

**Конспект лекций с упражнениями по дисциплине
Дискретная математика, математическая логика
и их приложения в компьютерных науках
часть II**

**для студентов 2 курса математического факультета ВГУ
специальности 010200 «Математика и компьютерные науки**

2015 г.

Оглавление

2	Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)	3
2.1	Понятие ДНФ, проблема их минимизации.	3
2.2	Упрощение ДНФ, тупиковые ДНФ (ТДНФ).	5
2.2.1	Алгоритм упрощения ДНФ.	5
2.2.2	Пример.....	6
2.2.3	Упражнение.....	7
2.2.4	Упражнение.....	7
2.3	Методы построения сокращённых ДНФ.	8

2 Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ).

2.1 Понятие ДНФ, проблема их минимизации.

Определение. Выражение $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge x_{i_2}^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\sigma_r}$ называют элементарной конъюнкцией переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ ранга r . Константы 0 и 1 будем тоже считать элементарными конъюнкциями по определению.

Определение. Выражение

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{i=1}^s K_i \quad (K_i \neq K_j \text{ при } i \neq j),$$

где K_i ($i = 1, \dots, s$) — элементарная конъюнкция ранга r_i , называется *дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.).

Пример.

$$\mathfrak{K}_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \quad | \quad \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1.$$

Этот пример свидетельствует о том, что каждая функция алгебры логики может быть представлена различными ДНФ. Естественно возникает вопрос о минимизации ДНФ, реализующей булеву функцию.

Определение. Функционал L , определённый для любой ДНФ, со значениями в $R_+ = \{a \in R : a \geq 0\}$ будем называть *индексом простоты ДНФ*, если он удовлетворяет следующим аксиомам с произвольными ДНФ R, R' и элементарной конъюнкцией K' :

I. Аксиома неотрицательности. Для любой д. н. ф. $L(\mathfrak{K}) \geq 0$.

II. Аксиома монотонности (относительно умножения). Пусть $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' \vee x_i^{\sigma_i} K'$. Тогда

$$L(\mathfrak{K}) \geq L(\mathfrak{K}' \vee K').$$

III. Аксиома выпуклости (относительно сложения). Пусть д. н. ф. \mathfrak{K} разбита в прямую сумму д. н. ф. \mathfrak{K}_1 и \mathfrak{K}_2 , т. е. $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2$ и $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ не имеют общих членов. Тогда

$$L(\mathfrak{K}) \geq L(\mathfrak{K}_1) + L(\mathfrak{K}_2).$$

IV. Аксиома инвариантности (относительно изоморфизма). Пусть д. н. ф. \mathfrak{K}' получена из д. н. ф. \mathfrak{K} путем переименования переменных (без отождествлений). Тогда

$$L(\mathfrak{K}') = L(\mathfrak{K}).$$

Определение. Д. н. ф. \mathfrak{N} , реализующая функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ и имеющая минимальный индекс $L(\mathfrak{N})$, называется *минимальной относительно L (м. д. н. ф. относительно L)*.

Приведем примеры встречающихся индексов простоты для д. н. ф.

1. $L_B(\mathfrak{N})$ — число букв переменных, встречающихся в записи д. н. ф. \mathfrak{N} . Если взять д. н. ф. \mathfrak{N}_1 и \mathfrak{N}_2 из примера 1, то $L_B(\mathfrak{N}_1) = 15$ и $L_B(\mathfrak{N}_2) = 3$, т. е. в смысле этого индекса д. н. ф. \mathfrak{N}_2 проще, чем д. н. ф. \mathfrak{N}_1 .

2. $L_K(\mathfrak{N})$ — число элементарных конъюнкций, входящих в \mathfrak{N} . Для д. н. ф. \mathfrak{N}_1 и \mathfrak{N}_2 , очевидно, $L_K(\mathfrak{N}_1) = 5$ и $L_K(\mathfrak{N}_2) = 2$, т. е. в смысле этого индекса д. н. ф. \mathfrak{N}_2 проще, чем д. н. ф. \mathfrak{N}_1 .

3. $L_0(\mathfrak{N})$ — число символов $\bar{}$, встречающихся в записи д. н. ф. \mathfrak{N} . Для д. н. ф. \mathfrak{N}_1 и \mathfrak{N}_2 , очевидно, $L_0(\mathfrak{N}_1) = 7$ и $L_0(\mathfrak{N}_2) = 2$, т. е. в смысле этого индекса д. н. ф. \mathfrak{N}_2 опять проще, чем д. н. ф. \mathfrak{N}_1 .

Поскольку дальнейшее изложение связано главным образом с индексом простоты L_B , то минимальную д. н. ф. относительно этого индекса будем называть *минимальной д. н. ф. (м. д. н. ф.)*. Д. н. ф., минимальную относительно индекса L_K , будем называть *кратчайшей*.

Тривиальный алгоритм поиска МДНФ для $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1. выписать все возможные элементарные конъюнкции с переменными из множества $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (их 3^n);
2. составить из полученных элементарных конъюнкций все возможные ДНФ (их 2^{3^n});
3. выбрать те из построенных ДНФ, которые реализуют данную функцию f (логически эквивалентны ей);
4. вычислить для каждой из отобранных ДНФ индекс простоты (L_B) и путём сравнения выбрать МДНФ.

2.2 Упрощение ДНФ, тупиковые ДНФ (ТДНФ).

Пусть \mathfrak{N} — произвольная д. н. ф. и

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \vee K, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \vee x_i^{\sigma_i} K',$$

где K — некоторая элементарная конъюнкция из \mathfrak{N} , \mathfrak{N}' — д. н. ф., образованная из остальных конъюнкций, входящих в \mathfrak{N} , $x_i^{\sigma_i}$ — некоторый множитель из K , K' — произведение остальных множителей из K . Рассмотрим два типа преобразований д. н. ф.

I. Операция удаления элементарной конъюнкции. Переход от д. н. ф. \mathfrak{N} к д. н. ф. \mathfrak{N}' — преобразование, осуществляемое путем удаления элементарной конъюнкции K . Данное преобразование определено тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$.

II. Операция удаления множителя. Переход от д. н. ф. \mathfrak{N} к д. н. ф. $\mathfrak{N}' \vee K'$ — преобразование, осуществляемое путем удаления множителя $x_i^{\sigma_i}$. Данное преобразование определено тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{N}' \vee K' = \mathfrak{N}.$$

Определение. Д. н. ф. \mathfrak{N} , которую нельзя упростить при помощи преобразований I и II (их применить нельзя), называется *тупиковой д. н. ф.* (*т. д. н. ф.*) (относительно преобразований I и II).

2.2.1 Алгоритм упрощения ДНФ.

1. Выбирается какая-нибудь д. н. ф. для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в качестве исходной. Таковой можно взять, например, совершенную д. н. ф., так как существует простой способ ее построения.

2. Осуществляется упорядочивание в исходной д. н. ф. слагаемых и в каждом слагаемом — множителей. Это упорядочение можно задать записью д. н. ф.

3. Затем производится просмотр записи д. н. ф. (слева направо); для очередного члена K_i ($i = 1, \dots, s$) сначала пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции K_i ; если это невозможно, то просматривают члены $x_{i_v}^{\sigma_v}$ конъюнкции K_i слева направо ($v = 1, \dots, r$)

$$K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \dots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$$

и применяют операцию удаления множителя $x_{i_v}^{\sigma_v}$ до тех пор, пока это удастся.

После этого переходят к следующей элементарной конъюнкции.

Закончив обработку последней элементарной конъюнкции, еще раз просматривают полученную д. н. ф. слева направо и пробуют применять операцию удаления элементарной конъюнкции *).

Теорема 1. *Д. н. ф., полученная в результате применения алгоритма упрощения, является тупиковой д. н. ф. (относительно преобразований I и II).*

2.2.2 Пример.

Для СДНФ

$$\mathcal{N}' = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3,$$

рассмотрим работу алгоритма упрощения.

1. Первую конъюнкцию удалить нельзя, но в ней можно удалить \bar{x}_1 , т.к. $\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, получится конъюнкция $\bar{x}_2\bar{x}_3$, из которой ни одной переменной больше нельзя удалить.

2. Конъюнкцию $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ удалить также нельзя. Легко видеть, что из нее множитель \bar{x}_1 удалить невозможно, в то время как операция удаления множителя \bar{x}_2 применима.

Мы получаем конъюнкцию \bar{x}_1x_3 , которую упростить путем удаления множителей невозможно.

3. Конъюнкция $\bar{x}_1x_2x_3$ может быть удалена, так как

$$\bar{x}_1x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3.$$

4. Конъюнкция $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ также может быть удалена (см. п. 1).

5. Конъюнкцию $x_1x_2\bar{x}_3$ удалить нельзя. Однако, возможно выбросить множитель x_2 . В результате мы получим конъюнкцию $x_1\bar{x}_3$, из которой уже нельзя выбросить ни одного множителя.

6. Конъюнкция $x_1x_2x_3$, очевидно, удалена не может быть. Из нее можно удалить множитель x_1 . Мы получаем конъюнкцию x_2x_3 , которую упростить путем удаления множителей невозможно. Мы получаем д. н. ф. $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$. Вторичный просмотр этой д. н. ф. с целью удаления конъюнкций упрощений не дает. Следовательно, д. н. ф. \mathcal{N}_1 , где

$$\mathcal{N}_1 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3,$$

является результатом применения алгоритма упрощения.

Для той же СДНФ с другой упорядоченностью

$$\mathfrak{N}'' = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \text{ алгоритм даёт другую ТДНФ}$$

$$\mathfrak{N}_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2.$$

Теорема 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная булева функция ($f \neq 0$) и $\mathfrak{N} = \bigvee_{i=1}^n K_i$ — ее произвольная тупиковая д. н. ф. (относительно операций I и II); тогда существует такое упорядочение совершенной д. н. ф., из которого при помощи алгоритма упрощения получается тупиковая д. н. ф. \mathfrak{N} .

Поскольку у СДНФ есть конечное число упорядочиваемых, то получив из них все ТДНФ для рассматриваемой функции, можно из них выбрать МДНФ сравнением значения индекса простоты для полученных ТДНФ.

2.2.3 Упражнение.

С помощью тривиального алгоритма найти МДНФ для функции f .

$$1) f(\tilde{x}^2) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow \bar{x}_1 \cdot x_2);$$

$$2) f(\tilde{x}^2) = x_1 \cdot (x_2 \leftrightarrow x_1 \cdot \bar{x}_2);$$

2.2.4 Упражнение.

С помощью алгоритма упрощения найти МДНФ для функции f .

$$3) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2) | (x_2 \downarrow x_3);$$

$$4) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 | (x_3 \rightarrow x_2));$$

$$5) f(\tilde{x}^3) = x_1 \downarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \bar{x}_3);$$

$$6) f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \cdot ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3);$$

$$7) f(x, y, z) = x \vee \bar{y} \vee ((x \oplus (y \downarrow z)) \rightarrow \bar{y} \cdot z);$$

$$8) f(x, y, z) = ((x \leftrightarrow y) \downarrow z) \cdot (y \cdot \bar{z} \rightarrow (x \oplus y \cdot z));$$

$$9) f(x, y, z) = (x \vee y \cdot \bar{z}) \oplus (x \cdot \bar{y} \leftrightarrow (x \rightarrow y \cdot \bar{z}))$$

$$10) f(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z}) \rightarrow (x \cdot \bar{y} \leftrightarrow (x \oplus y \cdot \bar{z})).$$

2.3 Методы построения сокращённых ДНФ.

Определение.

Импликантой функции $f(\tilde{x}^n)$ называется такая элементарная конъюнкция k над множеством переменных $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, что $k \vee f(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$. Импликанта k функции f называется *простой импликантой*, если после отбрасывания любой буквы из k получается конъюнкция, не являющаяся импликантой функции f . Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется *сокращённой д. н. ф.* функции f .

Метод Блейка для построения сокращённой д. н. ф. из произвольной д. н. ф. состоит в применении правил обобщённого склеивания $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$. Подразумевается, что правила применяются слева направо. На первом этапе производится операция обобщённого склеивания до тех пор, пока это возможно. На втором производится операция поглощения.

Пример 1. Построить сокращённую д. н. ф. по д. н. ф. D функции f , где $D = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$.

После первого этапа получаем

$$D_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_3.$$

После второго этапа получаем сокращённую д. н. ф.

$$D_f^c = D_2 = x_1x_2 \vee x_3.$$

Метод Квайна-Мак-Класки представляет собой формализованный на этапе нахождения простых импликант метод Квайна. Формализация производится следующим образом:

1. Все конъюнкции (конституанты единицы) из СДНФ булевой функции f записываются их двоичными номерами (0 для переменной с отрицанием и 1 – без отрицания).
2. Все номера разбиваются на непересекающиеся группы. Признак образования i -й группы: i единиц в каждом двоичном номере конституенты единицы.
3. Склеивание производят только между номерами соседних групп, склеиваются номера, отличающиеся в одной позиции. В результате склеивания в этой позиции ставим “*”, которая не считается, как и ноль, при подсчёте номера группы для склеенного номера. Склеиваемые номера отмечаются каким-либо знаком (зачёркиванием).
4. Склеивания производят всевозможные. Неотмеченные после склеивания номера являются простыми импликантами.
5. Нахождение минимальных ДНФ далее производится по импликантной матрице.

Пример 2. Пусть функция f задана таблицей истинности

Таблица истинности	
$x_1x_2x_3x_4$	f
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	0
1010	0
1011	0
1100	0
1101	0
1110	1
1111	1

СДНФ функции f запишем в виде

$$0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 0111 \vee 1110 \vee 1111.$$

Образует группы двоичных номеров

Таблица номеров			
Номер группы	Двоичные номера конститuent единицы (1)	... (2)	... (3)
0	—		
1	0001	00*1 , 0*01	0**1
2	0011 , 0101	0*11 , 01*1	
3	0111 , 1110	*111, 111*	
4	1111		

В результате получили тр простые импликанты *111, 111* и 0**1.

Строим импликантную матрицу по методу Квайна,

Импlicantная таблица	Конstituенты единицы в СДНФ f					
	Простые импlicantы					
	0001	0011	0101	0111	1110	1111
0**1	X	X	X	X		
*111				X		X
111*					X	X

по которой определяем МДНФ $0^{**}1 \vee 111^*$ или $\bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$.

Упражнение 2.3.1. Из заданного множества A элементарных конъюнкций выделить простые импlicantы функции f :

- 1) $A = \{x_1, \bar{x}_3, x_1 x_2, x_2 \bar{x}_3\}$, $f(\tilde{x}^3) = (0010 \ 1111)$;
- 2) $A = \{x_1 \bar{x}_2, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3\}$, $f(\tilde{x}^3) = (0111 \ 1110)$;
- 3) $A = \{x_1, \bar{x}_4, x_2 \bar{x}_3, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4\}$, $f(\tilde{x}^4) = (1010 \ 1110 \ 0101 \ 1110)$;
- 4) $A = \{x_1, x_2, x_1 \bar{x}_2\}$, $f(\tilde{x}^2) = (1011)$;
- 5) $A = \{x_1 x_3, x_1 \bar{x}_3, x_2\}$, $f(\tilde{x}^3) = (0011 \ 1011)$;
- 6) $A = \{x_1 \bar{x}_2, x_2 \bar{x}_3, \bar{x}_2\}$, $f(\tilde{x}^3) = (0010 \ 1111)$.

Упражнение 2.3.2. По заданной д. н. ф. D с помощью метода Блейка построить сокращенную д. н. ф.:

- 1) $D = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4$; 2) $D = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$;
- 3) $D = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$;
- 4) $D = x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4$;
- 5) $D = \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4$;
- 6) $D = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_2 x_4$;
- 7) $D = \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3$;
- 8) $D = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3 x_1$.

Упражнение 2.3.3. С помощью алгоритма Квайна-Мак-Класки найти МДНФ.

а)

- 1) $\tilde{\alpha}_f = (1111 \ 0100)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (0101 \ 0011)$; 3) $\tilde{\alpha}_f = (1101 \ 0011)$;
- 4) $\tilde{\alpha}_f = (1110 \ 0111)$; 5) $\tilde{\alpha}_f = (1111 \ 1000 \ 0100 \ 1100)$;
- 6) $\tilde{\alpha}_f = (0001 \ 0111 \ 1110 \ 1111)$; 7) $\tilde{\alpha}_f = (1110 \ 0110 \ 0000 \ 0111)$;
- 8) $\tilde{\alpha}_f = (1111 \ 1111 \ 1111 \ 1000)$.

б)

- 1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; 2) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$;
- 3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;
- 4) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; 5) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_1)$;
- 6) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(x_4 \vee x_1)$;
- 7) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$;
- 8) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

в)

- 1) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$; 2) $f = x_1 \vee x_2$; 3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
- 4) $f = (x \vee \bar{y} \vee z)t \vee x\bar{y}z$; 5) $f = (x \vee \bar{y} \vee z)t \vee xyz$;
- 6) $f = (x_1 \rightarrow x_2)$; 7) $f(x_1 \oplus x_2)$;
- 8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; 9) $f = x_1x_2 \vee x_3$;
- 10) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1)$; 11) $f = x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \vee x_2)$;
- 12) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;
- 13) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\bar{x}_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$;
- 14) $f = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_3) \oplus (x_3 \rightarrow x_1) \oplus x_3$;
- 15) $f = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_3) \oplus (x_2 \rightarrow x_1)$.

2.4. Введение в теорию графов .

Короткая историческая справка. Историки математики считают, что теория графов родилась в 1736 г., когда Леонард Эйлер решил задачу о кенигсбергских мостах (см. §7.5). В середине 19 века Г.Кирхгоф ввел понятие *дерева* (§7.6) и применил его для исследования электрических цепей. Тогда же А.Кэли использовал аппарат деревьев, описывая строение углеводородов.

2.4.1. Основные определения и примеры.

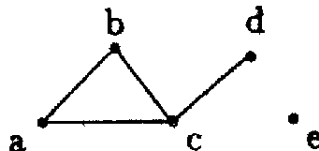
Определение.

Простым графом называется упорядоченная пара $G = \langle V, E \rangle$, где

V — непустое конечное множество (элементы V — вершины графа);

E — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов V (элементы E — ребра¹ графа).

Графы удобно представлять рисунками, в которых вершины изображаются точками, а ребра — линиями, соединяющими соответствующие точки². Например, на рисунке



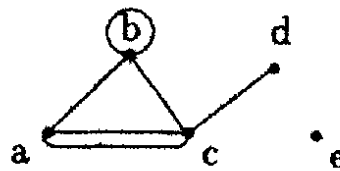
изображен простой граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством ребер $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Определение. Повторяющиеся элементы в E называют *кратными* рёбрами. А граф в этом случае называют *мультиграфом*.

Определение. Если ребро $e = \{u, v\} \in E$, то вершины u и v называются *смежным* друг другу и, *инцидентными* ребру e .

Определение. Два ребра называются *смежными*, если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

На рисунке



изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и семейством ребер $E : ab, ac, ac, bc, bb, cd$.

Определение. Ребро $e = \{u, u\} \in E$ называют *петлёй*, а граф — *псевдографом*.

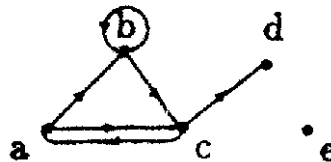
Определение.

Ориентированный граф — упорядоченная пара $G = \langle V, A \rangle$, где

V — непустое конечное множество — множество вершин;

A — конечное семейство *упорядоченных* пар элементов V (необязательно различных) — семейство *дуг*.

На рисунке



изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и семейством дуг

$A : (a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, b), (c, d)$.

Определение.

Степенью вершины графа называется число инцидентных ей ребер. При подсчете степени вершины петлю будем учитывать дважды. Обозначение степени вершины v : $\rho(v)$. Вершина v называется *изолированной*, если $\rho(v) = 0$, и *висячей*, если $\rho(v) = 1$. Имеет место следующее простое утверждение.

Теорема 7.1. (Лемма о рукопожатиях) Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер: $\sum_{v \in V} \rho(v) = 2|E|$.

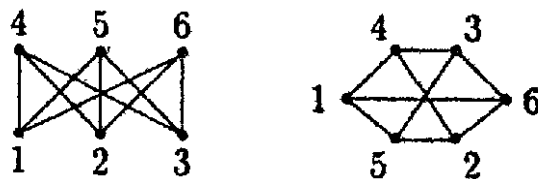
Действительно, каждое ребро дает вклад 2 при подсчете суммы степеней всех вершин. В частности, если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число рукопожатий будет четным (графовая модель для данной задачи очевидна).

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Определение.

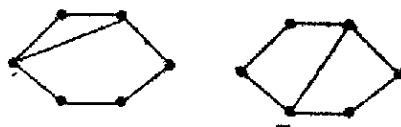
Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, при котором для любых двух вершин первого графа $u, v \in V_1$ число соединяющих их ребер равно числу ребер, соединяющих соответствующие им вершины второго графа $\varphi(u), \varphi(v)$.

На следующем рисунке изображены



изоморфные графы (соответствующие друг другу вершины в них обозначены одинаковыми номерами).

Ясно, что в изоморфных графах одинаковое число вершин, ребер (а также петель и кратных ребер). Однако данное условие не является достаточным для изоморфности. Два графа, изображенные ниже,



не являются изоморфными (хотя бы потому, что в одном графе имеется "треугольник", а во втором — нет).

Необходимые условия изоморфизма:

1. совпадение числа вершин у графов;
2. совпадение числа рёбер;
3. совпадение наборов степеней вершин.

Изоморфизм графов обладает свойствами:

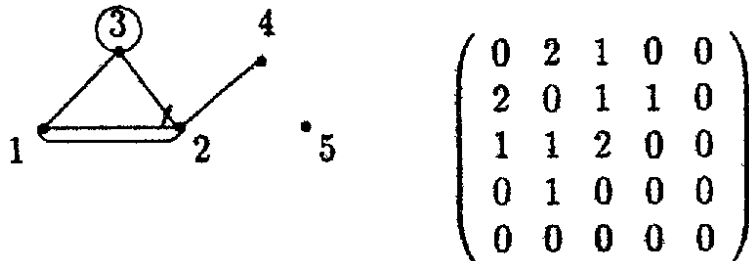
1. *рефлексивности* (любой граф изоморфен себе);
2. *симметричности* (если G_1 изоморфен G_2 , то G_2 изоморфен G_1);
3. *транзитивности* (если G_1 изоморфен G_2 и G_2 изоморфен G_3 , то G_1 изоморфен G_3);

и поэтому является отношением эквивалентности.

Определение.

Порядок графа — число его вершин. Граф порядка n называется **помеченным**, если его вершинам присвоены **метки** — числа от 1 до n (причем у разных вершин — разные метки). Часто мы будем отождествлять вершину с ее меткой.

Определение. **Матрицей смежности** помеченного графа называется матрица $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — число ребер, соединяющих вершины i и j . Ниже изображен помеченный граф 5-го порядка и приведена его матрица смежности.



Свойства матрицы смежности

- 1) Каждый элемент матрицы — неотрицательное целое число.
- 2) Матрица является симметричной: $A^T = A$ (символ T означает операцию транспонирования).
- 3) Сумма элементов i -й строки равна степени вершины i :

$$\sum_j a_{ij} = \rho(i).$$
- 4) Пусть A и A' — матрицы смежности изоморфных графов. Тогда найдется такая матрица перестановок⁴ P , что $A' = PAP^{-1}$.

Доказательство.

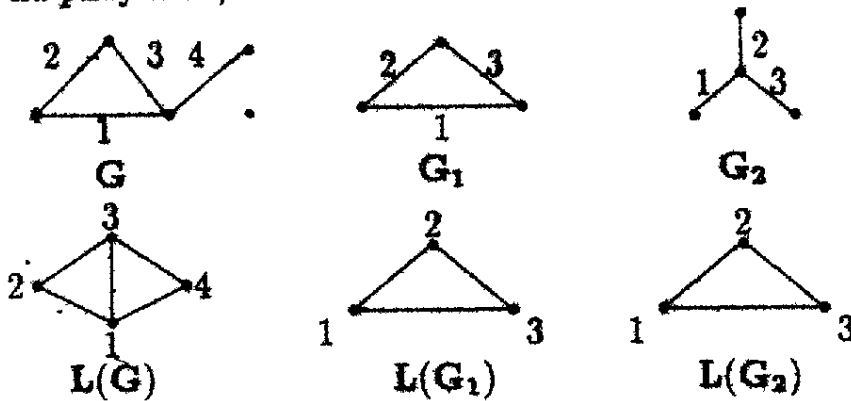
Первые три свойства очевидны; докажем последнее свойство. Пусть φ — функция, устанавливающая изоморфное соответствие между графами G и G' с матрицами смежности соответственно A и A' :

$$\forall i, j \quad a'_{\varphi(i), \varphi(j)} = a_{ij}. \quad (1)$$

Сформируем матрицу P следующим образом: в i -й строке поставим единицу в $\varphi(i)$ -й столбец. Тогда умножение любой матрицы (соответствующей размерности) слева на P приводит к такой перестановке ее строк, что i -й строкой становится строка с номером $\varphi(i)$ матрицы A ($i = 1, \dots, n$, n — порядок графа). Легко проверить, что матрица, обратная к матрице перестановок, совпадает с транспонированной к ней: $P^{-1} = P^T$. Умножение матрицы справа на P^T приводит к такой перестановке ее столбцов, что j -м столбцом становится столбец с номером $\varphi(j)$ данной матрицы ($j = 1, \dots, n$). Таким образом, число, стоявшее в i -й строке и j -м столбце матрицы A , будет находиться в $\varphi(i)$ -й строке и $\varphi(j)$ -м столбце матрицы PAP^{-1} ($i, j = 1, \dots, n$). В силу (1) отсюда и вытекает требуемое: $A' = PAP^{-1}$.

Определение.

Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ребер G , причем две вершины в $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им ребра графа G . Примеры реберных графов см. на рисунках,



где ребра графов G, G_1, G_2 помечены теми же номерами, которые имеют соответствующие им вершины реберных графов. Очевидно, что из изоморфности графов вытекает изоморфность их реберных графов. Обратное, вообще говоря, неверно (см. примеры)⁵.

Определение.

Граф, в котором нет ребер, называют *пустым*. Пустой граф порядка n будем обозначать N_n . Все вершины пустого графа являются изолированными.

Определение.

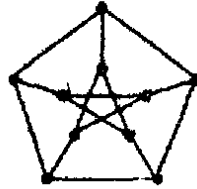
Простой граф, в котором любые две вершины смежны, называют *полным*. Обозначение полного графа порядка n : K_n . Число ребер в K_n равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Определение.

Граф называется *регулярным степени r* , если степени всех его вершин

равны r .

Графы K_n и N_n являются регулярными, их степени соответственно $n-1$ и 0 . Регулярный граф степени 3 называют *кубическим*. В частности, кубическим будет граф, вершины и ребра которого соответствуют вершинам и ребрам куба. Кубическим является и *граф Петерсена*, изображенный на рисунке.



Определение.

Платоновыми графами называют графы, образованные вершинами и ребрами платоновых тел — правильных многогранников. Все они являются регулярными.

Определение.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин V представимо в виде объединения двух непересекающихся непустых множеств V_1 и V_2 , и при этом каждое ребро графа соединяет какую-либо вершину из V_1 с какой-либо вершиной из V_2 . Множества вершин V_1 и V_2 будем называть *долями* графа.

Заметим, что вершины двудольного графа можно "раскрасить" в два цвета так, что каждое ребро будет иметь концы разного цвета (вершины одного цвета будут при этом составлять одну долю).

Определение.

Полным двудольным графом $K_{n,m}$ называется двудольный граф, в котором доли имеют соответственно n и m вершин, и любые две вершины, входящие в разные доли, смежны. $K_{n,m}$ содержит nm ребер.

Определение.

Звездным называют граф $K_{1,n}$. В нем n висячих вершин и одна вершина степени n .

На рисунке изображены двудольные графы.



$K_{3,3}$



$K_{1,6}$

2.4.2. Операции над графами.

Определение.

Объединением графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называется граф $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$. Объединение графов — *дизъюнктное*, если объединяемые графы не имеют общих вершин: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Очевидно, что операция объединения графов ассоциативна; поэтому употребление записей вида $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ или $\cup_i G_i$ не будет приводить к недоразумениям.

Определение.

Соединением графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — граф $G_1 + G_2$, который получается из дизъюнктного объединения графов $G_1 \cup G_2$ добавлением всевозможных ребер вида $v_1 v_2$, где $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Например, $N_n + N_m = K_{n,m}$.

Определение.

Дополнением к графу $G = \langle V, E \rangle$ называют граф $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа G , и вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G .

Например, $\bar{N}_n = K_n, \bar{K}_n = N_n$. Несложно видеть, что дополнение к дополнению G совпадает с G : $\bar{\bar{G}} = G$. Если граф G с n вершинами рассматривать как подграф полного графа K_n , то можно сказать, что граф \bar{G} получается из K_n выбрасыванием ребер графа G . Отметим также, что дополнение к регулярному графу есть регулярный граф.

Определение.

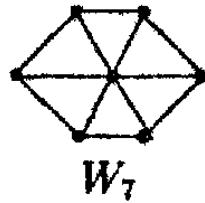
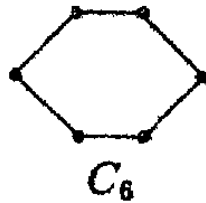
Граф называется *связным*, если его нельзя представить в виде дизъюнктного объединения графов и *несвязным* в противном случае. Любой граф можно представить в виде дизъюнктного объединения связных графов, каждый из которых называют *компонентой связности* исходного графа.

На рисунке граф G_2 — связный, граф G_1 — несвязный (содержит 3 компоненты связности).



Определение.

Циклический граф — это связный регулярный граф степени 2. Циклический граф порядка n обозначают C_n . Граф $W_n = N_1 + C_{n-1}$ ($n \geq 3$) называют *колесом*.



2.4.3. Связные графы.

Определение.

Маршрутом в графе называется последовательность ребер вида

$$v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m.$$

Каждому маршруту соответствует последовательность его вершин v_0, v_1, \dots, v_m ; v_0 называют *начальной вершиной* маршрута, а v_m — *конечной вершиной*; при этом говорят о *маршруте из v_0 в v_m* . Маршрут удобно обозначать в следующем виде:

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m.$$

Определение.

Длиной маршрута называется число входящих в него ребер. *Тривиальный маршрут* имеет длину 0 (он не содержит ребер и определяется начальной вершиной v_0).

Определение.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины различны, за исключением, может быть, начальной и конечной. Если в цепи $v_0 = v_m$, то цепь называют *замкнутой*.

Определение.

Цикл в графе — замкнутая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро.

Две вершины графа u и v назовем *связанными*, если в графе существует маршрут из u в v . Заметим, что если две вершины связаны, то существует соединяющая их простая цепь. Действительно, пусть имеется некоторый маршрут из u в v , не являющийся простой цепью, тогда найдется вершина маршрута w , встречающаяся в нем не менее двух раз, и маршрут имеет вид:

$$u \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow v.$$

Удалив из маршрута участок $w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w$, вновь получим маршрут из u в v . Если при этом он не будет простой цепью, то указанную процедуру

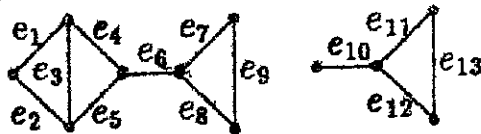
можно повторить. Бесконечное число раз она выполняться не будет, так как число ребер графа конечно. В результате получим простую цепь из u в v .

Отношение связности на множестве вершин графа является отношением эквивалентности. Рефлексивность проистекает из того факта, что каждая вершина связана сама с собой тривиальным маршрутом. Симметричность следует из того, что взяв вершины маршрута из u в v в обратном порядке, получим маршрут из v в u . Транзитивность также очевидна: объединив маршруты из u в v и из v в w , получим маршрут из u в w .

Отношение связности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности. Очевидно, что вершины из одного класса эквивалентности вместе с соединяющими их ребрами образуют компоненту связности графа (определение которой дано в конце предыдущего параграфа). Поскольку связный граф характеризуется тем, что имеет одну компоненту связности, приходим к выводу: *граф является связным тогда и только тогда, когда любые две его вершины — связанные.*

Определение.

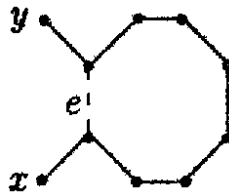
Разделяющим множеством графа называется такое множество его ребер, удаление которых приводит к увеличению числа компонент связности графа. *Разрез* — минимальное разделяющее множество (т.е. такое, что никакое его собственное подмножество не является разделяющим множеством). Ребро называется мостом, если оно образует разрез.



Примеры. Для графа, изображенного на рисунке, $\{e_1, e_2, e_3\}$ — разделяющее множество (но не разрез); $\{e_1, e_2\}$ — разрез; ребра e_6 и e_{10} являются мостами.

Лемма 7.1. *Ребро в графе является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл.*

Доказательство. Пусть ребро $e = uv$ — мост. Ясно, что при этом $u \neq v$. Предположим существование цикла, содержащего ребро e . Возьмем две произвольные вершины x и y из той компоненты связности графа, которой принадлежит ребро e . Покажем, что они останутся связанными и после удаления ребра e . Действительно, если ребро e входит в некоторый маршрут, соединяющий x и y , то e можно заменить последовательностью ребер, составляющих вместе с e цикл (см. рис.).



Таким образом, отношение связности не меняется после удаления e , что противоречит определению моста.

Обратно. Пусть ребро $e = uv$ не входит ни в один цикл. Если при удалении e вершины u и v останутся связанными, это будет говорить о существовании соединяющей их простой цепи. Объединив ее с ребром e , получим цикл в исходном графе — противоречие! Таким образом, число компонент связности при удалении e увеличивается; e — мост.

Следующее утверждение уточняет понятие моста.

Лемма 7.2. *Удаление моста увеличивает число компонент связности графа на единицу.*

Доказательство. Пусть $e = uv$ — мост. Рассмотрим компоненту связности, содержащую e . Через N_u обозначим множество ее вершин x , для которых существует маршрут из x в u , не содержащий ребра e . Остальные вершины составят множество N_v . Эти множества не пусты, так как $u \in N_u$ (вершина u связана сама с собой тривиальным маршрутом) и $v \in N_v$ (если бы существовал маршрут из v в u , не содержащий ребра e , то добавив к нему это ребро, получили бы цикл, что противоречит лемме 7.1). Удалим из графа ребро e . Любые две вершины x, y из N_u останутся связанными между собой маршрутом вида $x \rightarrow \dots \rightarrow u \rightarrow \dots \rightarrow y$. Для произвольных вершин z, t из N_v любые простые цепи, связывающие их с вершиной u в исходном графе, заканчивались ребром $e = uv$; значит, после удаления этого ребра z и t связаны маршрутом вида $z \rightarrow \dots \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow t$. Таким образом, удаление e привело к образованию двух компонент связности (с множествами вершин N_u и N_v). Лемма доказана.

Теорема 7.2. *Пусть в простом графе n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда справедливы неравенства $n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$.*

Неравенство $n - k \leq m$ будем доказывать индукцией по числу ребер. *База индукции.* При $m = 0$ $n = k$ — неравенство выполняется. *Индукционный шаг.* Предположим, что доказываемое неравенство справедливо для всех графов с s ребрами, где $s < m$. Будем в графе с n вершинами, m ребрами и k компонентами связности последовательно удалять ребра так, чтобы не изменялось число компонент связности, до тех пор, пока это возможно.

В результате получим граф с прежним количеством вершин и компонент связности и $m' \leq m$ ребрами, причем каждое ребро будет мостом. Удалим еще одно ребро. В силу леммы 7.2 число компонент связности станет равным $k + 1$. Так как граф будет иметь $m' - 1 \leq m - 1 < m$ ребер, к нему применимо предположение индукции: $n - (k + 1) \leq m' - 1$. Стало быть, $n - k \leq m'$, и так как $m' \leq m$, то $n - k \leq m$, что и требовалось доказать.

Для того, чтобы оценить сверху число ребер графа через число его вершин и компонент связности, дополним каждую компоненту связности графа до полного графа. Граф после этого будет представлять собой дизъюнктивное объединение полных графов $G_1 \cup \dots \cup G_k$. Пусть в i -й компоненте n_i вершин ($i = 1, \dots, k$). Можно ли еще увеличить число ребер, не меняя при этом числа вершин и компонент связности? Можно, если найдутся две компоненты, в каждой из которых не менее двух вершин. Пусть $2 \leq n_i \leq n_j$. "Отберем" одну вершину у G_i (потеряв при этом $n_i - 1$ ребер) и "передать" ее графу G_j (приобретая зато n_j ребер). Количество ребер увеличится на величину $n_j - (n_i - 1) = n_j - n_i + 1 \geq 1$. Повторяя описанную процедуру, пока это возможно, придем в конце концов к графу с $k - 1$ изолированными вершинами и компонентой связности, представляющей собой полный граф с $n - k + 1$ вершинами. Полученный граф имеет $\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$ ребер. Поскольку при каждом проведенном преобразовании число ребер возрастало, получим требуемое соотношение: $m \leq \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$; причем равенство достигается только для дизъюнктивного объединения полного графа и пустых графов. •

Следствие. Если в простом графе n вершин и m ребер и $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то граф связен.

Действительно, если бы граф не был связан и число его компонент $k \geq 2$,

то число ребер удовлетворяло бы неравенству $m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, что противоречит условию.

2.4.4. Метрические характеристики графа.

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ — связный граф. Через $d(u, v)$ обозначим длину кратчайшей цепи, связывающей вершины u и v . Покажем, что $d(u, v)$ обладает свойствами метрики.

Симметричность. $\forall u, v \in V \quad d(u, v) = d(v, u)$. Свойство очевидно.

Неравенство треугольника. $\forall u, v, w \in V \quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Действительно, объединив кратчайшие цепи из u в w и из w в v ,

получим маршрут из u в v длиной $d(u, w) + d(w, v)$, длина кратчайшей цепи из u в v будет не более этой величины.

Невырожденность. $\forall u, v \in V \quad d(u, v) \geq 0; \quad d(u, v) = 0 \iff u = v.$
Непосредственно вытекает из определения $d(u, v)$.

Таким образом, на множестве вершин связного графа введена структура метрического пространства. $d(u, v)$ будем называть расстоянием между вершинами u и v .

Определение.

Эксцентриситетом вершины u называется наибольшее из расстояний от u до других вершин графа: $e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$.

Определения.

Минимальный эксцентриситет вершин графа называют *радиусом графа*: $r(G) = \min_{u \in V} e(u)$, а максимальный эксцентриситет — *диаметром*: $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$. Другими словами, диаметр графа — это наибольшее из расстояний между двумя вершинами графа. Если эксцентриситет вершины совпадает с радиусом графа, то вершину называют *центральной*. Центральные вершины графа составляют его *центр*. Вершина называется *периферийной*, если ее эксцентриситет равен диаметру графа.

Несколько примеров. В полном графе K_n ($n > 1$) расстояние между любыми двумя (разными) вершинами равно 1, поэтому $r(K_n) = d(K_n) = 1$. В полном графе каждая вершина является и периферийной, и центральной.

Последнее свойство имеет место и для циклического графа C_n , для которого радиус также совпадает с диаметром: $r(C_n) = d(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ — обозначение целой части).

Для колеса W_n радиус равен единице, а диаметр — двум, одна вершина является центральной, а остальные — периферийные.

Установим соотношения между радиусом и диаметром графа.

Теорема 7.3. Для произвольного графа G справедливы неравенства

$$r(G) \leq d(G) \leq 2r(G).$$

Доказательство. Первое неравенство следует непосредственно из определений:

$$r(G) = \min_u e(u) \leq \max_u e(u) = d(G).$$

Чтобы доказать второе неравенство, положим: $d(u, v) = d(G)$; $e(w) = r(G)$. Применяя неравенство треугольника, получим

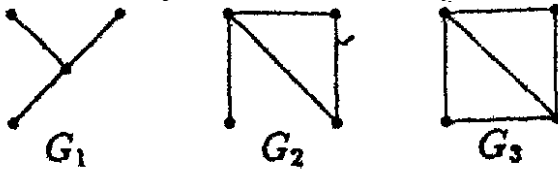
$$d(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq e(w) + e(w) = 2r(G).$$

Теорема доказана.

2.4.5. Гамильтоновы графы.

У. Гамильтон — ирландский математик и астроном — в 1859 году придумал головоломку "Кругосветное путешествие", состоявшую в следующем: каждой вершине додекаэдра приписано имя известного города; необходимо по ребрам проложить замкнутый путь, который проходил бы через все города, причем каждый город должен встретиться ровно один раз. В честь Гамильтона графы, в которых существуют маршруты с подобным свойством, были названы гамильтоновыми.

Определение. Граф называют *гамильтоновым*, если в нём существует простая замкнутая цепь, проходящая через все вершины графа, эту цепь называют *гамильтоновым циклом*. А если убрать в этом определении требование замкнутости, то получим понятия *полугамильтонова графа* и *цикла*.



На рисунке граф G_1 не является гамильтоновым (и даже полугамильтоновым). G_2 — полугамильтонов граф, G_3 — гамильтонов.

Приведем примеры задач, сводящихся к нахождению гамильтоновых циклов в графе.

1) *На обед за круглым столом приглашены гости. Требуется рассадить их так, чтобы сидящие рядом были в дружеских отношениях.*

Рассмотрим граф, в котором вершины — гости, а наличие ребра, соединяющего вершины u и v , говорит о "дружбе" между u и v . Гостей следует рассадить за круглым столом в таком порядке, чтобы соответствующие им вершины были последовательными вершинами некоторого гамильтонова цикла.

2) *Задача Эйлера о коне. Обойти ходом коня шахматную доску, посетив при этом каждую клетку ровно один раз и последним (64-м) ходом вернуться в начальную клетку.*

Здесь граф содержит 64 вершины (клетки доски). Две вершины соединяются ребром, если возможен ход коня с одной клетки в другую. Степени вершин варьируются от 2 до 8. Эта задача достаточно широко описана в занимательной математической литературе, например в книгах Е. Гика. Есть что-то притягательное в задаче Эйлера о коне, если даже на студенческих партах можно встретить наряду с традиционными жанрами "наскального изобразительного искусства" изображения шахматной доски, клетки которой пронумерованы в соответствии с маршрутом коня!

3) Задача коммивояжера. *Бродячий торговец⁷ (коммивояжер) должен посетить n пунктов. Известна стоимость проезда между любыми двумя пунктами. Требуется выбрать наиболее "дешевый" замкнутый путь, проходящий через все пункты.*

Вместо стоимости проезда можно говорить, конечно, о времени или расстоянии. В любом случае, каждому ребру графа приписан некоторый "вес"; задача состоит в нахождении гамильтонова цикла минимального веса (вес цикла — сумма весов составляющих его ребер). Задача коммивояжера является классической задачей дискретной оптимизации, относится к классу так называемых NP-сложных задач. Из обширной библиографии укажем на книгу [30].

Теорема 7.4. (О. Оре, 1960 г.) *Если в простом графе с n вершинами ($n \geq 3$) для любой пары несмежных вершин u и v выполняется неравенство*

$$\rho(u) + \rho(v) \geq n,$$

то граф является гамильтоновым.

Доказательство. Пусть G — простой граф с n вершинами. Добавим к G k новых вершин, соединяя каждую из них с каждой вершиной G . При $k = n$ полученный граф заведомо является гамильтоновым, поскольку в графе $G + N_n$ для построения гамильтонова цикла достаточно чередовать вершины исходного графа G и новые вершины. Пусть k — наименьшее число новых вершин, при котором полученный граф G' является гамильтоновым. Доказывая теорему методом от противного, предположим, что $k > 0$.

Пусть $u \rightarrow q \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow u$ — гамильтонов цикл в G' , где q — некоторая новая вершина. По построению каждая новая вершина смежна смежна лишь со "старыми" вершинами, поэтому u и v — вершины графа G . Заметим, что u и v не могут быть смежными, так как в противном случае, удалив вершину q (вместе с инцидентными ей ребрами) и заменив ребра uq и qv ребром uv , получим гамильтонов цикл в графе с меньшим, чем в G' , числом вершин.

Докажем, что произвольная вершина, смежная с v (обозначим ее v'), не может следовать в гамильтоновом цикле за вершиной (например, u'), смежной с u . Действительно, замкнутую цепь

$$u \rightarrow q \rightarrow v \rightarrow \dots \rightarrow u' \rightarrow v' \rightarrow \dots \rightarrow u$$

можно преобразовать так:

$$u \rightarrow u' \rightarrow \dots \rightarrow v \rightarrow v' \rightarrow \dots \rightarrow u,$$

обойдясь при этом без вершины q , что вводит в противоречие с минимальностью k .

Обозначим для произвольной вершины x графа G' через $\rho'(x)$ и $\bar{\rho}'(x)$ соответственно ее степень и число вершин, несмежных с x . Так как в гамильтоновом цикле за каждой вершиной, смежной с u , следует вершина, не смежная с v , то $\bar{\rho}'(v) \geq \rho'(u)$. Заметив, что для каждой вершины графа G при переходе к графу G' ее степень увеличивается на k , выпишем следующую цепочку неравенств:

$$n + k = \rho'(v) + \bar{\rho}'(v) \geq \rho'(v) + \rho'(u) = \rho(v) + \rho(u) + 2k \geq n + 2k,$$

откуда $k \geq 2k$ — получено противоречие с положительностью k . Таким образом, $k = 0$, $G = G'$, исходный граф G — гамильтонов. Теорема доказана.

Следствие (Г. Дирак, 1952 г.). Если в простом графе порядка $n \geq 3$ степень каждой вершины не меньше $n/2$, то граф является гамильтоновым.

2.4.6. Эйлеровы графы.

Определение.

Связный граф называется *эйлеровым*, если в нем существует замкнутая цепь, содержащая все ребра графа; указанную цепь называют при этом *эйлеровым циклом*. Если в приведенных определениях снять требование замкнутости, то придем к понятиям *полуэйлерова графа* и *эйлеровой цепи*.



На рисунке граф G_1 не является эйлеровым (и даже полуэйлеровым), G_2 — полуэйлеров граф, G_3 — эйлеров.

Узнать, является ли граф эйлеровым, очень просто ввиду следующей теоремы.

Теорема 7.5. (Л. Эйлер, 1736 г.) *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.*

Доказательство. Необходимость. Начнем движение по эйлерову циклу с "середины" произвольного ребра и будем подсчитывать (по ходу движения) степени вершин. При прохождении через вершину ее (текущая) степень увеличивается на 2. Поэтому степени всех вершин эйлерова графа четны.

Достаточность будем доказывать индукцией по числу ребер. База индукции очевидна. Нетрудно убедиться в том, что если степень каждой вершины графа четна и положительна⁹, то граф содержит цикл. В самом деле, начнем строить цепь из произвольной вершины v_1 :

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$ Так как каждая вершина инцидентна четному числу ребер, то попав в очередную отличную от v_1 вершину, можно продолжить движение по ранее не пройденному ребру. Так как число вершин конечно, то рано или поздно некоторая вершина в цепи, скажем v_m , повторится. Часть цепи между двумя вхождениями в нее данной вершины образует цикл C . Если этот цикл содержит все ребра графа G , то он является эйлеровым. В противном случае удалим из G все ребра, образующие C . Граф распадется на несколько компонент связности: H_1, H_2, \dots, H_k ($k \geq 1$), при этом степень каждой вершины остается четной (поскольку она либо не менялась, либо уменьшилась на 2 единицы). Предполагая, что утверждение теоремы справедливо для любого связного графа с числом ребер меньше, чем у G , получим, что каждый из графов H_i — эйлеров. Теперь эйлеров цикл в графе G можно построить следующим образом. Выйдя из произвольной вершины цикла C , двигаемся по его ребрам; если при этом встречается (неизолированная) вершина некоторого графа H_i , то следуем по эйлерову циклу H_i , после чего продолжаем движение по циклу C . В результате будут пройдены все ребра исходного графа G , и цепь замкнется.

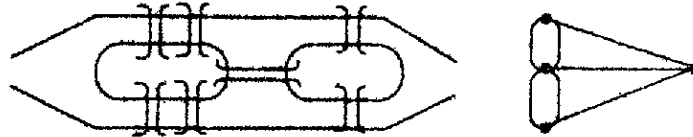
Следствие. *Связный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин имеют нечетную степень.*

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как в теореме. **Достаточность.** Если вершин нечетной степени нет, то граф является эйлеровым, а, значит, и полуэйлеровым. По следствию из леммы о рукопожатиях ровно одной вершины нечетной степени не может быть. Пусть теперь в графе ровно две вершины имеют нечетную степень. Соединив эти две вер-

шины новым ребром, получим, согласно теореме, эйлеров граф. Построим в новом графе эйлеров цикл; удаление ранее добавленного ребра приводит к эйлеровой цепи в исходном графе.

Задача о кенигсбергских мостах

Во времена Леонарда Эйлера семь мостов города Кенигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как показано на рисунке.



Мог ли житель этого города, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Рассмотрим граф, вершины которого отвечают связным участкам суши (двум берегам реки и двум островам), а ребра — мостам. Все четыре вершины графа имеют нечетную степень. стало быть, ответ к задаче отрицательный.

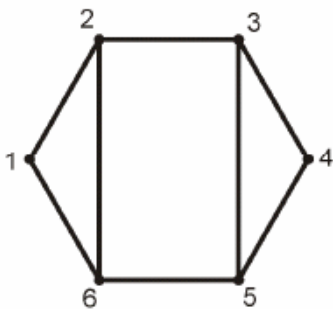
Доказательство теоремы об эйлеровых графах имеет конструктивный характер, на его основе может быть построен алгоритм нахождения эйлерова цикла в графе, однако этот алгоритм будет *рекурсивным* (при конструировании эйлерова цикла используются эйлеровы циклы в некоторых подграфах исходного графа). Известен следующий *нерекурсивный*

2.4.7. Упражнения.

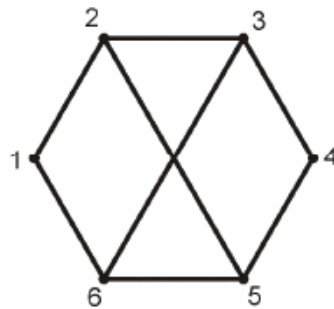
2.4.7.1. Для графов, изображённых на рисунках, построить матрицы смежностей. Определить степени вершин, эксцентриситет, радиус, диаметр, центр.

а)

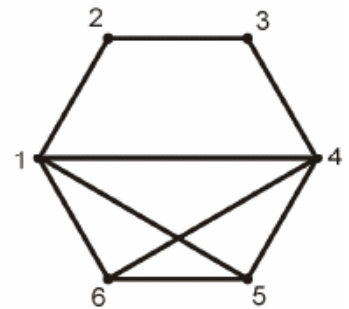
G_1

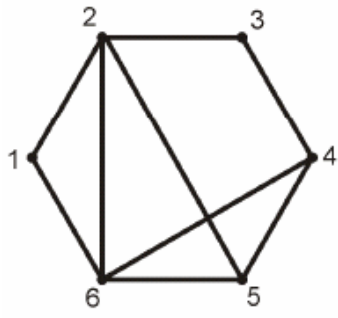
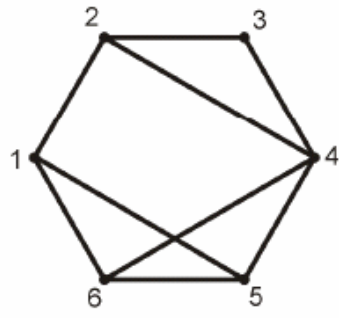
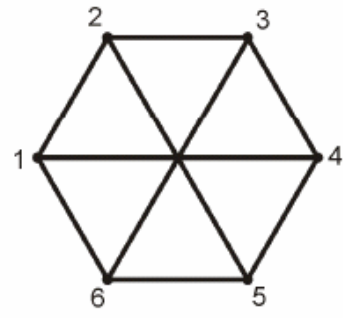
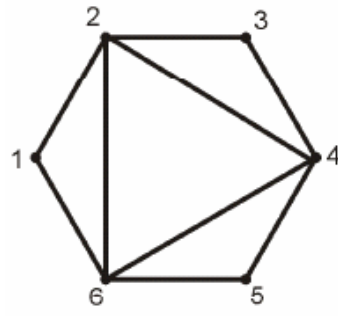
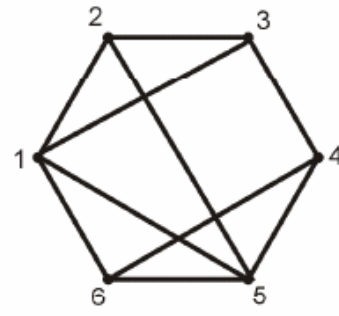
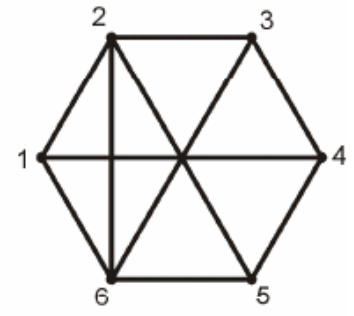
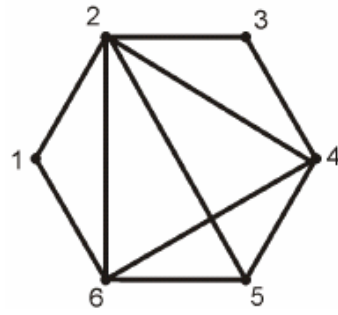
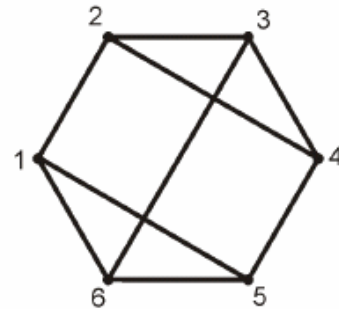
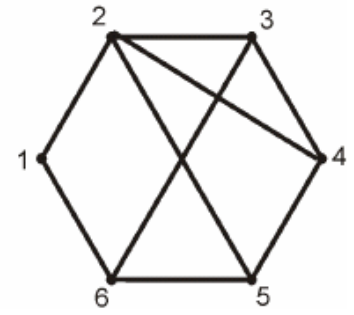


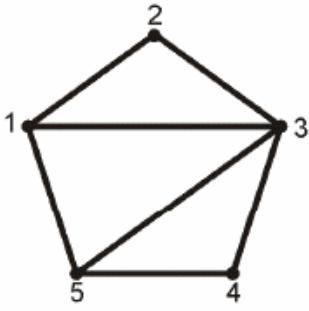
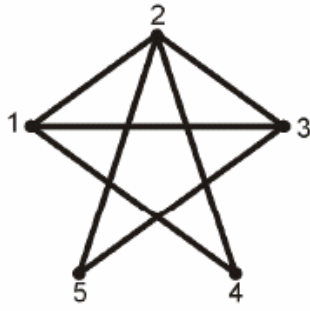
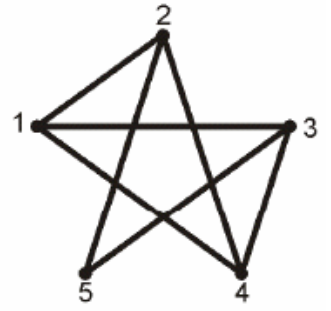
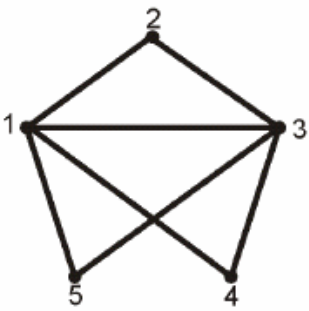
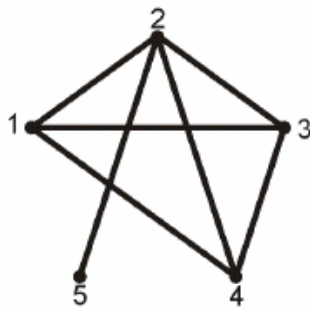
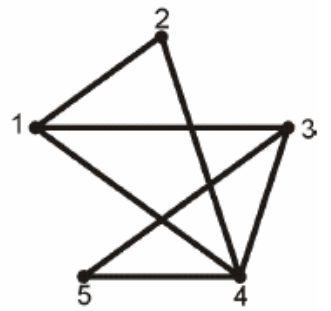
G_2

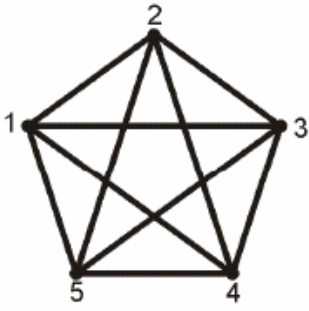
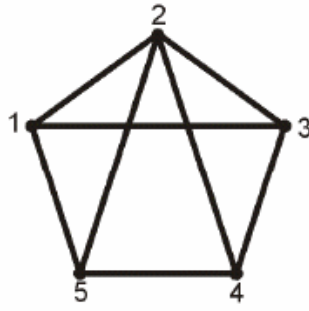
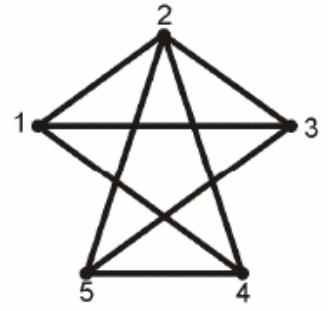
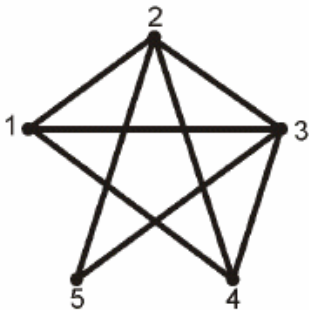
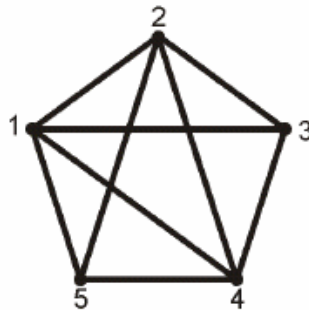
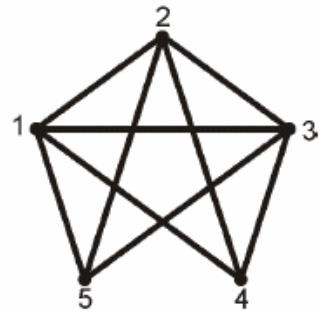


G_3

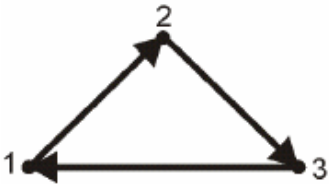
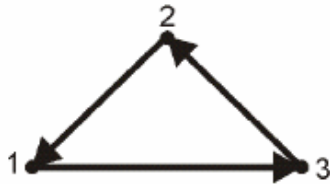
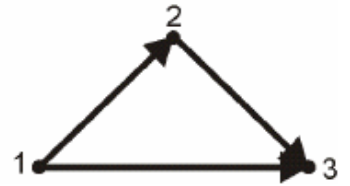


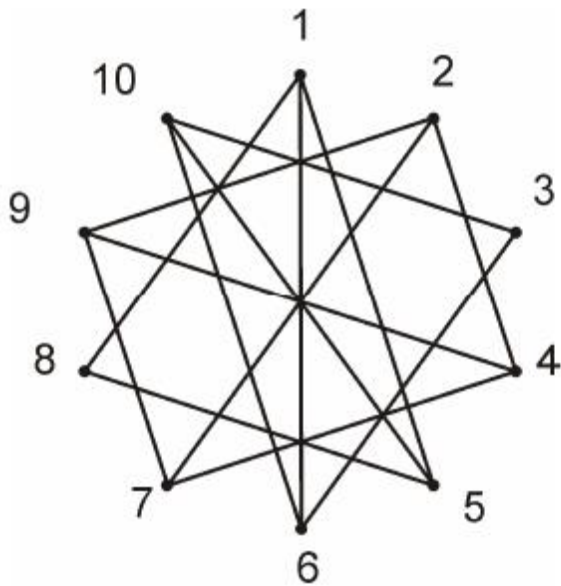
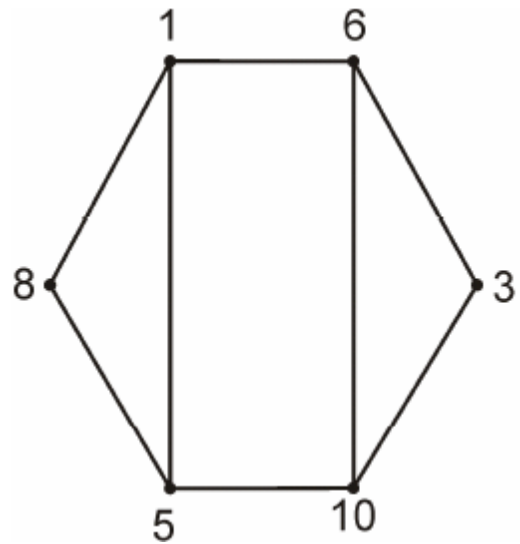
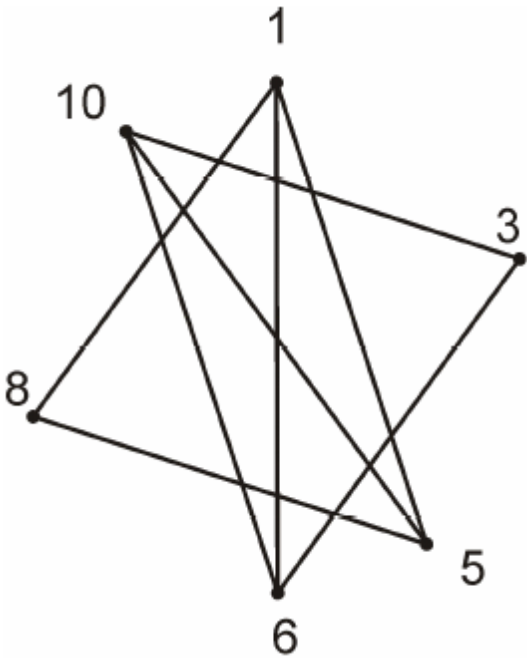
G_4  G_5  G_6  G_7  G_8  G_9  G_{10}  G_{11}  G_{12} 

6)
 G_{13}  G_{14}  G_{15}  G_{16}  G_{17}  G_{18} 

G_{19}  G_{20}  G_{21}  G_{22}  G_{23}  G_{24} 

B)

 D_1  D_2  D_3 



2.4.7.2. Выполнить попарные операции с изображёнными графами.

2.4.7.2. Выявить изоморфные графы.

2.4.7.2. Определить, является ли граф гамильтоновым, полугамильтоновым.

2.4.7.2. Определить, является ли граф эйлеровым, полуэйлеровым.

2.4.8. Деревья и лес

Граф, не содержащий циклов, называют *ациклическим* графом, или *лесом*. Заметим, что в ациклическом графе отсутствуют петли и кратные ребра, в силу чего он является простым графом. *Дерево* — это связный ациклический граф. Таким образом, компоненты связности леса являются деревьями, т.е. лес — дизъюнктивное объединение деревьев.

Теорема 7.8. *Граф является лесом тогда и только тогда, когда каждое ребро графа — мост.*

Доказательство. Граф G — лес \iff в G нет циклов \iff ни одно ребро не входит ни в какой цикл \iff (по лемме 7.1) все ребра G — мосты

Теорема 7.9. *Дерево с n вершинами содержит $n - 1$ ребро.*

Доказательство. Пусть G — дерево с n вершинами. В силу предыдущей теоремы каждое ребро G (и всех его подграфов) является мостом. Будем последовательно удалять ребра G , при этом каждый раз число компонент связности увеличивается на 1 (по лемме 7.2). Первоначально имелась одна компонента связности (так как дерево — связный граф). После удаления всех ребер граф будет иметь n изолированных вершин, т.е. n компонент связности. Таким образом, в указанной процедуре был выполнен $n - 1$ шаг; значит G содержит $n - 1$ ребро.

Следствие 1. *Пусть в лесе n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда $m = n - k$.*

Доказательство. Пусть в i -той компоненте связности леса n_i вершин и m_i ребер ($i=1, \dots, k$); по теореме 7.9 для каждого i $m_i = n_i - 1$. Подсчитаем общее число ребер леса:

$$m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \sum_{i=1}^k n_i - k = n - k.$$

Следствие 2. *Если в лесе число ребер на 1 меньше числа вершин, то этот лес является деревом.*

Действительно, в силу следствия 1 число компонент связности леса равно разности числа вершин и числа ребер (в нашем случае — единице).

Объединив формулировки теоремы 7.9 и следствия 2, получим следующее утверждение: *лес является деревом тогда и только тогда, когда число его ребер на 1 меньше числа вершин.*

Следствие 3. В дереве, которое содержит по меньшей мере две вершины, не менее двух висячих вершин.

Доказательство. Пусть в дереве $n \geq 2$ вершин: v_1, \dots, v_n , тогда оно содержит $m = n - 1$ ребро. По лемме о рукопожатиях $\rho(v_1) + \dots + \rho(v_n) = 2m = 2(n - 1)$. Можно считать, что вершины упорядочены по их степеням: $\rho(v_1) \leq \rho(v_2) \leq \dots \leq \rho(v_n)$. Докажем, что $\rho(v_1) = \rho(v_2) = 1$. Предполагая противное, легко получить противоречие: если $\rho(v_2) > 1$, т.е. $\rho(v_2) \geq 2$, то

$$2(n - 1) = \rho(v_1) + \rho(v_2) + \dots + \rho(v_n) \geq 1 + (n - 1)\rho(v_2) \geq 1 + 2(n - 1).$$

Из следствия 3 вытекает

Следствие 4. В лесе, содержащем хотя бы одно ребро, не менее двух висячих вершин.

Теорема 7.9 может быть обращена следующим образом.

Теорема 7.10. Пусть в связном графе число ребер на 1 меньше числа вершин. Тогда этот граф — дерево.

Доказательство. Пусть в графе G n вершин, $m = n - 1$ ребер. По теореме 7.2 в простом графе $m \geq n - k$, где k — число компонент связности. Для рассматриваемого графа $k = 1$ и имеет место равенство $m = n - k$. Отсюда ясно, что граф является простым, так как в противном случае удалив все петли и (лишние) кратные ребра (сделав граф простым), мы уменьшили бы m , не меняя при этом n и k , что привело бы к нарушению упомянутого неравенства. Итак, граф G — простой и для него $m = n - k$. Удаление любого ребра графа приведет к нарушению неравенства $m \geq n - k$, если при этом не изменится число компонент связности k ; поэтому удаление произвольного ребра изменяет k , то есть каждое ребро графа есть мост, в силу чего (по теореме 7.8) G — ациклический граф. Так как при этом G по условию связный граф, G — дерево. Теорема доказана.

Теорема 7.11. Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одной простой цепью.

Необходимость. Пусть G — дерево. Тогда G — связный граф, и любые две его вершины соединены простой цепью (§7.2), при этом двух различных цепей с таким свойством не может быть, так как их объединение дает цикл, в то время как в дереве циклов нет. **Достаточность.** Если в графе любые две вершины соединены цепью, то, как известно, граф является связным. Ациклическость графа также очевидна: если бы в графе был цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по меньшей мере двумя простыми цепями.

Теорема 7.12. *Лес является деревом в том и только в том случае, когда добавление любого ребра приводит к образованию ровно одного цикла.*

Доказательство. Пусть ациклический граф *связан*. В силу теоремы 7.11 любые две вершины *u* и *v* соединены ровно одной простой цепью. Поэтому добавление ребра *uv* приводит к образованию цикла, причем ровно одного, так как если бы их образовалось хотя бы два, то объединяя соответствующие "участки" этих циклов, можно было бы построить цикл, не содержащий ребра *uv*, что противоречило бы ациклическости исходного графа.

Обратно. Если при добавлении ребра *uv* образуется цикл, то удаляя из этого цикла ребро *uv*, мы получим цепь, связывающую вершины *u* и *v*, значит, любые две вершины графа *связаны*, т.е. граф *связан* и является деревом (так как по условию он ациклический).

2.4.8.1. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев

Обозначим через P_n число помеченных деревьев с n вершинами. Ясно, что $P_1 = P_2 = 1$. Помеченное дерево с тремя вершинами полностью определяется своей центральной вершиной, поэтому $P_3 = 3$. Если в дереве 4 вершины, то оно представляет собой либо полный двудольный граф $K_{1,3}$, либо простую (незамкнутую) цепь длины 4. Первого типа имеется 4 различных помеченных дерева, а второго — $12 (= C_4^2 \cdot 2)$; крайние вершины цепи выбираются C_4^2 способами, после чего для нумерации двух оставшихся вершин остается две возможности); таким образом, $P_4 = 4 + 12 = 16$. Дерево с 5 вершинами имеет один из трех видов, представленных на рисунке.



Количество деревьев типа "цепь" равно $C_5^3 \cdot 3! = 60$, типа $K_{1,4}$ — 5. Произвольное дерево третьего типа определяется пометками вершин *a, b, c* (см. обозначения на рисунке); поэтому их число равно $A_5^3 = 60$. Итак, $P_5 = 60 + 5 + 60 = 125$. Последовательность 1, 1, 3, 16, 125 может быть задана соотношением $P_n = n^{n-2}$. Количество помеченных деревьев с 6 вершинами также нетрудно подсчитать "вручную" (читателю рекомендуется выполнить это полезное упражнение), после чего высказанная гипотеза получит новое подтверждение. И в общем случае имеет место

Теорема 7.13. (А.Кэли, 1897 г.) *Число помеченных деревьев с n вершинами равно n^{n-2} .*

Существует много способов доказательства этой знаменитой теоремы (см., например, [20]). Мы приведем не самое богатое в идейном плане, но, возможно, самое простое доказательство.

Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством помеченных n -вершинных деревьев и множеством размещений с повторениями из n элементов по $n - 2$; поскольку $\overline{A_n^{n-2}} = n^{n-2}$, это будет доказывать теорему. Сопоставление дереву упорядоченного набора

(называемого *кодом Прюфера*) $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ (где для каждого i $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$) будем называть *кодированием дерева* (или *кодировкой*), а обратный процесс (получения по указанному набору дерева) — *декодированием* (или *декодировкой*).

Кодирование дерева выполняется с помощью следующего алгоритма.

1. Положить $i=1$.
2. Пусть v_i — висячая вершина дерева с наименьшей меткой; тогда a_i — метка смежной с ней вершины.
3. Удалить из дерева вершину v_i и инцидентное ей ребро. Если в дереве осталось более двух вершин, увеличить i на 1 и перейти к п.2, иначе — закончить.

Очевидно, что разные деревья имеют разные коды.

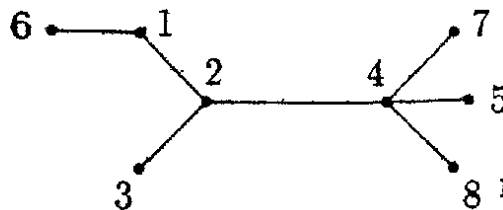
Декодирование дерева. Пусть $B_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, а b_1 — наименьшее число из B_0 , не встречающееся в наборе (a_1, \dots, a_{n-2}) . Тогда b_1 — номер висячей вершины, смежной с a_1 , и дерево содержит ребро (b_1, a_1) .

Набор (a_2, \dots, a_{n-2}) кодирует дерево T_1 с множеством пометок $B_1 = B_0 \setminus \{b_1\}$ (T_1 получается из T удалением вершины b_1 и инцидентного ей ребра (a_1, b_1)).

В качестве b_2 возьмем наименьшее число из B_1 , не встречающееся в последовательности (a_2, \dots, a_{n-2}) . Дерево T_1 (значит, и T) должно содержать ребро (b_2, a_2) . Теперь набор (a_3, \dots, a_{n-2}) описывает дерево T_2 с множеством пометок $B_2 = B_1 \setminus \{b_2\}$. И так далее.

На k -м шаге процедуры рассматривается дерево T_{k-1} с множеством помеченных B_{k-1} . В множестве B_{k-1} выбирается наименьшее число (b_k) , не входящее в набор (a_k, \dots, a_{n-2}) , после чего констатируется наличие в дереве T_{k-1} ребра (b_k, a_k) . После $n-2$ шагов будут выявлены $n-2$ ребра дерева T ; при этом множество B_{n-2} будет содержать два числа — пометки вершин последнего, $n-1$ -го, ребра, включенного в дерево. (Дерево T_{n-2} , содержащее две вершины, строится однозначно, и поэтому не нуждается в кодировке).

Осталось еще убедиться в том, что полученный после декодирования граф действительно является деревом. В самом деле, граф T_{k-1} получается из графа T_k добавлением ребра (b_k, a_k) , причем вершина b_k не принадлежит графу T_k . Поэтому из ацикличности T_k следует ацикличность T_{k-1} . Поскольку T_{n-2} — дерево, то деревьями являются и графы $T_{n-3}, \dots, T_2, T_1, T$.



Пример. Дерево

имеет код $(2, 4, 1, 2, 4, 4)$.

По коду $(2, 4, 1, 2, 4, 4)$ восстановим дерево. Процесс декодировки удобно отразить в следующей таблице.

k	B_k	код T_k	(b_k, a_k)
0	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$(2, 4, 1, 2, 4, 4)$	
1	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$(4, 1, 2, 4, 4)$	$(3, 2)$
2	$\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$	$(1, 2, 4, 4)$	$(5, 4)$
3	$\{1, 2, 4, 7, 8\}$	$(2, 4, 4)$	$(6, 1)$
4	$\{2, 4, 7, 8\}$	$(4, 4)$	$(1, 2)$
5	$\{4, 7, 8\}$	(4)	$(2, 4)$
6	$\{4, 8\}$		$(7, 4)$
7			$(4, 8)$

Как и следовало ожидать, получено дерево, закодированное выше.

2.4.9. Остовные (стягивающие) деревья

Стягивающим (или остовным) деревом связного графа G называется произвольный его подграф, содержащий все вершины G и являющийся деревом.

Остовным лесом графа G называется произвольный его подграф, содержащий все вершины G и являющийся лесом. Таким образом, компоненты связности остовного леса графа G являются стягивающими деревьями компонент G .

Построить остовный лес нетрудно: достаточно последовательно удалять из графа ребра, входящие в циклы, до тех пор, пока не будет построен ациклический граф (лес), который, очевидно, будет остовным для исходного графа.

Граф называется взвешенным, если каждому его ребру l поставлено в соответствие неотрицательное число $\mu(l)$ (вес ребра). Весом графа $G = \langle V, E \rangle$ называют сумму весов всех его ребер: $\mu(G) = \sum_{l \in E} \mu(l)$.

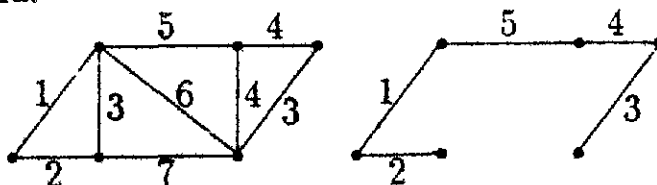
Рассмотрим следующую задачу. Имеется n пунктов. Для любой пары пунктов i и j известна стоимость сооружения дороги между ними — c_{ij} . Требуется выбрать сеть дорог такую, чтобы любые два пункта соединялись каким-либо маршрутом и при этом стоимость ее сооружения была наименьшей.

Если рассмотреть полный граф порядка n , вершины которого будут соответствовать указанным (географическим) пунктам, а ребра будут иметь вес, равный стоимости сооружения дороги между соответствующими пунктами, то на языке теории графов данная задача будет формулироваться так: в данном графе найти стягивающее дерево наименьшего веса. Отметим, что согласно теореме Кэли в полном графе K_n имеется n^{n-2} различных стягивающих деревьев, и, в принципе, рассматриваемая задача может быть решена перебором по всем таким деревьям. Ясно, однако, что с практической точки зрения подобный алгоритм решения не выдерживает никакой критики. Существуют эффективные алгоритмы нахождения стягивающего дерева минимального веса в связном взвешенном графе. При описании следующих алгоритмов $G = \langle V, E \rangle$ будет обозначать исходный граф, а $T = \langle V, P \rangle$ — искомое дерево.

Алгоритм Д.Краскала (1956 г.)

1. Положить $P = \emptyset$, $n = |E|$. Следующий шаг выполнять $n - 1$ раз
2. Включить в T ребро графа G наименьшего веса, обладающее тем свойством, что при добавлении его в графе T не образуется циклов
Исключить из G данное ребро.

На рисунке изображены взвешенный граф (числа показывают веса соответствующих ребер) и стягивающее дерево, полученное в результате работы алгоритма.



С. В цикле C найдется ребро e , принадлежащее множеству M и не входящее в P . Удалив это ребро, получим дерево S' с множеством ребер $M' = M \cup \{e_k\} \setminus \{e\}$ (вновь ссылаемся на теорему 7.10). Сравним веса деревьев S' и S : $\mu(S') = \mu(S) + \mu(e_k) - \mu(e)$. Так как в силу алгоритма Краскала $\mu(e_k) \leq \mu(e)$, $\mu(S') \leq \mu(S)$. Итак, в дереве S' по сравнению с деревом S число ребер, общих с деревом T , на 1 больше, причем вес S' не больше веса S . Указанную процедуру будем повторять до тех пор, пока не получим дерево T . В результате будет построена последовательность деревьев S, S', S'', \dots, T , в которой каждое последующее дерево имеет вес, не больший, чем предыдущее:

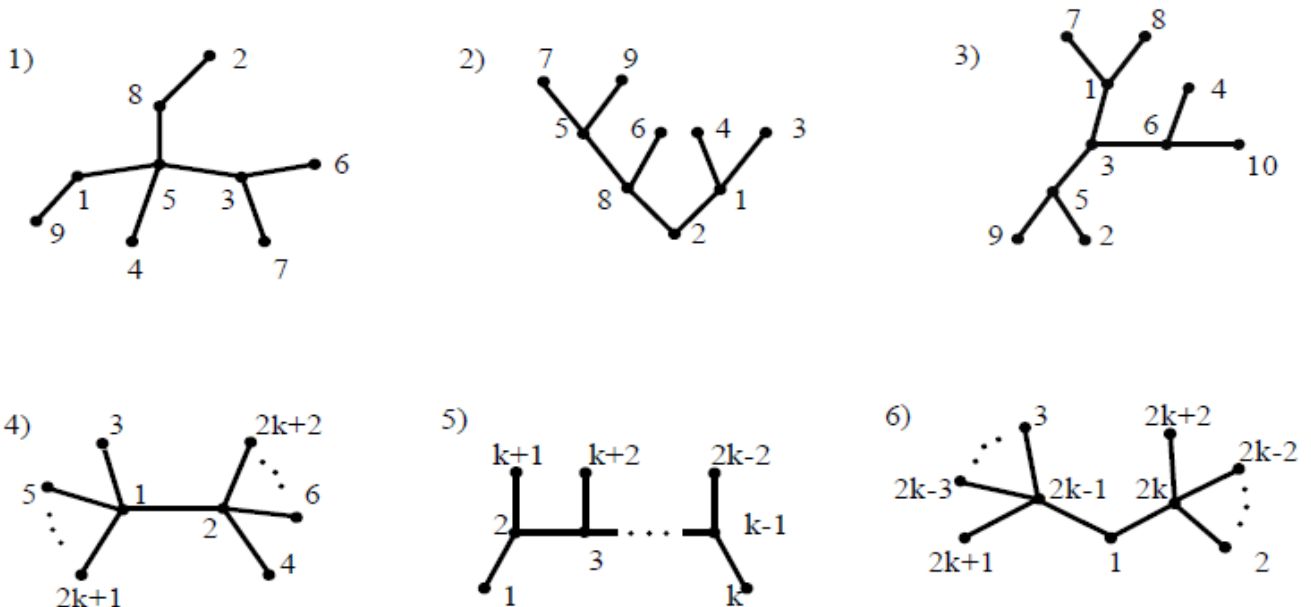
$$\mu(S) \geq \mu(S') \geq \mu(S'') \geq \dots \geq \mu(T),$$

откуда и следует требуемое: $\mu(S) \geq \mu(T)$.

2.4.10. Упражнения.

2.4.10.1.

Построить код Прюфера для деревьев, изображенных на рисунке



2.4.10.2.

По заданному коду Прюфера $p(T)$ восстановить дерево. Найти центральные вершины восстановленного дерева.

1) $P(T) = (4, 1, 6, 2, 2, 2, 7);$

2) $P(T) = (4, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 1);$

3) $P(T) = (5, 2, 5, 3, 5, 4, 9, 6);$

4) $P(T) = (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-2});$

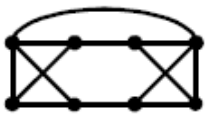
5) $P(T) = (1, 2, \dots, n-2);$

6) $P(T) = (3, 3, 4, 5, \dots, n-2, n-2).$

2.4.10.3.

Найти все графы, которые являются деревьями вместе со своими дополнениями.

2.4.10.4. Какие из графов, изображённых на рисунке, планарны



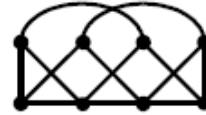
1



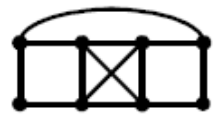
2



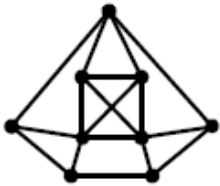
3



4



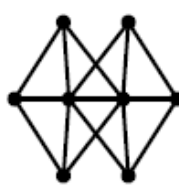
5



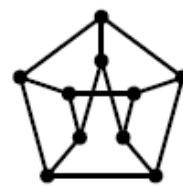
6



7



8



9



10

2.4.10.5. Изобразить все различные (относительно изоморфизма) графы с указанными свойствами и параметрами. В скобках указано их количество

1) 6 вершин, 5 ребер (15);

2) 7 вершин, 4 ребра (10);

3) связные, 6 вершин, 6 ребер (13);

4) связные, 5 ребер (12);

5) две компоненты связности, 4 ребра (9);

6) без изолированных вершин, 4 ребра (11);

7) набор степеней (2,2,2,3,3,4) (4);

- 8) набор степеней (2,2,3,3,3,3) (4);
- 9) деревья, 7 вершин (11);
- 10) деревья, набор степеней (1,1,1,1,2,2,2,3,3) (9);
- 11) деревья, набор степеней (1,1,1,1,1,2,2,3,4) (8);
- 12) леса, 5 вершин (10);
- 13) деревья, степени не более 3, 8 вершин (11);
- 14) графы с единственным циклом, 5 вершин (9);
- 15) графы с единственным циклом, 6 вершин, 5 ребер (8);
- 16) связные, не имеющие циклов длины 3, 5 вершин (6);
- 17) имеющие эйлеров цикл, 6 вершин (8);
- 18) имеющие эйлеров цикл, 7 вершин, 9 ребер (3);
- 19) имеющие гамильтонов цикл, 5 вершин (8);
- 20) имеющие гамильтонов цикл, 6 вершин, 8 ребер (6);
- 21) имеющие цикл длины 6, 5 вершин (6);
- 22) непланарные, 6 вершин, 11 ребер (4);
- 23) двудольные, 5 вершин (13);
- 24) двудольные, 6 вершин, 6 ребер (6);
- 25) ориентированные, без петель, 3 вершины (16);
- 26) ориентированные, без петель, 4 вершины, 3 ребра (13).

2.4.11. Укладки графов.

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. На рисунке 7.4 представлены два варианта изображения полного графа K_4 . В первом случае



Рис. 7.4

отрезки, соответствующие ребрам графа, пересекаются, а во втором случае нет. При решении ряда задач эта разница является принципиальной. Например, при изготовлении микросхем печатным способом электрические цепи наносятся на плоскую поверхность изоляционного материала: при этом проводники не должны пересекаться. Менее глобальный пример

задача о трех домиках и трех колодцах. Хозяева трех соседних домиков хотят проложить дорожки к трем колодцам (от каждого домика к каждому колодцу) так, чтобы дорожки не пересекались. Удастся ли им осуществить свое намерение?

Перейдем к определениям. *Жордановой кривой* называют непрерывную кривую без самопересечений. *Плоским графом* назовем граф, вершины которого — точки плоскости, а ребра — жордановы кривые (лежащие в той же плоскости), соединяющие соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, за исключением инцидентной им обоим вершины. Граф будем называть *планарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу. Примеры планарных графов: K_4 , C_n , W_n (для любого n). Задачу о домиках и колодцах теперь можно сформулировать так: *планарен ли граф $K_{3,3}$?* Отметим очевидные свойства планарных графов:

1. Любой подграф планарного графа является планарным.
2. Граф является планарным тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает каждая его компонента связности.

Про планарный граф говорят также, что он *имеет плоскую укладку*, или *укладывается в плоскость*. Более общее определение: граф *укладывается в множество L* , если его вершины можно изобразить точками из множества L , а ребра — жордановыми кривыми, лежащими в L и имеющими общими только точки, изображающие соответствующие вершины графа. В последующих рассуждениях мы часто будем отождествлять граф и его укладку — "изображение" графа в каком-либо множестве.

Теорема 7.15. *Любой граф укладывается в R^3 .*

Доказательство. Вершины графа будем изображать точками некоторой прямой l . Рассмотрим пучок плоскостей, проходящих через данную прямую. Каждому ребру графа сопоставим некоторую плоскость данного пучка так, чтобы разным ребрам соответствовали разные плоскости. Ребра будем изображать кривыми с концами в соответствующих вершинах и лежащими в соответствующих плоскостях, при этом для изображения петель будем брать окружности, касающиеся l , а для остальных ребер — полуокружности. Ясно, что данная конструкция дает требуемую укладку графа.

Теорема 7.16. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он укладывается на сфере.*

Необходимость. Имея укладку графа на сфере, выберем на сфере точку N так, чтобы она не совпадала ни с одной из вершин и не лежала ни на одном из ребер. Через противоположную точку сферы проведем к ней касательную плоскость α и осуществим *стереографическую проекцию* сферы на данную плоскость с центром в точке N : каждая точка T сферы проецируется в точку пересечения луча NT с плоскостью α . При данном отображении жорданова кривая на сфере переходит в жордановую кривую на плоскости. Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между сферой с выколотой точкой N и плоскостью; поэтому граф, полученный при проектировании, — плоский (его ребра имеют общие точки только в соответствующих вершинах) и изоморфен исходному графу, который, таким образом, является планарным. *Достаточность* доказывается обратным ходом рассуждений.

Связным множеством (на плоскости) называется такое множество, любые две точки которого можно соединить жордановой кривой, целиком лежащей в данном множестве. Примеры связных множеств: многоугольник, круг, кольцо. Пример *несвязного* (т.е. не являющегося связным) множества: объединение двух непересекающихся кругов. *Грань* плоского графа — связная часть плоскости, ограниченная ребрами графа и не содержащая внутри себя других ребер. Среди всех граней графа ровно одна является неограниченной, ее называют внешней. Граф, изображенный на рис. 7.5а, имеет три грани, внешняя грань помечена цифрой 3. У плоского ацикли-

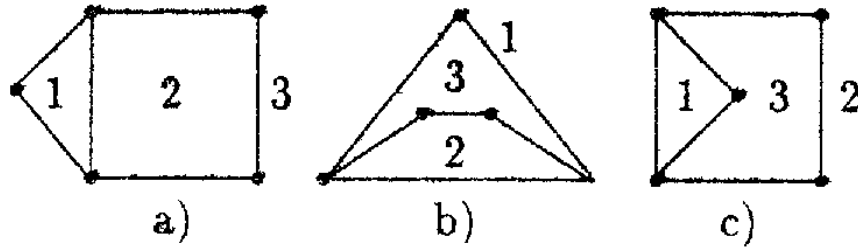


Рис. 7.5. Грани плоского графа

ческого графа только одна грань — внешняя. Заметим, что *планарный граф можно так изобразить на плоскости, что внешней будет любая его наперед заданная грань*. Вот как это можно сделать. От произвольной плоской укладки данного графа следует перейти к сферической (проектируя плоскость вместе с плоским графом на какую-либо сферу, касающуюся плоскости); далее осуществить стереографическую проекцию с центром во внутренней точке выбранной грани, при этом данная грань перейдет во внешнюю грань полученного плоского графа. На рис. 7.5 приведено три варианта плоской укладки одного и того же графа.

Теорема 7.17. (Л.Эйлер, 1758 г.) *Для любого связного плоского графа справедливо соотношение*

$$n - m + f = 2, \quad (1)$$

где n, m, f — число вершин, ребер, граней соответственно.

Следствие 1 (Формула Эйлера для выпуклых многогранников). Пусть в выпуклом многограннике n вершин, m ребер и f граней. Тогда $n - m + f = 2$.

Следствие 2. Число граней f плоского графа определяется формулой $f = m + k - n + 1$, где m, n обозначают то же, что и выше, а k — число компонент связности графа.

Следствие 3. Для любого простого связного планарного графа с $n \geq 3$ вершинами и m ребрами выполняется неравенство $m \leq 3n - 6$.

Следствие 4. В любом простом планарном графе есть вершина степени не больше 5.

Следствие 5. Граф K_5 не является планарным.

Следствие 6. Граф $K_{3,3}$ не является планарным.

Подразбиением ребра uv называют его замену на два ребра uw и wv , где w — некоторая новая вершина графа. Два графа гомеоморфны, если они могут быть получены из одного и того же графа с помощью подразделения ребер. Так, любые два циклических графа C_k и C_l ($k, l \geq 2$) гомеоморфны, так как могут быть получены подразбиением ребер из графа C_2 . Другой пример приведен на рис. 7.6. Ясно, что гомеоморфные плоские графы имеют



Рис. 7.6. Гомеоморфные графы

одинаковое число граней. Понятие гомеоморфизма позволяет сформулировать критерий планарности графа.

Теорема 7.18. (Л.С.Понтрягин, 1927 г.; К.Куратовский, 1930 г.)

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.

Пример. Граф Петерсена не является планарным — см. рис. 7.7.

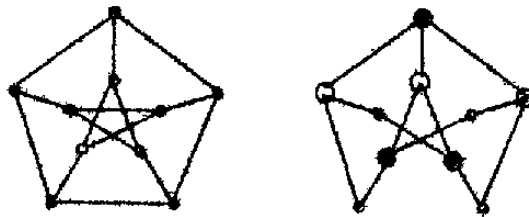


Рис. 7.7. Граф Петерсена и его подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$

2.4.11. Упражнения.

2.1. Применяя критерий Понтрягина–Куратовского, выяснить, планарны ли графы, изображенные: 1) на рис. 6.5, *a, б*; 2) на рис. 6.6, *a, б, в*.

2.2. При каких $n \geq 2$ являются планарными графы, изображенные на рис. 6.8, *a, б*?

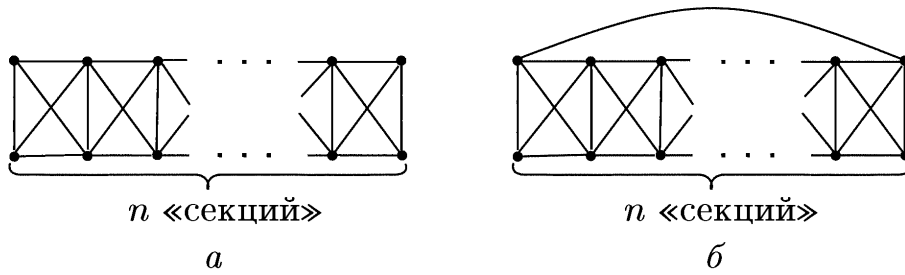


Рис. 6.8

2.3. Построить граф с 6 вершинами и 12 ребрами, содержащий одновременно подграфы, гомеоморфные K_5 и $K_{3,3}$.

2.4. Построить все попарно неизоморфные непланарные графы без петель и кратных ребер, содержащие 6 вершин и 11 ребер.

2.5. Построить однородный 9-вершинный граф (без петель и кратных ребер), который не планарен вместе со своим дополнением.

2.6. Используя формулу Эйлера, доказать непланарность следующих графов:

1) K_5 (рис. 6.7, б); 2) $K_{3,3}$ (рис. 6.4); 3) граф Петерсена (рис. 6.6, а); 4) граф, изображенный на рис. 6.6, в.

2.7. 1) Выяснить, какое наименьшее число вершин нужно удалить из графа G , чтобы получился планарный граф, если: а) G — граф Петерсена (рис. 6.6, а); б) G — граф, изображенный на рис. 6.9.

2) Выяснить, какое наименьшее число ребер надо удалить из графа G , чтобы получился планарный граф, если:

а) $G = K_6$; б) $G = B^4$; в) G — граф Петерсена.

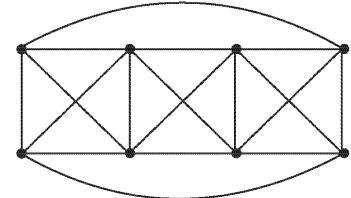


Рис. 6.9

2.8. Выяснить, существует ли планарный граф (без петель и кратных ребер), у которого:

1) 7 вершин и 16 ребер; 2) 8 вершин и 17 ребер.

2.9. Какое наибольшее число граней может быть у плоского 5-вершинного графа, не имеющего петель и кратных ребер? Изобразите такой граф.

2.10. 1) Существует ли плоский 6-вершинный граф (без петель и кратных ребер), у которого 9 граней?

2) Построить все попарно неизоморфные плоские 6-вершинные графы (без петель и кратных ребер), имеющие 8 граней.

2.11. Графы G_1 и G_2 плоские, 6-вершинные, с одинаковым числом граней. У графа G_1 четыре вершины степени 4 и две вершины степени 3. У графа G_2 две вершины степени 5, а остальные имеют степени меньше 5. Какие степени могут быть у остальных вершин графа G_2 ? Изобразите все такие графы G_1 и G_2 .