Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Конспекты лекций и упражнения

/Логика высказываний/

Оглавление

1. Логика высказываний

1.1. Определение логического следствия

1.1.1. Определение высказывания и предиката.

♦*Высказывание* - это предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, что оно *истинно* или *ложно*. ♣Например, “$5>3$”, “$5<3$”, “Дюма-сын есть сын Дюма-отца”, “$5^7>7^5$”. ♦*Предикат* - предложение, относящееся к одному или нескольким неопределенным объектам, которое превращается в высказывание всякий раз, когда все входящие в него неопределенные объекты заменены их конкретными представителями. ♣Например, “$x<3$ ”, “прямая l параллельна прямой m”. ♦Имена неопределенных объектов называются *переменными* данного предиката. Каждая переменная имеет свою *область изменения,* которая должна явно или неявно указываться при задании предиката. ♦Если область изменения каждой переменной данного предиката состоит из единственного элемента, то предикат по существу является высказыванием; поэтому мы *будем считать высказывание частным случаем предиката*.

1.1.2. Определение умозаключения, посылок и заключения.

♦Пусть $A_1,A_2,\ldots A_n$ и B –предикаты. Утверждение типа “Из $A_1,A_2,\ldots A_n$ *следует* B” независимо от того, на чем оно основано, называют *умозаключением*, предикаты $A_1,A_2,\ldots A_n$- его *посылками*, предикат B – *заключением*. ♣Например, “Из $x<y$, $y<z$ следует, что $x<z$”. ♣В курсе математической логики, в основном, изучаются *логические умозаключения*, выражаемые словами “Из $A_1,A_2,\ldots A_n$ логически следует B” или формулой $A_1,A_2,...,A_n \models B$. В приведенном выше примере, как мы вскоре увидим, заключение не является *логическим* следствием посылок, но является *следствием в теории* вещественных чисел.

1.1.3. Определение интерпретации и контрпримера.

♦*Интерпретацией* списка предикатов будем называть придание всем его словам *произвольных* смысловых значений, при котором *форма* предикатов не меняется, а сами предикаты становятся высказываниями, т.е. определенно истинными или ложными предложениями. ♦*Форма* предложения с точки зрения логики определяется следующими семью словами и словосочетаниями или их языковыми эквивалентами:

“не”, “и”, “или”, “если...то”, “если и только если”,
“для любого”, “существует”

– этим выражениям во всех интерпретациях должны придаваться обычные смысловые значения. ♦*Контрпримером* к умозаключению $A_1, A_2, ..., A_n \models B$ называется такая его интерпретация, в которой все посылки истинны, а заключение ложно. ♣Например, к умозаключению $x < y, y < z \models x < z$ можно привести следующий контрпример: Дюма-сын – сын Дюма-отца, Дюма-отец – сын Дюма-деда, следовательно (?!), Дюма-сын – сын Дюма-деда. “Словарь” этой интерпретации таков: x – Дюма-сын, y – Дюма-отец, z – Дюма-дед, $<$ – является сыном.

1.1.4. Определение логического следствия и следствия в теории.

♦Будем говорить, что заключение B *логически следует* из посылок $A_1, A_2, ..., A_n$, и писать $A_1, A_2, ..., A_n \models B$, если к данному умозаключению не существует контрпримера. ♣Например, $x < y, y < z \not\models x < z$, что показывает построенный выше контрпример. ♦Пусть **Т** – некоторая теория. Говорят, что в *этой теории из посылок* $A_1, A_2, ..., A_n$, *следует* B (и пишут $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow_{\mathbf{T}} B$, или $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$), если список посылок можно дополнить *истинными в* **Т** утверждениями $T_1, T_2, \ldots T_m$, так, что из расширенного списка посылок предложение B *следует логически*: $A_1, A_2, ..., A_n, T_1, T_2, \ldots T_m \models B$. В частности, если $A_1, A_2, ..., A_n \models B$, то и $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow_T B$, т.е. логическое следование есть более сильное отношение, чем следование в теории. Для аксиоматической теории **Т** *истинность* того или иного предложения означает, что его можно доказать строго логически, т.е. в конечном счёте установить, что оно *логически следует* из аксиом и определений данной теории. Для иных теорий критерии истинности могут быть иными. Для констатации истинности иногда используется обозначение «$\Rightarrow_{\mathbf{T}} B$» или «$\Rightarrow B$». ♣В арифметике вещественных чисел $x < y, y < z \Rightarrow x < z$. Действительно, эта теория включает в качестве аксиомы или теоремы (это зависит от конкретного способа её построения) следующее свойство транзитивности неравенств: “Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$”. Добавив его к двум посылкам рассматриваемого умозаключения, мы уже не сможем к полученному рассуждению найти контрпример, потому что добавленная посылка как раз означает, что в случае истинности первых двух посылок заключение не может быть ложно. (Напомним, что выражениям “если…то”, “и”, входящим в добавленную посылку, должны придаваться их обычные смысловые значения).

Если требуется установить, что *заключение* B *в теории* **T** *не следует из посылок* $A_1, A_2, ..., A_n$, то достаточно построить «согласованный с **T**» контрпример, в котором всем входящим в эти предикаты понятиям теории **T** придаются их обычные (в **T**) смысловые значения. При этом все посылки и отрицание заключения должны оказаться *истинными в данной теории*.

Действительно, если такая интерпретация имеется, то не может быть, чтобы B было логическим следствием расширенного списка посылок с добавлением истинных в **T** предложений, так как в этой интерпретации все посылки расширенного списка истинны, а заключение B ложно.

Например, в теории действительных чисел из неравенства $a<b$ не следует неравенство $a^2<ab$, как показывает согласованный с этой теорией контрпример: $a=-2, b=1$.

Из этого примера, кстати, видно, что для построения согласованных с данной теорией **T** интерпретаций предикатов этой теории не так уж много возможностей: можно только придавать именам неопределенных объектов допустимые конкретные значения.

1.1.5. Упражнение.

Доказать, что заключение не является логическим следствием посылок. Определить, является ли оно следствием в теории.

1. Неверно, что 7 делится на 2 и на 3. Следовательно, 7 не делится на 2 и не делится на 3.

2. Если число 9 делится на 4, то оно делится на 2. Следовательно, если 9 не делится на 4, то 9 не делится на 2.

3. Число n не делится на 2 или не делится на 3. Следовательно, неверно, что n делится на 2 или на 3.

4. Если число n делится на 2 и на 5, то n делится на 10. n не делится на 10. Следовательно, n не делится на 2 и не делится на 5.

5. В множестве A не существует числа a, которое удовлетворяет неравенству $a>3$. Следовательно, для любого числа a из A справедливо неравенство $a\le 3$.

6. Существует рациональное число, которое больше 0, и рациональное число, которое меньше 1. Следовательно, существует рациональное число, которое больше 0 и меньше 1.

7. Для любой фигуры из данного списка верно, что она является треугольником или квадратом. Следовательно, любая фигура из этого списка есть треугольник или все фигуры в данном списке являются квадратами.

8. Для любого числа a из множества A существует натуральное N, такое, что $a<N$. Следовательно, существует такое натуральное N, что для любого a из A выполнено неравенство $a<N$.

1.2. Язык логики высказываний

1.2.1. Логические связки.

♣Как сказано выше, логическая *форма* предложения определяется семью перечисленными в 1.1.3 выражениями. ♦ Первые пять из них называются *логическими связками*; они изучаются в *логике высказываний*. Последние два - *квантором общности* и *квантором существования*; их изучением занимается *логика предикатов*. ♦Логические связки и кванторы рассматриваются в логике как *операции*, с помощью которых из данных предикатов, называемых *операндами,* строятся более сложные предикаты. ♦Для логических связок вводятся следующие обозначения и названия: «неверно, что A» – $\neg A$ ($\overline{A}$) – *отрицание*; «A и B» – $A \wedge B$ ($AB, A \& B$) – *конъюнкция*; «A или B» – $A \vee B$ – *дизъюнкция*; «если A, то B» – $A \rightarrow B$ – *импликация*; «A, если и только если B» – $A \leftrightarrow B$ – *двойная импликация.* ♦Формальные определения логических связок задаются в виде *таблиц истинности*, определяющих *истинностные значения* сложных предикатов через истинностные значения операндов:

A	B	¬ A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
и	*и*	*л*	*и*	*и*	*и*	*и*
и	*л*		*л*	*и*	*л*	*л*
л	*и*	*и*	*л*	*и*	*и*	*л*
л	*л*		*л*	*л*	*и*	*и*

1.2.2. Формулы логики высказываний.

♦В результате последовательного применения логических связок к простым предикатам, обозначенным буквами, получаются *формулы логики высказываний.* Порядок действий в них, как и в алгебраических формулах, задаётся с помощью скобок. ♣Например, для формулы $(((\neg A) \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ действия в порядке их выполнения можно пронумеровать следующим образом:

$$\underset{1}{(((\neg} A) \underset{2}{\rightarrow} B) \underset{4}{\wedge} (A \underset{3}{\rightarrow} B)) \underset{5}{\rightarrow} B$$

♣Словами данную формулу можно прочесть так: если отрицание A влечёт B и A влечёт B, то справедливо B. ♦Как и в алгебре, в логике принято *соглашение о порядке действий,* в соответствии с которым при отсутствии скобок операции выполняются в следующем порядке: $\neg, \wedge, \vee, \{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ (импликация и двойная импликация считаются действиями одной ступени, то есть при отсутствии скобок они выполняются в порядке слева направо). ♣Например, рассмотренную выше формулу можно записать в виде

$(\neg A \to B) \wedge (A \to B) \to B$. Если же опустить и оставшиеся четыре скобки, то порядок действий и смысл формулы будет иной:

$$\underset{1}{\neg} A \underset{3}{\to} B \underset{2}{\wedge} A \underset{4}{\to} B \underset{5}{\to} B$$

1.2.3. Упражнение.

Записать формулу на обычном языке. Найти интерпретации предложений A, B, C, в которых она истинна и ложна.

1. $A \wedge \neg B \leftrightarrow C \to \neg A$.

2. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$.

3. $\neg(A \to B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$.

4. $(A \to B \vee C) \to (\neg B \to A)$.

5. $A \vee (\neg B \leftrightarrow C) \to \neg A$.

6. $(A \to B \wedge C) \wedge (B \vee (\neg C \to A))$.

7. $(A \wedge B \to C) \to (\neg C \to A)$.

8. $(A \wedge \neg C \vee B) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee \neg B)$.

9. $(A \to C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge B \wedge \neg C$.

10. $(A \to B) \wedge A \wedge (\neg B \vee \neg C)$.

11. $(\neg A \to B \vee C) \wedge (C \to B)$.

12. $(A \to C) \wedge (\neg B \to \neg C) \wedge \neg(A \to B)$.

1.2.4. Формализация в логике высказываний.

♦ Сложности записи утверждения, сформулированного на обычном языке общения, в виде логической формулы аналогичны проблемам перевода с одного языка на другой. Правда, следует заметить, что язык формальной логики существенно беднее любого языка общения, что значительно облегчает задачу перевода, которую можно осуществлять, придерживаясь следующего алгоритма. В предложении следует выделить основную его форму (“не верно, что ...”, “... и ...” , “... или ...”, “если …, то ...”, “ …, тогда и только тогда, когда ...” и т.п.) и заменить её на соответствующую логическую формулу ($\neg A,\ A \wedge B,\ A \vee B,\ \ A \to B,\ A \leftrightarrow B$). Затем с каждой частью предложения, обозначенной в полученной формуле буквами A и B и представляющей собой самостоятельное утверждение, проделать ту же процедуру, если только утверждение не оказывается простым высказыванием. После этого буквы A и B в первоначальной формуле заменяются на полученные вместо них формулы. Повторяем процесс формализации до тех пор, пока все буквы формулы не будут соответствовать простым высказываниям. В процессе формализации необходимо следить за тем, чтобы разные вхождения одного и того же высказывания обозначались одной буквой, а разные высказывания были обозначены разными буквами.

♣Например, формализуем утверждение “Произведение ab положительно в том и только том случае, когда a и b оба положительны или оба отрицательны”. Основная форма этого предложения – “ … в том и только том случае, когда ...”, аналогичная форме “ …, тогда и только тогда, когда...”. Заменим её на формулу $A \leftrightarrow X$, где A – “ Произведение ab положительно ” и X – “a и b – оба положительны или оба отрицательны ”. A является простым высказыванием, а X имеет форму “... или ...”, заменяем её на $Y \vee Z$ в первоначальной формуле: $A \leftrightarrow Y \vee Z$. Высказывания Y – “a и b – оба положительны ” и Z – “a и b – оба отрицательны ” имеют одну и ту же форму, которую легче определить, переформулировав эти предложения без изменения смысла следующим образом. Y – “a положительно и b положительно ”, Z – “a отрицательно и b отрицательно ”. Форму “... и ...” этих предложений заменим на формулы $B \wedge C$ и $D \wedge E$. Подставляя их в основную формулу вместо Y и Z, получим окончательно: $A \leftrightarrow B \wedge C \vee D \wedge E$. B – “a – положительно”, C – “b – положительно ”, D – “a – отрицательно”, E – “b – отрицательно ” – простые высказывания.

1.2.5. Упражнение.

Записать следующие утверждения в виде формул логики высказываний.

1. Если функция f является строго возрастающей на всей действительной оси, то она не является четной.

2. Если n делится на 2, но не делится на 3, то n не делится на 6.

3. Если $x \in [1,2]$ или $x \in [3,5)$, то $x < 5$ и неверно, что $x < 1$.

4. Если множества A и B не пересекаются и $x \in A$, то x не принадлежит B, но принадлежит $A \bigcup B$.

5. Число x удовлетворяет неравенству $f(x)g(x) > 0$ в том и только том случае, когда оно является решением совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

6. Если $M \subset \mathbb{R}$ и $S = \sup M$, то $S = \max M$ тогда и только тогда, когда $S \in M$.

1.2.6. Формализация необходимых и достаточных условий.

♦Остановимся особо на вопросе формализации предложений, содержащих слова “необходимо” и “достаточно” в качестве основной формы. Оба эти слова выражают импликацию, а в сочетании друг с другом двойную импликацию. Для того чтобы правильно выбрать направление импликации в этом случае, нужно определить, какой предикат в предложении играет роль необходимого (достаточного) условия. Тогда второй основной предикат предложения автоматически играет роль достаточного (необходимого) условия. Правильное направление стрелки импликации – от достаточного условия к необходимому.

♣Например, в предложении “Справедливости неравенства $a < 1$ достаточно для выполнения неравенства $b < 0$” предикат A – “справедливо неравенство $a < 1$” является достаточным условием, а предикат B – “выполнено неравенство $b < 0$” автоматически определяем как необходимое условие. Исходное предложение представляется импликацией $A \to B$.

1.2.7. Упражнение.

1-6. Записать утверждения из 1.2.5 с использованием слов «необходимо» и «достаточно».

Записать следующие утверждения в виде формул логики высказываний.

7. Для того чтобы дробь $\frac{a}{b}$ была меньше нуля, достаточно, чтобы b было отрицательно, а a положительно.

8. Для того, чтобы z не принадлежал D, необходимо, чтобы y не принадлежал C, а для того чтобы z принадлежал D, достаточно, чтобы x принадлежал B.

9. Неравенство $d > 0$ необходимо для выполнения неравенства $c > 1$ и достаточно для выполнения неравенства $a < 1$.

10. Для того чтобы дробь $\frac{x}{y}$ принадлежала множеству A, необходимо и достаточно, чтобы x принадлежал B и y принадлежал C или x принадлежал D и y принадлежал E.

11. Для того чтобы число x удовлетворяло первому и второму уравнениям системы, достаточно, чтобы оно удовлетворяло третьему, а для того чтобы x не удовлетворяло второму уравнению, необходимо, чтобы оно не удовлетворяло первому уравнению.

12. Выполнение утверждения E есть необходимое условие для справедливости утверждения A, а невыполнения D достаточно для невыполнения A.

1.3. Следствие в логике высказываний

1.3.1. Стандартные интерпретации.

♦*Стандартной интерпретацией* предиката или списка предикатов будем называть придание всем входящим в них *простым предикатам истинностных значений* “*и*” или “*л*” – в отличие от рассматривавшейся ранее *смысловой интерпретации,* когда входящим в предикаты *словам* придавались различные *смысловые значения*. При этом различным *вхождениям* одного и того же простого предиката должны придаваться одинаковые истинностные значения. ♣Например, если в сложном предикате или списке предикатов участвуют только простые предикаты A и B, то полный перечень стандартных интерпретаций можно записать в виде: *ии, ил, ли, лл – первая буква задаёт истинностное значение* A, *вторая* - B. При наличии трёх простых предикатов A,B,C будет восемь стандартных интерпретаций; их принято располагать в алфавитном порядке: *иии, иил, или, илл, лии, лил, лли, ллл.* Заметим, что для последней по алфавиту буквы C значения чередуются через одно, для B - через 2, для A – через 4. Такой порядок всегда приводит к алфавитному расположению всех стандартных интерпретаций. Заметим также, что при увеличении числа простых предикатов на 1 количество стандартных интерпретаций увеличивается вдвое, так что для n простых предикатов будет 2^n интерпретаций.

1.3.2. Таблицы истинности.

Если задан сложный предикат, то с помощью определения логических операций можно во всех его стандартных интерпретациях найти истинностное значение самого предиката, т.е. получить *таблицу истинности* сложного предиката. Рассмотрим два примера.

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$		$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
4	2	3	1		3	2	5	4	1
л	*и*	*и*	*и*		*л*	*и*	*л*	*л*	*и*
и	*и*	*л*	*л*		*л*	*и*	*и*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*		*и*	*л*	*и*	*л*	*и*
и	*л*	*л*	*л*		*и*	*л*	*и*	*и*	*л*

Во вторых строчках обеих таблиц проставлены номера, указывающие на порядок заполнения столбцов. В столбцах 1 и 2 формируются стандартные интерпретации в алфавитном порядке – так, как описано в предыдущем пункте. Остальные столбцы заполняются последовательно с помощью таблиц истинности логических операций.

1.3.3. Упражнение.

Построить таблицы истинности для формул из упражнения 1.2.3.

1.3.4. Таблицы истинности и логическое следствие.

♦Таблицы истинности дают полную информацию об истинностных значениях сложных предикатов во всех *стандартных* интерпретациях. Поскольку в каждой *смысловой* интерпретации все простые предикаты принимают определённые истинностные значения, она эквивалентна некоторой стандартной интерпретации. Поэтому с помощью таблиц истинности можно полностью решать вопрос о существовании или отсутствии контрпримеров для любого умозаключения в логике высказываний. ♣Например, если в п. 1.3.2 сравнить результирующий столбец 4 в первой таблице с результирующим столбцом 5 второй, то мы увидим, что они одинаковы. Это означает, что $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$, и наоборот, $\neg(A \wedge B) =\!| \neg A \vee \neg B$. Вместе эти два соотношения записывают в виде $\neg(A \wedge B) |\!=\!| \neg A \vee \neg B$ и говорят, что данные формулы *логически эквивалентны*.

1.3.5. Направленная табличная процедура.

Поиск контрпримера путем перебора *всех* стандартных интерпретаций, т.е. построения полной таблицы истинности данного умозаключения, может оказаться слишком громоздким, так как число 2^n всех стандартных интерпретаций очень быстро растёт с ростом n. Кроме того, в логике предикатов, как мы увидим, множество стандартных интерпретаций бесконечно, так что полный перебор вообще невозможен. Поэтому мы выработаем *направленную* *табличную процедуру*, не связанную с перебором всех стандартных интерпретаций. На первых шагах составляется *система логических уравнений,* приписывающая всем посылкам значение “*и*”, а заключению - “*л*”. Если с помощью таблиц истинности логических связок для этой системы будет найдено хотя бы одно решение, т.е. набор значений простых предикатов, удовлетворяющий этой системе, то мы получим контрпример к данному умозаключению; если же окажется, что система не имеет решений, то можно сделать вывод, что умозаключение *логично*. Методы решения систем логических уравнений рассмотрим на ряде примеров.

1.3.6. Примеры доказательств направленной процедурой.

♣В следующих таблицах показано составление и решение систем логических уравнений для двух умозаключений.

A	$\vee$	$B,$	$\neg$	A	$\overset{?}{\models}$	B
л	*и*	$\underline{и}$	*и*	*л*	*да*	$\underline{л}$
5	1	6	2	4		3

A	$\to$	$B,$	$\neg$	A	$\overset{?}{\models}$	B
л	*и*	*л*	*и*	*л*	*нет*	*л*
5	1	6	2	4		3

На первых двух шагах посылкам присваивается значение «*и*», а на третьем – заключению значение «*л*»; тем самым составляется система логических уравнений для поиска контрпримера. Шаг 4 в обеих таблицах следует из 2 и определения отрицания, 5 – из 4 (перенос). Шаг 6 в левой таблице следует из 1, 5 и определения дизъюнкции. В правой – из 3 (перенос).

В левой таблице получено (и отмечено подчёркиванием) противоречие между шагами 6 и 3. Оно показывает, что контрпримера не существует, т.е. заключение логически следует из посылок; это зафиксировано словом «*да*» под знаком логического следствия.

В правой таблице противоречий нет, т.е. найден контрпример: $A = B = л$. Значит, заключение не следует логически из посылок; это отмечено словом «*нет*».

1.3.7. Примеры доказательств с разветвлением.

♣Следующее табличное доказательство (левая таблица), в отличие от предыдущего, состоит не из одной строки истинностных значений, а из двух, поскольку на третьем шаге произошло *разветвление* процесса поиска контрпримера.

A	$\vee$	$(B$	$\wedge$	$C)$	$\overset{?}{\models}$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$(A$	$\vee$	$C)$
?*и*	*и*				*да*	*и*	$\underline{и}$		$\underline{л}$	*и*	$\underline{и}$	
3	1					4	6		2	5	7	
л	*и*	*и*	*и*	*и*			$\underline{и}$	*и*	$\underline{л}$		$\underline{и}$	*и*
3	1	5	4	6			9	7	2		10	8

A	$\vee$	$(B$	$\wedge$	$C)$	$\overset{?}{\models}$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$(A$	$\wedge$	$C)$
?*и*	*и*	?*и*	*л*	*л*	*нет*	*и*	*и*	*и*	*л*	*и*	*л*	*л*
3	1	11	10	9		4	6	12	2	5	7	8

Дело в том, что после шага 1 (дизъюнкция истинна) и шага 2 (конъюнкция ложна) мы не можем сделать определённого вывода о значениях операндов. На третьем шаге вопросительным знаком отмечено *предположе-*

ние, исходя из которого происходит дальнейшее заполнение строки, приводящее в конце к противоречию между 2, 6 и 7 шагами. Отметим, что на шагах 6 и 7 значение дизъюнкции найдено по значению *одного* операнда – поскольку он оказался истинным, дизъюнкция будет истинна независимо от значения второго операнда.

Рассмотрение альтернативного значения для A проведено в следующей строке. Значения первых двух шагов перенесены из предыдущей строки, а на третьем шаге косой чертой отмечено начало рассмотрения нового случая. Поскольку и здесь получено противоречие (между шагами 2, 9 и 10), можно сделать окончательный вывод о том, что заключение следует логически из посылки; это отмечено словом «*да*» под знаком логического следствия.

♣На правой таблице изображена направленная табличная процедура для несколько изменённого умозаключения: в последней скобке вместо дизъюнкции поставлена конъюнкция. Отличие от предыдущей таблицы начинается с шага 7: из шагов 2 и 6 мы сделали вывод, что конъюнкция ложна, а затем (шаг 8), что $C = л$. На шаге 11 вновь пришлось сделать предположение, поскольку предыдущие шаги не определяют однозначно значение B. Результатом в этом случае явился контрпример: $A = B = и$, $C = л$, так как никаких противоречий не появилось. Поскольку одного контрпримера достаточно для обоснования отрицательного ответа, рассматривать прочие значения для A и B уже не нужно, построение таблицы на этом закончено.

1.3.8. Упражнение.

Проверить, является ли заключение логическим следствием посылок.

1. A→(B→C) |= A∧B→C.

2. A→B∨C |= ¬B→A.

3. ¬(A→B) |= A∧¬B.

4. ¬C→(¬A∨¬B) |= A→(B→C).

5. ¬A→B∨C, C→B |= A→B.

6. A→C, B∨C∨A |= B→C.

7. ¬A∨B, B→C |= ¬C→¬A.

8. A→B, ¬C→¬B |= ¬A∨C.

1.3.9. Упражнение.

Формализовать умозаключения и проверить их логичность.

1. Число n меньше 100 или неверно, что n делится на 2 и на 3. Если n меньше 100, то n – двузначное число. Следовательно, чтобы число n не было двузначным, необходимо, чтобы n не делилось на 2 или не делилось на 3.

2. Если сумма $n+m$ не делится на 3, то n не делится на 3 или m не больше 2. Сумма $n+m$ не делится на 3 или $n \cdot m$ больше 4. Следовательно, чтобы n делилось на 3, а m было больше 2, необходимо, чтобы $n \cdot m$ было больше 4.

3. Число n не является простым или $n > 100$. Если $n > 100$, то k делится на 2 и больше 3. Следовательно, чтобы n не было простым, достаточно, чтобы k не делилось на 2 или было не больше 3.

4. Для того, чтобы произведение $n \cdot m$ делилось на 6, достаточно, чтобы n делилось на 2, а m – на 3. Если m не больше 2, то $n \cdot m$ не делится на 6. Следовательно, n не делится на 2, или m не делится на 3, или m больше 2.
5. Если $x+y$ – четное число, то $x=3$ или $y=7$. Если $x=3$, то $y=7$. Для равенства $y=7$ необходима четность суммы $x+y$. Следовательно, $x+y$ четно тогда и только тогда, когда $y=7$.
6. Верно, что $x<0$, или $x=0$, или $x>0$. Если $x>0$ или $x=0$, то $x=0$. Для равенства $x=0$ необходимо, чтобы условие $x<0$ было нарушено. Следовательно, условие $x<0$ нарушается тогда и только тогда, когда $x=0$.
7. Если x – не натуральное число, то $x<0$ или $x=1/2$. $x=1/2$ или неверно, что $x<0$. Если $x=1/2$, то x - не натуральное число. Следовательно, для того, чтобы равенство $x=1/2$ не выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы x было натуральным числом.
8. Число x делится на 8, или сумма его цифр равна 13, или $x=0$. Если равенство $x=0$ не выполнено, то сумма цифр числа x не равна 13. Если $x=0$, то x делится на 8. Следовательно, для справедливости равенства $x=0$ необходимо и достаточно, чтобы x делилось на 8.

1.3.10. Определение логической эквивалентности, тавтологии и противоречия.

♦Как уже отмечалось в п.1.3.4, предикаты A и B называются *логически эквивалентными* ($A \mid\!=\!\mid B$), если $A \models B$ и $B \models A$. ♦Предикат B называется *тавтологией* ($\models B$), если он истинен в любой интерпретации. ♣Например, очевидно, $\models A \to A$. ♦Список предикатов **S** называется *логически противоречивым* (или *противоречием*), если входящие в него предикаты не могут быть одновременно истинными ни в какой интерпретации. Обозначение: **S** $\models$. ♣Например, $A, \neg A \models$.

♣В следующих трёх таблицах показано применение направленной табличной процедуры для доказательства логической эквивалентности, тавтологии и противоречия. Первая состоит из доказательства двух логических следствий, проведённого в единой таблице. Во второй и третьей таблицах отличие от доказательства логического следствия заключается в том, что при доказательстве тав-
тологии на первом шаге всему предикату присваивается значение «*л*», а при доказательстве противоречия на первых шагах каждому из предикатов данного списка присваивается значение «*и*».

$$A \to B \mid\!=\!\mid \neg B \to \neg A$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{и} & \underline{и} & \underline{л} & \overset{?}{\models} & и & л & л & л & и \\ 7 & 1 & 8 & да & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} и & л & л & \overset{?}{=\mid} & \underline{и} & л & \underline{и} & \underline{л} & и \\ 3 & 2 & 4 & да & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \overset{?}{\models} & A & \vee & B & \to & (\neg & A & \to & B) \\ да & \underline{л} & \underline{и} & \underline{л} & л & и & л & л & л \\ & 7 & 2 & 8 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ? \\
A \wedge B, \neg\, A \vee \neg\, B \models \\
\textit{и и и } \underline{\textit{л}} \textit{ и } \underline{\textit{и}} \textit{ } \underline{\textit{л}} \textit{ и да} \\
3\ 1\ 4\ \overline{7}\ 5\ \overline{2}\ \overline{8}\ 6
\end{array}
$$

1.3.11. Упражнение.

Проверить логическую эквивалентность.

1. $\neg(A\vee B) \models\!| \neg A\wedge\neg B$.
2. $A\wedge(B\wedge C) \models\!| (A\wedge B)\wedge C$.
3. $A\to B \models\!| \neg A\vee B$.
4. $A\to B \models\!| \neg B\to\neg A$.
5. $A\leftrightarrow B \models\!| (A\to B)\wedge(B\to A)$.
6. $A\vee(B\wedge C) \models\!| (A\vee B)\wedge(A\vee C)$.
7. $A\to(B\to C) \models\!| (A\wedge B)\to C$.
8. $A\to B\vee C \models\!| (A\to B)\vee(A\to C)$.

1.3.12. Упражнение.

Проверить, является ли формула тавтологией.

1. $\models \neg(A\to B)\vee(\neg A\vee B\wedge C)$.
2. $\models (A\wedge B\to C)\to(\neg C\to\neg A\vee\neg B)$.
3. $\models(\neg A\to B\vee C)\wedge(C\to B)\to(A\to B)$.
4. $\models (A\to C)\wedge(\neg B\to\neg C)\to(A\to B)$.

1.3.13. Упражнение.

Проверить, противоречив ли данный набор формул.

1. $\neg(A\to B), \neg B\to\neg A \models$.
2. $A\wedge B, \neg A\vee\neg B \models$.
3. $(A\to B)\to C, \neg C\wedge(\neg A\vee B) \models$.
4. $A\to(B\wedge C), B\vee(\neg C\to A) \models$.

1.3.14. Свойства логического следствия, эквивалентности, тавтологии и противоречия.

Пусть A,B,C – предикаты, S – список предикатов (возможно, пустой). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. $(A,B,S \models C) \leftrightarrow (A\wedge B,S \models C)$ (*объединение посылок*).

2. $(A,B,S \models C) \leftrightarrow (B,S \models A\to C)$ (*перенос посылки, теорема о дедукции*).

3. $(A \models B) \leftrightarrow (\models A\to B)$ (*сведение следствия к тавтологии*).

4. $(A \models B) \leftrightarrow (A,\neg B \models)$ (*сведение следствия к противоречию*).

5. $(\models B) \leftrightarrow (\neg B \models)$ (*сведение тавтологии к противоречию*).

6. $(|\!= B) \to (A |\!= B)$ (*тавтология следует из любой посылки*).
7. $(S |\!=) \to (S |\!= B)$ (*из противоречия следует любое заключение*).
8. $(A |\!= B) \wedge (B |\!= C) \to (A |\!= C)$ (*транзитивность логического следствия*).
9. $(A |\!=\!| B) \wedge (B |\!=\!| C) \to (A |\!=\!| C)$ (*транзитивность логической эквивалентности*).

♥Например, докажем утверждение 2. Пусть верна левая часть двойной импликации, а правая ложна. Тогда найдется интерпретация, в которой предикаты B, S истинны, а импликация $A \to C$ ложна. Последнее означает, что A истинно, а C ложно. Итак, в найденной интерпретации все предикаты в левой части соотношения $A, B, S |\!= C$ истинны, а C ложно. Мы получили противоречие с тем, что левая часть двойной импликации верна.
Наоборот, пусть $B, S |\!= A \to C$, но $A, B, S |\!\neq C$. Тогда существует интерпретация, в которой A, B, S истинны, а C ложно. Но в этой интерпретации ложна и импликация $A \to C$ при истинных B, S, чего не может быть по предположению. Утверждение 2 доказано.

1.3.15. Упражнение.

Доказать остальные свойства. Сформулировать и доказать аналогичные свойства следствия, эквивалентности, истинности и противоречия в теории.

1.4. Основные теоремы логики высказываний

В следующих двух теоремах собраны соотношения логики высказываний, наиболее часто встречающиеся в практике математических рассуждений.

1.4.1. Теорема об отрицании, конъюнкции и дизъюнкции.

1) *Закон тождества:*

$$A |\!= A.$$

2) *Закон двойного отрицания:*

$$\neg\neg A |\!=\!| A.$$

3) *Правила удаления и введения* $\wedge$ *и* $\vee$:

$$A \wedge B |\!= A, \qquad A, B |\!= A \wedge B,$$
$$A \vee B, \neg A |\!= B, \qquad A |\!= A \vee B,$$
$$A \wedge A |\!=\!| A \qquad A |\!=\!| A \vee A.$$

4) *Действия с константами – тавтологией* (и) *и противоречивым предикатом* (л):

$$A \wedge л |\!=\!| л, \qquad A \wedge и |\!=\!| A,$$
$$A \vee и |\!=\!| и, \qquad A \vee л |\!=\!| A.$$

5) *Коммутативность*:

$$A\wedge B \models\!\mid B\wedge A, \qquad A\vee B \models\!\mid B\vee A.$$

6) *Ассоциативность:*

$$A\wedge(B\wedge C) \models\!\mid (A\wedge B)\wedge C, \qquad A\vee(B\vee C) \models\!\mid (A\vee B)\vee C.$$

7) *Дистрибутивность:*

$$A\wedge(B\vee C) \models\!\mid (A\wedge B)\vee(A\wedge C), \qquad A\vee(B\wedge C) \models\!\mid (A\vee B)\wedge(A\vee C).$$

8) *Законы де Моргана:*

$$\neg(A\wedge B) \models\!\mid \neg A\vee\neg B, \qquad \neg(A\vee B) \models\!\mid \neg A\wedge\neg B.$$

9) *Закон противоречия:*

$$A, \neg A \models .$$

10) *Закон исключенного третьего:*

$$\models B\vee\neg B.$$

1.4.2. Теорема об импликации и двойной импликации.

1) *Правила удаления и введения:*

$$A\to B, A \models B, \qquad B \models A\to B,$$

$$A\to A \models\!\mid \text{и}. \qquad A\leftrightarrow B \models\!\mid (A\to B)\wedge(B\to A).$$

2) *Действия с константами:*

$$A\to \text{и} \models\!\mid \text{и}, \quad \text{и}\to A \models\!\mid A, \quad \text{л}\to B \models\!\mid \text{и}, \quad A\to \text{л} \models\!\mid \neg A,$$

3) *Закон контрапозиции:*

$$A\to B \models\!\mid \neg B\to\neg A.$$

4) *Выражение $\to$ через $\neg$ и $\vee$*:

$$A\to B \models\!\mid \neg A\vee B.$$

5) *Транзитивность:*

$$A\to B, B\to C \models A\to C, \qquad A\leftrightarrow B, B\leftrightarrow C \models A\leftrightarrow C.$$

1.4.3. Упражнение.

Доказать сформулированные утверждения.

1.4.4. Замечания об истории, терминологии и обозначениях.

♣Основы логики как *науки о формах правильных умозаключений* заложены в трудах Аристотеля в четвёртом веке до новой эры. Используя современный язык, можно сказать, что основные исследования Аристотеля относились к логике предикатов, которая излагается во второй главе данного курса. Найденные Аристотелем и некоторыми его последователями *фигуры силлогизмов* (правильных логических умозаключений) были настолько простыми и общими, что до середины девятнадцатого столетия логика считалась наукой завершённой и преподавалась практически в неизменном виде.

♣В середине 19 века в работах ирландского математика Джорджа Буля и шотландского математика Августа де Моргана для описания и исследования логических законов начинает применяться алгебраическая символика. Появляется *алгебра логики,* которая позже становится *математической логикой,* т.е. теорией логических доказательств, широко применяющей математическую символику и математические методы и направленной, главным образом, на исследование *оснований математики.*

♣Существует очевидная аналогия между алгеброй высказываний и алгеброй множеств. Подобного рода *булевы* структуры имеют в настоящее время развитую общую теорию и разнообразные приложения.

♣В начале 20 века математика переживала *кризис оснований*, связанный с открытием и исследованием *парадоксов теории множеств.* В этот период логические законы подверглись всестороннему критическому обсуждению, которое и привело к созданию современной математической логики как *теории доказательств.* Оживлённые дискуссии велись, в частности, по вопросу о границах применимости закона исключённого третьего, на котором основываются в математике многочисленные неконструктивные теоремы о существовании тех или иных объектов.

♣Со второй половины 19 века математическая логика начинает применяться для описания и исследования таких технических объектов, как *контактные схемы, схемы из функциональных элементов, конечные автоматы.*

♣В технических приложениях формулы логики высказываний рассматривают как *двузначные функции от нескольких двузначных переменных* - функции и их аргументы принимают значения в множестве $\{и, л\}$. Такие функции и переменные называются *булевскими* (*булевыми*). При рассмотрении булевых функций часто вместо “*и*”, ”*л*” пишут, соответственно, “1” и ”0”, конъюнкцию $A \wedge B$ обозначают AB, отрицание $\neg A$ – $\bar{A}$, а вместо знака логической эквивалентности пишут знак равенства. В дальнейшем мы будем иногда использовать такие обозначения.

1.4.5. Нормальные формы.

♦Построение таблиц истинности для заданных логических формул можно назвать их *анализом.* ♦В приложениях нередко встречается обратная задача – нахождения логической формулы по заданной таблице истинности. Она называется задачей *синтеза*. ♣Искомая формула может быть представлена в различных (логически эквивалентных) формах. Здесь мы рассмотрим задачу синтеза в совершенной дизъюнктивной и совершенной конъюнктивной нормальных формах (сднф и скнф). ♦Конъюнкцию нескольких простых предикатов или их отрицаний будем называть *элементарной.* ♣Например, $A\bar{B}C$ - элементарная конъюнкция, $A(\bar{B} \vee C)$ - не элементарная конъюнкция.

•Очевидно, *элементарная конъюнкция истинна в том и только том случае, когда истинны все простые предикаты, входящие в неё без отрицания, а остальные ложны.* ♣Например, элементарная конъюнкция $A\bar{B}C$ истинна тогда и только тогда, когда A и C истинны, а B ложно. ♦Дизъюнкцию нескольких (различных) элементарных конъюнкций называют *дизъюнктивной нормальной формой* (днф). ♣Например, $A\bar{B}C \vee B\bar{C}$ - днф. ♦Днф называется *совершенной*, если во всех её элементарных конъюнкциях участвуют *все* буквы, входящие в данную формулу. ♣Например, приведённая выше днф не является совершенной, но её легко привести к эквивалентной сднф: $A\bar{B}C \vee B\bar{C} = A\bar{B}C \vee (A \vee \bar{A})B\bar{C} = A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C}$.

•Нетрудно видеть, что *днф истинна тогда и только тогда, когда истинна одна из входящих в неё элементарных конъюнкций.*

•Отсюда вытекает следующая **теорема о представлении формулы в сднф:** *любую непротиворечивую формулу можно представить в сднф следующим образом. 1) Для каждой стандартной интерпретации, в которой формула истинна, построить элементарную конъюнкцию, включив в неё все буквы, принимающие в этой интерпретации значение «и», без отрицания, а остальные буквы этой формулы – с отрицаниями. 2) Составить дизъюнкцию всех построенных таким образом конъюнкций.*

♣Например, для формулы, содержащей три буквы A, B, C и имеющей при алфавитном порядке стандартных интерпретаций таблицу значений (*и,и,л,и,л,л,л,и*), сднф имеет вид:

$$ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

♣Аналогично определяются *элементарная дизъюнкция, конъюнктивная нормальная форма (кнф), совершенная конъюнктивная нормальная форма (скнф)* и доказывается **теорема о представлении формулы в скнф:**

• *любую нетавтологичную формулу можно представить в скнф следующим образом. 1) Для каждой стандартной интерпретации, в которой формула ложна, построить элементарную дизъюнкцию, включив в неё все буквы, принимающие в этой интерпретации значение «л», без отрицания, а остальные буквы этой формулы - с отрицаниями. 2) Составить конъюнкцию всех построенных таким образом дизъюнкций.*

♣Например, рассмотренная выше формула представляется в скнф следующим образом: $(\bar{A} \vee B \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee C)(A \vee B \vee \bar{C})$.

1.4.6. Упражнение.

Привести формулу к сднф и скнф.

1. ¬A↔¬B∨C.	**5.** ¬C↔¬A∧B.
2. A∧¬B↔¬C.	**6.** ¬C∨¬A↔B
3. (A→C)∧(A∨B∨C)→(B→C).	**7.** (¬A→B∨C)∧(C→B)→(A→B).
4. (A→C)∧(B→C)∧(C→A∧¬B).	**8.** (¬A∨C→B)∧(B→C)∧(B→A).

1.4.7. Анализ и синтез контактных схем.

♦На рисунках 1 – 6 изображены *контактные схемы* – электрические цепи, предназначенные для соединения или разъединения полюсов, обозначенных буквами P и Q. Буквами $A - E$ обозначены контакты, связанные с *реле*, которые мы обозначаем теми же буквами (реле на рисунках не изображены). Если реле A включено, то все контакты, помеченные этой буквой без черты отрицания, проводят, а с чертой – не проводят; если оно выключено, то всё наоборот.

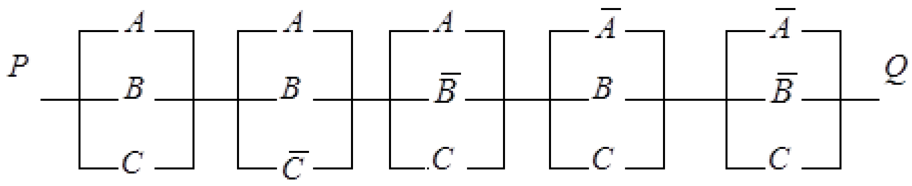

Рис.1

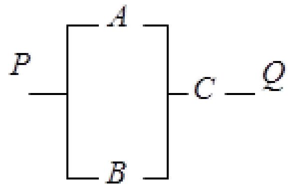

Рис.2

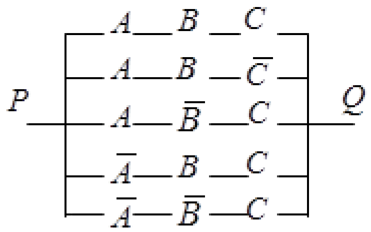

Рис.3

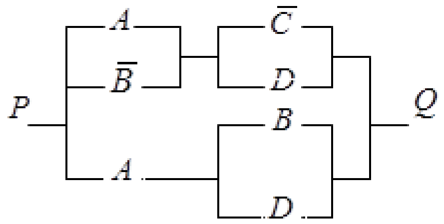

Рис.4

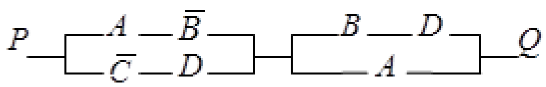

Рис.5

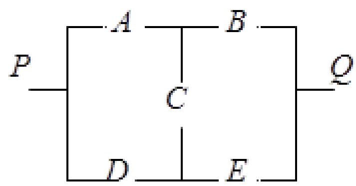

Рис.6

Задача анализа заключается в нахождении всех ситуаций, в которых цепь проводит ток от P к Q. Проводимость последовательного соединения контактов эквивалентна конъюнкции, а параллельного – дизъюнкции проводимостей этих контактов.

♣Например, функция F проводимости схемы рис. 1 описывается формулой:

$$F = (A \vee B \vee C)(A \vee B \vee \bar{C})(A \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C)(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C).$$

С помощью законов логики высказываний эту формулу можно упростить:

$$F = (A \vee B \vee \bar{C})[(A \vee B)(A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee B)(\bar{A} \vee \bar{B}) \vee C] =$$
$$(A \vee B \vee \bar{C})[(A \vee B\bar{B})(\bar{A} \vee B\bar{B}) \vee C] =$$
$$= (A \vee B \vee \bar{C})[(A \vee л)(\bar{A} \vee л) \vee C] = (A \vee B \vee \bar{C})(A\bar{A} \vee C)$$
$$= (A \vee B \vee \bar{C})C = (A \vee B)C.$$

По полученной формуле можно *синтезировать* простую схему рис. 2, эквивалентную исходной.

♣В качестве второго примера синтеза контактной схемы рассмотрим решение следующей задачи. Пусть требуется построить контактную схему, позволяющую любым из трёх реле, расположенных у трёх дверей зала, включать люстру. Обозначив реле буквами A,B,C и буквой L высказывание «люстра включена», мы можем условия задачи формализовать в виде следующей таблицы, которая определяет, что люстра должна быть включена при *нечётном* количестве включённых реле (и, следовательно, изменение состояния любого реле ведёт к изменению состояния люстры).

A	*B*	*C*	*L*
и	*и*	*и*	*и*
и	*и*	*л*	*л*
и	*л*	*и*	*л*
и	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*и*	*л*
л	*и*	*л*	*и*
л	*л*	*и*	*и*
л	*л*	*л*	*л*

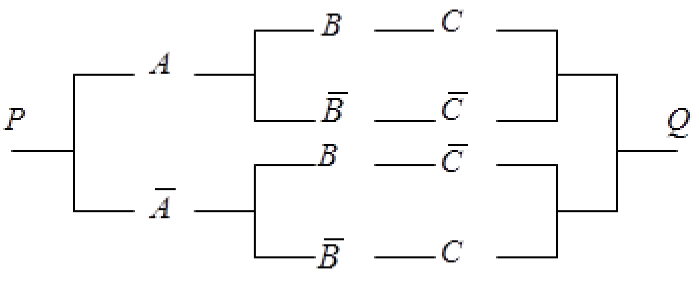

Рис.7

По построенной таким образом таблице мы выпишем формулу для L в виде сднф:

$$L = ABC \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C.$$

Её можно несколько упростить: $L = A(BC \vee \bar{B}\bar{C}) \vee \bar{A}(B\bar{C} \vee \bar{B}C)$. По этой формуле построим искомую схему (рис. 7).

1.4.8. Упражнение.

Проанализировать изображённые на рис. 3-6 контактные схемы и построить эквивалентные схемы с возможно меньшим числом контактов.

1.4.9. Упражнение.

Построить контактную схему, реализующую указанную функцию.

1. Голосование в группе из трёх человек большинством голосов.

2. Голосование в группе из четырёх человек с правом вето у председателя и перевесом у председателя в случае равенства голосов.

3. Включение сигнала с любого из трёх постов с возможностью отключения только с того же поста или с пульта начальника караула.

4. Включение сигнала при отказе по меньшей мере двух из пяти предохранительных устройств.

1.4.10. Полные системы булевых функций.

♦Система функций $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *полна* в том смысле, что любую булеву функцию можно выразить формулой, использующей только эти три функции: достаточно построить ее сднф или скнф. ♦Эта система не является *независимой,* поскольку $\wedge$ можно выразить через $\neg$ и $\vee$, а $\vee$ - через $\neg$ и $\wedge$: $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$, $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$. Из этих формул вытекает также, что системы $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ полны. ♣Системы $\{\neg\}$, $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$ не являются полными, так как с помощью любой из них нельзя выразить, например, тождественно ложную функцию. ♣Каждая из функций $\neg(A \wedge B)$ = обозн = $A \mid B$

(штрих Шеффера) и $\neg(A \vee B)$=обозн=$A \downarrow B$ (стрелка Пирса) в отдельности образует полную систему. Для A|B это следует из формул $\neg$A = A|A, A$\wedge$B = (A|B)|(A|B) и полноты системы $\{\neg, \wedge\}$.

1.4.11. Упражнение.

Доказать полноту следующих систем булевых функций.

1. $A \downarrow B$. **2.** $\neg A, A \rightarrow B$. **3.** $AB, 1(\textit{константа}), A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$ (сложение по модулю 2).

Литература

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 255 с.
2. Лексаченко В.А. Логика. Множества. Вероятность / В.А. Лексаченко. – М.: Вузовская книга, 2001. – 128 с.
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика: Курс лекций: Задачник – практикум и решения: Учеб. пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб.: Лань, 1999. – 285 с.
4. Гладкий А.В. Математическая логика: Учеб. пособие / А.В. Гладкий. – М., 1998. – 479 с.
5. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Логика высказываний / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВГУ, 1989. – 24 с.
6. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Логика предикатов / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВГУ, 1989. – 18 с.
7. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А.Палютин. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 1976 – 320 с.
9. Шенфилд Дж. Математическая логика / Дж. Шенфилд. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
10. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
11. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р.Р. Столл. – М.: Просвещение, 1968. – 230 с.
12. Новиков П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 400 с.