Петрова Л.П.

Конспект лекций с упражнениями по дисциплине

Дискретная математика

для студентов 1 курса математического факультета ВГУ
специальности 10.05.04 «Информационные системы безопасности»

2015 г.

Оглавление

1.1. Принцип двойственности

1.1.1. Двойственная функция.

♣Будем обозначать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - *логические переменные*, принимающие значения из множества констант $E=\{0,\ 1\}$. *Функцией алгебры логики* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть любую функцию $f:\ \underbrace{\{0,\ 1\}\times\{0,\ 1\}\times\ldots\times\{0,\ 1\}}_{n}\to\{0,\ 1\}$. Каждой формуле логики высказываний соответствует определённая функция алгебры логики, определяемая таблицей истинности для данной формулы. Но функция алгебры логики может выражаться различными формулами, логически эквивалентными между собой.

♦Функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равная $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$, называется *двойственной функцией* к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

♣Очевидно, что таблица истинностей для $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается из таблицы истинностей для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переворачиванием столбца значений функции и заменой в нём 0 на 1,а 1 на 0.

x_1	x_1	x_1	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f^*(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1	0
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

Также очевидно, что $f^{**}=\left(f^*\right)^*=f$.

1.1.2. Определение дополнительных логических связок.

♣Введём в рассмотрение ещё три операции логики высказываний.

♦ $x\oplus y=\overline{x\leftrightarrow y}$ - сложение по модулю два (порядок выполнения как у $\leftrightarrow$);

♦ $x\,|\,y=\overline{x\wedge y}$ - штрих Шеффера (по порядку выполнения стоит между $\wedge$ и $\vee$);

♦ $x\downarrow y=\overline{x\vee y}$ - стрелка Пирса (по порядку выполнения стоит между $\vee$ и $\to$);.

1.1.3. Упражнение Доказать следующие свойства сложения по модулю два.

1) $x \oplus y = y \oplus x$ (закон коммутативности);
2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (закон ассоциативности);
3) $1 \oplus x = \overline{x}$ (выражение отрицания);
4) $0 \oplus x = x$
5) $x \wedge (y \oplus z) = x \wedge y \oplus x \wedge z$ (закон дистрибутивности).

1.1.4. Упражнение Найти функции, двойственных к данным:
1) 1^*; 2) 0^*; 3) x^*; 4) $\overline{x}^*$; 5) $(x \wedge y)^*$; 6) $(x \vee y)^*$; 7) $(x \to y)^*$; 8) $(x \leftrightarrow y)^*$ 9) $(x \oplus y)^*$.

♣Пусть заданы функции $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $f_1\left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1P_1}\right)$, $f_2\left(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2P_2}\right), \ldots,$ $f_m\left(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mP_m}\right)$. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объединённое множество переменных функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

1.1.5. Теорема о функции двойственной к суперпозиции.
Если

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= f\left(f_1\left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1P_1}\right), f_2\left(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2P_2}\right), \ldots, f_m\left(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mP_m}\right)\right),$$

то

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= f^*\left(f_1^*\left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1P_1}\right), f_2^*\left(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2P_2}\right), \ldots, f_m^*\left(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mP_m}\right)\right),$$

♥Это утверждение следует непосредственно из определения двойственной функции.

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\Phi}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) =$$

$$= \overline{f}\left(f_1\left(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \ldots, \overline{x}_{1P_1}\right), f_2\left(\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \ldots, \overline{x}_{2P_2}\right), \ldots, f_m\left(\overline{x}_{m1}, \overline{x}_{m2}, \ldots, \overline{x}_{mP_m}\right)\right) =$$

$$= \overline{f}\left(\overline{\overline{f}}_1\left(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \ldots, \overline{x}_{1P_1}\right), \overline{\overline{f}}_2\left(\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \ldots, \overline{x}_{2P_2}\right), \ldots, \overline{\overline{f}}_m\left(\overline{x}_{m1}, \overline{x}_{m2}, \ldots, \overline{x}_{mP_m}\right)\right) =$$

$$= \overline{f}\left(\overline{f}_1^*\left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1P_1}\right), \overline{f}_2^*\left(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2P_2}\right), \ldots, \overline{f}_m^*\left(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mP_m}\right)\right) =$$

$$= f^*\left(f_1^*\left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1P_1}\right), f_2^*\left(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2P_2}\right), \ldots, f_m^*\left(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mP_m}\right)\right),$$

1.1.6. Принцип двойственности.

Для получения двойственной к функции, выраженной формулой с помощью только операций $\neg, \wedge, \vee$ и констант $1, 0$, достаточно в этой формуле заменить $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$, 0 на 1 и 1 на 0.

1.1.7. Упражнение. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$, заданными векторами α_f и α_g значений в таблице истинности, построить функцию h.

1) $\alpha_f(1011)$, $\alpha_g = (0111)$:

а) $h(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_1, x_2))$; б) $h(x_1, x_2) = g(x_2, f(x_2, x_1))$;

в) $h(x_1, x_2) = f(f(x_1, g(x_1, x_2)), g(x_1, x_2))$;

г) $h(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) \oplus f(x_3, g(x_1, x_2))$;

д) $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, g(x_3, x_1)) \leftrightarrow g(x_1, g(x_2, x_3))$.

2) $\alpha_f(1010)$, $\alpha_g = (0110)$:

а) $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, g(x_1, x_2))$;

б) $h(x_1, x_2, x_3) = g(g(x_3, x_2), f(x_1, x_3))$;

в) $h(x_1, x_2, x_3) = f(f(x_3, g(x_1, x_2)), g(x_1, x_2))$;

г) $h(x_1, x_2, x_3) = f(f(x_1, x_2), g(x_3, x_1)) \to g(x_1, g(x_1, x_2))$.

1.1.8. Упражнение. Перечислить все существенные и фиктивные переменные у следующих функций.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = (10101010)$; 2) $f(x_1, x_2, x_3) = (10011001)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (00111100)$; 4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0101111101011111)$;

5) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1100110000110011)$;

6) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1011010110110101)$;

7) $f(x_1, x_2) = ((x_1 \vee x_2) \to x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$;

8) $f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2 \oplus (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \leftrightarrow x_1 \wedge x_2)$;

9) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \to \bar{x}_2) \oplus (x_2 \to \bar{x}_3)) \oplus (x_2 \to x_3)$;

10) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2 \wedge \bar{x}_3) \to (x_2 \to x_1 \wedge x_3)) \to (x_1 \vee x_3)$;

11) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \downarrow (x_2 \mid x_3)) \downarrow (x_2 \downarrow (x_1 \mid x_3))) \downarrow (x_1 \mid x_2)$

1.1.9. Упражнение. Показать, что x_1 фиктивная переменная функции f, реализовав функцию эквивалентной формулой, не содержащей x_1.

1) $f(x_1, x_2) = (x_2 \to x_1) \wedge (x_2 \downarrow x_2)$; 2) $f(x_1, x_2) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \mid x_2)$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \wedge \overline{(x_3 \to x_2)}$;

4) $f(x_1,\, x_2) = \big((x_1 \vee x_2 \wedge \bar{x}_3) \leftrightarrow (\bar{x}_1 \to \bar{x}_2 \wedge x_3)\big) \wedge \big(x_2 \downarrow x_3\big)$;

5) $f(x_1,\, x_2,\, x_3) = \big((x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \to (x_1 \wedge x_2 \mid x_3)\big) \oplus (x_2 \to x_1) \wedge x_3$.

1.1.10. Упражнение. Используя непосредственно определение двойственности булевых функций, а также основные тождества, выяснить, является ли функция g двойственной к функции f.

1) $f(x,\, y) = x \oplus y,\ g(x,\, y) = x \leftrightarrow y$; 2) $f(x,\, y) = x \mid y,\ g(x,\, y) = x \downarrow y$;

3) $f(x,\, y) = x \to y,\ g(x,\, y) = \bar{x} \wedge y$;

4) $f(x,\, y,\, z) = x \wedge y \to z,\ g(x,\, y,\, z) = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$;

5) $f(x,\, y) = (\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x),\ g(x,\, y) = (x \to y) \wedge (\bar{y} \to \bar{x})$;

6) $f(x,\, y,\, z) = x \wedge y \vee z,\ g(x,\, y,\, z) = x \wedge (y \vee z)$.

1.1.1. Упражнение. Используя принцип двойственности, построить и упростить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции f.

1) $f(x,\, y,\, z) = (x \vee y \vee z) \wedge (y \oplus z) \vee x \wedge y \wedge z$;

2) $f(x,\, y,\, z) = \big(x \vee (1 \to y)\big) \vee y \wedge \bar{z} \vee \Big(\bar{x} \mid \overline{y \downarrow \bar{z}}\Big)$;

3) $f(x,\, y,\, z) = \big(x \downarrow y\big) \oplus \big((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \leftrightarrow y \wedge z)\big)$;

4) $f(x,\, y,\, z) = \big(\bar{x} \vee \bar{y} \vee (y \wedge \bar{z} \oplus 1)\big) \downarrow z$;

5) $f(x,\, y,\, z) = \big(x \wedge (y \wedge z \vee 0) \leftrightarrow (z \wedge 1 \vee \bar{x} \wedge y)\big) \vee \bar{y} \wedge z$;

6) $f(x,\, y,\, z) = \big(x \downarrow z\big) \oplus \Big((x \vee y) \leftrightarrow \big(\bar{x} \downarrow (y \vee \bar{z})\big)\Big)$

1.2. Разложение булевых функций по переменным. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.

♣Введём обозначение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x \text{ при } \sigma = 1, \\ \bar{x} \text{ при } \sigma = 0. \end{cases}$$

♦Из этого определения непосредственно вытекают следующие очевидные свойства функции x^{σ}:

1) $x^{\sigma} = x \wedge \sigma \vee \bar{x} \wedge \bar{\sigma}$;

2) $x^{\sigma} = 1$ в том и только том случае, когда $x = \sigma$;

3) $x^{\sigma} = 0$ в том и только том случае, когда $x \neq \sigma$ ($x = \bar{\sigma}$);

4) $1^{\sigma} = \sigma$, а $0^{\sigma} = \bar{\sigma}$.

1.2.1. Теорема (о разложении функции по переменным).

Теорема 3 (о разложении функций по переменным). *Каждую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ при любом m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ можно представить в следующей форме:*

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_m^{\sigma_m} \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \quad (*)$$

где дизъюнкция берется по всевозможным наборам значений переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Это представление называется *разложением функции по m переменным $x_1, \ldots, x_m$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор констант $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и покажем, что на нём левая и правая части равенства (*) совпадают. Левая часть равна $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а правая

$\bigvee\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$, по свойству x^σ отличной от нуля будет только одна конъюнкция $\alpha_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\alpha_m} = 1$, а при всех других наборах констант $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ $\alpha_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\sigma_m} = 0$. Тогда по теоремам логики высказываний

$\bigvee\limits_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$

. Что и требовалось доказать.

В качестве следствий получаем два специальных случая разложения.

1) **Разложение по переменной:**

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) =$$

$$= x_n \& f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n \& f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Функции $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ называются *компонентами разложения*. Данное разложение полезно, когда какие-либо свойства булевых функций устанавливаются по индукции.

2) Разложение по всем n переменным:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

При $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$ оно может быть преобразовано

$$\bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n} \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) =$$

$$= \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}.$$

В результате окончательно получим

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}. \qquad (**)$$

Такое разложение носит название *совершенной дизъюнктивной нормальной формы* (совершенной д. н. ф.).

Теорема 4. *Каждая функция алгебры логики может быть выражена в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$. Тогда, очевидно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \& \bar{x}_1.$$

2) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$. Представим ее в совершенной д. н. ф.:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}.$$

Данная теорема носит конструктивный характер, так как она позволяет для каждой функции фактически построить формулу, ее реализующую (в виде совершенной д. н. ф.): в таблице для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ($f \not\equiv 0$) отмечаем все строки $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, в которых $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1$, для каждой такой строки образуем логическое произведение

$$x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n},$$

и затем все полученные конъюнкции соединяем знаком дизъюнкции.

Покажем, что для функции $f \not\equiv 1$ существует представление в виде «совершенной конъюнктивной нормальной формы» (СКНФ). В этих условиях $f^* \not\equiv 0$, поэтому для неё существует СДНФ

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}.$$

Возьмем тождество для двойственных формул

$$f^{**}(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}\right).$$

Левая часть есть $f(x_1, \ldots, x_n)$, а правая может быть преобразована далее:

$$\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}\right) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f(\bar\sigma_1,\ldots,\bar\sigma_n)=0}} \left(x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}\right) =$$

$$= \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}} \left(x_1^{\bar\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}\right).$$

Таким образом, получаем разложение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}} \left(x_1^{\bar\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\bar\sigma_n}\right).$$

1.2.2. УпражнениеПостроить СДНФ и СКНФ для функций, заданных следующими формулами.

а)

1) $f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1\overline{x_2}\vee\overline{x_2}x_3\vee\left(x_1\to x_2x_3\right);$

2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\leftrightarrow\overline{x_2}\right)\vee\left(x_1x_3\oplus\left(x_2\to x_3\right)\right);$

3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1}\cdot x_2\oplus x_3\right)\cdot\left(x_1\cdot x_3\to x_2\right);$

4) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\right)\cdot\left(x_1\cdot x_2\vee x_3\right);$

5) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\to x_2\right)\oplus\left(x_1\mid x_2\cdot x_3\right);$

6) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1}\cdot x_2\to x_3\right)\cdot\left(\left(x_1\to x_3\right)\to x_2\right).$

б)

1) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\overline{x_1}\cdot x_2\vee\overline{x_3};$

2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\vee x_2\cdot\overline{x_3}\vee x_1\cdot\overline{x_3};$

3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=x_1\vee x_2\cdot x_3\vee\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}.$

в)

1) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\overline{x_1}\cdot\left(\overline{x_2}\vee x_3\right);$

2) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(x_1\vee x_2\right)\cdot\left(\overline{x_2}\vee x_3\right)\cdot\overline{x_3};$

3) $f\left(\tilde{x}^3\right)=\left(\overline{x_1}\vee x_2\right)\cdot\left(x_1\vee\overline{x_3}\right)\cdot\left(x_2\vee x_3\right).$

1.3. Полнота и замкнутость систем булевых функций.

1.3.1. Определения, критерий полноты.

Определение. Система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\}$ из P_2 называется (функционально) *полной*, если любая булева функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Примеры:

1. Система P_2 — множество всех булевых функций — является полной системой.

2. Система $\mathfrak{P}=\{\bar{x},\ x_1\ \&\ x_2,\ x_1\vee x_2\}$ представляет полную систему.

Теорема 5. *Пусть даны две системы функций из P_2:*

$$\mathfrak{P} = \{f_1,\ f_2,\ \ldots\}, \tag{I}$$

$$\mathfrak{Q} = \{g_1,\ g_2,\ \ldots\}, \tag{II}$$

относительно которых известно, что система I *полна и каждая ее функция выражается в виде формулы через функции системы* II. *Тогда система* II *является полной.*

Доказательство. Пусть h — произвольная функция из P_2. В силу полноты системы I можно выразить h формулой над $\mathfrak{P}$, т. е.

$$h = C[f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_s,\ \ldots]$$

(в скобках мы выписываем все функции системы $\mathfrak{P}$, хотя в формуле фактически встречается лишь конечное их число). По условию теоремы

$$f_1 = C_1[g_1,\ g_2,\ \ldots],$$

$$f_2 = C_2[g_1,\ g_2,\ \ldots],$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Поэтому мы можем в формуле $C[f_1,\ f_2,\ \ldots]$ исключить вхождения функций $f_1,\ f_2,\ \ldots$, заменив их формулами над $\mathfrak{Q}$*). Это можно записать так:

$$C[f_1,\ f_2,\ \ldots] = C[C_1[g_1,\ g_2,\ \ldots],\ C_2[g_1,\ g_2,\ \ldots],\ \ldots].$$

Последнее выражение определяет формулу над $\mathfrak{Q}$ со строением C'. Мы получаем

$$C[C_1[g_1,\ g_2,\ \ldots],\ C_2[g_1,\ g_2,\ \ldots],\ \ldots] = C'[g_1,\ g_2,\ \ldots],$$

или, окончательно,

$$h = C'[g_1,\ g_2,\ \ldots],$$

т. е. мы выразили h в виде формулы над $\mathfrak{Q}$. Теорема доказана.

1.3.2. Упражнения. Показать, что следующие системы булевых функций являются полными.

$\{\neg,\ \wedge\}$; $\{\neg,\ \vee\}$; $\{\downarrow\}$; $\{|\}$; $\{1,\ \oplus,\ \wedge\}$.

1.3.3. Полином Жегалкина.

Определение полинома Жегалкина.

Элементарная конъюнкция называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. *Константа* 1 (т.е. элементарная конъюнкция нулевого ранга) считается по определению *монотонной* элементарной конъюнкцией. Выражение вида

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_s, \tag{15}$$

где K_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над фиксированным множеством переменных (в частности, над множеством X^n, $n \geqslant 1$), называется *полиномом Жегалкина* (или *полиномом по модулю* 2). Рассматривается также полином Жегалкина, соответствующий $s = 0$. Такой полином обозначают через 0 (независимо от множества переменных) и считают по определению, что он равен константе 0. Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином, называется *степенью* этого *полинома*. Степень полинома 0 считается *неопределенной*. Число s называется *длиной полинома* (15). Справедлива следующая

Теорема 6. ***Каждая функция из P_2 может быть выражена при помощи полинома по*** $\operatorname{mod} 2$ ***(полинома Жегалкина).***

Доказательство. Поскольку система $\{1, \oplus, \wedge\}$ является полной, и конъюнкция дистрибутивна относительно сложения по модулю 2, то, очевидно, любая булева функция представима в виде полинома Жегалкина. Причем это представление единственно.

Подсчитаем число полиномов Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$, т. е. число выражений вида

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1}\ldots x_{i_s}.$$

Число членов $x_{i_1}\ldots x_{i_s}$ равно количеству подмножеств $(i_1, \ldots, i_s)$ из n чисел $(1, \ldots, n)$, т. е. 2^n. Поскольку $a_{i_1\ldots i_s}$ равно 0 или 1, искомое число полиномов равно 2^{2^n}, т. е. числу всех булевых функций от тех же переменных. Отсюда, как следствие, получаем *единственность представления функций посредством полиномов Жегалкина.*

1.3.4. Упражнение. Методом неопределённых коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций.

1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \mid x_2$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = (0100)$; 3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1(x_2 \vee \overline{x}_3)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \to x_3)$; 5) $f(\widetilde{x}^3) = (01101001)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (10001110)$; 7) $f(\widetilde{x}^3) = (00000111)$;
8) $f(\widetilde{x}^3) = (01100110)$; 9) $f(\widetilde{x}^4) = (1000000000000001)$;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (0000100010010000)$.

1.3.5. Упражнение.

2.24. Представив функцию $f(\widetilde{x}^n)$ формулой над множеством связок $\{\&, -\}$, преобразовать затем полученную формулу в полином Жегалкина функции $f(\widetilde{x}^n)$ (используя эквивалентности $\overline{A} = A \oplus 1$, $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$, $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$ и $A \oplus \oplus 0 = A$):

1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \to (x_2 \to \overline{x}_1 x_2)$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \cdot (x_2 \sim x_1 \overline{x}_2)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2) \mid (x_2 \downarrow x_3)$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 \mid x_3)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \downarrow ((x_1 \to \overline{x}_2) \vee \overline{x}_3)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \cdot ((x_1 \to x_2) \to x_3)$;
7) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \downarrow x_3)$;
8) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_1 x_4)$;
9) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee (x_2 \to ((x_3 \to x_2) \to x_4))$;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) x_4 \vee x_1 x_2 x_3$.

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое подмножество функций из P_2. *Замыканием* $\mathfrak{M}$ называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул через функции множества $\mathfrak{M}$. Замыкание множества $\mathfrak{M}$ обозначается через $[\mathfrak{M}]$. Легко видеть, что замыкание инвариантно относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.

Пример 13.

1) $\mathfrak{M} = P_2$. Очевидно, что $[\mathfrak{M}] = P_2$.

2) $\mathfrak{M} = \{1, x_1 + x_2\}$. Замыканием этого множества будет класс L всех линейных функций, т. е. функций, имеющих вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

где $c_i = 0, 1$ $(i = 0, \ldots, n)$; существенные переменные входят с коэффициентом 1, фиктивные — с коэффициентом 0.

Отметим некоторые свойства замыкания:

1) $[\mathfrak{M}] \supseteq \mathfrak{M}$;
2) $[[\mathfrak{M}]] = [\mathfrak{M}]$;
3) если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, то $[\mathfrak{M}_1] \subseteq [\mathfrak{M}_2]$;
4) $[\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2] \supseteq [\mathfrak{M}_1] \cup [\mathfrak{M}_2]$.

Определение. Класс (множество) $\mathfrak{M}$ называется (функционально) *замкнутым*, если $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$.

Пример 14.

1) Класс $\mathfrak{M} = P_2$ является замкнутым классом.
2) Класс $\mathfrak{M} = \{1, x_1 + x_2\}$ не замкнут.
3) Класс L замкнут, так как линейное выражение, составленное из линейных выражений, является линейным.

Легко видеть, что всякий класс $[\mathfrak{M}]$ будет замкнутым. Это дает возможность получать многочисленные примеры замкнутых классов.

В терминах замыкания и замкнутого класса можно дать другое определение полноты (эквивалентное исходному): $\mathfrak{M}$ — полная система, если $[\mathfrak{M}] = P_2$.

1.3.6. Пять важных замкнутых класса.

1. Обозначим через T_0 класс всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 0, т. е. функций, для которых выполнено равенство

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Легко видеть, что функции 0, x, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$ принадлежат классу T_0, а функции 1, $\bar{x}$ не входят в T_0.
и поэтому T_0 не является полной системой.

Покажем, что T_0 — замкнутый класс. Пусть $\Phi = f(f_1, \ldots, f_m)$,
где $f, f_1, \ldots, f_m$ принадлежат классу T_0. Тогда, т.к. $0 \in T_0$, то

$$\Phi(0, \ldots, 0) = f(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0.$$

2. Обозначим через T_1 класс всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 1, т. е. функций, для которых выполнено равенство

$$f(1, \ldots, 1) = 1.$$

Легко видеть, что функции 1, x, $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$ принадлежат классу T_1, а функции 0, $\bar{x}$ не входят в T_1. Значит T_1 тоже не является полной системой. Так же, как для T_0, доказывается, что T_1 замкнутый класс.

3. Обозначим через S класс всех самодвойственных функций, т. е. функций f из P_2 таких, что $f^* = f$.

Для самодвойственной функции имеет место тождество

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n);$$

иначе говоря, на наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, которые мы будем называть *противоположными*, самодвойственная функция принимает противоположные значения. Отсюда следует, что самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на первой половине строк (см. табл. 1). Поэтому число самодвойственных функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, равно $2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}$.

Из этого следует, что класс S не является полным. Его замкнутость вытекает из очевидного для самодвойственных функций $f, f_1, \ldots, f_m$ тождества $\Phi^* = f^*(f_1^*, \ldots, f_m^*) = f(f_1, \ldots, f_m) = \Phi$.

Определение. Для двух наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ выполнено *отношение предшествования* $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, если

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant \beta_n.$$

Например, $(0, 1, 0, 1) \preccurlyeq (1, 1, 0, 1)$.

Очевидно, что если $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \preccurlyeq \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\gamma}$. Следует отметить, что не любые пары наборов находятся в отношении предшествования, например, наборы (0, 1) и (1, 0) в таком отношении не находятся. Таким образом, множество всех наборов длины n по отношению к операции предшествования $\preccurlyeq$ является частично упорядоченным.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, имеет место неравенство

$$f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta}).$$

Монотонными функциями, очевидно, будут 0, 1, x, $x_1 \& x_2$ и $x_1 \vee x_2$.

А импликация и двойная импликация не являются монотонными. Поэтому клсс булевых функций M, состоящий из всех монотонных функций не является полным. Покажем, что он замкнут.

Пусть $\Phi = f(f_1, \ldots, f_m)$, где $f, f_1, \ldots, f_m$ монотонны. Обозначим

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \tilde{x}^1 = (x_{11}, \ldots, x_{1p_1}),\ \ldots,\ \tilde{x}^m = (x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})$$

— наборы переменных функций Φ, $f_1, \ldots, f_m$, причем множество переменных функции Φ состоит из тех и только тех переменных, которые встречаются у функций $f_1, \ldots, f_m$. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — два набора длины n значений переменных $\tilde{x}$, причем $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$. Эти наборы определяют наборы $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^m, \tilde{\beta}^m$ значений переменных $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m$ такие, что $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^m \preccurlyeq \tilde{\beta}^m$. В силу монотонности функций $f_1, \ldots, f_m$

$$f_1(\tilde{\alpha}^1) \leqslant f_1(\tilde{\beta}^1), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}^m) \leqslant f_m(\tilde{\beta}^m).$$

Поэтому

$$(f_1(\tilde{\alpha}^1), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}^m)) \preccurlyeq (f_1(\tilde{\beta}^1), \ldots, f_m(\tilde{\beta}^m)),$$

и в силу монотонности f имеем

$$f(f_1(\tilde{\alpha}^1), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}^m)) \leqslant f(f_1(\tilde{\beta}^1), \ldots, f_m(\tilde{\beta}^m)),$$

откуда получаем

$$\Phi(\tilde{\alpha}) = f(f_1(\tilde{\alpha}^1), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}^m)) \leqslant f(f_1(\tilde{\beta}^1), \ldots, f_m(\tilde{\beta}^m)) = \Phi(\tilde{\beta}).$$

Определение. Ксассом линейных функций L назовём множество всех булевых функций, преставление которых в виде полинома Жегалкина не содержит конъюнкций более чем из одной переменной.

Очевидно, полином Жегалкина $x \wedge y$ не является линейной функцией, поэтому класс L не является полным. Замкнутость L очевидна, т.к. $\Phi = f\left(f_1, f_2, \ldots, f_m\right)$, где $f, f_1, f_2, \ldots, f_m$ - линейные функции, является подстановкой в линейное выражение вместо переменных линейных выражений, из которой после сложения одинаковых констант и переменных может получится только линейный вид полинома Жегалкина.

1.3.7. Теорема Поста.

Лемма 1. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\bar{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одного переменного, т. е. константу.*

Доказательство. Так как $f \notin S$, то найдется набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что

$$f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Рассмотрим функции $\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и положим

$$\varphi(x) = f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Мы имеем

$$\varphi(0) = f(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0)) = f\left(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}\right) =$$
$$= f\left(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n\right) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f\left(1^{\alpha_1}, \ldots, 1^{\alpha_n}\right) =$$
$$= f(\varphi_1(1), \ldots, \varphi_n(1)) = \varphi(1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\bar{x}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что найдется пара соседних наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$ и

$$f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}).$$

В самом деле, так как $f \notin M$, то существуют наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ такие, что $\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\beta}^1$ и $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$. Если наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ — соседние, то наша цель достигнута. Если $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ не являются соседними, то набор $\tilde{\beta}^1$ отличается от набора $\tilde{\alpha}^1$ в t координатах, где $t > 1$, причем эти t координат в наборе $\tilde{\alpha}^1$ имеют значение 0, а в наборе $\tilde{\beta}^1$ —

значение 1. В силу этого между $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно вставить $t-1$ промежуточных наборов $\tilde{\alpha}^2, \tilde{\alpha}^3, \ldots, \tilde{\alpha}^t$ таких, что

$$\tilde{\alpha}^1 \preccurlyeq \tilde{\alpha}^2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \tilde{\alpha}^t \preccurlyeq \tilde{\beta}^1.$$

Очевидно, что наборы, стоящие в этой цепочке рядом, будут соседними. Так как $f(\tilde{\alpha}^1) > f(\tilde{\beta}^1)$, то по крайней мере на одной из этих пар соседних наборов — обозначим их через $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ $(\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta})$ — будет $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$. Предположим, что данные наборы имеют соседство по i-й координате и, следовательно,

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Мы имеем

$$\varphi(0) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta}) = \\ = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = \varphi(1).$$

Последнее означает, что $\varphi(0) = 1$, а $\varphi(1) = 0$, т. е. $\varphi(x) = \bar{x}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций вида x и $\bar{x}$, а также, быть может, путем навешивания отрицания над f, можно получить функцию $x_1 \& x_2$.*

Доказательство. Возьмем полином Жегалкина для f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}.$$

В силу нелинейности полинома в нем найдется член, содержащий не менее двух множителей. Без ограничения общности можно считать, что среди этих множителей присутствуют x_1 и x_2. Тогда можно преобразовать полином следующим образом:

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s} = x_1 x_2 f_1(x_3, \ldots, x_n) + \\ + x_1 f_2(x_3, \ldots, x_n) + x_2 f_3(x_3, \ldots, x_n) + f_4(x_3, \ldots, x_n),$$

где в силу единственности полинома $f_1(x_3, \ldots, x_n) \not\equiv 0$.

Пусть $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $f_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. Тогда

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,$$

где α, β, γ — константы, равные 0 или 1. Рассмотрим функцию $\psi(x_1, x_2)$, получаемую из $\varphi(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma.$$

Очевидно, что

$$\varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma = \\ = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \\ + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1x_2.$$

Следовательно,

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 \,\&\, x_2.$$

Лемма доказана полностью.

В заключение заметим, что замкнутые классы T_0, T_1, S, M и L попарно различны, что видно из табл. 8, в которой знак + означает, что функция содержится в классе, а знак — обозначает противоположную ситуацию.

Таблица 8

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	—	—	+	+
1	—	+	—	+	+
$\bar{x}$	—	—	+	—	+

Пусть $\mathfrak{P} = \{f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots\}$ некоторая произвольная система булевых функций. Тогда справедлива следующая теорема *Поста*.

Теорема 7 (о функциональной полноте). *Для того чтобы система функций $\mathfrak{P}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{P}$ полна, т. е. $[\mathfrak{P}] = P_2$. Допустим, что $\mathfrak{P}$ содержится в одном из указанных классов — обозначим его через $\mathfrak{R}$, т. е. $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$. Тогда в силу свойств замыкания и замкнутости $\mathfrak{R}$ имеем

$$P_2 = [\mathfrak{P}] \subseteq [\mathfrak{N}] = \mathfrak{N}.$$

Значит $\mathfrak{N} = P_2$, что не так. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{P}$ целиком не содержится ни в одном из пяти указанных классов. Тогда из $\mathfrak{P}$ можно выделить подсистему $\mathfrak{P}'$, содержащую не более пяти функций, которая также обладает этим свойством. Для этого возьмем в $\mathfrak{P}$ функции f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не принадлежат соответственно классам T_0, T_1, S, M и L, и положим

$$\mathfrak{P}' = \{f_i, f_j, f_k, f_l, f_m\}.$$

Можно считать, что все эти функции зависят от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$ (см. замечание из § 1).

Доказательство достаточности будем проводить в три этапа.

I. Построение при помощи функций f_i, f_j и f_k констант 0 и 1.

Рассмотрим функцию $f_i \notin T_0$. Возможны два случая:

1. $f_i(1, \ldots, 1) = 1$. Тогда $\varphi(x) = f_i(x, \ldots, x)$ есть константа 1, ибо

$$\varphi(0) = f_i(0, \ldots, 0) = 1, \quad \varphi(1) = f_i(1, \ldots, 1) = 1.$$

Вторая константа получается из f_j: $f_j(1, \ldots, 1) = 0$.

2. $f_i(1, \ldots, 1) = 0$. Тогда $\varphi(x) = f_i(x, \ldots, x)$ есть $\bar{x}$, ибо

$$\varphi(0) = f_i(0, \ldots, 0) = 1, \quad \varphi(1) = f_i(1, \ldots, 1) = 0.$$

Возьмем f_k ($f_k \notin S$). Так как мы имеем $\bar{x}$, то в силу леммы 1 из f_k мы можем получить константу. Поскольку мы располагаем $\bar{x}$, то находим и вторую константу. Итак, в обоих случаях мы получаем константы 0 и 1.

II. Построение при помощи констант 0, 1 и функции f_m функции $\bar{x}$. Это осуществляется на основе леммы 2.

III. Построение при помощи констант 0, 1 и функций $\bar{x}$ и f_l функции $x_1 \& x_2$. Это осуществляется на основе леммы 3.

Таким образом, мы при помощи формул над $\mathfrak{P}'$ (а значит и над $\mathfrak{P}$) реализовали функции $\bar{x}$ и $x_1 \& x_2$. Этим достаточность доказана.

Следствие 1. *Всякий замкнутый класс $\mathfrak{M}$ функций из P_2 такой, что $\mathfrak{M} \neq P_2$, содержится по крайней мере в одном из построенных классов.*

Определение. Класс $\mathfrak{R}$ функций из P_2 называется *предполным* (или *максимальным*), если $\mathfrak{R}$ неполный, а для любой функции $f(f \in P_2,\ f \notin \mathfrak{R})$ класс $\mathfrak{R} \cup \{f\}$ — полный.

Из определения следует, что предполный класс является замкнутым.

Следствие 2. *В алгебре логики существует только пять предполных классов, а именно: T_0, T_1, S, M и L.*

Теорема 8. *Из всякой полной в P_2 системы $\mathfrak{P}$ функций можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырех функций.*

Доказательство. Мы видели, что из $\mathfrak{P}$ можно выделить полную подсистему $\mathfrak{P}'$, содержащую не более пяти функций. Оказывается, что функция $f_i \notin T_0$, кроме того, либо не самодвойственна (случай 1), так как $f_i(0, \ldots, 0) = f_i(1, \ldots, 1)$, либо не сохраняет 1 и не монотонна (случай 2): $f_i(0, \ldots, 0) > f_i(1, \ldots, 1)$. Поэтому полной будет либо система $\{f_i, f_j, f_m, f_l\}$, либо система $\{f_i, f_k, f_l\}$.

1.3.8. Упражнение.

1.12. Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что множество A является полной системой в P_2:

1) $A = \{x \downarrow y\}$; 2) $A = \{xy \oplus z,\ (x \sim y) \oplus z\}$;

3) $A = \{x \to y,\ \overline{x \oplus y \oplus z}\}$; 4) $A = (x \to y,\ f = (01011110)\}$;

5) $A = \{0,\ m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1,\ x \oplus y \oplus 1\}$;

6) $A = \{x \sim y,\ x \oplus y,\ xy \oplus z\}$; 7) $A = \{xy \vee \overline{x}\,\overline{z},\ f = (01111110)\}$;

8) $A = \{xy \oplus zt \oplus 1,\ f = (10110110)\}$;

9) $A = \{0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z,\ xy \oplus zx \oplus zy\}$; 10) $A = \{\overline{x}\,\overline{y} \vee z,\ x \oplus y\}$.

1.3.9. Упражнение.

Выяснить, является ли функция f самодвойственной:

а)

1) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$; 2) $f = x_1 \vee x_2$; 3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;

4) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee x\overline{y}z$; 5) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee xyz$;

6) $f = (x_1 \to x_2)$; 7) $f(x_1 \oplus x_2)$;

8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; 9) $f = x_1x_2 \vee x_3$;

10) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1)$; 11) $f = x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \vee x_2)$;

12) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;

13) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\overline{x}_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$;

14) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1) \oplus x_3$;

15) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_2 \to x_1)$.

б)

1) $\widetilde{\alpha}_f = (1010)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (10010110)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (01100110)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (01110001)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (01001101)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,1001\,0110\,1100)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,0111\,0001\,1000)$;
9) $\widetilde{\alpha}_f = (1000\,0011\,1000\,1100)$; 10) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,1011\,1011\,1001)$;
11) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011\,1010\,0101)$; 12) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011\,0011\,1100)$;
13) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,1001\,0110)$; 14) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,0100\,1011\,0010)$;
15) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,0101\,1010)$.

1.3.10. Упражнение Выяснить, является ли функция f линейной, представив её в виде полинома Жегалкина.

а)

1) $f = x \to y$; 2) $f = \overline{x \to y} \oplus \overline{x}y$; 3) $f = x\overline{y}(x \sim y)$;
4) $f = xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee z$; 5) $f = (xy \vee \overline{x}\,\overline{y})z \vee \overline{z}(x\overline{y} \vee \overline{x}y)$;
6) $f = ((x \to y)(y \to x)) \sim z$; 7) $f = xy\overline{z} \vee x\overline{y}$;
8) $f = xyz \oplus xy\overline{z} \oplus \overline{x}y$; 9) $f = m(x,\, y,\, z) \oplus \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \oplus xyz$;
10) $f = (x \vee yz) \oplus xyz$; 11) $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz$;
12) $f = (xyz \vee x\overline{y}\,\overline{z}) \oplus x(y \oplus z)$; 13) $f = xyz \oplus x(\overline{y}\,\overline{z}) \oplus x(y \vee z)$;
14) $f = (xyz \oplus z\overline{x}\,\overline{y}) \vee (x\overline{y}z \oplus \overline{x}yz)$;
15) $f = (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \sim xy\overline{z}) \sim (x\overline{y}z \sim \overline{x}yz)$.

б)

1) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1101)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0110)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,1001\,0110\,1001)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,1001)$;
9) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,0110\,1001)$; 10) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,1001\,0110\,1001)$;
11) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,1001\,1100)$; 12) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,0101\,1010)$;
13) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0110\,0110\,0101)$; 14) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\,1100\,1100\,0011)$;
15) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,1001\,0110\,0110)$.

1.3.11. Упражнение Проверить, является ли функция f монотонной.

а)

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\,0111)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\,0111)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,0110)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,0111)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\,0011)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (0010\,0011\,0111\,1111)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,0101\,0111\,0111)$.

б)

1) $f = (x_1 \oplus x_2) \,\&\, (x_1 \sim x_2)$; 2) $f = x_1 \to (x_2 \to x_1)$;
3) $f = x_1 \to (x_1 \to x_2)$;
4) $f = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$;
5) $f = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$;
6) $f = (x_1 \oplus x_2)x_1x_2$; 7) $f = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_3x_1$;
8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_1$.

в)

1) $f = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2$; 2) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; 3) $f = x_1x_2 \oplus x_3$;
4) $f = x_1 \vee x_2\overline{x}_3$; 5) $f = x_1x_3 \oplus x_2x_4$;
6) $f = (x_1x_2x_4 \to x_2x_3) \oplus x_4$.

1.3.12. Упражнение Выяснить, является ли система функций полной по теореме Поста.

а)

1) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y,\ xy \vee yz \vee zx\}$;
2) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
3) $A = \{1,\ \overline{x},\ x(y \sim z) \oplus \overline{x}(y \oplus z),\ x \sim y\}$;
4) $A = \{0,\ \overline{x},\ x(y \oplus z) \oplus yz\}$;
5) $A = \{\overline{x},\ x(y \sim z) \sim (y \vee z),\ x \oplus y \oplus z\}$;
6) $A = \{\overline{x},\ x(y \sim z) \sim yz,\ x \oplus y \oplus z\}$;
7) $A = \{xy(x \oplus y),\ xy \oplus x \oplus y,\ 1,\ xy \oplus yz \oplus zx\}$;
8) $A = \{xy(x \oplus z),\ 1\}$; 9) $A = \{x \to y,\ \overline{x} \to \overline{y}x,\ x \oplus y \oplus z,\ 1\}$;
10) $A = \{x \to y,\ x \oplus y\}$.

б)

1) $A = \{f_1 = (0110),\ f_2 = (1100\,0011),\ f_3 = (1001\,0110)\}$;
2) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (0101\,1010),\ f_3 = (0111\,1110)\}$;
3) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (1001\,0110)\}$;
4) $A = \{f_1 = (0101),\ f_2 = (1110\,1000),\ f_3 = (0110\,1001)\}$;
5) $A = \{f_1 = (1001),\ f_2 = (1110\,1000)\}$;
6) $A = \{f_1 = (11),\ f_2 = (0111),\ f_3 = (0011\,0111)\}$;
7) $A = \{f_1 = (10),\ f_2 = (0011\,0111)\}$;
8) $A = \{f_1 = (11),\ f_2 = (00),\ f_3 = (0011\,0101)\}$;
9) $A = \{f_1 = (1000\,0001),\ f_2 = (0111),\ f_3 = (1011)\}$;
10) $A = \{f_1 = (1000\,0001),\ f_2 = (0110),\ f_3 = (1001)\}$.

1.3.13. Упражнение

а) проверить, является ли система базисом в P_2.

1) $A=\{x\to y,\ x\oplus y,\ x\vee y\}$; 2) $A=\{x\oplus y\oplus z,\ x\vee y,\ 0,\ 1\}$;
3) $A=\{x\oplus y\oplus yz,\ x\oplus y\oplus 1\}$; 4) $A=\{xy\vee z,\ xy\oplus z,\ xy\sim z\}$;
5) $A=\{x\oplus y\oplus z,\ x\oplus y\oplus z\oplus 1,\ xy\oplus yz\oplus zx,\ \overline{x}\}$;
6) $A=\{x\oplus y\oplus z,\ xy\oplus zx\oplus zy,\ 0,\ 1\}$; 7) $A=\{x\oplus y,\ x\sim yz\}$;
8) $A=\{xy\oplus yz\oplus zt,\ 0,\ 1,\ x\vee y\}$.

б) из полной системы выделить все возможные базисы.

1) $A=\{1,\ \overline{x},\ xy(x\oplus y),\ x\oplus y\oplus xy\oplus yz\oplus zx\}$;
2) $A=\{0,\ x\oplus y,\ x\to y,\ xy\sim xz\}$;
3) $A=\{0,\ 1,\ x\oplus y\oplus z,\ xy\oplus zx\oplus yz,\ xy\oplus z,\ x\vee y\}$;
4) $A=\{xy,\ x\vee y,\ xy\vee z,\ x\oplus y,\ x\to y\}$;

5) $A=\{xy\oplus z,\ x\oplus y\oplus 1,\ x\overline{y},\ \overline{x}\}$;
6) $A=\{xy\vee\overline{z},\ \overline{x},\ x\to y,\ 0,\ x\oplus zy\}$;
7) $A=\{xy,\ xy\vee z,\ x\oplus y,\ x\to y,\ \overline{x}\}$;
8) $A=\{x\oplus y,\ x\sim y,\ x\oplus y\oplus z,\ xy,\ x\to y\}$.

1.2. Логика предикатов

1.2.1. Язык прикладной логики предикатов

1.2.1.1. Элементы языка прикладной логики предикатов.

♣Рассмотрим предикат

$$x^2 < y. \qquad (1)$$

Он не содержит логических связок, поэтому его формальная запись в языке логики высказываний состоит из одной буквы, например, P.

♦В языке логики предикатов (точнее, *чистой* логики предикатов) должны быть выявлены все переменные, входящие в предикат, и какой-нибудь буквой обозначено *отношение* между ними, выражаемое этим предикатом: $P \mid=\mid A(x,y)$. ♣В данном случае буквой A обозначено следующее *свойство* объектов x и y (или *отношение* между ними): квадрат первого меньше второго (предполагается, что x и y – вещественные числа).

♦Часто мы будем пользоваться более богатым языком *прикладной* логики предикатов, который отличается от обычного математического языка только более жесткими *синтаксическими* требованиями. Именно, в нем должны быть четко выделены следующие элементы.

– *Константы* – имена индивидуальных предметов. ♣В (1) это 2.

– *Переменные* – имена неопределенных предметов, конкретные значения которых выбираются в единой для всех переменных *предметной области D*. ♣В (1) переменными являются буквы x, y с предметной областью $D=\mathbf{R}$.

– *Функциональные знаки,* с помощью которых из *простых выражений* (констант и переменных) образуются *сложные*. ♣В (1) единственная функция возведения в квадрат x^2 изображена, как обычно, взаимным расположением аргумента x и параметра 2. Для табличного анализа умозаключений в прикладной логике предикатов удобно для каждой функции использовать явный функциональный знак. Например, выражение x^2 можно записать в виде $x\uparrow 2$. В логике выражения чаще называются *термами* от английского “term” – член. Мы будем употреблять более традиционный для математики термин “выражение”.

– *Знаки отношений* (*свойств*). ♣В (1) единственным знаком отношения является “<”. Отношения и функции могут зависеть от любого числа *предметных* (т.е. принимающих значения в *D*) переменных. Единственным формальным отличием функции от отношения является то, что значения функции лежат в *D*, а значения отношения – в двухэлементном множестве булевских констант $\mathbf{B} = \{и, л\}$. Отношение от *n* переменных, примененное к *n* выражениям, образует *простой предикат*. Сложные предикаты строятся из простых с помощью логических операций.

– *Логические связки* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

– *Кванторы* $\forall$, $\exists$, которые подробно описываются ниже.

– *Скобки*, определяющие порядок образования сложных выражений и предикатов.

1.2.1.2. Кванторы. Свободные и связанные переменные.

♦Из простого предиката (1) можно получить следующие более сложные предложения.

Существует x, для которого справедливо (1) – $\exists(x)[x^2 < y]$. (2)

Для любого y выполнено (1) – $\forall(y)[x^2 < y]$. (3)

Существует такое y, что для любого x выполнено (1) – $\exists(y)\forall(x)[(1)]$. (4)

Для любого x существует такое y, что выполнено (1) – $\forall(x)\exists(y)[(1)]$. (5)

♣Знаки $\forall$ и $\exists$ происходят от английских слов All (все) и Exist (существовать) и называются *кванторами общности* и *существования*, соответственно. Термин “квантор” образован от латинского “quantum” – сколько. Кванторы указывают, для какого количества (для всех или хотя бы для одного) значений переменной справедливо данное утверждение.

♦Истинность предложения (2), как нетрудно видеть, зависит только от выбора значения переменной *y*: при $y \le 0$ оно ложно, а при остальных значениях истинно. Поэтому говорят, что применение квантора по какой-нибудь переменной превращает эту переменную в *связанную*, от конкретных значений которой истинность утверждения уже не зависит. В (2) имеются два

вхождения переменной *x*, которые связаны квантором существования, и одна *свободная* перемен-
ная *y*. Аналогично, в (3) два вхождения переменной *y* связаны квантором общности, а единственное вхождение переменной *x* свободно; утверждение ложно при всех значениях *x*. В (4) и (5) все переменные связаны; высказывание (4) ложно, а (5) истинно. Последнее обстоятельство следует подчеркнуть особо: *перестановка разноименных кванторов может существенно изменить предложение.*

1.2.1.3. Основные свойства кванторов.

•Формальное описание кванторов и действий с ними дают следующие четыре правила.

Правила общности *Правила существования*

$[\forall(x)A(x)] = и \models A(c) = и \quad (\forall и)$,

$[\forall(x)A(x)] = л \mid\approx A(n) = л \quad (\forall л)$,

$[\exists(x)A(x)] = л \models A(c) = л \quad (\exists л)$, $[\exists(x)A(x)] = и \mid\approx A(n) = и$ $(\exists и)$.

В правилах общности присутствует *произвольная* константа *c*, а в правилах существования утверждается только *существование* константы *n*, для которой справедлива правая часть.

♣Правило $(\forall и)$ аналогично известному свойству конъюнкции: если конъюнкция двух или нескольких предикатов истинна, то истинны все ее операнды. Для квантора в роли операндов выступают высказывания, получающиеся из *A*(*x*) при всевозможных значениях *x*; их может быть бесконечно много. Правило $(\exists л)$ есть обобщение свойства дизъюнкции: если дизъюнкция ложна, то ложны все ее операнды.

♦В правилах существования мы использовали нетрадиционный знак $\mid\approx$, которому мы придаем следующий смысл: если выполнено то, что написано слева от него, то можно ввести в рассмотрение *новую* (т.е. не участвовавшую ранее в данном рассуждении) константу *n*, для которой верно написанное справа от этого знака. ♣Например, если доказано, что уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы одно решение, т.е. $\exists(x)[f(x) = 0]$, то можно обозначить новой для данного рассуждения буквой n одно из его решений (без уточнения того, какое это именно решение) и в дальнейшем пользоваться истинным утверждением $f(n) = 0$. Аналогично, если известно, что утверждение $\forall(x)[f(x) = 0]$ ложно, то можно ввести новую константу *n*, для которой $f(n) \neq 0$.

1.2.1.4. Ограниченные кванторы.

♣Как уже отмечалось, в логике предикатов действует соглашение о том, что все предметные переменные имеют одну и ту же область изменения *D*. В математических теориях часто рассматриваются объекты различной природы: числа, множества, функции и т.п. Все они составляют единую предметную область D, а если некоторый квантор должен относиться только к части этой области, то на переменную, по которой он применяется, накладывают *ограничение*. Пример:

$$\forall(\varepsilon:\varepsilon>0)\exists(n:n\in\mathbf{N})[\frac{1}{n}<\varepsilon]. \qquad (6)$$

♦Ограниченные кванторы не являются новыми логическими операциями; они сводятся к обычным кванторам с помощью следующих определений:

$$\forall(x:A(x))B(x)\overset{опр}{\leftrightarrow}\forall(x)[A(x)\to B(x)] \ ,$$

$$\exists(x:A(x))B(x)\overset{опр}{\leftrightarrow}\exists(x)[A(x)\wedge B(x)] \ .$$

♣Например, утверждение (6) в обычных кванторах принимает вид

$$\forall(\varepsilon)[\varepsilon>0\to\exists(n)[n\in\mathbf{N}\wedge\frac{1}{n}<\varepsilon]].$$

1.2.1.5. Упражнение. *Записать данные формулы на обычном языке и определить, истинны ли они в теории.*

1. $\exists(x:x\in\mathbf{R})\forall(n:n\in\mathbf{N})[n>x]$.

2. $\forall(a:a\in\mathbf{R})\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1=0]$.

3. $\forall(a:a\in\mathbf{R}\wedge\neg a=0)[\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1>0]\wedge\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax+1<0]]$.

4. $\exists(a:a\in\mathbf{R})\forall(x:x\in\mathbf{R})[ax+1>0]$.

5. $\forall(a\in\mathbf{R})[\exists(x\in\mathbf{R})[ax+1>0]\to\exists(y\in\mathbf{R})[ay+1<0]]$.

6. $\exists(c\in\mathbf{R})[\neg\forall(x\in\mathbf{R})[x^2+x+c>0]]$.

7. $\forall(a\in\mathbf{R}:a\geq 0)\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+x+1>0]$.

8. $\forall(a,b,c\in\mathbf{R})[b^2<4ac\to\exists(x_1,x_2)[ax_1^2+bx_1+c=0\wedge ax_2^2+bx_2+c=0\wedge x_1\neq x_2]]$
.

9. $\forall(a\in\mathbf{R})\exists(x\in\mathbf{R})\forall(c\in\mathbf{R})[ax^2+x+c^2>0]$.

10. $\exists(a\in\mathbf{R})\forall(c\in\mathbf{R})\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+x+c>0]$.

1.2.1.6. Пример формализации в языке прикладной логики предикатов.

♣Дополнения к процессу формализации, рассмотренному в 1.2.4 и 1.2.6, которые вносят такие формы предложений, как “Для любого... выполнено...” и “Существует..., для которого выполнено...” рассмотрим на следующем примере.

♣ *Для любых вещественных* a,b,c *верно, что если* $ac<0$, *то* $ax^2+bx+c<0$ *при некотором вещественном x.*

Очевидно, утверждение “$ax^2+bx+c<0$ *при некотором вещественном x*” можно без изменения смысла и логической формы преобразовать в

“*Существует вещественное x, для которого* $ax^2+bx+c<0$ ”. Теперь перевод на язык прикладной логики предикатов дает формулу

$$\forall(a:a\in\mathbf{R})\forall(b:b\in\mathbf{R})\forall(c:c\in\mathbf{R})[ac<0\to\exists(x:x\in\mathbf{R})[ax^2+bx+c<0]]. \quad (7)$$

Группу следующих друг за другом *одноименных* кванторов часто записывают в виде одного квантора по нескольким переменным. Кроме того, если это не может вызвать недоразумений, в круглых скобках рядом с квантором не указывают отдельно имя переменной, а пишут сразу предикат, ограничивающий ее значения:

$$\forall(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},c\in\mathbf{R})[ac<0\to\exists(x\in\mathbf{R})[ax^2+bx+c<0]]. \quad (8)$$

1.2.1.7. Упражнение. *Формализовать данный предикат в языке прикладной логики предикатов. Определить, является ли он истинным.*

1. Неравенство $x^2\geq 0$ справедливо для любого действительного *x*.

2. Найдется хотя бы одно действительное число *x*, для которого $-x^2+x+1<0$, и хотя бы одно действительное *x*, для которого $-x^2+x+1>0$.

3. Существует вещественное *M*, такое, что $(n+1)/n\leq M$ для любого целого $n\neq 0$.

4. Не существует натурального *N*, которое больше любого вещественного *x*.

5. Для любых двух вещественных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих неравенству $x<y$, найдется рациональное *q*, такое, что $x<q<y$.

6. Для любого отрицательного *a* имеется действительное значение *x*, для которого $ax^2+x+1<0$.

7. Для любых $a>0, M>0$ существуют как положительное, так и отрицательное значения *x*, при которых $ax^2+x+1>M$.

8. Для любого положительного ε существует натуральное N, такое, что $\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n\geq N$.

9. Существуют целые числа, которые не делятся ни на какие натуральные числа, кроме 1 и модуля самого себя.

10. Для любых вещественных чисел *x* и *y* выполнено одно и только одно из соотношений $x<y,\ x=y,\ x>y$.

1.2.2. Следствие в прикладной логике предикатов

В этом параграфе мы распространим направленную табличную процедуру проверки логического следствия на формулы прикладной логики предикатов.

1.2.2.1. Применение правил общности.

♣ В приводимом ниже примере первые три шага обычны: посылкам присвоено значение “*и*”, заключению – “*л*”. На шаге 4 связанной переменной x присвоено значение a, а на пятом шаге применено правило общности ($\forall$*и*) – истинностное значение перенесено с квантора на предикат. Шестой шаг следует из второго. На седьмом шаге получилось противоречие с шагом 3, поскольку во всей области действия квантора общности по x этой переменной присвоено значение a. Значения, присваиваемые связанным переменным, можно произвольно выбирать из ♦ *предметной области данного набора формул*, т.е. множества всех участвующих в них констант и свободных переменных, дополненного бесконечным множеством *стандартных констант* $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$.

$$\begin{array}{cccccccc} \forall & (x) & [x<0 & \to & x+1<1], & a<0 & \overset{?}{\models} & a+1<1 \\ \text{и} & a & \text{и} & \text{и} & \underline{\text{и}} & \text{и} & & \underline{\text{л}} \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 7 & 2 & & 3 \end{array}$$

Отметим новые по сравнению с логикой высказываний элементы табличного доказательства.

♦ 1. *Связанной переменной можно присвоить любое значение из предметной области данного набора формул одновременно во всей области действия квантора.*

♦ 2. *Если при этом получается ситуация общности (т.е. выполнено условие одного из правил общности), то можно перенести истинностное значение с квантора на предикат.*

1.2.2.2. Обозначения сложных выражений. Ограниченные кванторы.

♣ В рассматриваемом ниже примере на четвертом шаге введено обозначение c_0 для сложного выражения $\sin y$. Такие обозначения выбираются из бесконечного списка стандартных констант $c_0, c_1, c_2, \ldots$ с тем условием, что для *нового выражения* вводимая константа должна быть *новой*, т.е. не входить в данные формулы и в предыдущую часть данного табличного доказательства. На шаге 6 к ограниченному квантору общности применено правило общности ($\forall$*и*). Над скобкой помещен знак импликации, которая входит в определение ограниченного квантора общности; именно на него переносится на шестом шаге истинностное значение с квантора $\forall$.

$$\begin{array}{cccccccccc} \forall & (x: & x\in\mathbf{R}) & \overset{\to}{[} & x\uparrow 2\geq 0], & \sin & y\in\mathbf{R} & \overset{?}{\models} & (\sin y) & \uparrow 2\geq 0 \\ \text{и} & c_0 & \text{и} & \text{и} & \underline{\text{и}} & c_0 & \text{и} & \text{да} & c_0 & \underline{\text{л}} \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 2 & & 9 & 3 \end{array}$$

К списку новых элементов табличных доказательств для логики предикатов присоединим следующие два.

♦ 3. *Сложным выражениям можно приписывать обозначения из числа новых стандартных констант.*

♦ **4.** ***Ограниченные кванторы сводятся к неограниченным путем добавления над скобкой знака импликации в случае квантора общности и знака конъюнкции для квантора существования.***

1.2.2.3. Пример с подстроками.

♣ В следующем примере после шага 10 строка продолжается по вертикали с переходом на шаге 11 к новой *подстроке*, в которой переменной x присваивается еще одно значение y.

$$\forall\,(x < 0)\overset{\to}{}[\,x+1 < 1],\ a<0,\ y<0 \models a+1<1 \wedge y+1 < 1$$

и а и и и и и и л $\underline{л}$
1 5 7 6 8 2 3 9 4 $\underline{10}$
y и и $\underline{и}$
11 13 12 $\underline{14}$

К списку новых элементов мы присоединим следующий.

♦ 5. *Если по ходу табличного доказательства требуется связанной переменной присвоить последовательно несколько различных значений, то это делается в различных подстроках одной строки.*

1.2.2.4. Применение правил существования.

♣ В следующем доказательстве на шаге 4 связанной переменной присвоено *новое* (не встречавшееся ранее в этой таблице) постоянное значение, поэтому в силу правила существования $(\forall л)$ значение “*л*” перенесено с квантора на предикат (шаг 5).

$$\neg\,\exists\ (x \in \mathbf{R})\ \overset{\wedge}{}\ [\sin x > 1]\ \models\ \forall\ (x \in \mathbf{R})\ \overset{\to}{}\ [\neg\sin x > 1]$$

и л c_0 *и л* $\underline{л}$ *да л* c_0 *и л л* $\underline{и}$
1 3 9 11 10 $\underline{12}$ 2 4 6 5 7 $\underline{8}$

♣ Отметим, что непосредственно после шага 3 была также возможность в левой части доказываемого утверждения воспользоваться правилом общности $(\exists л)$. Однако рациональнее, как это сделано, сначала применить правило существования в правой части, а затем – правило общности в левой. Иначе, как показано ниже, доказательство усложняется, так как на шаге 6 необходимо ввести *новую* константу, а затем её использовать на шаге 11.

$$\neg\,\exists\ (x \in \mathbf{R})\ \overset{\wedge}{}\ [\sin x > 1]\ \models\ \forall\ (x \in \mathbf{R})\ \overset{\to}{}\ [\neg\sin x > 1]$$

и л c_0 *л да л* c_1 *и л л* $\underline{и}$
1 3 4 5 2 6 8 7 9 $\underline{10}$

c_1 *и л* $\underline{л}$
11 13 12 $\underline{14}$

♦ 6. *Если на некотором этапе табличной процедуры возможно применение правила общности и правила существования, то целесообразно начать с правила существования.*

1.2.2.5. Обратное применение правил общности.

$$\exists\,(x)\,[x > 0 \wedge x < 1] \overset{?}{\models} \exists\,(x)\,[x > 0] \wedge \exists\ (x)\,[x < 1]$$

и c_0 *и и и да* $\underline{и}$ c_0 *и* $\underline{л}$ $\underline{и}$ c_0 *и*
1 3 5 4 6 $\underline{9}$ 7 8 $\underline{2}$ $\underline{12}$ 10 11

♣ После шага 2 можно было разветвить таблицу, так как конъюнкции присвоено значение «*л*». Но в данном случае имеется более прямой путь. На шагах 3, 4 применяется правило существования – вводится *новая* константа c_0. На шаге 7 сразу производится присваивание $x = c_0$ с целью воспользоваться далее (шаг 8) результатом шага 5. Значение «*и*» на шаге 9 получено из 7 и 8 «обратным применением правила общности $(\exists л)$», поскольку значение «*л*» приводило бы к противоречию с этим правилом и шагом 8. Проведя аналогичные действия на шагах 10-12, мы получили противоречие между 12, 2 и 9. Отметим эту методику как ещё один новый элемент табличной процедуры.

♦ 7. *Иногда удобно применять правила общности в следующем виде:*

$$A(c) = и \models [\exists(x)A(x)] = и, \qquad A(c) = л \models [\forall(x)A(x)] = л.$$

1.2.2.6. Равенство как логический предикат.

♦ Равенство $x = y$ будем понимать как *тождество*, т. е. выражение того факта, что x и y – это имена одного и того же объекта. ♣ В математике равенство иногда понимается и в другом смысле; например, равенство двух векторов – это возможность добиться их полного совпадения путём параллельного переноса. Для табличной процедуры принятое понимание равенства выражается добавлением двух правил построения таблиц.

♦ 8. *Если в таблице есть фрагмент вида* $\begin{array}{c} u = v \\ c \;и\; c_1 \end{array}$ *, то всюду в дальнейшем в этой таблице можно выражению* u *присваивать значение* c_1*, а выражению* v *– значение* c.

♦ 9. *Фрагмент таблицы вида* $\begin{array}{c} u = v \\ c \;л\; c \end{array}$ *можно отметить как противоречие, или, что то же, фрагмент* $\begin{array}{c} u = v \\ c \quad c \end{array}$ *можно дополнить значением «и» под знаком равенства.*

♣ В следующих двух примерах показано применение этих правил для доказательства утверждений, содержащих предикат равенства. Первый пример устанавливает *транзитивность* равенства, а второй – *взаимозаменяемость равных объектов*.

$$\begin{array}{l} \models \forall\,(x, y, z)\,[x = y \wedge y = z \rightarrow x = z] \\ да\;\; л\;\; c_0\;\; c_1\;\; c_2\;\; c_0\;\; и\;\; c_1\;\; и\;\; c_1\;\; и\;\; c_2\;\; л\;\; \underline{c_1}\;\; \underline{л}\;\; \underline{c_1} \\ \quad\;\; 1\;\; 2\;\; 3\;\; 4\;\;\;\; 8\;\;\;\; 6\;\;\;\; 9\;\;\;\; 5\;\; 10\;\; 7\;\; 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \models \forall\,(x, y)\,[P\,(x) \wedge x = y \rightarrow P\,(y)] \\ да\;\; л\;\; c_0\;\; c_1\;\; \underline{и}\;\; \underline{c_0}\;\; и\;\; c_0\;\; и\;\; c_1\;\; л\;\; \underline{л}\;\; \underline{c_0} \\ \quad\;\; 1\;\; 2\;\; 3\;\; 7\;\;\;\; 5\;\;\;\; 8\;\;\;\; 4\;\; 6\;\; 9 \end{array}$$

В первом примере на шагах 10 и 11 использовано правило 8, а противоречие отмечено по правилу 9. Во втором примере использовано только первое правило: оно позволило на шаге 9 присвоить переменной y значение c_0. В последнем примере предполагается, что предикат $P(x)$ не содержит буквы y, иначе последовательная подстановка y вместо x, а затем c_0 вместо y может дать результат, отличный от $P(c_0)$.

1.2.2.7. Квантор существования и единственности. ♦ Предикат равенства позволяет ввести часто используемый в математике *квантор существования и единственности:*

$$\exists!(x)P(x) \overset{опр}{=\!\!|} \exists(x)P(x) \wedge \forall(x,y)[P(x) \wedge P(y) \to x = y].$$

♣Например, он используется в следующем высказывании:

$$\forall(a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})\exists!(x \in \mathbf{R})[a + x = b].$$

1.2.2.8. Упражнение. *Доказать справедливость следующих логических соотношений.*

1. $\neg\exists(n \in \mathbf{N})[n+1<1], (-1)+1<1 \models \neg(-1 \in \mathbf{N})$.

2. $\forall(x \in \mathbf{R})[x^2 \geq 0], i^2 = -1, \neg(-1 \geq 0) \models \neg(i \in \mathbf{R})$.

3. $\forall(x \in \mathbf{R})[2x^2 + 1 > 0] \models \exists(n)\forall(x \in \mathbf{R})[nx^2 + 1 > 0]$.

4. $\forall(x : |x| \leq 1)[x \leq 1 \wedge -1 \leq x] =\!\!| \forall(x)[|x| \leq 1 \to x \leq 1] \wedge \forall(x)[\neg(-1 \leq x) \to \neg(|x| \leq 1)]$.

5.
$\exists(d \in \mathbf{Z})[15 \vdots d \wedge (d \vdots 2 \vee d \vdots 3)] =\!\!| \exists(d : d \vdots 2)[d \in \mathbf{Z} \wedge 15 \vdots d] \vee \exists(d : d \in \mathbf{Z} \wedge 15 \vdots d)[d \vdots 3]$
.

6. $\models \forall(x_1, x_2 : x_1 < x_2)[f(x_1) < f(x_2)] \wedge e < \pi \to f(e) < f(\pi)$.

7. $\models \exists(q \in \mathbf{Q})[e < q \wedge q < \pi] \to \exists(q \in \mathbf{Q})[e < q] \wedge \exists(q < \pi)[q \in \mathbf{Q}]$.

8. $\models \forall(n)[n \vdots 4 \to n \vdots 2] \to \neg\exists(n : n \vdots 4)[\neg n \vdots 2]$.

9. $\forall(x \in (0,\pi))[\sin x > 0],\ u \in (0,\pi),\ \neg(\sin u > 0) \models$.

10. $\sin e > 0, e \in (0,\pi), \neg\exists(x : \sin x > 0)[x \in (0,\pi)] \models$.

1.2.2.9. Упражнение. *Формализовать и проверить.*

1. Для любого $x \in X$ справедливо неравенство $x < n$. Не существует такого m, чтобы для любого $y \in Y$ выполнялось неравенство $y < m$. Следовательно, не любой элемент $y \in Y$ принадлежит X.

2. Для любого n найдется $x \in X$, для которого не выполнено неравенство $x < n$. Неравенство $y < m$ справедливо для каждого $y \in Y$. Следовательно, хотя бы один элемент множества X не принадлежит Y.

3. Для любого положительного ε существует натуральное n, такое, что $n\varepsilon > 1$. Не существует натурального n, для которого $na > 1$. Следовательно, неверно, что a положительно.

4. Существует натуральное n, такое, что $x < n$ для любого $x \in X$. Для любого натурального m существует $y \in Y$, для которого не справедливо неравенство $y < m$. Следовательно, существует элемент $y \in Y$, который не принадлежит X.

1.2.3. Основные теоремы логики предикатов

Перечень наиболее употребительных соотношений логики предикатов мы представим в виде двух теорем.

1.2.3.1. Теорема о кванторах, отрицании, конъюнкции и дизъюнкции.

• *Пусть* $A, B, C,$- *произвольные предикаты,* x *и* y- *переменные,* x_0- *константа. Будем обозначать через* $A|_{x=y}$ *результат замены в* A *всех свободных вхождений* x *на* y *. Утверждается, что справедливы следующие соотношения.*

1) Правила *переименования* связанной переменной: если y не входит в A и B ни в связанном, ни в свободном виде, то

$$\forall(x:A)B \models \forall\left(y:A|_{x=y}\right)B|_{x=y}, \qquad (\forall xy)$$

$$\exists(x:A)B \models \exists\left(y:A|_{x=y}\right) B|_{x=y}. \qquad (\exists xy)$$

2) Правила *удаления* и *введения* кванторов:

$$\forall(x:A)B, A|_{x=x_0} \models B|_{x=x_0}, \qquad (\forall - уд)$$

$$A|_{x=x_0}, B|_{x=x_0} \models \exists(x:A)B. \qquad (\exists - вв)$$

3) Правила *пронесения* кванторов через *отрицание*:

$$\neg\forall(x:A)B \;\;=\!\!|\!\!\models\;\; \exists(x:A)[\neg B], \qquad (\neg\forall)$$

$$\neg\exists(x:A)B \;\;=\!\!|\!\!\models\;\; \forall(x:A)[\neg B]. \qquad (\neg\exists)$$

4) Правила *пронесения* кванторов через *конъюнкцию*:

$$\forall(x:A)[B\wedge C] \;\;=\!\!|\!\!\models\;\; \forall(x:A)B\wedge\forall(x:A)C, \qquad (\forall\wedge)$$

$$\exists(x:A)[B\wedge C] \overset{\neq|}{\models} \exists(x:A)B\wedge\exists(x:A)C; \qquad (\exists\wedge\models)$$

если B или C не зависит от x , то

$$\exists(x:A)[B\wedge C] \;\;=\!\!|\!\!\models\;\; \exists(x:A)B\wedge\exists(x:A)C. \qquad (\exists\wedge =\!\!|\!\!\models)$$

5) Правила *пронесения* кванторов через *дизъюнкцию*:

$$\exists(x:A)[B\vee C] \;\;=\!\!|\!\!\models\;\; \exists(x:A)B\vee\exists(x:A)C, \qquad (\exists\vee)$$

$$\forall(x:A)[B\vee C] \overset{|\neq}{=\!|} \forall(x:A)B\vee\forall(x:A)C; \qquad (\forall\vee =\!|)$$

если B или C не зависит от x , то

$$\forall(x:A)[B\vee C] \;\;=\!\!|\!\!\models\;\; \forall(x:A)B\vee\forall(x:A)C. \qquad (\forall\vee =\!\!|\!\!\models)$$

♣ Условие, наложенное на y в $(\forall xy)$ и $(\exists xy)$, существенно. Например, нарушение этого условия приводит к тому, что из верного для любого y предиката $\exists(x:x\in\mathbf{Q})[x>y]$ получается ложное высказывание $\exists(y:y\in\mathbf{Q})[y>y]$ и из истинного высказывания $\forall(x:x\in\mathbf{R})\exists(y:y\in\mathbf{R})[x>y]$ – ложное утверждение $\forall(y:y\in\mathbf{R})\exists(y:y\in\mathbf{R})[y>y]$. ♣ Правила $(\neg\forall)$, $(\neg\exists)$ обобщают законы де Моргана. Они часто применяются в доказательствах от противного для переформулировки “отрицательных” утверждений в “позитивной” форме. Например, если мы предположили, что $\neg\exists(M)\forall(n:\ n\in\mathbf{N})[a_n\le M]$ (т.е. последовательность a не является ограниченной сверху), то мы можем переписать это предположение в эквивалентной *позитивной* форме: $\forall(M)\exists(n:\ n\in\mathbf{N})[a_n>M]$ (здесь использована еще эквивалентность $\neg(a_n\le M)\Leftrightarrow a_n>M$). ♣ Все утверждения теоремы можно доказать с помощью табличной процедуры. Докажем, например, $(\forall xy)$, $(\exists\wedge|{=})$ и $(\exists\wedge|{=}|)$.

♥ $(\forall xy)$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\forall & (x:A) & \to & B & \models & \forall & (y:A|_{x=y}) & \to & B|_{x=y} \\
 & и\ c_1 & и & и & \underline{и}\ да & л & c_1 & и & л\ \underline{л} \\
 & 1\ \ 7 & 9 & 8 & \underline{10} & 2 & 3 & 5 & 4\ \ \underline{6}
\end{array}$$

Ограничение на переменную y использовано на шаге 9, так как без него результат последовательной подстановки $A|_{x=y}\big|_{y=c_1}$ может не совпадать с результатом непосредственной подстановки $A|_{x=c_1}$. Например, $(x<y)|_{x=y}\big|_{y=c_1}$ есть $c_1<c_1$, а $(x<y)|_{x=c_1}$ - $c_1<y$. Это ограничение использовано и при выявлении противоречия между 6 и 10.

♥ $(\exists\wedge|{=})$:

$$\begin{array}{l}
\exists\,(x:A)\ \hat{}\ [B\wedge C]\ \overset{?}{\models}\ \exists\ (x:A)\ \hat{}\ \ B\ \wedge\ \exists\ (x:A)\ \hat{}\ \ C \\
и\ c_0\ \ и\ и\ и\ и\ и\ \ да\ \ \underline{и}\ c_0\ \ и\ \ и\ \ и\ \ \underline{л}\ \ \underline{и}\ c_0\ \ и\ \ и\ \ и \\
1\ \ 3\ \ \ 5\ \ 4\ \ 7\ \ 6\ \ 8\ \ \ \ \ \ \ \underline{13}\ \ 9\ \ 10\ 12\ 11\ \ \underline{2}\ \ \underline{18}\ 14\ \ 15\ 17\ 16
\end{array}$$

Тот факт, что левая часть не следует логически из правой, докажем с помощью смыслового контрпримера: A - “$x\in\mathbf{N}$”, B - “x четно”, C - “x нечетно”. Очевидно, в такой интерпретации правая часть истинна, а левая ложна.

♥ В доказательстве $(\exists\wedge|{=}|)$ будем, для определенности, считать, что от x не зависит B. Ввиду $(\exists\wedge|{=})$ достаточно доказать только

$(\exists\wedge{=}|)$:

$$\begin{array}{l}
\exists\,(x:A)\ \hat{}\ [B\ \wedge\ C]\ \overset{?}{=\!|}\ \exists\,(x:A)\ \hat{}\ B\wedge\exists\,(x:A)\ \hat{}\ \ C \\
л\ c_1\ \ и\ \ л\ \ \underline{и}\ \ \underline{л}\ \ \underline{и}\ \ да\ и\ c_0\ \ и\ и\ и\ и\ и\ c_1\ \ и\ \ и\ \ и \\
2\ 13\ 15\ 14\ \underline{18}\ \underline{16}\ \underline{17}\ \ \ \ \ 3\ \ 5\ \ \ 7\ \ 6\ \ 8\ \ 1\ \ 4\ \ 9\ \ 11\ 10\ 12
\end{array}$$

Поскольку $B|_{x=c_0}=и$ (шаг 8) и B не зависит от x, то и $B|_{x=c_1}=и$ (шаг 18).

1.2.3.2. Теорема о кванторах и импликации.

• 1) Правила *пронесения* кванторов через *импликацию*:

$$\exists(x:A)[B\to C]\ \ |{=}|\ \ \forall(x:A)B\to\exists(x:A)C\ ; \qquad (\exists\to)$$

$$\forall(x:A)[B\to C]\ \ \overset{|\ne}{=\!|}\ \ \exists(x:A)B\to\forall(x:A)C\ ; \qquad (\forall\to{=}|)$$

если B или C не зависит от x , то

$$\forall(x:A)[B\to C]\ \ |{=}|\ \ \exists(x:A)B\to\ \forall(x:A)C\ . \qquad (\forall\to|{=}|)$$

• 2) Правила *пронесения* кванторов через *кванторы*: если A не содержит буквы y, B – буквы x, а C может зависеть от x и y, то

$$\forall(x:A)\forall(y:B)C \ \models\!\!\mid\ \forall(y:B)\forall(x:A)C \ ; \qquad (\forall\forall)$$

$$\exists(x:A)\exists(y:B)C \ \models\!\!\mid\ \exists(y:B)\exists(x:A)C \ ; \qquad (\exists\exists)$$

$$\exists(x:A)\forall(y:B)C \ \overset{\neq\mid}{\models} \forall(y:B)\exists(x:A)C \ . \qquad (\exists\forall)$$

♥ Докажем $(\forall\to=\!\mid)$ и $(\forall\to\mid\!=\!\mid)$ с помощью *цепочки преобразований*.

$$\forall(x:A)[B\to C] \ \ \mid\!=\!\mid\ \forall(x:A)[\neg B\vee C] \ \overset{\mid\neq}{=\!\mid}\ (\mid\!=\!\mid)\ \ \forall(x:A)[\neg B]\vee\forall(x:A)C \ \ \mid\!=\!\mid \ \ \mid\!=\!\mid$$
$$\neg\exists(x:A)B\vee\forall(x:A)C \ \ \mid\!=\!\mid\ \ \exists(x:A)B\to\forall(x:A)C\,.$$

В преобразованиях последовательно использованы доказанные ранее утверждения: выражение $\to$ через $\neg$ и $\vee$, правило $(\forall\vee=\!\mid)$, а если B или C не зависит от x, то $(\forall\vee\mid\!=\!\mid)$, правило $(\neg\exists)$ и, наконец, вновь выражение $\to$ через $\neg$ и $\vee$, на этот раз в обратную сторону.

♣ В доказательствах цепочками преобразований применяется следующее свойство логической эквивалентности: • *если какую-нибудь часть формулы заменить на логически эквивалентную, то получится формула, логически эквивалентная данной.*

♥Это верно, потому что в любой интерпретации логически эквивалентные формулы имеют одинаковые истинностные значения.

♥ Для доказательства утверждения "$\neq\mid$" в $(\exists\forall)$ рассмотрим следующую интерпретацию: A – «$x\in\mathbf{R}$», B – «$y\in\mathbf{R}$», C – «$x<y$». В этой интерпретации, как нетрудно видеть, правая часть $(\exists\forall)$ истинна, а левая ложна.

♥ Доказательство утверждения "$\models$" в $(\exists\forall)$ проведём с помощью табличной процедуры.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\exists & (x: & A)^{\wedge} & & \forall & (y: & B)^{\to} & & C & \models & \forall & (y: & B)^{\to} & & \exists & (x: & A)^{\wedge} & & C \\
\text{и} & c_0 & \text{и} & \text{и} & \text{и} & c_1 & \text{и} & \text{и} & \underline{\text{и}} & \text{да} & \text{л} & c_1 & \text{и} & \text{л} & \text{л} & c_0 & \text{и} & \text{л} & \underline{\text{л}} \\
1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 15 & 17 & 16 & 18 & & 2 & 7 & 9 & 8 & 10 & 11 & 13 & 12 & 14
\end{array}$$

1.2.3.3. Упражнение. *Доказать остальные утверждения теорем 1.2.3.1 и 1.2.3.2.*

Литература

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 255 с.
2. Лексаченко В.А. Логика. Множества. Вероятность / В.А. Лексаченко. – М.: Вузовская книга, 2001. – 128 с.
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика: Курс лекций: Задачник – практикум и решения: Учеб. пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб.: Лань, 1999. – 285 с.
4. Гладкий А.В. Математическая логика: Учеб. пособие / А.В. Гладкий. – М., 1998. – 479 с.
5. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Логика высказываний / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВГУ, 1989. – 24 с.
6. Петрова Л.П., Садовский Б.Н. Логика предикатов / Л.П. Петрова, Б.Н. Садовский. – Воронеж: ВГУ, 1989. – 18 с.
7. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А.Палютин. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 1976 – 320 с.
9. Шенфилд Дж. Математическая логика / Дж. Шенфилд. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
10. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
11. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р.Р. Столл. – М.: Просвещение, 1968. – 230 с.
12. Новиков П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 400 с.

1. Элементы комбинаторного анализа.

1.1. Общие правила комбинаторики.

Правило суммы (ПС). Если объект A можно выбрать из множества $E_A=\{a_1, a_2,\dots, a_n\}$ n различными способами, а объект B можно выбрать из множества $E_B=\{b_1,b_2,\dots, b_m\}$ m различными способами, причём $E_A\bigcap E_B=\varnothing$, то выбор «либо A, либо B» можно осуществить $n+m$ разными способами.

Доказательство. Выбор «либо A, либо B» эквивалентен выбору объекта C из множества $E_C=E_A\bigcup E_B=\{a_1, a_2,\dots, a_n, b_1,b_2,\dots, b_m\}$, поэтому число различных таких выборов, очевидно равно $n+m$.

Задача. Как измениться утверждение «правило суммы», если $E_A\bigcap E_B\neq\varnothing$ и состоит из k элементов? ($n+m$-к)

Правило произведения (ПП). Если объект A можно выбрать из множества $E_A=\{a_1, a_2,\dots, a_n\}$ n различными способами, и после каждого такого выбора объект B можно выбрать из множества $E_B=\{b_1,b_2,\dots, b_m\}$ m различными способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить $n\cdot m$ разными способами.

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции по n.

<u>База индукции:</u> При $n=1$ это число, очевидно совпадает с числом выбора объекта B и равно $1\cdot m=m$.

<u>Шаг индукции</u>: Пусть при $n\le i$ (ПП) верно, т.е. соответствующее число равно $n\cdot m$. Покажем выполнение (ПП) при $n=i+1$. Представим задачу следующим эквивалентным образом. Выбираем объект C – пару (a_j, b_s) так, что $a_j\in\{a_1, a_2,\dots, a_i\}$, а $b_s\in\{b_1,b_2,\dots, b_m\}$, и выбираем объект D – пару (a_{i+1}, b_s). Число выборов C по предположению индукции равно $i\cdot m$, а число выборов D равно m (см. базу индукции). Теперь выбор пары (A, B) равносилен выбору объекта «либо C, либо D», а число таких выборов равно по (ПС) $i\cdot m+m=(i+1)\cdot m$. Что и требовалось доказать.

Примеры.

1) Требуется определить сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет)? При этом учитываются не только слова, имеющие смысл, но и такие бессмысленные, как «трнаук» и т. п.

<u>Решение</u>. В этом случае на первое место у нас 33 кандидата. Но после того как первая буква выбрана, вторую можно выбрать лишь 32 способами – ведь повторять выбранную первой букву нельзя. На третье место тоже 32 кандидата – первую букву уже можно употребить, а вторую – нельзя. Так же убеждаемся, что на все места, кроме первого, имеется по 32 кандидата. А так как число этих мест равно 5, то получаем по (ПП) ответ 33 *32 *32*32 *32* 32 = 33*32^5 = 1 107 296 256.

2) Определить сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т. е. чтобы какое-то число очков встречалось на обеих костях)?

Решение. Сначала выберем одну кость. Это можно сделать 28 способами. При этом в 7 случаях выбранная кость окажется «дублем», т. е. костью вида 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5, 6|6, а в 21 случае — костью с различными числами очков (например, 0|5, 1|3 и т. д.). В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами (например, если на первом шаге выбрана кость 1|1, то на втором шаге можно взять одну из костей 0|l, l|2, l|3, l|4, l|5, l|6). Во втором же случае вторую кость можно выбирать 12 способами (например, для кости 3|5 подойдут как кости 0|3, 1|3, 2|3, 3|3, 3|4, 3|6, так и 0|5, 1|5, 2|5, 4|5, 5|5, 5|6). По (ПП) в первом случае получаем $7 \cdot 6 = 42$ выбора, а во втором $21 \cdot 12 = 252$ выбора. Окончательно по (ПС) получаем 42 + 252 = 294 способа выбора пары (столькими способами могут быть сделаны первые два хода в игре в домино). В проведенном рассуждении учитывался и порядок, в котором выбирались кости. Поэтому каждая пара костей появлялась дважды (например, первый раз 0|1 и 1|6, а второй раз 1|6 и 0|1). Если не учитывать порядок выбора костей, то получим вдвое меньше способов выбора, т. е. 147 способов.

Комбинаторный анализ занимается изучением объектов, получаемых из конечного множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ или счётного множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots\}$. Этими объектами могут быть упорядоченные или не упорядоченные подмножества множества E с повторяющимися или не повторяющимися элементами.

1.2. Комбинаторные объекты и комбинаторные числа.

Определение 1. *Системой подмножеств* Ω_n множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ называют множество, элементами которого являются все подмножества множества E.

Определение 2. *Размещением из* n *по* k называют любое упорядоченное множество, составленное из k элементом, взятых из множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$, содержащего n различных элементов.

Размещения могут быть *без повторений* и *с повторениями* одних и тех же элементов из E.

Определение 3. *Перестановкой без повторений из* n элементов называют любое упорядоченное множество, построенное из всех элементов множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$.

Определение 4. *Перестановкой с повторениями из* k элементов называют любое упорядоченное множество, построенное из элементов множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ так, что элемент a_1 множества встречается k_1 раз, элемент a_2 встречается k_2 раза, ..., элемент a_n встречается k_n раз, причём $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$.

Определение 5. *Сочетанием без повторений из* n *по* k называют любое подмножество множества E, состоящее из k различных элементов.

Определение 6. *Сочетанием с повторениями из* n *по* k называют любое множество, состоящее из k элементов, взятых из множества E возможно с повторением.

Определение 7. n*-мерным кубом размера* k $(k>2)$ называют совокупность всех упорядоченных наборов из n элементов, взятых с повторениями из множества индексов

$E = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Эту совокупность называют также множеством вершин n-мерного кубом размера k, которое обозначают E_k^n.

Определение 8. *Разбиением множества* E называется любая неупорядоченная система $R = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ непустых подмножеств множества E, обладающая следующими свойствами:

1) $E = E_1 \bigcup E_2 \bigcup \ldots \bigcup E_k$;
2) $E_i \bigcap E_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$.

Упражнения.

1) Из 9 человек надо выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря правления. Сколькими различными способами это можно сделать?
2) В комнате общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек, причём все чашки блюдца и ложки отличаются друг от друга. Сколькими различными способами студенты могут накрыть себе стол для чаепития, так чтоб каждому из них досталось по одной чашке, одному блюдцу и одной ложке?
3) Сколько чётных и сколько нечётных различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать лишь один раз в составляемом числе?
4) На званый ужин приглашены 5 мужчин и 5 женщин. Напротив каждого места на круглый стол необходимо поставить табличку с именем того, кто будет на этом месте сидеть, так, чтоб никакие два лица одного пола не оказались сидящими рядом. Сколькими разными способами можно расставить таблички в случае, когда все 10 мест считаются различными, и когда места не отличаются друг от друга (т.е. расстановки считаются одинаковыми, если одна получается из другой поворотом стола)?
5) Имеются пять различных красок. а) Сколькими различными способами можно выбрать три разные из них? б) Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с тремя горизонтальными полосами разного цвета? а если один из цветов должен быть красным? а если цвета могут повторяться, но не на соседних полосах?
6) Сколько точек пересечения имеют 10 проведённых на плоскости прямых линий, из которых никакие две не являются параллельными и никакие три не пересекаются в одной точке?
7) В почтовом отделении продаются открытки 10 видов в неограниченном количестве. Сколькими способами: а) можно купить в ней 12 открыток? б) – 8 открыток? – 8 различных открыток?

1.3. Свойства комбинаторных объектов и чисел.

С семейством подмножеств Ω_n множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ обычно связывают число $|\Omega_n|$, называемое его мощностью и равное количеству элементов в нём.

Свойство 1. Число размещений с повторениями из n элементов по k равно $\overline{A}_n^k = n^k$.

Доказательство. Покажем равенство методом математической индукции по длине последовательности.

База индукции: при $k=1$ составить последовательность из одного элемента можно n способами, ставя на единственное место один из элементов множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$.

Шаг индукции: Пусть для $k\le i$ $\overline{A}_n^k = n^k$. Покажем выполнение этого равенства для $k=i+1$. Первые i мест последовательности можно заполнить согласно предположению индукции n^i способами и последнее место можно заполнить (как в базе индукции) n способами. По (ПП) заполнить всю последовательность можно $n^i\cdot n = n^{i+1}$.

Следствие. $|\Omega_n| = 2^n$.

Доказательство. Каждое подмножество $A\subset E$ семейства Ω_n однозначно описывается последовательностью из нулей и единиц длины n $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i\in A \\ 0, \text{ если } a_i\notin A \end{cases}, \ \left(i=\overline{1,n}\right).$$

А число таких последовательностей равно $\overline{A}_2^n = 2^n$.

Свойство 2. Число размещений без повторений из n элементов по k равно $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. Обозначают число различных размещений без повторений из n элементов по k как A_n^k или $(n)_k$. При построении конкретного размещения без повторений на первое место можно поставить n элементов, на второе $n-1$ элементов и т.д. Поэтому

$$\mathrm{A}_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) =$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Свойство 3. Число перестановок без повторений из n элементов равно $P_n = n!$.

Доказательство. Перестановки без повторений из n элементов являются частным случаем размещений без повторений из n элементов по n. Число различных перестановок без повторений из n элементов обозначают как P_n или $(n)_n$ и вычисляется

$$\mathrm{P_n} = \mathrm{A_n^n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Число всех перестановок с повторениями из k_1 одинаковых элементов a_1, k_2 одинаковых элементов a_2 и т.д., k_n одинаковых элементов a_n обозначают $\mathrm{P}(k_1, k_2,\ldots,k_n)$.

Свойство 4. $\mathrm{P}(k_1, k_2,\ldots,k_n) = \dfrac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$, где $k = k_1+k_2+\ldots+k_n$.

Доказательство. Для доказательства предположим сначала, что все k элементов различны, тогда $\mathrm{P}_k = k!$. За счёт $\mathrm{P}_{k_1} = k_1!$ различных перестановок из k_1 одинаковых элементов, равных a_1, мы $k_1!$ раз сосчитали одну и ту же перестановку. За счёт различных перестановок из k_2 одинаковых элементов, равных a_2, мы в $k_2!$ раз увеличили число $\mathrm{P}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и т.д. Таким образом $\mathrm{P}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \dfrac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$, что и требовалось доказать.

Число сочетаний без повторений из n элементов по k обозначают через C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Свойство 5. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. C_n^k отличается от числа размещений без повторений A_n^k тем, что не учитывается порядок элементов, за счёт этого C_n^k меньше A_n^k в число $\mathrm{P}_k = k!$ перестановок из k элементов. Поэтому $C_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{P}_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Иногда для удобства число C_n^k доопределяют для $k > n$, полагая при этом $C_n^k = 0$.

Определение 9. Конечная последовательность $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{a_n\}$ называется унимодальной, если существует такой индекс $0 < k_n < n$ такой, что $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k_n} \geq a_{k_n+1} > a_{k_n+2} > \ldots > a_n$, то есть:

1) последовательность строго возрастает на отрезке $[0, k_n]$ при $k_n > 0$;

2) последовательность строго убывает на отрезке $[k_n + 1, n]$ при $k_n + 1 < n$;

3) максимальное значение принимается последовательностью не более, чем в двух точках: k_n и быть может $k_n + 1$ (в этом случае $k_n < n - 1$).

Свойство 6 (свойства биномиальных чисел C_n^k):

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

2. $C_n^k \cdot C_k^l = C_n^l \cdot C_{n-l}^{k-l}$ при $0 \leq l \leq k \leq n$;

3. при фиксированном значении n последовательность $\{C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n\}$ унимодальна и $k_n = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ ($[\cdot]$ обозначается целая часть числа);

4. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

5. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

6. $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$ (формула бинома Ньютона).

Доказательство 1 и 2. Непосредственно из определения C_n^k:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{0!n!} = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n;$$

$$C_n^k \cdot C_k^l = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-l-(k-l))!} = C_n^l \cdot C_{n-l}^{k-l}.$$

Доказательство 3. Рассмотрим отношение двух соседних элементов последовательности $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n!}{k!(n-k!)} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \frac{n-k+1}{k}$. При $k \le \left[\frac{n}{2}\right]$, то есть при $k < \frac{n+1}{2}$ имеем $\frac{n+1-k}{k} > \frac{(n+1) - \left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = 1$ или $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} > 1$, откуда $C_n^{k-1} < C_n^k$. При $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, т.е. при $k > \frac{n+1}{2}$ имеем $\frac{n+1-k}{k} < 1$ откуда $C_n^{k-1} > C_n^k$, что и требовалось доказать.

Следствие. $\max\limits_{k=1,\ldots,n} \left\{C_n^k\right\} = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$

Доказательство 4. Проверим непосредственно по определению C_n^k:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k+k}{k(n-k)} = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k\ .$$

Также это утверждение доказывается установлением взаимно однозначного соответствия между каждым сочетанием из n по k, если оно содержит элемент a_n, с сочетанием из $n-1$ по $k-1$, и если оно не содержит a_n, то с сочетанием из $n-1$ по k.

Благодаря рекуррентному соотношению **4** строится таблица, называемая «треугольником Паскаля»

Доказательство 5. Воспользуемся методом индукции по *n*.

<u>База индукции:</u> При $n=1$, выполнено утверждение 5, действительно, $C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$.

<u>Шаг индукции:</u> Предположим, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ выполнено для $n = m$. Покажем, что тогда оно выполнено для $n = m+1$. Используя свойство 4, запишем

$$C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 + \ldots + C_{m+1}^{m+1} = C_m^0 + \left(C_m^1 + C_m^0\right) + \ldots + \left(C_m^m + C_m^{m-1}\right) + C_{m+1}^{m+1} =$$

$$\left(C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m\right) + \left(C_m^0 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m\right) = 2^m + 2^m = 2^{m+1} ,$$

так как $C_{m+1}^{m+!} = 1 = C_m^m$

Доказательство 6. Для доказательства утверждения 6 заметим, что коэффициент при x^k соответствует множеству всевозможных выборов из k скобок $(1+x)$ переменного x и из остальных скобок 1, что равно C_n^k.

Следствие. При $x=1$ $(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n$, то есть получается утверждение 5.

Свойство . Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k равно $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное сочетание с повторениями из n элементов по k. Пусть в нём элемент a_1 множества E встречается k_1 раз, a_2 встречается k_2 раза, и т.д., элемент a_n встречается k_n раз. Поставим в соответствие сочетанию следующую последовательность из нулей и единиц $\left(\underbrace{11\ldots1}_{k_1}0\underbrace{11\ldots1}_{k_2}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{k_n}\right)$. Нетрудно видеть, что это соответствие взаимнооднозночно. Число элементов в этой последовательности равно $n+k-1$, из них $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ единиц и $n-1$ нулей. Число различных таких последовательностей равно числу перестановок с повторениями $\mathrm{P}(k,\, n-1) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\big((n+k-1)-k\big)!} = C_{n+k-1}^k$. Таким образом $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Упражнения.

1) В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей.
В какой доле случаев соревнования победитель будет определен?

2) Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

3) Автобусу, в котором находится 11пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками?

4) В почтовом отделении продаются открытки 12 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 10 открыток?

5) В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, я трое — спиной к паровозу, остальным трем безразлично, как сидеть Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

6) Сколькими способами можно выбрать из16 лошадей шестёрку для запряжки так, чтобы в неё вошли 3 лошади из шестёрки $ABCA'B'C'$, но не вошли не одна из пар AA', BB', CC'?
7) Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.
8) Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими различными способами можно посадить семь человек?
9) Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?
10) Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слово, в которое входят 4 различных согласных и 3 различных гласных? Во скольких из этих слов никакие две согласные не стоят рядом?
11) Сколькими способами можно переставить буквы в слове «кофеварка так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?
12) Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной?
13) Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь лишь цифрами 1, 2, 3, при дополнительном условии, что цифра 3 используется в каждом числе ровно два раза? Сколько из написанных чисел делится на 9?
14) На каждом борту лодки у весел должны сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?
15) У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин, а у жены — 7 женщин и 5 мужчин (иные, чем у мужа). Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?
16) Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если среди них есть двое, которых нельзя выбирать вместе?
17) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы, если в группу могут входить от 5 до 15 человек?
18*) У Паши 7 друзей. В течение недели он приглашает их к себе по 3 обедать, причем компании не повторяются. Сколькими способами он может составить расписание обедов так, чтобы никакие два друга не встретились у него более одного раза?
19) Во скольких шестизначных числах есть 3 четные и 3 нечетные цифры, если не допускаются «шестизначные» числа, начинающиеся с нуля?
20) Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 153?
21) Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?
22) Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?
23) Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?
24) Клетки шахматной доски раскрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в каждом вертикальном ряду не встречаются подряд две клетки одного цвета. Сколькими способами возможна такая раскраска?
25) Из колоды в 52 карты двое выбирают по 4 карты каждый. Сколько возможно различных выборов?
26) Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Абакан» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке?
27) Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар перчаток по правой и левой перчатке так, чтобы ни один не получил пары?

28) Сколько неотрицательных целых чисел, меньших 1 000 000, содержат все цифры 1, 2, 3, 4?
29) Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву?

1.4. Линейные рекуррентные отношения с постоянными коэффициентами.

Определение. Уравнение вида

$$a_n = F\left(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}\right), \qquad \text{(РО)}$$

которое позволяет вычислить все элементы последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известны первые её k элементов, называется *рекуррентным отношением (соотношением, уравнением)* k *-го порядка*.

Определение. Функция $a(n)$ называется решением (РО), если её подстановка в (РО) является тождеством $a(n) \equiv F\left(n, a(n-1), a(n-2), \ldots, a(n-k)\right)$.

Определение. Рекуррентное отношение вида

$$a_n = q_1(n)a_{n-1} + q_2(n)a_{n-2} + \ldots + q_k(n)a_{n-k} + f(n) \quad \text{с} \quad f(n) \equiv 0$$

называется *линейным однородным* (ЛОРО), а с $f(n) \not\equiv 0$ – *неоднородным рекуррентным отношением* (ЛНРО) *порядка* k, если коэффициент $q_k(n)$ отличен от тождественного нуля.(ЛРО) – их общее обозначение.

Определение. Если в линейном рекуррентном отношении коэффициенты $q_1, q_2, \ldots, q_k$ не зависят от переменной n, т.е. являются постоянными вещественными числами, то соотношение называют *отношением с постоянными коэффициентами* (ЛРОсПК).

В этом разделе мы рассмотрим класс линейных рекуррентных отношений с постоянными коэффициентами, для которых известны методы выписывания их общих решений.

Определение. Для (ЛРОсПК) $a_n = q_1a_{n-1} + q_2a_{n-2} + \ldots + q_ka_{n-k} + f(n)$ соответствующее алгебраическое уравнение $r^k - q_1r^{k-1} - q_2r^{k-2} - \ldots - q_{k-1}r - q_k = 0$ называют характеристическим.

1.4.1 Однородные рекуррентные отношения.

Определение. Функция $a\left(n, C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ называется *общим решением* (ЛРОсПК) $a_n = q_1 \cdot a_{n-1} + q_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + q_k \cdot a_{n-k} + f(n)$ если:

1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$ она удовлетворяет (является решением) (ЛРОсПК);
2) для любой последовательности $b_0, b_1, b_2, \ldots$, являющейся решением (ЛРОсПК) найдутся такие значения $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_k$ произвольных постоянных, что $b_n = a\left(n, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_k\right)$.

Примеры. 1) Рассмотрим (ЛОРОсПК) первой степени $a_n = q \cdot a_{n-1}$ с коэффициентом $q \in \mathrm{R}$. Очевидно, общее решение этого рекуррентного отношения является функция $a_n = C \cdot q^{n-1}$. Действительно, во-первых при любом значении $C = \mathrm{c}$ последовательность, которую образует эта функция $a_1 = \mathrm{c} \cdot q^{1-1} = \mathrm{c}$, $a_2 = \mathrm{c} \cdot q^{2-1} = \mathrm{c} \cdot q = q \cdot a_1$, ...,

$a_n = c\cdot q^{n-1} = q\cdot c\cdot q^{n-2} = q\cdot a_{n-1},...,$ удовлетворяет рекуррентному отношению. Во-вторых, если некоторая последовательность (a_n) является решением рекуррентного отношения $a_n = q\cdot a_{n-1}$, то для $C = a_1$ $a_n = q\cdot a_{n-1} = q^2\cdot a_{n-2} = \ldots = a_1\cdot q^{n-1}$.

2) Теперь рассмотрим (ЛОРОсПК) второй степени $a_n = q_1\cdot a_{n-1} + q_2\cdot a_{n-2}$. Будем по аналогии с предыдущим примером искать ненулевое решение этого отношения в виде $a_n = r^n$ с $r \neq 0$. Подставляя его в отношение $r^n = q_1\cdot r^{n-1} + q_2\cdot r^{n-2}$ и сокращая на r^{n-2}, получим $r^2 = q_1\cdot r + q_2$, т.е. любое решение r полученного квадратного уравнения, которое является характеристическим для рассматриваемого отношения, определяет соответствующее решение отношения $a_n = q_1\cdot a_{n-1} + q_2\cdot a_{n-2}$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Общим решением (ЛОРОсПК) $a_n = q_1\cdot a_{n-1} + q_2\cdot a_{n-2}$ является:

1. $C_1\cdot r_1^n + C_2\cdot r_2^n$, если его характеристическое уравнение $r^2 = q_1\cdot r + q_2$ имеет два различных действительных корня $r_1 \neq r_2$;
2. $(C_1\cdot n + C_2)\cdot r^n$, если r – единственный корень уравнения $r^2 = q_1\cdot r + q_2$;
3. $\rho^n\left(C_1\cdot\cos(n\theta) + C_2\cdot\sin(n\theta)\right)$, если уравнение $r^2 = q_1\cdot r + q_2$ имеет два комплексно сопряжённых корня $r_{1,2} = a \pm ib$, а $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Доказательство. Проверку первого условия определения общего решения проверим подстановкой каждой из рекуррентных функций в отношение $a_n = q_1\cdot a_{n-1} + q_2\cdot a_{n-2}$.

1. Равенство $C_1\cdot r_1^n + C_2\cdot r_2^n = q_1\left(C_1\cdot r_1^{n-1} + C_2\cdot r_2^{n-1}\right) + q_2\left(C_1\cdot r_1^{n-2} + C_2\cdot r_2^{n-2}\right)$ эквивалентно следующему

$$r_1^{n-2}C_1\left(r_1^2 - q_1r_1 - q_2\right) + r_2^{n-2}C_2\left(r_2^2 - q_1r_2 - q_2\right) = 0.$$

А последнее равенство выполнено в силу того, что r_1 и r_2 – корни уравнения $r^2 = q_1\cdot r + q_2$.

2. $(C_1\cdot n + C_2)\cdot r^n = q_1\left(C_1\cdot(n-1) + C_2\right)\cdot r^{n-1} + q_2\left(C_1\cdot(n-2) + C_2\right)\cdot r^{n-2}$ эквивалентно

$$r^{n-2}\left(C_1n + C_2\right)\left(r^2 - q_1r - q_2\right) + r^{n-2}C_1\left(q_1r + 2q_2\right) = 0.$$

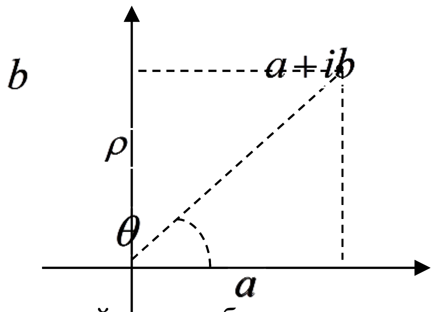
Первое слагаемое равно нулю, так как r – корень уравнения $r^2 = q_1\cdot r + q_2$, а второе в силу теоремы Виета ($r^2 = -q_2$ и $2r = q_1$) $r^{n-2}C_1\left(q_1r + 2q_2\right) = r^{n-2}C_1\left(2r\cdot r - 2r^2\right) = 0$
.

3. Следует из 1 с учётом следующих двух свойств комплексных чисел.

Теорема Муавра. Для произвольного значения угла θ справедливо равенство $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$.

Эта теорема доказывается методом математической индукции. Попробуйте это сделать самостоятельно.

Кроме того любое комплексное число $a+ib$ можно представить в виде $a+ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ (см. рисунок).



Теперь проверим второе свойство общего решения. Предположим, что последовательность $b_0, b_1, b_2, \dots$ является решением (ЛОРОсПК) $a_n = q_1 \cdot a_{n-1} + q_2 \cdot a_{n-2}$. Тогда:

1. система $\begin{cases} b_0 = C_1 r_1^0 + C_2 r_2^0 = C_1 + C_2, \\ b_1 = C_1 r_1^1 + C_2 r_2^1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \end{cases}$ с определителем $r_2 - r_1 \neq 0$ имеет единственное решение $C_1 = \dfrac{b_1 - b_0 r_2}{r_1 - r_2}$, $C_2 = \dfrac{b_1 - b_0 r_1}{r_2 - r_1}$;

2. система $\begin{cases} b_0 = (C_1 \cdot 0 + C_2) r^0 = C_2, \\ b_1 = (C_1 \cdot 1 + C_2) r^1 = (C_1 + C_2) r \end{cases}$ с ненулевым определителем, равным единице, имеет единственное решение $C_1 = \dfrac{b_1}{r} - b_0$, $C_2 = b_0$;

3. следует из 1.

Примеры. 1) Найти решение рекуррентного отношения для чисел Фибоначчи $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, которые удовлетворяют начальным условиям $a_0 = 1,\ a_1 = 1$.

<u>Решение.</u> Выпишем соответствующее характеристическое уравнение $r^2 - r - 1 = 0$ и найдём его корни $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Выписываем общее решение рекуррентного отношения, согласно утверждению $a_n = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Найдём значения $C_1,\ C_2$ такие, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям.

$$\begin{cases} a_0 = 1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2, \\ a_1 = 1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Ответ. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

2) Найти решение рекуррентного отношения $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, удовлетворяющее начальным условиям $a_0 = 2,\ a_1 = 6$.

Решение. Выпишем соответствующее характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 4 = 0$, его единственный корень $r = 2$. Выписываем общее решение рекуррентного отношения, согласно утверждению $a_n = \left(C_1 \cdot n + C_2\right)2^n$. Найдём значения $C_1,\ C_2$ такие, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям.

$$\begin{cases} a_0 = 2 = \left(C_1 \cdot 0 + C_2\right)2^0 = C_2 \\ a_1 = 6 = \left(C_1 \cdot 1 + C_2\right)2^1 = 2C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Ответ. $a_n = \left(n+2\right)2^n$.

3) Найти решение рекуррентного отношения $a_n = 2\sqrt{2}a_{n-1} - 4a_{n-2}$, удовлетворяющее начальным условиям $a_0 = 1,\ a_1 = 2$.

Решение. Выпишем соответствующее характеристическое уравнение $r^2 - 2\sqrt{2}r + 4 = 0$ и найдём его корни $r_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-16}}{2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ и $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Выписываем общее решение рекуррентного отношения, согласно утверждению $a_n = 2^n\left(C_1\cos\dfrac{\pi n}{4} + C_2\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)$. Найдём значения $C_1,\ C_2$ такие, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям.

$$\begin{cases} a_0 = 1 = 2^0\left(C_1\cos\dfrac{\pi 0}{4} + C_2\sin\dfrac{\pi 0}{4}\right) = C_1 \\ a_1 = 2 = 2^1\left(C_1\cos\dfrac{\pi 1}{4} + C_2\sin\dfrac{\pi 1}{4}\right) = 2\left(C_1\dfrac{\sqrt{2}}{2} + C_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}.$$

Ответ. $a_n = 2^n\left(\cos\dfrac{\pi n}{4} + \left(\sqrt{2}-1\right)\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)$.

Для (ЛОРОсПК) произвольной степени справедлива следующая теорема.

Теорема (об общем решении (ЛОРОсПК)). Пусть r_i – корень кратности s_i характеристического уравнения $r^k - q_1 r^{k-1} - q_2 r^{k-2} - \ldots - q_{k-1} r - q_k = 0$ (ЛОРОсПК) $a_n = q_1 \cdot a_{n-1} + q_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + q_k \cdot a_{n-k}$. Тогда выражение

$r_i^n \cdot \left(C_{i1} + C_{i2} n + C_{i3} n^2 \ldots + C_{i s_i} n^{s_i - 1} \right)$ – является слагаемым в общем решении (ЛОРОсПК), и общее решение (ЛОРОсПК) состоит из слагаемых только такого рода.

1.4.2 Неоднородные рекуррентные отношения.

Теорема об общем решении (ЛНРОсПК). Если $a(n, C_1, C_2, \ldots, C_k)$ общее решение (ЛОРОсПК) $a_n = q_1 \cdot a_{n-1} + q_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + q_k \cdot a_{n-k}$ и рекуррентная функция $b(n)$ является решением (ЛНРОсПК) $a_n = q_1 \cdot a_{n-1} + q_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + q_k \cdot a_{n-k} + f(n)$, то сумма $a(n, C_1, C_2, \ldots, C_k) + b(n) = a_n^{oo} + a_n^{чн}$ является общим решением данного (ЛНРОсПК).

Доказательство. Из условия

$$a(n, C_1, C_2, \ldots, C_k) = q_1 \cdot a(n-1, C_1, C_2, \ldots, C_k) + q_2 \cdot a(n-2, C_1, C_2, \ldots, C_k) + \ldots + q_k \cdot a(n-k, C_1, C_2, \ldots, C_k)$$

и $b(n) = q_1 \cdot b(n-1) + q_2 \cdot b(n-2) + \ldots + q_k \cdot b(n-k) + f(n)$, складывая обе части равенств, получим

$$\left(a(n, C_1, C_2, \ldots, C_k) + b(n) \right) = q_1 \cdot \left(a(n-1, C_1, C_2, \ldots, C_k) + b(n-1) \right) + \ldots + q_k \cdot \left(a(n-k, C_1, C_2, \ldots, C_k) + b(n-k) \right) + f(n)$$

.

Таким образом, первое условие определения общего решения выполнено.

Если $\bar{b}(n)$ – произвольное решение (ЛНРОсПК), то, как нетрудно видеть, разность $\bar{b}(n) - b(n)$ будет решением (ЛОРОсПК). Поэтому для неё найдутся значения $с_1, с_2, \ldots, с_k$ произвольных постоянных такие, что $\bar{b}(n) - b(n) = a(n, с_1, с_2, \ldots, с_k)$, т.е $\bar{b}(n) = a(n, с_1, с_2, \ldots, с_k) + b(n)$ и второе условие определения общего решения тоже выполнено.

Утверждение о виде частного решения (ЛНРОсПК). Если в (ЛНРОсПК) $f(n)$ имеет вид:

1) $f(n) = P(n)\alpha^n$, то частное решение может быть найдено в виде $b_n = n^{s_i} \cdot Q(n)\alpha^n$, где s_i – кратность корня $r_i = \alpha$ характеристического уравнения, а $Q(n)$ – многочлены переменной n с неопределёнными коэффициентами имеющий степень, совпадающую со степенью многочлена $P(n)$.

2) $f(n) = \alpha^n \left(P_1(n)\cos(\beta n) + P_2(n)\sin(\beta n) \right)$, то частное решение может быть найдено в виде $b_n = \alpha^n \cdot n^{s_i} \cdot \left(Q_1(n)\cos(\beta n) + Q_2(n)\sin(\beta n) \right)$, где s_i – кратность корня $r_i = \alpha(\cos\beta + i\sin\beta)$ характеристического уравнения, а $Q_1(n)$, $Q_2(n)$ –

многочлены переменной n с неопределёнными коэффициентами имеющие степень, совпадающую с максимальной из степеней многочленов $P_1(n)$, $P_2(n)$.

Замечания. 1. Коэффициенты $Q(n)$, $Q_1(n)$, $Q_2(n)$ находят подстановкой вида b_n в (ЛНРОсПК). 2. Если $f(n)=f_1(n)+f_2(n)+\ldots+f_l(n)$, и каждое слагаемое в этой сумме имеет один из видов утверждения, то сначала нужно найти частные решения для каждого слагаемого, а затем сложив их получить частное решение (ЛНРОсПК).

Примеры.

1. Найти общее решение рекуррентного отношения $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}+3\cdot 2^n$.

Решение. Выпишем характеристическое отношение $r^2-5r+4=0$, его корни – $r=1$ и $r=4$. Общее решение однородного отношения $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$ – $a_n^{oo}=C_1+C_2 4^n$. Теперь определим вид частного решения неоднородного отношения по $f(n)=3\cdot 2^n$ – $a_n^{чн}=k\cdot 2^n$. Подставим в отношение $k2^n=5k2^{n-1}-4k2^{n-2}+3\cdot 2^n$ и разделим на 2^{n-2}. $k2^2=5k2-4k+3\cdot 2^2$. Получаем $2k=-12$, откуда $k=-6$. Нашли $a_n^{чн}=-6\cdot 2^n$.

Ответ. $a_n^{он}=C_1+C_2 4^n-6\cdot 2^n$ – общее решение отношения $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}+3\cdot 2^n$.

2. Решить рекуррентное отношение $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}+3\cdot 2^n$.

Решение. У характеристического уравнения $r^2-4r+4=0$ имеется единственный корень $r=2$ кратности $s=2$. $a_n^{oo}=(C_1+C_2 n)2^n$ – общее решение однородного отношения $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$. $a_n^{чн}=k\cdot n^2 2^n$ – вид частного решения неоднородного отношения с $f(n)=3\cdot 2^n$. Подставляя $a_n^{чн}$ в неоднородное отношение и деля его на 2^{n-2}, получим

$$kn^2 2^2=4k(n-1)^2 2-4k(n-2)^2+3\cdot 2^2 \Rightarrow 4kn^2=8kn^2-16kn+8k-4kn^2+16kn-16k+$$

или $8k=12$, а $k=1{,}5$.

Ответ. $a_n^{он}=(C_1+C_2 n)2^n+1{,}5\cdot n^2\cdot 2^n$ – общее решение неоднородного отношения.

3. Решить рекуррентное отношение $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+6\cdot 3^n$.

Решение. У характеристического уравнения $r^2-5r+6=0$ есть два различных корня $r=2$ и $r=3$, поэтому $a_n^{oo}=C_1 2^n+C_2 3^n$ – общее решение однородного отношения. Определим вид $a_n^{чн}=k\cdot n\cdot 3^n$ частного решения неоднородного отношения с $f(n)=6\cdot 3^n$. Подставляя $a_n^{чн}$ в неоднородное отношение и деля его на 3^{n-2}, получим

$$kn3^2=5k(n-1)3-6k(n-2)+6\cdot 3^2 \Rightarrow 9kn=15kn-15k-6kn+12k+54$$

или $3k=54$, а $k=18$.

Ответ. $a_n^{он}=C_1 2^n+C_2 3^n+18\cdot n\cdot 2^n$ – общее решение неоднородного отношения.

4. Найти решение рекуррентного отношения $a_n=a_{n-1}+n$ с начальным условием $a_1=1$.

Решение. Легко видеть, что $a_n^{oo} = C$ – общее решение однородного отношения, так как корень характеристического уравнения равен 1. $f(n) = n = n \cdot 1^n$, поэтому частное решение неоднородного отношения будем искать в виде $a_n^{чн} = n(k_1 + k_2 \cdot n)$. Подставим $a_n^{чн}$ в неоднородное отношение и получим

$$k_1 n + k_2 n^2 = k_1 n - k_1 + k_2 n^2 - 2k_2 n + k_2 + n \;\Rightarrow\; -k - 2k_2 n + k_2 + n \;= 0,$$

откуда $k_1 = k_2 = 0{,}5$.

$a_n^{он} = C + 0{,}5n(1+n)$ – общее решение неоднородного отношения. Найдём $C = 0$ из начального условия $1 = C + 0{,}5(1+1)$

Ответ. $a_n = 0{,}5n(1+n)$ – искомое решение неоднородного отношения.

5. Найти общее решение рекуррентного отношения $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Решение. Легко найти общее решение однородного отношения $a_n^{oo} = C_1 + C_2 2^n$. Частное решение неоднородного отношения будем искать в виде $a_n^{чн} = k_1 \cos\dfrac{n\pi}{2} + k_2 \sin\dfrac{n\pi}{2}$. Подставим его в исходное отношение

$$k_1 \cos\frac{n\pi}{2} + k_2 \sin\frac{n\pi}{2} = 3k_1 \cos\frac{(n-1)\pi}{2} + 3k_2 \sin\frac{(n-1)\pi}{2} - \\ - 2k_1 \cos\frac{(n-2)\pi}{2} - 2k_2 \sin\frac{(n-2)\pi}{2} + 3\sin\frac{n\pi}{2}$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{2} = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} = -\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{2} = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\pi = -\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\sin\frac{(n-2)\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2}\cos\pi - \sin\pi\cos\frac{n\pi}{2} = -\sin\frac{n\pi}{2}$$

получим

$$k_1 \cos\frac{n\pi}{2} + k_2 \sin\frac{n\pi}{2} = 3k_1 \sin\frac{n\pi}{2} - 3k_2 \cos\frac{n\pi}{2} + 2k_1 \cos\frac{n\pi}{2} + 2k_2 \sin\frac{n\pi}{2} + 3\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Из последнего равенства, поскольку оно должно выполняться при любых натуральных n, получаем следующую систему уравнений $\begin{cases} k_1 = 3k_2 \\ -k_2 - 3k_1 = 3 \end{cases}$ с решением $k_1 = -0{,}9$ и $k_2 = -0{,}3$.

Ответ. Итак, $a_n^{он} = C_1 + C_2 2^n - 0{,}9\cos\frac{n\pi}{2} - 0.3\sin\frac{n\pi}{2}$ – искомое решение.

6. Найти общее решение отношения $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

Решение. Пара комплексно сопряжённых чисел $r = 1 \pm i$ являются корнями характеристического уравнения $r^2 - 2r + 2 = 0$. Вычислим $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ и $\theta = \mathrm{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$. Поэтому $a_n^{oo} = C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4}$ общее решение.

Упражнения.

1. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = 2a_{n-1} + 5$; **б)** $a_n = -3a_{n-1} + n$;

в) $a_n = -a_{n-1} + 12a_{n-2} + 2^n$; **г)** $a_n = -3a_{n-1} - a_{n-2} + 3^n$;

д) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$.

2. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = -2a_{n-1} + n^2$; **б)** $a_n = 4a_{n-1} + 4^n$;

в) $a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2} + (-2)^n$; **г)** $a_n = -9a_{n-2} + 3^n$;

д) $a_n = -4a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$.

3. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$; **б)** $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n$;

в) $a_n = 3_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$; **г)** $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n$;

д) $a_n = 2\sqrt{3}a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$.

4. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = a_{n-2} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; **б)** $a_n = -a_{n-2} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;

в) $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + 3^n$; **г)** $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + 2^n$;

д) $a_n = -a_{n-3} + n$.

5. Найдите приведенные ниже суммы, используя рекуррентные отношения:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$; Используйте соотношение $a_n = a_{n-1} + n^2$.

б) $1 + 4 + 7 + \cdots + 3n - 2$; Используйте соотношение $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$.

1. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = 2a_{n-1} + 5$; **б)** $a_n = -3a_{n-1} + n$;

в) $a_n = -a_{n-1} + 12a_{n-2} + 2^n$; **г)** $a_n = -3a_{n-1} - a_{n-2} + 3^n$;

д) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$.

2. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = -2a_{n-1} + n^2$; **б)** $a_n = 4a_{n-1} + 4^n$;

в) $a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2} + (-2)^n$; **г)** $a_n = -9a_{n-2} + 3^n$;

д) $a_n = -4a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$.

3. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$; **б)** $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (-3)^n$;

в) $a_n = 3_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$; **г)** $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n$;

д) $a_n = 2\sqrt{3}a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3$.

4. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n = a_{n-2} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; **б)** $a_n = -a_{n-2} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;

в) $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + 3^n$; **г)** $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + 2^n$;

д) $a_n = -a_{n-3} + n$.

5. Найдите приведенные ниже суммы, используя рекуррентные отношения:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n^2$.

б) $1 + 4 + 7 + \cdots + 3n - 2$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + 3n - 2$.

6. Найдите приведенные ниже суммы, используя рекуррентные отношения:

а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n^3$.

б) $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2 \cdot (n+1)$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n^2 \cdot (n+1)$.

в) $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{(n-1)}$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^{(n-1)}$.