Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Конспекты лекций и упражнения

/Логика предикатов/

Оглавление

2. Логика предикатов

2.1. Язык прикладной логики предикатов

2.1.1. Элементы языка прикладной логики предикатов.

♣Рассмотрим предикат

$$x^2 < y. \tag{1}$$

Он не содержит логических связок, поэтому его формальная запись в языке логики высказываний состоит из одной буквы, например, *P*.

♦В языке логики предикатов (точнее, *чистой* логики предикатов) должны быть выявлены все переменные, входящие в предикат, и какой-нибудь буквой обозначено *отношение* между ними, выражаемое этим предикатом: $P \models\!\mid A(x, y)$. ♣В данном случае буквой *A* обозначено следующее *свойство* объектов *x* и *y* (или *отношение* между ними): квадрат первого меньше второго (предполагается, что x и y – вещественные числа).

♦Часто мы будем пользоваться более богатым языком *прикладной* логики предикатов, который отличается от обычного математического языка только более жесткими *синтаксическими* требованиями. Именно, в нем должны быть четко выделены следующие элементы.

– *Константы* – имена индивидуальных предметов. ♣В (1) это 2.

– *Переменные* – имена неопределенных предметов, конкретные значения которых выбираются в единой для всех переменных *предметной области D*. ♣В (1) переменными являются буквы *x, y* с предметной областью $D = \mathbf{R}$.

– *Функциональные знаки,* с помощью которых из *простых выражений* (констант и переменных) образуются *сложные*. ♣В (1) единственная функция возведения в квадрат x^2 изображена, как обычно, взаимным расположением аргумента x и параметра 2. Для табличного анализа умозаключений в прикладной логике предикатов удобно для каждой функции использовать явный функциональный знак. Например, выражение x^2 можно записать в виде $x \uparrow 2$. В логике выражения чаще называются *термами* от английского “term” – член. Мы будем употреблять более традиционный для математики термин “выражение”.

– *Знаки отношений* (*свойств*). ♣В (1) единственным знаком отношения является “<”. Отношения и функции могут зависеть от любого числа *предметных* (т.е. принимающих значения в *D*) переменных. Единственным формальным отличием функции от отношения является то, что значения функции лежат в *D*, а значения отношения – в двухэлементном множестве булевских констант **B** = {*и, л*}. Отношение от *n* переменных, примененное к *n* выражениям, образует *простой предикат*. Сложные предикаты строятся из простых с помощью логических операций.

– *Логические связки* ¬, ∧, ∨, →, ↔.

– *Кванторы* ∀, ∃, которые подробно описываются ниже.

– *Скобки*, определяющие порядок образования сложных выражений и предикатов.

2.1.2. Кванторы. Свободные и связанные переменные.

♦Из простого предиката (1) можно получить следующие более сложные предложения.

Существует x, для которого справедливо (1) – $\exists(x)[x^2 < y]$. (2)

Для любого y выполнено (1) – $\forall(y)[x^2 < y]$. (3)

Существует такое y, что для любого x выполнено (1) – $\exists(y)\forall(x)[(1)]$. (4)

Для любого x существует такое y, что выполнено (1) – $\forall(x)\exists(y)[(1)]$. (5)

♣Знаки $\forall$ и $\exists$ происходят от английских слов All (все) и Exist (существовать) и называются *кванторами общности* и *существования*, соответственно. Термин “квантор” образован от латинского “quantum” – сколько. Кванторы указывают, для какого количества (для всех или хотя бы для одного) значений переменной справедливо данное утверждение.

♦Истинность предложения (2), как нетрудно видеть, зависит только от выбора значения переменной y: при $y \le 0$ оно ложно, а при остальных значениях истинно. Поэтому говорят, что применение квантора по какой-нибудь переменной превращает эту переменную в *связанную*, от конкретных значений которой истинность утверждения уже не зависит. В (2) имеются два *вхождения* переменной x, которые связаны квантором существования, и одна *свободная* перемен-
ная y. Аналогично, в (3) два вхождения переменной y связаны квантором общности, а единственное вхождение переменной x свободно; утверждение ложно при всех значениях x. В (4) и (5) все переменные связаны; высказывание (4) ложно, а (5) истинно. Последнее обстоятельство следует подчеркнуть особо: *перестановка разноименных кванторов может существенно изменить предложение.*

2.1.3. Основные свойства кванторов.

•Формальное описание кванторов и действий с ними дают следующие четыре правила.

Правила общности	*Правила существования*
$[\forall(x)A(x)] = и \models A(c) = и \quad (\forall и)$,	$[\forall(x)A(x)] = л \mid\approx A(n) = л \quad (\forall л)$,
$[\exists(x)A(x)] = л \models A(c) = л \quad (\exists л)$,	$[\exists(x)A(x)] = и \mid\approx A(n) = и \quad (\exists и)$.

В правилах общности присутствует *произвольная* константа c, а в правилах существования утверждается только *существование* константы n, для которой справедлива правая часть.

♣Правило ($\forall и$) аналогично известному свойству конъюнкции: если конъюнкция двух или нескольких предикатов истинна, то истинны все ее операнды. Для квантора в роли операндов выступают высказывания, получающиеся из $A(x)$ при всевозможных значениях x; их может быть бесконечно много.

Правило ($\exists л$) есть обобщение свойства дизъюнкции: если дизъюнкция ложна, то ложны все ее операнды.

♦ В правилах существования мы использовали нетрадиционный знак $|\approx$, которому мы придаем следующий смысл: если выполнено то, что написано слева от него, то можно ввести в рассмотрение *новую* (т.е. не участвовавшую ранее в данном рассуждении) константу *n*, для которой верно написанное справа от этого знака. ♣Например, если доказано, что уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы одно решение, т.е. $\exists(x)[f(x)=0]$, то можно обозначить новой для данного рассуждения буквой n одно из его решений (без уточнения того, какое это именно решение) и в дальнейшем пользоваться истинным утверждением $f(n)=0$. Аналогично, если известно, что утверждение $\forall(x)[f(x)=0]$ ложно, то можно ввести новую константу *n*, для которой $f(n)\neq 0$.

2.1.4. Ограниченные кванторы.

♣Как уже отмечалось, в логике предикатов действует соглашение о том, что все предметные переменные имеют одну и ту же область изменения *D*. В математических теориях часто рассматриваются объекты различной природы: числа, множества, функции и т.п. Все они составляют единую предметную область *D*, а если некоторый квантор должен относиться только к части этой области, то на переменную, по которой он применяется, накладывают *ограничение*. Пример:

$$\forall(\varepsilon:\varepsilon>0)\exists(n:n\in\mathbf{N})[\frac{1}{n}<\varepsilon]. \tag{6}$$

♦Ограниченные кванторы не являются новыми логическими операциями; они сводятся к обычным кванторам с помощью следующих определений:

$$\forall(x:A(x))B(x)\overset{опр}{\leftrightarrow}\forall(x)[A(x)\rightarrow B(x)]\ ,$$

$$\exists(x:A(x))B(x)\overset{опр}{\leftrightarrow}\exists(x)[A(x)\wedge B(x)]\ .$$

♣Например, утверждение (6) в обычных кванторах принимает вид

$$\forall(\varepsilon)[\varepsilon>0\rightarrow\exists(n)[n\in\mathbf{N}\wedge\frac{1}{n}<\varepsilon]].$$

2.1.5. Упражнение.

Записать данные формулы на обычном языке и определить, истинны ли они в теории.

1. $\exists(x:x\in\mathbf{R})\forall(n:n\in\mathbf{N})[n>x]$.

2. $\forall(a:a\in\mathbf{R})\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1=0]$.

3. $\forall(a:a\in\mathbf{R}\wedge\neg a=0)[\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1>0]\wedge\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1<0]]$.

4. $\exists(a:a\in\mathbf{R})\forall(x:x\in\mathbf{R})[ax+1>0]$.

5. $\forall(a\in\mathbf{R})[\exists(x\in\mathbf{R})[ax+1>0]\rightarrow\exists(y\in\mathbf{R})[ay+1<0]]$.

6. $\exists(c\in\mathbf{R})[\neg\forall(x\in\mathbf{R})[x^2+x+c>0]]$.

7. $\forall(a\in\mathbf{R}:a\ge 0)\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+x+1>0]$.

8. $\forall(a,b,c\in\mathbf{R})[b^2<4ac\to\exists(x_1,x_2)[ax_1^2+bx_1+c=0\wedge ax_2^2+bx_2+c=0\wedge x_1\ne x_2]]$

9. $\forall(a\in\mathbf{R})\exists(x\in\mathbf{R})\forall(c\in\mathbf{R})[ax^2+x+c^2>0]$.

10. $\exists(a\in\mathbf{R})\forall(c\in\mathbf{R})\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+x+c>0]$.

2.1.6. Пример формализации в языке прикладной логики предикатов.

♣ Рассмотрим на следующем примере дополнения к процедуре формализации, рассмотренной в 1.2.4 и 1.2.6. Эти дополнения относятся к таким формам предложений, как “Для любого... выполнено...” и “Существует..., для которого выполнено...” .

♣ *Для любых вещественных* a,b,c *верно, что если* $ac<0$, *то* $ax^2+bx+c<0$ *при некотором вещественном x.*

Очевидно, утверждение “$ax^2+bx+c<0$ *при некотором вещественном x*” можно без изменения смысла и логической формы преобразовать в “*Существует вещественное x, для которого* $ax^2+bx+c<0$ ”. Теперь перевод на язык прикладной логики предикатов дает формулу

$$\forall(a:a\in\mathbf{R})\forall(b:b\in\mathbf{R})\forall(c:c\in\mathbf{R})[ac<0\to\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax^2+bx+c<0]]. \qquad (7)$$

Группу следующих друг за другом *одноименных* кванторов часто записывают в виде одного квантора по нескольким переменным. Кроме того, если это не может вызвать недоразумений, в круглых скобках рядом с квантором не указыва-
ют отдельно имя переменной, а пишут сразу предикат, ограничивающий ее значения:

$$\forall(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},c\in\mathbf{R})[ac<0\to\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+bx+c<0]]. \qquad (8)$$

•*Если для записи данного предложения воспользоваться знаком следования в теории, то квантор общности не нужен:*

$$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},c\in\mathbf{R},ac<0\Rightarrow\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+bx+c<0]. \qquad (9)$$

Напомним, это соотношение означает, что *в любой интерпретации*, в которой истинны все аксиомы и определения теории вещественных чисел и посылки данного умозаключения, будет истинным и заключение. Квантор общности по всем *a, b, c* уже включен в эту формулировку. Формула (9) не принадлежит языку прикладной логики предикатов, так как знак “⇒” не принадлежит алфавиту этого языка; он входит (как и знак логического следствия) в *метаязык* логики, на котором изучаются предложения, написанные на языке логики. Отметим, что для реального математического языка запись (7) в виде (9) наиболее типична. Заметим также, что (9) эквивалентно тому, что в данной теории истинна импликация

$$a\in\mathbf{R}\wedge b\in\mathbf{R}\wedge c\in\mathbf{R}\wedge ac<0\to\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+bx+c<0]. \qquad (10)$$

Нетрудно видеть, что $(7) \models (10)$, но $(10) \not\models (7)$. Однако в следующем пункте будет показано, что из истинности (10) в теории вытекает истинность в этой теории утверждения (7).

2.1.7. Правило обобщения.

• *Если в некоторой теории истинно предложение* $P(z)$, *причём буква z не входит свободно в аксиомы и определения этой теории, то в ней истинно и предложение* $\forall(z)P(z)$.

♥Для доказательства предположим, что последняя формула не является истинной, т.е. не следует логически из аксиом и определений рассматриваемой теории. Тогда найдётся такая интерпретация $\mathbf{I}$ аксиом, определений и предиката P, в которой истинны аксиомы и определения, а утверждение $P(z)$ ложно хотя бы для одного значения $z = z_0$ из предметной области данной интерпретации.
Добавив к интерпретации $\mathbf{I}$ интерпретацию переменной z как константы z_0, мы получим интерпретацию $\mathbf{I}_z$, в которой аксиомы и определения по-прежнему истинны (так как z в них не входит в свободном виде), а предложение $P(z)$, принявшее вид $P(z_0)$, ложно. Но это противоречит тому, что $P(z)$ *истинно.* Утверждение доказано.

♣ Чаще всего правило обобщения используется в следующей форме:
• *если для некоторой теории выполнено соотношение* $P(z) \Rightarrow Q(z)$, *причём буква z не входит свободно в аксиомы и определения этой теории, то в ней истинно предложение* $\forall(z)[P(z) \to Q(z)]$.
Это утверждение есть непосредственное следствие правила обобщения, поскольку из его условия, очевидно, вытекает истинность в данной теории импликации $P(z) \to Q(z)$.

♣ Например, из истинности утверждения (10) в теории вещественных чисел (аксиомы и определения которой не содержат свободных вхождений букв a,b,c) вытекает истинность в этой теории утверждения (7). Это обычный путь доказательства утверждений вида (7): сначала вводят *допущения*, написанные в левой части (9), затем из этих допущений-посылок выводят как следствие в данной теории правую часть (9) и, наконец, делают вывод, что справедливо (7). Правило обобщения есть формальное обоснование этой привычной и интуитивно понятной методики доказательства утверждений с квантором общности.

2.1.8. Упражнение.

Формализовать данный предикат в языке прикладной логики предикатов. Определить, является ли он истинным.
1. Неравенство $x^2 \geq 0$ справедливо для любого действительного x.

2. Найдется хотя бы одно действительное число x, для которого $-x^2+x+1<0$, и хотя бы одно действительное x, для которого $-x^2+x+1>0$.
3. Существует вещественное M, такое, что $(n+1)/n \le M$ для любого целого $n \ne 0$.
4. Не существует натурального N, которое больше любого вещественного x.
5. Для любых двух вещественных чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $x<y$, найдется рациональное q, такое, что $x<q<y$.
6. Для любого отрицательного a имеется действительное значение x, для которого $ax^2+x+1<0$.
7. Для любых $a>0, M>0$ существуют как положительное, так и отрицательное значения x, при которых $ax^2+x+1>M$.
8. Для любого положительного ε существует натуральное N, такое, что $\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n \ge N$.
9. Существуют целые числа, которые не делятся ни на какие натуральные числа, кроме 1 и модуля самого себя.
10. Для любых вещественных чисел x и y выполнено одно и только одно из соотношений $x<y, x=y, x>y$.

2.1.9. О формализации определений.

Отметим некоторые особенности, характерные для формализации определений.

♣ *Число T называется периодом функции f, если для любого x из области определения f справедливы равенства* $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.

В формализованном виде это определение можно записать так:

$$T \in \mathbf{R} \wedge f - \text{функция} \overset{\text{опр}}{\Rightarrow}$$
$$(T - \text{период } f) \leftrightarrow \forall(x \in D(f))[f(x+T)=f(x) \wedge f(x-T)=f(x)].$$

Его структуру в общем виде можно изобразить в виде формулы

$$C(s) \overset{\text{опр}}{\Rightarrow} (P(s) \leftrightarrow Q(s)),$$

где $C(s)$ – *предварительное условие* , относящееся к списку переменных s, $P(s)$ – *определяемый предикат*, $Q(s)$ – *определяющий предикат*; последнюю формулу можно также записать следующим образом: $\forall(s:C(s))[P(s) \overset{\text{опр}}{\leftrightarrow} Q(s)]$. Если определяется не предикат, а *выражение* $P(s)$ (константа или функция) через известное *выражение* $Q(s)$, то в определениях вместо знака двойной импликации фигурирует знак равенства .

♣ $x \in \mathbf{R} \wedge \cos x \neq 0 \overset{опр}{\Rightarrow} \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ – явное определение функции.

♣ $y = \arcsin x \overset{опр}{\Leftrightarrow} (x = \sin y) \wedge (y \in [-\pi/2, \pi/2])$ – неявное определение функции. Предварительное условие может отсутствовать.

♣ $0! \overset{опр}{=} 1,\ \forall(n \in \mathbf{N})[n! \overset{опр}{=} (n-1)! \cdot n]$ – индуктивное определение.

2.1.10. Упражнение.

Формализовать данные определения.

1. Число q называется *рациональным,* если найдутся целое m и натуральное n, такие, что $q = m/n$.

2. Натуральное число d называется *делителем* целого m (обозначение $m \vdots d$), если существует целое k, такое, что $m = kd$.

3. Натуральные числа m и n называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих натуральных делителей $d > 1$.

4. Число M называется *мажорантой* числового множества A (обозначение $A \leq M$), если $a \leq M$ для любого $a \in A$.

5. Говорят, что число M_0 есть *максимум* числового множества A ($M_0 = \max A$), если оно принадлежит этому множеству и является его мажорантой.

6. Формализовать аналогичные определения *миноранты* и *минимума* числового множества.

7. Формализовать определения суммы $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ и произведения $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$.

8. Формализовать определения *супремума* и *инфимума* числового множества.

9. Формализовать определение *предела* числовой последовательности.

10. Формализовать определение *равномерно непрерывной функции*.

2.2. Следствие в прикладной логике предикатов

В этом параграфе мы распространим направленную табличную процедуру проверки логического следствия на формулы прикладной логики предикатов.

2.2.1. Применение правил общности.

♣ В приводимом ниже примере первые три шага обычны: посылкам присвоено значение “*и*”, заключению – “*л*”. На шаге 4 связанной переменной x присвоено значение a, а на пятом шаге применено правило общности ($\forall$*и*) – истинностное значение перенесено с квантора на предикат. Шестой шаг следует из второго. На седьмом шаге получилось противоречие с шагом 3, поскольку во всей области действия квантора общности по x этой переменной присвоено значение a. Значения, присваиваемые связанным переменным, можно произвольно выбирать из ♦ *предметной области данного набора формул*, т.е. множества всех участвующих в них констант и свободных переменных, дополненного бесконечным множеством *стандартных констант* $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$.

$$\begin{array}{cccccccc} \forall & (x) & [x<0 & \to & x+1<1], & a<0 & \overset{?}{\models} & a+1<1 \\ \textit{и} & \textit{a} & \textit{и} & \textit{и} & \underline{\textit{и}} & \textit{и} & & \underline{\textit{л}} \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 7 & 2 & & 3 \end{array}$$

Отметим новые по сравнению с логикой высказываний элементы табличного доказательства.

♦ 1. *Связанной переменной можно присвоить любое значение из предметной области данного набора формул одновременно во всей области действия квантора.*

♦ 2. *Если при этом получается ситуация общности (т.е. выполнено условие одного из правил общности), то можно перенести истинностное значение с квантора на предикат.*

2.2.2. Обозначения сложных выражений. Ограниченные кванторы.

♣ В рассматриваемом ниже примере на четвертом шаге введено обозначение c_0 для сложного выражения $\sin y$. Такие обозначения выбираются из бесконечного списка стандартных констант $c_0, c_1, c_2, \ldots$ с тем условием, что для *нового выражения* вводимая константа должна быть *новой*, т.е. не входить в данные формулы и в предыдущую часть данного табличного доказательства. На шаге 6 к ограниченному квантору общности применено правило общности ($\forall и$). Над скобкой помещен знак импликации, которая входит в определение ограниченного квантора общности; именно на него переносится на шестом шаге истинностное значение с квантора $\forall$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \forall & (x: & x\in\mathbf{R}) & \overset{\to}{[} & x\uparrow 2\geq 0], & \sin y & \in\mathbf{R} & \overset{?}{\models} & (\sin y) & \uparrow 2 & \geq 0 \\ \textit{и} & c_0 & \textit{и} & \textit{и} & \underline{\textit{и}} & c_0 & \textit{и} & \textit{да} & c_0 & & \underline{\textit{л}} \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 2 & & 9 & & 3 \end{array}$$

К списку новых элементов табличных доказательств для логики предикатов присоединим следующие два.

♦ 3. *Сложным выражениям можно приписывать обозначения из числа новых стандартных констант.*

♦ 4. *Ограниченные кванторы сводятся к неограниченным путем добавления над скобкой знака импликации в случае квантора общности и знака конъюнкции для квантора существования.*

2.2.3. Пример с подстроками.

♣ В следующем примере после шага 10 строка продолжается по вертикали с переходом на шаге 11 к новой *подстроке*, в которой переменной x присваивается еще одно значение y.

$$\forall\,(x<0)^{\to}[\,x+1<1],\ a<0,\ y<0 \overset{?}{\models} a+1<1 \wedge y+1<1$$

и а и   и   и   и   и   и л $\underline{л}$
1 5 7   6   8   2   3   9 4 $\underline{10}$
у и   и $\underline{и}$
11 13   12 $\underline{14}$

К списку новых элементов мы присоединим следующий.

♦ 5. *Если по ходу табличного доказательства требуется связанной переменной присвоить последовательно несколько различных значений, то это делается в различных подстроках одной строки.*

2.2.4. Применение правил существования.

♣ В следующем доказательстве на шаге 4 связанной переменной присвоено *новое* (не встречавшееся ранее в этой таблице) постоянное значение, поэтому в силу правила существования $(\forall л)$ значение “*л*” перенесено с квантора на предикат (шаг 5).

$$\neg\,\exists\ (x\in\mathbf{R})\ ^{\wedge}\ [\sin x>1] \overset{?}{\models} \forall\ (x\in\mathbf{R})^{\to}[\neg\sin x>1]$$

и л c_0 *и л* $\underline{л}$ *да л* c_0 *и л л* $\underline{и}$
1 3 9 11 10 $\underline{12}$ 2 4 6 5 7 $\underline{8}$

♣ Отметим, что непосредственно после шага 3 была также возможность в левой части доказываемого утверждения воспользоваться правилом общности $(\exists л)$. Однако рациональнее, как это сделано, сначала применить правило существования в правой части, а затем – правило общности в левой. Иначе, как показано ниже, доказательство усложняется, так как на шаге 6 необходимо ввести *новую* константу, а затем её использовать на шаге 11.

$$\neg\,\exists\ (x\in\mathbf{R})\ ^{\wedge}\ [\sin x>1] \overset{?}{\models} \forall\ (x\in\mathbf{R})^{\to}[\neg\sin x>1]$$

и л c_0 *л*   *да л* c_1 *и л л* $\underline{и}$
1 3 4 5   2 6 8 7 9 $\underline{10}$

c_1 *и л* $\underline{л}$
11 13 12 $\underline{14}$

♦ 6. *Если на некотором этапе табличной процедуры возможно применение правила общности и правила существования, то целесообразно начать с правила существования.*

2.2.5. Обратное применение правил общности.

$$\exists\,(x)\,[x>0\wedge x<1] \overset{?}{\models} \exists\,(x)\,[x>0]\wedge\exists\,(x)\,[x<1]$$

и c_0 *и и и да* $\underline{и}$ c_0 *и* $\underline{л}$ $\underline{и}$ c_0 *и*
1 3 5 4 6 $\underline{9}$ 7 8 $\underline{2}$ $\underline{12}$ 10 11

♣ После шага 2 можно было разветвить таблицу, так как конъюнкции присвоено значение «*л*». Но в данном случае имеется более прямой путь. На шагах 3, 4 применяется правило существования – вводится *новая* константа c_0. На шаге 7 сразу производится присваивание $x=c_0$ с целью воспользоваться далее (шаг 8) результатом шага 5. Значение «*и*» на шаге 9 получено из 7 и 8 «обратным применением правила общности $(\exists л)$», поскольку значение «*л*» приводило бы к противоречию с этим правилом и шагом 8. Проведя аналогичные действия на шагах 10-12, мы получили противоречие между 12, 2 и 9. Отметим эту методику как ещё один новый элемент табличной процедуры.

♦ 7. *Иногда удобно применять правила общности в следующем виде:*

$$A(c) = и \models [\exists(x)A(x)] = и, \qquad\qquad A(c) = л \models [\forall(x)A(x)] = л.$$

2.2.6. Равенство как логический предикат.

♦ Равенство $x = y$ будем понимать как *тождество*, т. е. выражение того факта, что x и y – это имена одного и того же объекта. ♣ В математике равенство иногда понимается и в другом смысле; например, равенство двух векторов – это возможность добиться их полного совпадения путём параллельного переноса. Для табличной процедуры принятое понимание равенства выражается добавлением двух правил построения таблиц.

♦ 8. *Если в таблице есть фрагмент вида* $\begin{matrix} u = v \\ c \;\text{и}\; c_1 \end{matrix}$ *, то всюду в дальнейшем в этой таблице можно выражению* u *присваивать значение* c_1*, а выражению* v *– значение* c.

♦ 9. *Фрагмент таблицы вида* $\begin{matrix} u = v \\ c \;\text{л}\; c \end{matrix}$ *можно отметить как противоречие, или, что то же, фрагмент* $\begin{matrix} u = v \\ c \quad c \end{matrix}$ *можно дополнить значением «и» под знаком равенства.*

♣ В следующих двух примерах показано применение этих правил для доказательства утверждений, содержащих предикат равенства. Первый пример устанавливает *транзитивность* равенства, а второй – *взаимозаменяемость равных объектов*.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\overset{?}{\models} & \forall & (x, & y, & z) & [x & = & y & \wedge & y & = & z & \to & x & = & z] \\
\text{да} & \text{л} & c_0 & c_1 & c_2 & c_0 & \text{и} & c_1 & \text{и} & c_1 & \text{и} & c_2 & \text{л} & \underline{c_1} & \underline{\text{л}} & \underline{c_1} \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & 8 & & 6 & & 9 & & 5 & 10 & 7 & 11
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\overset{?}{\models} & \forall & (x, & y) & [P & (x) & \wedge & x & = & y & \to & P & (y)] \\
\text{да} & \text{л} & c_0 & c_1 & \underline{\text{и}} & \underline{c_0} & \text{и} & c_0 & \text{и} & c_1 & \text{л} & \underline{\text{л}} & \underline{c_0} \\
 & 1 & 2 & 3 & 7 & & 5 & & 8 & & 4 & 6 & 9
\end{array}$$

В первом примере на шагах 10 и 11 использовано правило 8, а противоречие отмечено по правилу 9. Во втором примере использовано только первое правило: оно позволило на шаге 9 присвоить переменной y значение c_0. В последнем примере предполагается, что предикат $P(x)$ не содержит буквы y, иначе последовательная подстановка y вместо x, а затем c_0 вместо y может дать результат, отличный от $P(c_0)$.

2.2.7. Квантор существования и единственности.

♦ Предикат равенства позволяет ввести часто используемый в математике *квантор существования и единственности:*

$$\exists!(x)P(x) \overset{опр}{=\!|\!=} \exists(x)P(x) \wedge \forall(x,y)[P(x) \wedge P(y) \to x = y].$$

♣Например, он используется в следующем высказывании:

$$\forall(a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})\exists!(x \in \mathbf{R})[a + x = b].$$

2.2.8. Упражнение.

Доказать справедливость следующих логических соотношений.

1. $\neg\exists(n \in \mathbf{N})[n+1<1], (-1)+1<1 \models \neg(-1 \in \mathbf{N})$.

2. $\forall(x \in \mathbf{R})[x^2 \geq 0], i^2 = -1, \neg(-1 \geq 0) \models \neg(i \in \mathbf{R})$.

3. $\forall(x \in \mathbf{R})[2x^2 + 1 > 0] \models \exists(n)\forall(x \in \mathbf{R})[nx^2 + 1 > 0]$.

4. $\forall(x : |x| \leq 1)[x \leq 1 \wedge -1 \leq x] =\!|\!= \forall(x)[|x| \leq 1 \to x \leq 1] \wedge \forall(x)[\neg(-1 \leq x) \to \neg(|x| \leq 1)]$.

5. $\exists(d \in \mathbf{Z})[15 \vdots d \wedge (d \vdots 2 \vee d \vdots 3)] =\!|\!= \exists(d : d \vdots 2)[d \in \mathbf{Z} \wedge 15 \vdots d] \vee$
$\vee \exists(d : d \in \mathbf{Z} \wedge 15 \vdots d)[d \vdots 3]$.

6. $\models \forall(x_1, x_2 : x_1 < x_2)[f(x_1) < f(x_2)] \wedge e < \pi \to f(e) < f(\pi)$.

7. $\models \exists(q \in \mathbf{Q})[e < q \wedge q < \pi] \to \exists(q \in \mathbf{Q})[e < q] \wedge \exists(q < \pi)[q \in \mathbf{Q}]$.

8. $\models \forall(n)[n \vdots 4 \to n \vdots 2] \to \neg\exists(n : n \vdots 4)[\neg n \vdots 2]$.

9. $\forall(x \in (0,\pi))[\sin x > 0], u \in (0,\pi), \neg(\sin u > 0) \models$.

10. $\sin e > 0, e \in (0,\pi), \neg\exists(x : \sin x > 0)[x \in (0,\pi)] \models$.

2.2.9. Упражнение.

Формализовать и проверить.

1. Для любого $x \in X$ справедливо неравенство $x < n$. Не существует такого m, чтобы для любого $y \in Y$ выполнялось неравенство $y < m$. Следовательно, не любой элемент $y \in Y$ принадлежит X.

2. Для любого n найдется $x \in X$, для которого не выполнено неравенство $x < n$. Неравенство $y < m$ справедливо для каждого $y \in Y$. Следовательно, хотя бы один элемент множества X не принадлежит Y.

3. Для любого положительного ε существует натуральное n, такое, что $n\varepsilon > 1$. Не существует натурального n, для которого $na > 1$. Следовательно, неверно, что a положительно.

4. Существует натуральное n, такое, что $x < n$ для любого $x \in X$. Для любого натурального m существует $y \in Y$, для которого не справедливо неравенство $y < m$. Следовательно, существует элемент $y \in Y$, который не принадлежит X.

2.3. Основные теоремы логики предикатов

Перечень наиболее употребительных соотношений логики предикатов мы представим в виде двух теорем.

2.3.1. Теорема о кванторах, отрицании, конъюнкции и дизъюнкции.

• *Пусть* $A, B, C,$ - *произвольные предикаты,* x *и* y - *переменные,* x_0 - *константа. Будем обозначать через* $A|_{x=y}$ *результат замены в* A *всех свободных вхождений* x *на* y *. Утверждается, что справедливы следующие соотношения.*

1) Правила *переименования* связанной переменной: если y не входит в A и B ни в связанном, ни в свободном виде, то

$$\forall(x:A)B \quad \models \quad \forall\left(y:A|_{x=y}\right)B|_{x=y}, \tag{$\forall xy$}$$

$$\exists(x:A)B \quad \models \quad \exists\left(y:A|_{x=y}\right)\ B|_{x=y}. \tag{$\exists xy$}$$

2) Правила *удаления* и *введения* кванторов:

$$\forall(x:A)B, A|_{x=x_0} \quad \models \quad B|_{x=x_0}, \tag{$\forall - уд$}$$

$$A|_{x=x_0}, B|_{x=x_0} \quad \models \exists(x:A)B. \tag{$\exists - вв$}$$

3) Правила *пронесения* кванторов через *отрицание*:

$$\neg\forall(x:A)B \quad \models\!\!\dashv \quad \exists(x:A)[\neg B], \tag{$\neg\forall$}$$

$$\neg\exists(x:A)B \quad \models\!\!\dashv \quad \forall(x:A)[\neg B]. \tag{$\neg\exists$}$$

4) Правила *пронесения* кванторов через *конъюнкцию*:

$$\forall(x:A)[B \wedge C] \quad \models\!\!\dashv \quad \forall(x:A)B \wedge \forall(x:A)C, \tag{$\forall\wedge$}$$

$$\exists(x:A)[B \wedge C] \ \overset{\neq\mid}{\models} \ \exists(x:A)B \wedge \exists(x:A)C; \tag{$\exists\wedge\models$}$$

если B или C не зависит от x , то

$$\exists(x:A)[B \wedge C] \quad \models\!\!\dashv \quad \exists(x:A)B \wedge \exists(x:A)C. \tag{$\exists\wedge\models\!\dashv$}$$

5) Правила *пронесения* кванторов через *дизъюнкцию*:

$$\exists(x:A)[B \vee C] \quad \models\!\!\dashv \quad \exists(x:A)B \vee \exists(x:A)C, \tag{$\exists\vee$}$$

$$\forall(x:A)[B \vee C] \ \overset{\mid\neq}{=\!\!\mid} \ \forall(x:A)B \vee \forall(x:A)C; \tag{$\forall\vee =\!\mid$}$$

если B или C не зависит от x , то

$$\forall(x:A)[B \vee C] \quad \models\!\!\dashv \quad \forall(x:A)B \vee \forall(x:A)C. \tag{$\forall\vee\models\!\dashv$}$$

♣ Условие, наложенное на y в $(\forall xy)$ и $(\exists xy)$, существенно. Например, нарушение этого условия приводит к тому, что из верного для любого y предиката $\exists(x : x \in \mathbf{Q})[x > y]$ получается ложное высказывание $\exists(y : y \in \mathbf{Q})[y > y]$ и из истинного высказывания $\forall(x : x \in \mathbf{R})\,\exists(y : y \in \mathbf{R})[x > y]$ – ложное утверждение $\forall(y : y \in \mathbf{R})\,\exists(y : y \in \mathbf{R})[y > y]$. ♣ Правила $(\neg\forall)$, $(\neg\exists)$ обобщают законы де Моргана. Они часто применяются в доказательствах от противного для переформулировки "отрицательных" утверждений в "позитивной" форме. Например, если мы предположили, что $\neg\exists(M)\forall(n:\ n \in \mathbf{N})[a_n \le M]$ (т.е. последовательность a не является ограниченной сверху), то мы можем переписать это предположение в эквивалентной *позитивной* форме:

$\forall(M)\exists(n:\ n\in\mathbf{N})[a_n>M]$ (здесь использована еще эквивалентность $\neg(a_n\le M)\Leftrightarrow a_n>M$). ♣ Все утверждения теоремы можно доказать с помощью табличной процедуры. Докажем, например, $(\forall xy)$, $(\exists\wedge|=)$ и $(\exists\wedge|=|)$.

♥ $(\forall xy)$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\forall & (x: & A) & ^{\to} & B & \overset{?}{\models} & \forall & (y: & A|_{x=y}) & ^{\to} & B|_{x=y} \\
\text{и} & c_1 & \text{и} & \text{и} & \underline{\text{и}} & \text{да} & \text{л} & c_1 & \text{и} & \text{л} & \underline{\text{л}} \\
1 & 7 & 9 & 8 & 10 & & 2 & 3 & 5 & 4 & 6
\end{array}$$

Ограничение на переменную y использовано на шаге 9, так как без него результат последовательной подстановки $A|_{x=y}\,\big|_{y=c_1}$ может не совпадать с результатом непосредственной подстановки $A|_{x=c_1}$. Например, $(x<y)|_{x=y}\,\big|_{y=c_1}$ есть $c_1<c_1$, а $(x<y)|_{x=c_1}$ - $c_1<y$. Это ограничение использовано и при выявлении противоречия между 6 и 10.

♥ $(\exists\wedge|=)$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\exists & (x: & A) & ^\wedge & [B & \wedge & C] & \overset{?}{\models} & \exists & (x: & A) & ^\wedge & B & \wedge & \exists & (x: & A) & ^\wedge & C \\
\text{и} & c_0 & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \text{да} & \underline{\text{и}} & c_0 & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \underline{\text{л}} & \underline{\text{и}} & c_0 & \text{и} & \text{и} & \text{и} \\
1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & & 13 & 9 & 10 & 12 & 11 & 2 & 18 & 14 & 15 & 17 & 16
\end{array}$$

Тот факт, что левая часть не следует логически из правой, докажем с помощью смыслового контрпримера: A - “$x\in\mathbf{N}$”, B - “x четно”, C - “x нечетно”. Очевидно, в такой интерпретации правая часть истинна, а левая ложна.
♥ В доказательстве $(\exists\wedge|=|)$ будем, для определенности, считать, что от x не зависит B. Ввиду $(\exists\wedge|=)$ достаточно доказать только

$(\exists\wedge=|)$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\exists & (x: & A) & ^\wedge & [B & \wedge & C] & \overset{?}{=\!|} & \exists & (x: & A) & ^\wedge & B & \wedge & \exists & (x: & A) & ^\wedge & C \\
\text{л} & c_1 & \text{и} & \text{л} & \underline{\text{и}} & \underline{\text{л}} & \underline{\text{и}} & \text{да} & \text{и} & c_0 & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \text{и} & \text{и} & c_1 & \text{и} & \text{и} & \text{и} \\
2 & 13 & 15 & 14 & 18 & 16 & 17 & & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 4 & 9 & 11 & 10 & 12
\end{array}$$

Поскольку $B|_{x=c_0}=\text{и}$ (шаг 8) и B не зависит от x, то и $B|_{x=c_1}=\text{и}$ (шаг 18).

2.3.2. Теорема о кванторах и импликации.

• 1) Правила *пронесения* кванторов через *импликацию*:

$$\exists(x:A)[B\to C]\ \ |=|\ \ \forall(x:A)B\to\exists(x:A)C\ ; \qquad (\exists\to)$$

$$\forall(x:A)[B\to C]\ \ \overset{|\neq}{=|}\ \ \exists(x:A)B\to\forall(x:A)C\ ; \qquad (\forall\to=|)$$

если B или C не зависит от x , то

$$\forall(x:A)[B\to C]\ \ |=|\ \ \exists(x:A)B\to\ \forall(x:A)C\ . \qquad (\forall\to|=|)$$

• 2) Правила *пронесения* кванторов через *кванторы*: если A не содержит буквы y, B – буквы x, а C может зависеть от x и y, то

$$\forall(x:A)\forall(y:B)C\ |=|\ \forall(y:B)\forall(x:A)C\ ; \qquad (\forall\forall)$$

$$\exists(x:A)\exists(y:B)C\ |=|\ \exists(y:B)\exists(x:A)C\ ; \qquad (\exists\exists)$$

$$\exists(x:A)\forall(y:B)C \ \overset{\neq|}{\models} \forall(y:B)\exists(x:A)C \ . \qquad (\exists\forall)$$

♥ Докажем $(\forall \to =|)$ и $(\forall \to |=|)$ с помощью *цепочки преобразований.*

$$\forall(x:A)[B \to C] \ \ |=| \ \forall(x:A)[\neg B \vee C] \overset{|\neq}{=|} (|=|) \ \ \forall(x:A)[\neg B] \vee \forall(x:A)C \ \ |=|$$
$$|=| \neg\exists(x:A)B \vee \forall(x:A)C \ \ |=| \ \ \exists(x:A)B \to \forall(x:A)C .$$

В преобразованиях последовательно использованы доказанные ранее утверждения: выражение $\to$ через $\neg$ и $\vee$, правило $(\forall\vee =|)$, а если B или C не зависит от x, то $(\forall\vee |=|)$, правило $(\neg\exists)$ и, наконец, вновь выражение $\to$ через $\neg$ и $\vee$, на этот раз в обратную сторону.

♣ В доказательствах цепочками преобразований применяется следующее свойство логической эквивалентности: • *если какую-нибудь часть формулы заменить на логически эквивалентную, то получится формула, логически эквивалентная данной.*

♥Это верно, потому что в любой интерпретации логически эквивалентные формулы имеют одинаковые истинностные значения.

♥ Для доказательства утверждения "$\neq|$" в ($\exists\forall$) рассмотрим следующую интерпретацию: A – «$x \in \mathbf{R}$», B – «$y \in \mathbf{R}$», C – «$x < y$». В этой интерпретации, как нетрудно видеть, правая часть ($\exists\forall$) истинна, а левая ложна.

♥ Доказательство утверждения "$|=$" в ($\exists\forall$) проведём с помощью табличной процедуры.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\exists & (x: & A) & {}^\wedge & \forall & (y: & B) & {}^\to & C & \overset{?}{\models} & \forall & (y: & B) & {}^\to & \exists & (x: & A) & {}^\wedge & C \\
\textit{и} & c_0 & \textit{и} & \textit{и} & \textit{и} & c_1 & \textit{и} & \textit{и} & \underline{\textit{и}} & \textit{да} & \textit{л} & c_1 & \textit{и} & \textit{л} & \textit{л} & c_0 & \textit{и} & \textit{л} & \underline{\textit{л}} \\
1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 15 & 17 & 16 & 18 & & 2 & 7 & 9 & 8 & 10 & 11 & 13 & 12 & 14
\end{array}$$

2.3.3. Упражнение.

Доказать остальные утверждения теорем 2.3.1 и 2.3.2.

2.3.4. EA-формализация.

♣ Из утверждения ($\exists\forall$) теоремы 2.3.2 вытекает, что квантор существования нельзя выносить из-под квантора общности:

$$\forall(x:A(x))\exists(y:B(y))C(x,y) \,|\neq \exists(y:B(y))\forall(x:A(x))C(x,y) .$$

Однако если определённым образом изменить смысл переменной y, то такое преобразование оказывается возможным.

• *Будем сопоставлять любому предикату* $P(s)$ *от списка переменных* $s=(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ *его «множество истинности»* $\widehat{P} \overset{\text{обозн}}{=} \{(s_1,s_2,\ldots,s_k):P(s)\}$ – *множество всех упорядоченных наборов значений переменных* s_i, *для которых выполняется условие* $P(s)$. *Пусть, как принято в анализе, запись* $\overline{y}:\hat{A} \to \hat{B}$ *означает, что* $\overline{y}$ *есть функция с областью определения* $\hat{A}$ *и областью значений, лежащей в* $\hat{B}$. *Утверждается, что если в рассматриваемой* *теории указанные понятия определены и обладают обычными свойствами, то в ней справедлива следующая эквивалентность:*

$$\forall(x: A(x))\exists(y: B(y))C(x,y) \Leftrightarrow \exists(\bar{y}: \widehat{A} \to \widehat{B})\forall(x: A(x))C(x,\bar{y}(x)) .$$

♥ Действительно, во-первых, если справедлива правая часть, то справедлива и левая, так как для любого x, удовлетворяющего условию $A(x)$, мы можем указать $y = \bar{y}(x)$, для которого будет выполнено $B(y)$ и $C(x,y)$. Во-вторых (и это главная часть утверждения), если верна левая часть, то любому значению $x \in \widehat{A}$ соответствует *хотя бы одно* значение $y \in \widehat{B}$, для которого справедливо утверждение $C(x,y)$; выбрав для каждого x *ровно по одному такому* y, мы построим функцию $\bar{y}$, о существовании которой идёт речь в правой части.

♣ В известных аксиоматиках теории множеств возможность выбора для любого x *ровно одного* y (если известно существование *хотя бы одного* y) обеспечивает специальная аксиома, которая называется *аксиомой выбора*. В период кризиса оснований математики (см. 1.4.4) высказывались предположения о том, что она может приводить к противоречиям. Но дальнейшие исследования показали, что в «достаточно осторожных» формулировках эта аксиома совместна с остальными (т.е. не составляет вместе с ними логического противоречия), хотя и не является их следствием. ♣ Вынесение кванторов существования из-под кванторов общности с использованием аксиомы выбора мы будем называть *приведением к ЕА-форме,* или *ЕА-формализацией. Подчеркнём, что здесь мы имеем дело не с логической эквивалентностью, а с эквивалентностью в теории множеств и функций.* ЕА-формы как один из возможных видов формализации нередко используются в математике. Например, традиционная расшифровка утверждения $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ имеет вид

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(N \in \mathbf{N})\forall(n \geq N)[|a_n - A| < \varepsilon];$$

а в ЕА-форме –

$$\exists(\bar{N}: (0,+\infty) \to \mathbf{N})\forall(\varepsilon > 0, n \geq \bar{N}(\varepsilon))\big[|a_n - A| < \varepsilon\big].$$

Функцию $\bar{N}$ можно использовать, например, в доказательстве критерия Коши:

$$n \geq \bar{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), m \geq \bar{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

2.3.5. Упражнение.

Записать данные утверждения в ЕА-форме. Отрицательные предложения предварительно преобразовать к позитивной форме (т.е. без использования отрицаний).

1. Функция f непрерывна в точке x_0. **2.** Функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. **3.** Функция f равномерно непрерывна на $[a,b]$. **4.** Последовательность (a_n) не является ограниченной. **5.** Функция f не является периодической. **6.** Чило A не является пределом последовательности (a_n). **7.** Функция f не является непрерывной на (a,b). **8.** Функция f не является равномерно непрерывной на (a,b).

2.3.6. О силлогизмах Аристотеля.

Ядром логики Аристотеля является учение о ♦ *силлогизмах* – умозаключениях вида

Большая посылка, Малая посылка $\models$ Заключение.

♦ Посылки и заключение силлогизма являются *суждениями*, которые на языке логики предикатов можно представить формулой

$$Q(x:A(x))[\sigma B(x)];$$

здесь Q – квантор $\forall$ или $\exists$, $A(x)$ и $B(x)$ – предикаты, σ – пустой знак или знак отрицания $\neg$.♦ Предикаты A,B называются *терминами* данного суждения; задание терминов в определённом порядке (AB) определяет *фигуру* суждения.♦ Большая посылка имеет фигуру (MP) или (PM), причём P называется *большим*, а M – *средним* термином силлогизма. Фигура малой посылки – (SM) или (MS) (S – *малый* термин силлогизма), фигура заключения – всегда (SP).♦ Комбинация фигур посылок определяет *фигуру силлогизма*:

фигура 1 – (MP,SM) , 2 – (PM,SM), 3 – (MP,MS), 4 – (PM,MS).

♦ Для описания конкретного *модуса* силлогизма нужно помимо его фигуры задать *тип* каждой посылки и заключения, т.е. комбинацию ($Q\sigma$). Суждения четырёх возможных типов имеют следующие названия и буквенные обозначения: ($\forall\varnothing$) – общеутвердительное – a, ($\exists\varnothing$) – частноутвердительное – i, ($\forall\neg$) – общеотрицательное – e, ($\exists\neg$) – частноотрицательное – o. Гласные буквы, обозначающие типы суждений, взяты из латинских слов **a**ff**i**rmo (утверждаю) и n**e**g**o** (отрицаю). ♣ Например, силлогизм *1eio* (имеющий мнемоническое название Ferio) – это умозаключение

$$\forall(x:M(x))[\neg P(x)],\ \exists(x:S(x))M(x)\ \models\ \exists(x:S(x))[\neg P(x)].$$

♣Код *1eio*, определяющий модус, в каждой из своих четырёх позиций имеет 4 возможных значения, поэтому всего имеется 4×4×4×4=256 различных модусов. Аристотель выделил из них все правильные и доказал, что остальные неправильны.

• *Перечисленные ниже 15 модусов силлогизмов, и только они, являются правильными: 1aaa (Barbara), 1eae (Celarent), 1aii (Darii), 1eio (Ferio),2eae, 2aee, 2eio, 2aoo, 3aii, 3eio, 3iai, 3oao, 4aee, 4eio, 4iai.*

♣ Фактически Аристотель неявно предполагал, что все рассматриваемые термины не пусты. Это предположение можно формализовать явно, добавив к любому силлогизму три дополнительных посылки: $P(p),M(m),S(s)$.•*В такой трактовке имеется ещё 9 правильных модусов.*

2.3.7. Упражнение.

Проверить правильность модусов: Barbara, 1aai, 2eio, 2aaa, 3oao, 3iio, 4iai, 4aii. Для найденных неправильных модусов проверить их правильность в первоначальной трактовке Аристотеля.

Литература

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 255 с.
2. Лексаченко В.А. Логика. Множества. Вероятность / В.А. Лексаченко. – М.: Вузовская книга, 2001. – 128 с.
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика: Курс лекций: Задачник – практикум и решения: Учеб. пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб.: Лань, 1999. – 285 с.
4. Гладкий А.В. Математическая логика: Учеб. пособие / А.В. Гладкий. – М., 1998. – 479 с.
5. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Логика высказываний / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВГУ, 1989. – 24 с.
6. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Логика предикатов / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВГУ, 1989. – 18 с.
7. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А.Палютин. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 1976 – 320 с.
9. Шенфилд Дж. Математическая логика / Дж. Шенфилд. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
10. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
11. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р.Р. Столл. – М.: Просвещение, 1968. – 230 с.
12. Новиков П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 400 с.