x_3$ острый. Для $t \in \left[t_3,\ T\right]$ обозначим через $\psi(t)$ точку пересечения $\partial\left(Q \cap B_R\right)$ с лучом

$[0,\ +\infty)\cdot\left(g^t x_1\right)$, начинающимся в нуле и проходящим через точку $g^t x_1$. В силу леммы 1.6.3.5 указанный луч с ростом t поворачивается против часовой стрелки, поэтому на достаточно малой правой окрестности момента t_3 точки $g^t x_1$ и $\psi(t)$ остаются в остром угле, образованном векторами $\tau_{x_3} f\left(x_3\right)$ и $-x_3$, перенесенными в точку x_3. Тогда $\left\|\psi(t)\right\| < \left\|\psi(t_3)\right\| = \left\|x_3\right\| < R$ в этой окрестности t_3, и $\left\|\psi(T)\right\| \geq \left\|g^T x_1\right\| = R$ по предположению. Поэтому функция $\left\|\psi(t)\right\|$ имеет минимум во внутренней точке t_4 отрезка $\left[t_3,\ T\right]$. Ввиду того, что вектор $\psi(t)$ вращается против часовой стрелки с ненулевой скоростью, точка $\psi(t_4)$ есть точка локального минимума функции $\|x\|$ на ∂Q, так что $\psi(t_4) \in B_r$.

Но тогда $\left\|g^{t_4} x_1\right\| \leq \left\|\psi(t_4)\right\| \leq r$, что противоречит (1.71).

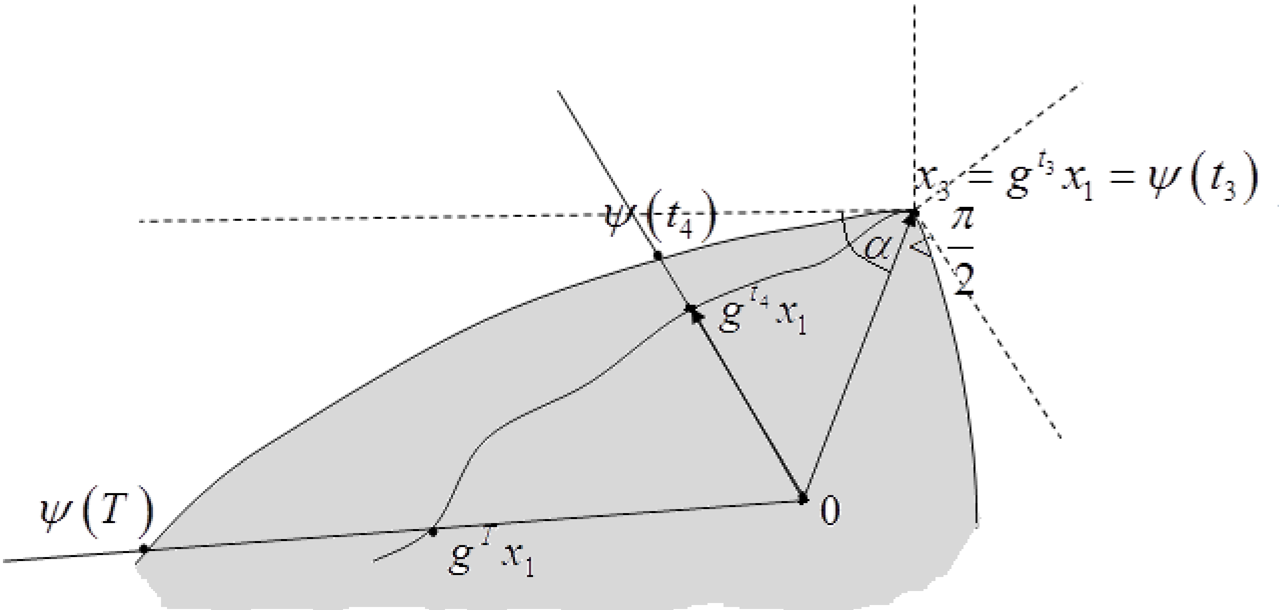


Рис. 31

Таким образом, траектория, начинающаяся в B_r, остаётся внутри B_R при всех $t \geq 0$. Лемма доказана.

1.6.3.7.8. Сведение случая неограниченного Q к случаю ограниченного

Рассмотрим систему $\dot{x} = \tau(x,\ B_R \cap Q) f(x)$ с множеством $B_R \cap Q$ в качестве ограничения, где R найдено по $r = r_0$ (в лемме 1.6.3.7.7). Для неё условия (1.60), (1.61), (1.62), (1.64), (1.65) выполнены, очевидно, одновременно с выполнением их для исходной системы. Проверим выполнение условия (1.63), при условии, что оно выполняется для исходной системы.

Итак, покажем, что $f(x) \notin N(x, B_R \cap Q)$ при $x \neq 0$ (где $N(x,\ A)$ — нормальный конус к множеству A в точке x). Действительно, если x не лежит на окружности B_R, то это справедливо в силу условия (1.63). Если x лежит на окружности B_R и является внутренней точкой Q, тогда $N(x,\ B_R \cap Q)$ совпадает с лучом $[0,\ +\infty) \cdot x$, в силу (1.65) $f(x) \notin N(x,\ B_R \cap Q)$. Наконец рассмотрим вариант, когда x является точкой пересечения ∂Q с окружностью B_R, в этом случае $N(x,\ B_R \cap Q)$ является выпуклой оболочкой, натянутой на объединение луча $[0,\ +\infty) \cdot x$ и конуса $N_x = N(x,\ Q)$. Если $x \in Q_1$, то, так как Cx лежит между x и $-x$, а также содержится в T_x, то N_x лежит между $-x$ и x. В силу условия (1.65) $f(x)$ строго между x и $-x$, то есть не может лежать в $N(x,\ B_R \cap Q)$. Если же $x \in Q_2$, то вектор Cx лежит между нормальным конусом N_x к Q и вектором $-x$, образуя в силу телесности множества Q с ближайшим вектором из N_x острый угол. Следовательно, ввиду выполнения леммы 1.6.3.3, x лежит или в N_x или между $-x$ и N_x, поэтому $f(x)$ не принадлежит выпуклой оболочке N_x и луча $[0,\ +\infty) \cdot x$.

Таким образом, все условия теоремы для ограниченного множества $B_R \cap Q$ выполнены, следовательно, у системы $\dot{x} = \tau(x,\ B_R \cap Q) f(x)$ существует единственная замкнутая траектория, в которую вливаются все траектории системы. Эта замкнутая траектория является также траекторией исходной системы (1.50), так как она является частью любой траектории, выпущенной из круга B_r, и, следовательно, содержится во внутренности круга B_R.

Покажем, что в найденную замкнутую траекторию вливаются все остальные траектории исходной системы (1.50). Возьмем произвольную точку $\overline{x}_0$. Выберем r таким образом, чтобы круг B_r содержал в себе $\overline{x}_0$ и замкнутую траекторию системы (1.50). Тогда при соответствующем выборе R траектория $g^t\overline{x}_0$ вливается в замкнутую в некоторый момент времени, поскольку она одновременно является решением новой системы $\dot{x} = \tau\left(x,\ B_R \cap Q\right) f\left(x\right)$.

Таким образом, все траектории системы (1.50) вливаются в замкнутую, и замкнутая траектория единственна.

Так как замкнутая траектория входит в множество $B_R \cap Q$ вместе со своей некоторой окрестностью, орбитальная устойчивость вытекает из теоремы для ограниченного случая. Теорема 1.6.3.7 полностью доказана.

1.7. Модели биологических систем с ограничениями численности

В этом параграфе рассмотрим в качестве примера одну из возможных областей применения результатов, полученных в 1.6.

1.7.1. Классическая модель биологической система «хищник-жертва»

Напомним классическую модель биологической системы «хищник-жертва». Предполагается, что в некоторой местности в основном существуют два вида животных, один из которых – хищник, второй – жертва. Если бы в среде, где обитают эти два вида, находились бы только животные вида жертва, то коэффициент их прироста предполагается постоянной положительной величиной, которую обозначим ε_1. Другой вид (хищник), питающийся только (или в основном) жертвой, в предположении, что он существует изолированно, имеет некоторый коэффициент прироста $(-\varepsilon_2)$, который предполагают постоянным и отрицательным. Когда такие два вида сосуществуют в ограниченной среде, жертвы будет размножаться тем медленнее, чем больше будет хищников, а хищники – тем быстрее, чем многочисленнее будет вид жертв. Гипотеза В. Вольтерры состоит в том, что коэффициенты прироста жертв и хищников равны, соответственно, $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ и $-\varepsilon_2 - \gamma_2 N_2$ (γ_1 и γ_2 – положительные постоянные, N_1, N_2 – численность жертв и хищников на текущий момент времени). Поэтому численность животных обоих видов описывается системой дифференциальных уравнений (см.[x69], стр.22):

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1), \end{cases} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0). \tag{1.72}$$

Задача В. Вольтерры состояла в том, чтобы полностью исследовать эту систему и выяснить закономерности выживания первого и второго видов.

1.7.1.1. Положения равновесия и анализ их устойчивости

Система

$$\begin{cases} N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) = 0, \\ -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) = 0, \end{cases}$$

очевидно, имеет два решения $N_1 = 0,\ N_2 = 0$ и $N_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, N_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$, являющиеся положениями равновесия системы (1.72). Будем использовать следующие обозначения для координат второго из найденных положений равновесия:

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \bar{X}_1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \bar{X}_2 .$$

Для анализа устойчивости положений равновесия воспользуемся теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Найдём матрицу частных производных от правых частей уравнений (1.72):

$$A\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 & -\gamma_1 N_1 \\ \gamma_2 N_2 & -(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) \end{pmatrix}.$$

Для положения равновесия $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ получаем:

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix};$$

Поскольку $\varepsilon_1 > 0$, это положение равновесия не устойчиво.

Для $\bar{X} =: \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix}$ имеем:

$$A\left(\bar{X}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \dfrac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы, как нетрудно видеть, равны $\pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Это означает, что теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению не даёт возможности судить об устойчивости данного положения равновесия.

1.7.1.2. Фазовый портрет системы

Линеаризация системы (1.72) вблизи положения равновесия $\bar{X}$ приводит к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{\gamma_1 \varepsilon_2}{\gamma_2} y, \\ \dot{y} = \dfrac{\gamma_2 \varepsilon_1}{\gamma_1} x. \end{cases} \tag{1.73}$$

Здесь x и y - приближённые значения $N_1 - \bar{X}_1$ и $N_2 - \bar{X}_2$, соответственно. Исключив из (1.73) y, получаем уравнение второго порядка для x:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Его общее решение можно записать в виде:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1.74}$$

где A, φ_0 зависят от начальных значений x, y. Возвращаясь к первому из уравнений (1.73), получаем выражение для y:

$$y = B\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{1.75}$$

здесь коэффициент B связан с A соотношением

$$B = \omega \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \varepsilon_2} A.$$

Из (1.74) и (1.75) следует, что фазовые траектории линеаризованной системы в плоскости (N_1, N_2) представляют собой эллипсы с полуосями A и B и центром в точке $\bar{X}$.

Рисунок 23 соответствует параметрам $\varepsilon_1 = 1;\ \gamma_1 = 1;\ \varepsilon_2 = 2;\ \gamma_2 = 2.$ Нетрудно видеть, что движение по этим траекториям происходит против часовой стрелки.

Решения линеаризованной системы называются малыми *флуктуациями*, их период определяется явной формулой:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}.$$

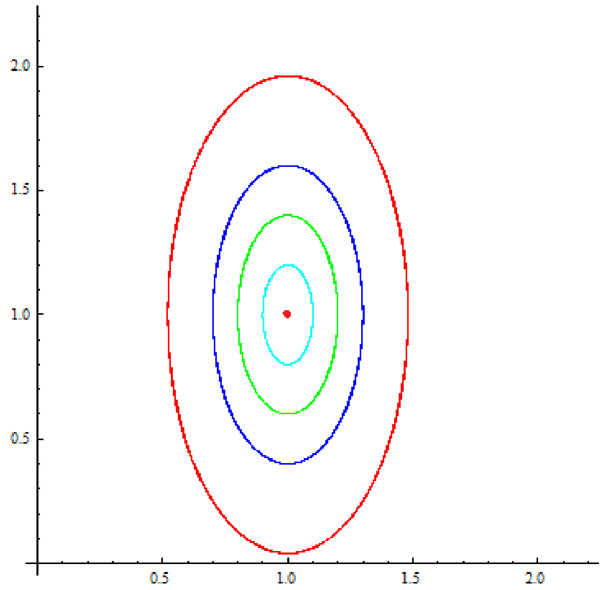


Рис. 23

Для нелинейной системы (1.72) поведение траекторий, мало отклоняющихся от положения равновесия $\bar{X}$, близко к поведению траекторий линеаризованной системы.

В книге В. Вольтерра [x69] для системы (1.72) найден интеграл вида:

$$N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} = C N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}. \tag{1.76}$$

На следующем рисунке изображены траектории для нескольких начальных значений.

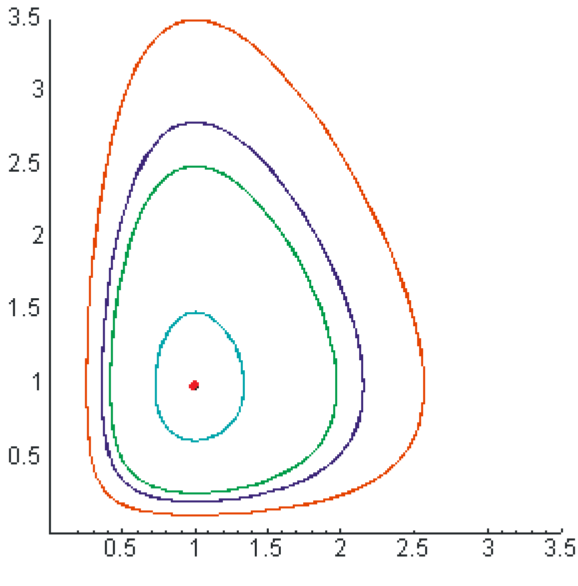


Рис. 24

Рисунок соответствует параметрам $\varepsilon_1 = 1,\ \gamma_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 2,\ \gamma_2 = 2.$

1.7.2. Автоколебания в обобщённой системе «хищник-жертва»

На выпуклом замкнутом множестве $\bar{Q} \subset \mathrm{R}_+^2 = [0,\ +\infty) \times [0,\ +\infty)$ рассмотрим СДН

$$\dot{X} = \tau_X \left[F(X) + \delta \left(X - \bar{X} \right) \right]. \tag{1.77}$$

Здесь $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ – численность в момент t «жертвы» X_1 и «хищника» X_2;

$F(X) = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 - \gamma_1 X_2) X_1 \\ -(\varepsilon_2 - \gamma_2 X_1) X_2 \end{pmatrix}$ – правая часть классической модели Лотки-Вольтерра системы «хищник-жертва»; $\bar{X}$ – положение равновесия классической модели; $\varepsilon_1,\ \gamma_1,\ \varepsilon_2,\ \gamma_2,\ \delta$ – неотрицательные параметры; слагаемое $\delta\left(X - \bar{X}\right)$ учитывает внешние факторы, влияющие на численность видов.

Ограничение $X \in \bar{Q}$ моделирует определённый способ искусственного регулирования численности видов $X_1,\ X_2$. Если $\delta = 0$ и $\bar{Q} = \mathrm{R}_+^2$, то (1.77) представляет классическую модель системы «хищник-жертва»; в этом случае $F(X) \in T_X$ для любого $X \in \bar{Q}$, так что $\tau_X F(X) = F(X)$. Если $\delta > 0$ и $\varepsilon_1 = \gamma_1 = \varepsilon_2 = \gamma_2 = 0$ (и при этом $\bar{X} = 0$), то (1.77) распадается на два простейших уравнения

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \delta X_1, \\ \dot{X}_2 = \delta X_2. \end{cases}$$

Установим признаки автоколебательности системы (1.77), т.е. существования у неё единственного орбитально устойчивого (в усиленном смысле) предельного цикла. При рассмотрении этой задачи удобно ввести новые переменные $x_1 = X_1 - \bar{X}_1,\ x_2 = X_2 - \bar{X}_2$.

Заметим, что

$$N_X\left(\bar{Q}\right)=N_{X-\bar{X}}\left(\bar{Q}-\bar{X}\right) \text{ и } T_X\left(\bar{Q}\right)=T_{X-\bar{X}}\left(\bar{Q}-\bar{X}\right). \tag{1.78}$$

Действительно, первое соотношение вытекает из определения нормального конуса (см. 1.2.3) $Y\in N_X\left(\bar{Q}\right)\Leftrightarrow\forall\left(\xi\in\bar{Q}\right)\left[\left(Y,\ \xi-X\right)\le 0\right]\Leftrightarrow\forall\left(\bar{\xi}=\xi-\bar{X}\in\bar{Q}-\bar{X}\right)$ $\left[\left(Y,\ \bar{\xi}-\left(X-\bar{X}\right)\right)=\left(Y,\ \xi-X\right)\le 0\le 0\right]\Leftrightarrow Y\in N_{X-\bar{X}}\left(\bar{Q}-\bar{X}\right)$. Второе соотношение непосредственно следует из первого.

Тогда с новыми переменными в силу (1.78) система (1.77) принимает вид

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\tau_x\begin{pmatrix} -\gamma_1 x_2 X_1+\delta x_1 \\ \gamma_2 x_1 X_2+\delta x_2 \end{pmatrix}=:\tau_x f\left(x\right). \tag{1.79}$$

Ограничение $X\in\bar{Q}$ в новых обозначениях имеют вид

$$x\in\bar{Q}-\bar{X}=:Q. \tag{1.80}$$

Основным инструментом исследования будет теорема из 1.6.3.

1.7.2.1. Проверка условий 1.6.3.1

Условие (1.64) проверим для матрицы $B=\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_2\varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\gamma_1\varepsilon_2}{\gamma_2} \end{pmatrix}$:

$$\left(Bx,\ f\left(x\right)\right)=\left(\frac{\gamma_2\varepsilon_1}{\gamma_1}x_1^2+\frac{\gamma_1\varepsilon_2}{\gamma_2}x_2^2\right)\delta+x_1x_2\left(\gamma_1\varepsilon_2x_2-\gamma_2\varepsilon_1x_1\right)=\left(\frac{\gamma_2\varepsilon_1\delta}{\gamma_1}-\gamma_2\varepsilon_1x_2\right)x_1^2+$$
$$\left(\frac{\gamma_1\varepsilon_2\delta}{\gamma_2}+\gamma_1\varepsilon_2x_1\right)x_2^2.$$

Итак (1.64) будет выполнено, если $x_2<\dfrac{\delta}{\gamma_1}$ и $x_1>\dfrac{\delta}{\gamma_2}$, т.е.

$$X_2<\frac{\varepsilon_1+\delta}{\gamma_1}\ ,\ X_1>\frac{\varepsilon_2-\delta}{\gamma_2}. \tag{1.81}$$

Проверим выполнение условия (1.65):

$$\left(f\left(x\right),\ Cx\right)=\gamma_1x_2^2X_1+\gamma_2x_1^2X_2;$$

Поэтому для выполнения неравенства (1.65) достаточно, чтобы для любого $X \in \bar{Q}$ были справедливы неравенства:

$$\gamma_1 X_1 \ge v_0 > 0,\ \gamma_2 X_2 \ge v_0. \tag{1.82}$$

1.7.2.2. Формулировка и доказательство существования устойчивой замкнутой траектории обобщённой системы «хищник-жертва»

Пусть выпуклое замкнутое непустое множество $\bar{Q} \subset \mathrm{R}_+^2$ *ограничено, а параметры системы* (1.77) *строго положительны и таковы, что для любого* $X \in \bar{Q}$ *выполнены неравенства* (1.81), (1.82). *Пусть*

$$\bar{X} \in \operatorname{int} \bar{Q}, \tag{1.83}$$

и на границе $\partial\bar{Q}$ *множества* $\bar{Q}$ *выполняется:*

$$X \in \partial\bar{Q} \Rightarrow \exists\left(e \in T_x\right)\left[\left(e,\ F(X) + \delta\left(X - \bar{X}\right)\right) > 0\right]. \tag{1.84}$$

Тогда система (1.77) *имеет единственную замкнутую траекторию, в которую вливаются все другие траектории, отличные от положения равновесия* $\bar{X}$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно проверить, что заключение верно для преобразованной системы (1.79). Неравенства (1.81), (1.82) гарантируют выполнение для этой системы условий (1.64), (1.65). Поскольку множество $\bar{Q}$ (и, следовательно, Q) ограничено, и функция f непрерывно дифференцируема, она удовлетворяет условию Липшица. Условие (1.62) для (1.79), очевидно, эквивалентно требованию (1.78). Наконец, для проверки условия (1.63) напомним определение нормального конуса $z \in N_x \Leftrightarrow \forall\left(y \in Q\right)\left[\left(y - x,\ z\right) \le 0\right]$. В исходных обозначениях:

$$Z = F(X) + \delta\left(X - \bar{X}\right) \in N_X \Leftrightarrow \forall\left(Y \in \bar{Q}\right)\left[\left(Y - X,\ Z\right) \le 0\right].$$

Поэтому условие (1.84) означает, что $\forall\left(X \in \partial\bar{Q}\right)\left[Z \notin N_X\right]$, или для новых переменных: $\forall\left(x \in \partial Q\right)\left[z = f(x) \notin N_x\right]$.

Если же $x \in \operatorname{int} Q$, то соотношение $f(x) \in N_x = \{0\}$ означает, что $-\gamma_1 x_2 X_1 + \delta x_1 = 0$, $\gamma_2 x_1 X_2 + \delta x_2 = 0$. Умножим первое из этих равенств на x_2, второе на x_1 и вычтем из второго первое: $\gamma_2 x_1^2 X_2 + \gamma_1 x_2^2 X_1 = 0$.

Поскольку $\gamma_1,\ \gamma_2,\ X_1,\ X_2$ строго положительны, это означает, что $x_1 = x_2 = 0$. Итак все условия 1.6.3.1 выполнены для (1.79), и утверждение полностью доказано.

1.7.2.3. Примеры численных экспериментов

На рис. 25, 26 приведены фазовые траектории двух обобщённых систем «хищник-жертва».

Для первой системы (рис.25) множество $\bar{Q}$ задаётся неравенствами $a \le X_1 \le a_1,\ b \le X_2 \le b_1$; параметры системы имеют значения: $\varepsilon_1 = \gamma_1 = 1,\ \varepsilon_2 = \gamma_2 = 1,$ $\delta = 0.25$, $a = 0.75$, $b = 0.5$, $a_1 = 1.7$, $b_1 = 1.2$. Нетрудно проверить, что все условия теоремы в данном случае выполнены. Красным цветом выделено положение равновесия $\bar{X}$ и замкнутая траектория.

Вторая система рассматривается в неограниченном множестве $\bar{Q} = [a,\ +\infty) \times [b,\ +\infty)$ с теми же значениями параметров. Отметим, что первое из неравенств (1.81) в этом случае не выполнено. Вообще, условие (1.64), разумеется, не является необходимым.

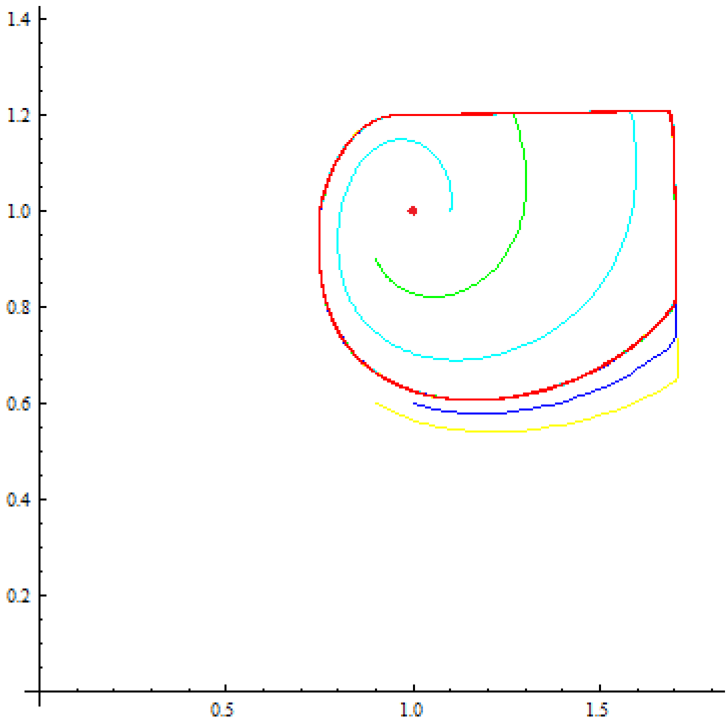


Рис. 25

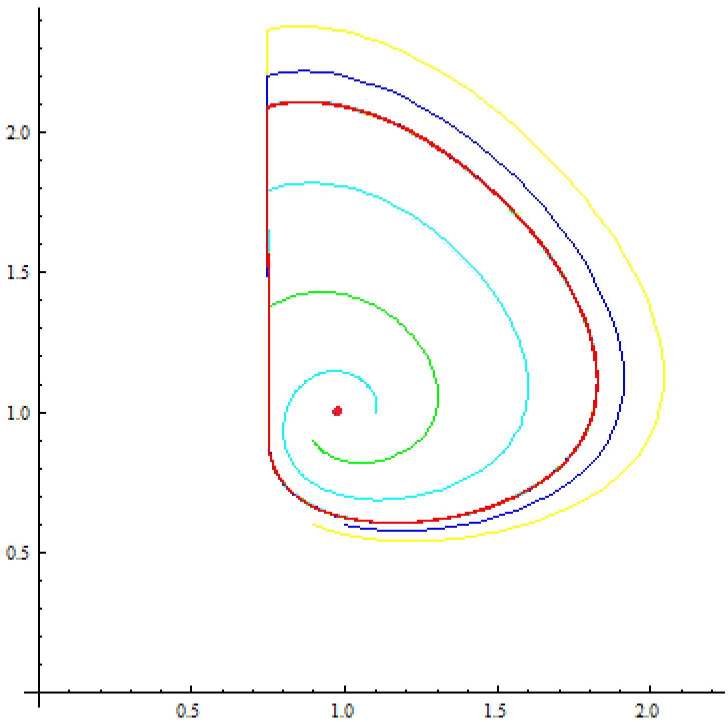


Рис. 26

Численный анализ в этих примерах, как и во всех примерах главы 1, проведён с помощью *гладкой модели системы с диодной нелинейностью*, подробно рассматриваемой и обоснованной в третьей главе.