Оглавление

1. Элементы комбинаторного анализа.

1.1. Общие правила комбинаторики.

Определение независимых объектов. Если выбор (конструирование) объекта типа A не влияет на число различных выборов (конструирований) объектов типа B, то говорят, что объект B *независим от объекта* A.

Правило суммы для независимых объектов (ПС). Если объект A можно выбрать n различными способами, а объект B независим от A и его можно выбрать m различными способами при каждом выборе объекта A, то выбор объекта C, который представляет из себя «либо A, либо B», можно осуществить $n+m$ разными способами.

Доказательство в этом случае не требуется из-за явной очевидности.

Правило произведения для независимых объектов (ПП). Если объект A можно выбрать n различными способами, и независимый от него объект B можно выбрать m различными способами, то выбор пары объектов $\{A, B\}$ можно осуществить $n \cdot m$ разными способами.

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции по n.

<u>База индукции:</u> При $n=1$ это число, очевидно совпадает с числом выбора объекта B и равно $1 \cdot m = m$.

<u>Шаг индукции</u>: Пусть при $n \le i$ (ПП) верно, т.е. соответствующее число равно $n \cdot m$. Покажем выполнение (ПП) при $n = i+1$. Представим задачу следующим эквивалентным образом. Запретим выбор A $(i+1)$-ым способом. Тогда пару $\{A, B\}$ можно выбрать $i \cdot m$ различными способами. И число выборов пары $\{A, B\}$, где A выбрано единственным $(i+1)$-ым способом, равно, как и в базе индукции $1 \cdot m = m$. Поскольку выборы первого и второго вида пар $\{A, B\}$ независимы, то по правилу суммы общее число выборов пар $\{A, B\}$ равно $i \cdot m + m = (i+1)m$.

Примеры.

1) Требуется определить сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет)? При этом учитываются не только слова, имеющие смысл, но и такие бессмысленные, как «трнаук» и т. п.

<u>Решение</u>. В этом случае на первое место у нас 33 кандидата. Но после того как первая буква выбрана, вторую можно выбрать лишь 32 способами – ведь повторять выбранную первой букву нельзя. На третье место тоже 32 кандидата – первую букву уже можно употребить, а вторую – нельзя. Так же убеждаемся, что на все места, кроме

первого, имеется по 32 кандидата. А так как число этих мест равно 5, то получаем по (ПП) ответ 33 *32 *32*32 *32* 32 = 33*32^5 = 1 107 296 256.

2) Определить сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т. е. чтобы какое-то число очков встречалось на обеих костях)?

Решение. Сначала выберем одну кость. Это можно сделать 28 способами. При этом в 7 случаях выбранная кость окажется «дублем», т. е. костью вида 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5, 6|6, а в 21 случае — костью с различными числами очков (например, 0|5, 1|3 и т. д.). В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами (например, если на первом шаге выбрана кость 1|1, то на втором шаге можно взять одну из костей 0|l, l|2, l|3, l|4, l|5, l|6). Во втором же случае вторую кость можно выбирать 12 способами (например, для кости 3|5 подойдут как кости 0|3, 1|3, 2|3, 3|3, 3|4, 3|6, так и 0|5, 1|5, 2|5, 4|5, 5|5, 5|6). По (ПП) в первом случае получаем $7 \cdot 6 = 42$ выбора, а во втором $21 \cdot 12 = 252$ выбора. Окончательно по (ПС) получаем 42 + 252 = 294 способа выбора пары (столькими способами могут быть сделаны первые два хода в игре в домино). В проведенном рассуждении учитывался и порядок, в котором выбирались кости. Поэтому каждая пара костей появлялась дважды (например, первый раз 0|1 и 1|6, а второй раз 1|6 и 0|1). Если не учитывать порядок выбора костей, то получим вдвое меньше способов выбора, т. е. 147 способов.

Комбинаторный анализ занимается изучением объектов, получаемых из конечного множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ или счётного множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Этими объектами могут быть упорядоченные или не упорядоченные подмножества множества E с повторяющимися или не повторяющимися элементами.

1.2. Комбинаторные объекты и комбинаторные числа.

Определение 1. *Системой подмножеств* Ω_n множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называют множество, элементами которого являются все подмножества множества E.

Определение 2. *Размещением из n по k* называют любое упорядоченное множество, составленное из k элементом, взятых из множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащего n различных элементов. Размещения могут быть *без повторений*, когда каждый выбранный элемент исключается из множества E и больше не может участвовать в дальнейших выборах элементов, и *с повторениями*, когда выбираемый элемент остаётся в множестве E и, поэтому, может участвовать в дальнейшем выборе наравне со всеми элементами E.

Определение 3. *Перестановкой без повторений из n* элементов называют любое упорядоченное множество, построенное из всех элементов множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Определение 4. *Перестановкой с повторениями из k* элементов называют любое упорядоченное множество, построенное из элементов множества

$E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ так, что элемент a_1 множества встречается k_1 раз, элемент a_2 встречается k_2 раза, ..., элемент a_n встречается k_n раз, причём $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$.

Определение 5. *Сочетанием без повторений из* n *по* k называют любое подмножество множества E, состоящее из k различных элементов.

Определение 6. *Сочетанием с повторениями из* n *по* k называют любое множество, состоящее из k элементов, взятых из множества E возможно с некоторым повторением.

Определение 7. n*-мерным кубом размера* k ($k>2$) называют совокупность всех упорядоченных наборов из n элементов, взятых с повторениями из множества индексов $E=\{0, 1,\ldots, k-1\}$. Эту совокупность называют также множеством вершин n -мерного кубом размера k, которое обозначают E_k^n.

Определение 8. *Разбиением множества* E называется любая неупорядоченная система $R=\{E_1, E_2,\ldots,E_k\}$ непустых подмножеств множества E, обладающая следующими свойствами:

1) $E=E_1\bigcup E_2\bigcup\ldots\bigcup E_k$;
2) $E_i\bigcap E_j=\varnothing$ для любых $i\neq j$.

Упражнения.

1) Из 9 человек надо выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря правления. Сколькими различными способами это можно сделать?
2) В комнате общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек, причём все чашки блюдца и ложки отличаются друг от друга. Сколькими различными способами студенты могут накрыть себе стол для чаепития, так чтоб каждому из них досталось по одной чашке, одному блюдцу и одной ложке?
3) Сколько чётных и сколько нечётных различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать лишь один раз в составляемом числе?
4) На званый ужин приглашены 5 мужчин и 5 женщин. Напротив каждого места на круглый стол необходимо поставить табличку с именем того, кто будет на этом месте сидеть, так, чтоб никакие два лица одного пола не оказались сидящими рядом. Сколькими разными способами можно расставить таблички в случае, когда все 10 мест считаются различными, и когда места не отличаются друг от друга (т.е. расстановки считаются одинаковыми, если одна получается из другой поворотом стола)?
5) Имеются пять различных красок. а) Сколькими различными способами можно выбрать три разные из них? б) Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с тремя горизонтальными полосами разного цвета? а если один из цветов должен быть красным? а если цвета могут повторяться, но не на соседних полосах?

6) Сколько точек пересечения имеют 10 проведённых на плоскости прямых линий, из которых никакие две не являются параллельными и никакие три не пересекаются в одной точке?
7) В почтовом отделении продаются открытки 10 видов в неограниченном количестве. Сколькими способами: а) можно купить в ней 12 открыток? б) – 8 открыток? – 8 различных открыток?

1.3. Свойства комбинаторных объектов и чисел.

С семейством подмножеств Ω_n множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ обычно связывают число $|\Omega_n|$, называемое его мощностью и равное количеству элементов в нём.

Свойство 1. Число размещений с повторениями из n элементов по k равно $\overline{A}_n^k = n^k$.

Доказательство. Покажем равенство методом математической индукции по длине последовательности.

База индукции: при $k=1$ составить последовательность из одного элемента можно n способами, ставя на единственное место один из элементов множества $E=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$.

Шаг индукции: Пусть для $k \le i$ $\overline{A}_n^k = n^k$. Покажем выполнение этого равенства для $k=i+1$. Первые i мест последовательности можно заполнить согласно предположению индукции n^i способами и последнее место можно заполнить (как в базе индукции) n способами. По (ПП) заполнить всю последовательность можно $n^i \cdot n = n^{i+1}$.

Следствие. $|\Omega_n| = 2^n$.

Доказательство. Каждое подмножество $A \subset E$ семейства Ω_n однозначно описывается последовательностью из нулей и единиц длины n $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n)$:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in A \\ 0, \text{ если } a_i \notin A \end{cases}, \quad \left(i = \overline{1,n} \right).$$

А число таких последовательностей равно $\overline{A}_2^n = 2^n$.

Свойство 2. Число размещений без повторений из n элементов по k равно $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. Обозначают число различных размещений без повторений из n элементов по k как A_n^k или $(n)_k$. При построении конкретного размещения без повторений на первое место можно поставить n элементов, на второе $n-1$ элементов и т.д. Поэтому

$$\mathrm{A}_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) =$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Свойство 3. Число перестановок без повторений из n элементов равно $P_n = n!$.

Доказательство. Перестановки без повторений из n элементов являются частным случаем размещений без повторений из n элементов по n. Число различных перестановок без повторений из n элементов обозначают как P_n или $(n)_n$ и вычисляется $\mathrm{P_n} = \mathrm{A_n^{\mathit{n}}} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$.

n		**k**								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1									
1	1	1								
2	1	2	2							
3	1	3	6	6						
4	1	4	12	24	24					
5	1	5	20	60	120	120				
6	1	6	30	120	360	720	720			
7	1	7	42	210	840	2520	5040	5040		
8	1	8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320	
9	1	9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880

Таблица числа размещений без повторений.

Число всех перестановок с повторениями из k_1 одинаковых элементов a_1, k_2 одинаковых элементов a_2 и т.д., k_n одинаковых элементов a_n обозначают $\mathrm{P}(k_1, k_2,\ldots,k_n)$.

Свойство 4. $\mathrm{P}(k_1, k_2,\ldots,k_n)=\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$, где $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Доказательство. Для доказательства предположим сначала, что все k элементов различны, тогда $\mathrm{P}_k = k!$. За счёт $\mathrm{P}_{k_1} = k_1!$ различных перестановок из k_1 одинаковых элементов, равных a_1, мы $k_1!$ раз сосчитали одну и ту же перестановку. За счёт различных перестановок из k_2 одинаковых элементов, равных a_2, мы в $k_2!$ раз увеличили число $\mathrm{P}(k_1, k_2,\ldots,k_n)$ и т.д. Таким образом $\mathrm{P}(k_1, k_2,\ldots,k_n)=\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$, что и требовалось доказать.

Число сочетаний без повторений из n элементов по k обозначают через C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Свойство 5. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. C_n^k отличается от числа размещений без повторений A_n^k тем, что не учитывается порядок элементов, за счёт этого C_n^k меньше A_n^k в число $\mathrm{P}_k = k!$ перестановок из k элементов. Поэтому $C_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{P}_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Иногда для удобства число C_n^k доопределяют для $k > n$, полагая при этом $C_n^k = 0$.

Определение 9. Конечная последовательность $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{a_n\}$ называется унимодальной, если существует такой индекс $0 < k_n < n$ такой, что $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k_n} \geq a_{k_n+1} > a_{k_n+2} > \ldots > a_n$, то есть:

1) последовательность строго возрастает на отрезке $[0, k_n]$ при $k_n > 0$;

2) последовательность строго убывает на отрезке $[k_n + 1, n]$ при $k_n + 1 < n$;

3) максимальное значение принимается последовательностью не более, чем в двух точках: k_n и быть может $k_n + 1$ (в этом случае $k_n < n - 1$).

Свойство 6 (свойства биномиальных чисел C_n^k):

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

2. $C_n^k \cdot C_k^l = C_n^l \cdot C_{n-l}^{k-l}$ при $0 \leq l \leq k \leq n$;

3. при фиксированном значении n последовательность $\{C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n\}$ унимодальна и $k_n = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ ($[\cdot]$ обозначается целая часть числа);

4. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

5. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

6. $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$ (формула бинома Ньютона).

Доказательство 1 и 2. Непосредственно из определения C_n^k:

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{0!n!} = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n;$$

$$C_n^k \cdot C_k^l = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{(k-l)!(n-l-(k-l))!} = C_n^l \cdot C_{n-l}^{k-l}.$$

Доказательство 3. Рассмотрим отношение двух соседних элементов последовательности

$\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \dfrac{n!}{k!(n-k!)} \cdot \dfrac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \dfrac{n-k+1}{k}$. При $k \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$, то есть при $k < \dfrac{n+1}{2}$ имеем $\dfrac{n+1-k}{k} > \dfrac{(n+1)-\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = 1$ или $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} > 1$, откуда $C_n^{k-1} < C_n^k$. При $k > \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$, т.е. при $k > \dfrac{n+1}{2}$ имеем $\dfrac{n+1-k}{k} < 1$ откуда $C_n^{k-1} > C_n^k$, что и требовалось доказать.

Следствие. $\max\limits_{k=1,\ldots,n}\left\{C_n^k\right\} = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$

Доказательство 4. Проверим непосредственно по определению C_n^k:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k+k}{k(n-k)} = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k\ .$$

Также это утверждение доказывается установлением взаимно однозначного соответствия между каждым сочетанием из n по k, если оно содержит элемент a_n, с сочетанием из $n-1$ по $k-1$, и если оно не содержит a_n, то с сочетанием из $n-1$ по k.

Благодаря рекуррентному соотношению **4** строится таблица, называемая «треугольником Паскаля»

n	**k**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Треугольник Паскаля

Доказательство 5. Воспользуемся методом индукции по n.

<u>База индукции:</u> При $n=1$, выполнено утверждение 5, действительно, $C_1^0+C_1^1=1+1=2$.

<u>Шаг индукции:</u> Предположим, что $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$ выполнено для $n=m$. Покажем, что тогда оно выполнено для $n=m+1$. Используя свойство 4, запишем

$$C_{m+1}^0+C_{m+1}^1+\ldots+C_{m+1}^{m+1}=C_m^0+\left(C_m^1+C_m^0\right)+\ldots+\left(C_m^m+C_m^{m-1}\right)+C_{m+1}^{m+1}=$$

$$\left(C_m^0+C_m^1+\ldots+C_m^m\right)+\left(C_m^0+\ldots+C_m^{m-1}+C_m^m\right)=2^m+2^m=2^{m+1},$$

так как $C_{m+1}^{m+!}=1=C_m^m$

Доказательство 6. Для доказательства утверждения 6 заметим, что коэффициент при x^k соответствует множеству всевозможных выборов из k скобок $(1+x)$ переменного x и из остальных скобок 1, что равно C_n^k.

Следствия. а) При $x=1$ $(1+1)^n=2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n$, то есть получается утверждение 5.

б) $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-k}C_n^i\cdot C_i^k=\begin{cases}1 \text{ при } k=n\\ 0 \text{ при } k<n\end{cases}.$$

Действительно, при $x=-1$ из утверждения 5 получим

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^k C_n^k+\ldots+(-1)^n C_n^n=(1-1)^n=0.$$

Далее, опираясь на утверждение 2, имеем

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-k}C_n^i\cdot C_i^k=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_n^k\cdot C_{n-k}^{i-k}=C_n^k\cdot\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}=\begin{cases}1 \text{ при } k=n\\ 0 \text{ при } k<n\end{cases}.$$

Аналогично доказывается, что при $m\ge n$

$$\sum_{i=r}^{n}(-1)^{i-r}C_{m-i}^{m-n}C_{m-r}^{m-i}=C_{m-r}^{m-n}\sum_{i=r}^{n}(-1)^{i-r}C_{n-r}^{n-i}=\begin{cases}1 \text{ при } r=n,\\ 0 \text{ при } r<n.\end{cases}$$

Свойство 7. Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k равно $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное сочетание с повторениями из n элементов по k. Пусть в нём элемент a_1 множества E встречается k_1 раз, a_2 встречается k_2 раза, и т.д., элемент a_n встречается k_n раз. Поставим в соответствие сочетанию следующую последовательность из нулей и единиц $\left(\underbrace{11\ldots1}_{k_1}0\underbrace{11\ldots1}_{k_2}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{k_n}\right)$. Нетрудно видеть, что это соответствие взаимнооднозночно. Число элементов в этой последовательности равно $n+k-1$, из них $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$ единиц и $n-1$ нулей. Число различных таких последовательностей равно числу перестановок с повторениями $\mathrm{P}(k, n-1)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=\frac{(n+k-1)!}{k!((n+k-1)-k)!}=C_{n+k-1}^k$. Таким образом $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Свойство 8. Число вершин n-мерного куба размера k равно $\left|E_k^n\right| = k^n$.

Доказательство. Так как куб является частным случаем размещения с повторениями, то очевидно, что $\left|E_k^n\right| = \bar{\mathrm{A}}_k^n = k^n$.

Определение 10. Пусть в вершине $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E_k^n$ число $k_1 \in E = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ встретилось n_1 раз, число $k_2 \in E$ встретилось n_2 раза, и т.д. число $k_r \in E$ встретилось n_r раз ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$). Характеристикой этой вершины назовём таблицу $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_r \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_r \end{pmatrix}$.

Определение 11. Множество вершин куба, имеющих одну и ту же характеристику $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_r \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_r \end{pmatrix}$ назовём слоем.

Пример. Трёхмерный куб размера 2 разбивается на следующие слои: 1. (0, 0, 0) с характеристикой $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2. (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) с характеристикой $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3. (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) с характеристикой $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; и 4. (1, 1, 1) с характеристикой $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

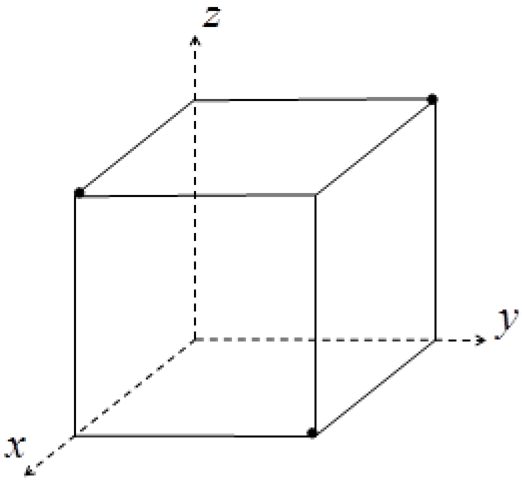


Рис. 1 (слой 3)

Подсчитаем количество вершин в слое $P(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}$. Количество слоёв с заданным набором чисел $k_1, k_2, \ldots, k_r$ равно числу решений уравнения $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n,\ \ n_1, \ldots, n_r > 0$. Наконец число выборов из множества $E = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ r каких либо элементов равно C_k^r. Из этих рассуждений можно сделать вывод

$$k^n = \sum_{r=1}^{k} \left(C_k^r \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_r=n \\ (n_1,\ldots,n_r>0)}} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} \right).$$

Определение 12. Обозначим через $\Phi(n, k)$ число разбиений множества $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ на k непересекающихся непустых подмножеств ($0 < k \le n$), а через $\Phi(n)$ – число всех разбиений E на непустые непересекающиеся множества. $\Phi(n, k)$ называют *числом Стирлинга второго рода,* а $\Phi(n)$ – *числом Белла*.

Иногда удобно доопределять эти числа при $k > n$, $k = 0$ и $n = 0$: для $k > n$ $\Phi(n, k) = \Phi(n, 0) = 0$ и $\Phi(0) = 1$. Очевидно $\Phi(n) = \sum_{k=0}^{n} \Phi(n, k)$.

Каждое разбиение $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$ характеризуется n числами:

l_1 – число подмножеств мощности 1; l_2 – число подмножеств мощности 2; ... ; l_n – число подмножеств мощности n.

Для этих чисел выполнено равенство $1 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + \ldots + n \cdot l_n = n$.

Свойство 9. Числа Стирлинга удовлетворяют рекуррентному соотношению $\Phi(n, k) = \Phi(n-1, k-1) + k \cdot \Phi(n-1, k)$ для $0 < k < n$.

Доказательство. Множество разбиений E на k подмножеств можно разбить на два класса: те, что содержат одноэлементное подмножество $\{a_n\}$ имеют мощность $\Phi(n-1, k-1)$; и те, что не содержат этого подмножества, эти разбиения получаются из разбиений множества $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ на k подмножеств с последующим поочерёдным присоединением элемента a_n к каждому из k подмножеств разбиения. Поэтому число вторых разбиений равно $k \cdot \Phi(n-1, k)$. Что и требовалось доказать.

n	**k**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	765	141	28	1	
9	0	1	255	2961	7105	4175	986	337	36	1

Числа Стирлинга второго рода

n	
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	3730
9	15867

Числа Белла

Упражнения.

1) В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей.

В какой доле случаев соревнования победитель будет определен?

2) Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

3) Автобусу, в котором находится 11пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками?

4) В почтовом отделении продаются открытки 12 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 10 открыток?

5) В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к паровозу, я трое — спиной к паровозу, остальным трем безразлично, как сидеть Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

6) Сколькими способами можно выбрать из16 лошадей шестёрку для запряжки так, чтобы в неё вошли 3 лошади из шестёрки *ABCA'B'C'*, но не вошли не одна из пар *AA'*, *BB'*, *CC'*?

7) Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найти число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита.

8) Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими различными способами можно посадить семь человек?

9) Имеется 3 курицы, 4 утки и 2 гуся. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких птиц так, чтобы среди выбранных были и куры, и утки, и гуси?

10) Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слово, в которое входят 4 различных согласных и 3 различных гласных? Во скольких из этих слов никакие две согласные не стоят рядом?

11) Сколькими способами можно переставить буквы в слове «кофеварка так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались?

12) Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной?

13) Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь лишь цифрами 1, 2, 3, при дополнительном условии, что цифра 3 используется в каждом числе ровно два раза? Сколько из написанных чисел делится на 9?

14) На каждом борту лодки у весел должны сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?

15) У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин, а у жены — 7 женщин и 5 мужчин (иные, чем у мужа). Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

16) Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если среди них есть двое, которых нельзя выбирать вместе?

17) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы, если в группу могут входить от 5 до 15 человек?

18*) У Паши 7 друзей. В течение недели он приглашает их к себе по 3 обедать, причем компании не повторяются. Сколькими способами он может составить расписание обедов так, чтобы никакие два друга не встретились у него более одного раза?

19) Во скольких шестизначных числах есть 3 четные и 3 нечетные цифры, если не допускаются «шестизначные» числа, начинающиеся с нуля?

20) Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 153?

21) Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?

22) Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

23) Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

24) Клетки шахматной доски раскрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в каждом вертикальном ряду не встречаются подряд две клетки одного цвета. Сколькими способами возможна такая раскраска?

25) Из колоды в 52 карты двое выбирают по 4 карты каждый. Сколько возможно различных выборов?

26) Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Абакан» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке?

27) Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар перчаток по правой и левой перчатке так, чтобы ни один не получил пары?

28) Сколько неотрицательных целых чисел, меньших 1 000 000, содержат все цифры 1, 2, 3, 4?

29) Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву?

1.4. Методы изучения комбинаторных объектов

В комбинаторном анализе существует целый ряд подходов к изучению комбинаторных объектов и чисел. Теоретико-множественный подход связан с вычислением мощностей (числа элементов) конечных подмножеств. Алгебраический подход основан на использовании вспомогательных просто получаемых комбинаторных тождеств для нахождения интересующих комбинаторных чисел. Метод производящих функций используется для перечисления комбинаторных чисел и установления комбинаторных тождеств.

1.4.1 Теоретико–множественный подход.

Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ система подмножеств конечного множества A. Обозначим через H_i $(i = 0, \ldots, n)$ совокупность всех элементов из множества A, принадлежащих ровно i множествам системы, а через G_i $(i = 0, \ldots, n)$ – совокупность всех элементов из множества A, принадлежащих не менее чем i множествам системы. Очевидно, что $A = H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_n$, $H_i \cap H_j = \varnothing \ (i \neq j)$ и $G_i = H_i \cup H_{i+1} \cup \ldots \cup H_n$, $G_j \subset G_i$ $(j = i, \ldots, n)$. Возникает вопрос, как найти $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$, а также $|H_i|$, $|G_i|$ и $|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)|$. Для решения этих вопросов необходима дополнительная информация. Например, если известны мощности множеств $A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n}$, где $A_i^{\sigma_i} = \begin{cases} A_i, \text{ } если\ \sigma_i = 1 \\ A \setminus A_i, \text{ } если\ \sigma_i = 0 \end{cases}$, то по аналогии с СДНФ

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq (0, \ldots, 0)} \left| A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n} \right|.$$

Теорема («принцип включения-исключения»).

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| = |A| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \ldots +$$

$$+ (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Доказательство. Пусть $a \in A$ и входит ровно в $0<k$ множеств. Тогда $a \notin A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ и учитывается в слагаемом $|A|$ один раз, в слагаемом $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ – C_k^1 раз, в $\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$ – C_k^2 раз, и т.д. Таким образом, в правой части элемент a считается $C_k^0 - C_k^1 + \ldots + (-1)^k C_k^k$ число раз, это число по свойству **6** числа сочетаний равно нулю.

Если $a \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, то оно один раз считается как в левой так и в правой частях равенства.

Пример применения принципа «включения-исключения».

Пусть A – множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а A_i – множество всех булевых функций из A существенно независящих от переменной x_i. Очевидно, мощности множеств $|A| = 2^{2^n}$ и $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = 2^{2^{n-k}}$. Вычислим число $\tilde{p}_n$ функций из A, существенно зависящих от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\tilde{p}_n = |A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| = 2^{2^n} - C_n^1 2^{2^{n-1}} + C_n^2 2^{2^{n-2}} - \ldots + (-1)^n C_n^n 2^{n-n}.$$

Например для $n=1$ $\tilde{p}_1 = 2$, а для $n=2$

$$\tilde{p}_2 = |A \setminus (A_1 \cup A_2)| = 2^{2^2} - C_2^1 2^2 + C_2^2 2^{2^0} = 16 - 8 + 2 = 10.$$

Формулы для вычисления $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ и $|H_i|$, $|G_i|$ будут выведены из рассматриваемой ниже теоремы обращения.

1.4.2 Алгебраический подход.

Теорема («формула обращения») Если для любых n и $k \le n$ $a_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{n,k,i} b_{n,i}$ и при $k \le n$, $r \le n$ $\sum_{i=0}^{n} \mu_{n,k,i} \lambda_{n,i,r} = \begin{cases} 1 & при\ r = k, \\ 0 & при\ r \ne k, \end{cases}$ то при $k \le n$ $b_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} \mu_{n,k,i} a_{n,i}$.

Доказательство. $\sum_{i=0}^{n} \mu_{n,k,i} a_{n,i} = \sum_{i=0}^{n} \mu_{n,k,i} \sum_{r=0}^{n} \lambda_{n,i,r} b_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \mu_{n,k,i} \lambda_{n,i,r} \right) b_{n,r} = b_{n,k}$

.

Примеры формул обращения:

1. Пусть $\lambda_{n,k,i} = C_k^i$, $\mu_{n,k,i} = (-1)^{k-i} C_k^i$, тогда при $k \le n$ и $r \le n$ $\sum_{i=0}^{n} \mu_{n,k,i} \lambda_{n,i,r} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k-i} C_k^i C_i^r = \sum_{i=r}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i C_i^r =$

$$=(-1)^{k-r}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i-r}C_k^i C_i^r=\begin{cases}1 \text{ при } r=k,\\ 0 \text{ при } r\neq k\end{cases}$$ в силу следствия б) утверждения 6 свойства 6 чисел сочетаний.

Формула обращения здесь принимает вид

$a_{n,k}=\sum_{i=`0}^{k}C_k^i b_{n,i}$, $b_{n,k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i a_{n,i}$, а число n является параметром.

2. Пусть $\lambda_{n,k,i}=C_i^k$, $\mu_{n,k,i}=(-1)^{i-k}C_i^k$, тогда при $k\le n,\ r\le n$ $\sum_{i=0}^{n}\mu_{n,k,i}\lambda_{n,i,r}=$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-k}C_i^k C_r^i=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i-k}C_r^i C_i^k=\begin{cases}1 \text{ при } r=k,\\ 0 \text{ при } r\neq k\end{cases}.$$

Формула обращения здесь принимает вид

$$a_{n,k}=\sum_{i=`k}^{n}C_i^k b_{n,i},\quad b_{n,k}=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_i^k a_{n,i},$$

а число n является пределом суммирования.

3. Пусть $\lambda_{n,k,i}=C_{n-k}^{i-k}$, $\mu_{n,k,i}=(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}$ при $i\ge k$ и $\lambda_{n,k,i}=\mu_{n,k,i}=0$ при $i<k$. Тогда при $k\le n,\ r\le n$

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_{n,k,i}\lambda_{n,i,r}=\sum_{i=k}^{r}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}C_{n-i}^{r-i}=\sum_{i=k}^{r}(-1)^{i-k}C_{n-i}^{n-r}C_{n-k}^{n-i}=\begin{cases}1 \text{ при } r=k,\\ 0 \text{ при } r\neq k.\end{cases}$$

Формула обращения здесь принимает вид

$$a_{n,k}=\sum_{i=`k}^{k}C_{n-k}^{i-k}b_{n,i},\quad b_{n,k}=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}a_{n,i}.$$

Примеры (применения формул обращения).

1) Подсчёт числа $\tilde{p}_n$ булевых функций, существенно зависящих от данных n переменных. Для числа всех булевых функций от n переменных очевидно выполнено равенство $2^{2^n}=C_n^n\tilde{p}_n+C_n^{n-1}\tilde{p}_{n-1}+\ldots+C_n^0\tilde{p}_0$. Применяя формулу обращения из примера **1,** получим $\tilde{p}_n=C_n^n 2^{2^n}-C_n^{n-1}2^{2^{n-1}}+\ldots+(-1)^n C_n^0 2^{2^0}$.

2) Получение явной формулы для чисел Стирлинга второго рода $\Phi(n,k)$ и чисел Белла $\Phi(n)$. Число $\left|E_k^n\right|$ вершин n-мерного куба размера n равное k^n можно представить следующим образом. Выберем r значений $k_1,k_2,\ldots,k_r$ из множества $\{0,1,\ldots,k-1\}$. Число различных таких наборов значений равно C_k^r. Возьмём произвольное разбиение множества $E=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ на r частей, число таких разбиений равно $\Phi(n,r)$. Если нумеровать элементы одного из подмножества разбиения числами k_1, другого – числами k_2 и т.д. (всего $r!$ способов нумерации), то получим всевозможные наборы длины n, содержащие ровно r значений $k_1,k_2,\ldots,k_r$. При этом каждый набор будет построен ровно один раз. Поэтому

$$k^n=\sum_{r=1}^{k} C_k^r r!\Phi(n,r)=C_k^k k!\Phi(n,k)+C_k^{k-1}(k-1)!\Phi(n,k-1)+\ldots+C_k^0 0!\Phi(n,0).$$

Применяя формулу обращения из примера 1, получаем

$$k!\,\Phi(n,k)=C_k^k k^n-C_n^{k-1}(k-1)^n+\ldots+(-1)^k C_k^0 0^n$$

откуда

$$\Phi(n,k)=\frac{C_k^k k^n-C_n^{k-1}(k-1)^n+\ldots+(-1)^k C_k^0 0^n}{k!}=\frac{k^n}{k!}-\frac{(k-1)^n}{1!(k-1)!}+\frac{(k-2)^n}{2!(k-2)!}+$$

$$+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1^n}{(k-1)!1!}.$$

Наконец, явную формулу для чисел Белла можно записать в виде $\Phi(n)=\sum_{k=0}^{n}\Phi(n,k)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i\frac{(k-i)^n}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{(k-i)^n}{i!(k-i)!}$. Если изменить параметр суммирования k на $j=k-i$, то получим

$$\Phi(n)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\frac{j^n}{i!j!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{j^n}{j!}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\frac{1}{i!}=\frac{n^n}{n!}+\left(1-\frac{1}{1!}\right)\frac{(n-1)^n}{(n-1)!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)\frac{(n-2)^n}{(n-2)!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)$$ или

$$\Phi(n)=\frac{n^n}{n!}+\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)\frac{(n-2)^n}{(n-2)!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right).$$

3) Вывод формулы включения-исключения и её обобщений.

Обозначим

$$g_0=|A|,\ g_1=\sum_{i=1}^{n}|A_i|,\ldots,\ g_k=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k\le n}}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|,\ldots,g_n=|A_1\cap\ldots\cap A_n| \text{ и } h_i=|H_i|$$

(i=0,…,n). Напомним, что $|A|=\sum_{i=1}^{n}|H_i|=\sum_{i=1}^{n}h_i$ и каждого элемент a $a\in H_i$ имеется C_k^i возможностей войти в множество вида $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}$ $(1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n)$. Поэтому

$$g_0=|A|=C_0^0h_0+C_1^0h_1+\ldots+C_n^0h_n;\qquad g_1=\sum_{i=0}^{n}|A_i|=C_1^1h_1+\ldots+C_n^1h_n;$$

…;

$$g_k=\sum_{1\le i_1<\ldots i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|=C_k^kh_k+\ldots+C_n^kh_n;$$

…;

$$g_n=|A_1\cap\ldots\cap A_n|=C_n^nh_n.$$

Применяя формулы обращения из примера 2, получаем $h_k=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_i^k g_i$, из которой при k=0 следует формула обращения $h_0=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i$.

4) Подсчёт числа неизбыточных (тупиковых) покрытий множества $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ его подмножествами $A_1,A_2,\ldots,A_k$ таким, что $A=A_1\cup\ldots\cup A_k$.

Определение 13. Покрытие называют тупиковым, если при выбрасывании любого из его подмножеств A_i оставшаяся система подмножеств не образует покрытия, т.е. $A\neq A_1\cup\ldots\cup A_{i-1}\cup A_{i+1}\cup\ldots\cup A_k$.

В тупиковом покрытии, очевидно, не встречаются двух одинаковых множеств. Каждому покрытию можно поставить в соответствие матрицу из нулей и единиц размером $k\times n$, в которой столбцы соответствуют элементам множества *A,* а строки – подмножествам $A_1,A_2,\ldots,A_k$. В ней элемент $a_{ij}=\begin{cases}1,\ \textit{если}\ \ a_j\in A_i,\\ 0,\ \textit{если}\ \ a_j\notin A_i.\end{cases}$ Эта матрица не содержит нулевых столбцов, поэтому каждый её столбец может быть представлен 2^k-1 вариантами. Таким образом, при фиксированных k и n число таких матриц равно $\left(2^k-1\right)^n$.

Обозначим через $A(i_1,\ldots,i_s)$ подмножество из указанных матриц таких, что в каждой из них, если удалить одну из строк $i_1,i_2,\ldots,i_s$, то получим матрицу, соответствующую покрытию множества *A*. Через $B(i_1,\ldots,i_s)$ обозначим такое подмножество множества $A(i_1,\ldots,i_s)$, в котором невозможно удаление никакой другой строки, кроме $i_1,i_2,\ldots,i_s$ с сохранением свойства покрытия.

Так как у матриц из $A(i_1,\ldots,i_s)$ по определению нет столбцов содержащих в строках $i_1,i_2,\ldots,i_s$ ровно одну единицу, то $\left|A(i_1,\ldots,i_s)\right|=\left(2^k-s-1\right)^n$. Это число зависит от числа строк *s*, но не зависят от выбора номеров строк $i_1,i_2,\ldots,i_s$. Обозначим его через $a_{k\,s}^n$. Аналогично число $\left|B(i_1,\ldots,i_s)\right|$ тоже не зависит от выбора номером строк, а только от их количества, обозначим его через $b_{k\,s}^n$.

Пусть матрица $(a_{i\,j})\in A(i_1,\ldots,i_s)$. Рассмотрим в ней все номера строк, которые допускают удаление (сюда, в частности, входят номера $i_1,i_2,\ldots,i_s$). Пусть $i_1,\ldots,i_s,i_{s+1},\ldots,i_m$ – их номера. Тогда $(a_{i\,j})\in B(i_1,\ldots,i_s,i_{s+1},\ldots,i_m)$. Отсюда $a_{k,s}^n=\sum_{r=0}^{k-s}C_{k-s}^r\cdot b_{k,s+r}^n=\sum_{m=s}^{k}C_{k-s}^{m-s}\cdot b_{k,m}^n$, и из формулы обращения примера три имеем

$b_{k,s}^{n}=\sum_{m=s}^{k}(-1)^{m-s}C_{k-s}^{m-s}\cdot a_{k,m}^{n}=\sum_{m=s}^{k}(-1)^{m-s}C_{k-s}^{m-s}\cdot\left(2^{k}-m-1\right)^{n}$. В частности при $s=0$ $b_{k,0}^{n}=\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_{k}^{m}\cdot\left(2^{k}-m-1\right)^{n}$.

Наконец, число неупорядоченных тупиковых покрытий длины k $\tilde{b}_{k,0}^{n}=\frac{b_{k,0}^{n}}{k!}=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_{k}^{m}\left(2^{k}-m-1\right)^{n}$ и для числа всех тупиковых покрытий $\tilde{b}(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m}C_{k}^{m}\left(2^{k}-m-1\right)^{n}$.

5) Выводы рекуррентных соотношений.

Рассмотрим комбинаторное число $S_m(n)=1^m+2^m+\ldots+n^m$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, запишем

$$(n+1)^m=n^m+C_m^1n^{m-1}+C_m^2n^{m-2}+\ldots+C_n^{m-1}n+C_m^m,$$
$$((n-1)+1)^m=(n-1)^m+C_m^1(n-1)^{m-1}+C_m^2(n-1)^{m-2}+\ldots+C_n^{m-1}(n-1)+C_m^m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1+1)^m=1^m+C_m^1 1^{m-1}+C_m^2 1^{m-2}+\ldots+C_n^{m-1}1+C_m^m,$$
$$(0+1)^m=0^m+C_m^1 0^{m-1}+C_m^2 0^{m-2}+\ldots+C_n^{m-1}0+C_m^m=1$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$S_m(n+1)=1+S_m(n)+C_m^1S_{m-1}(n)+C_m^2S_{m-2}(n)+\ldots+C_m^{m-1}S_1(n)+C_m^mS_0(n).$$

Вычитая теперь из обеих частей равенства $S_m(n)$, получим рекуррентную формулу

$(n+1)^m=1+S_m(n)+C_m^1S_{m-1}(n)+C_m^2S_{m-2}(n)+\ldots+C_m^{m-1}S_1(n)+C_m^mS_0(n)$ в ней $S_0(n)=n$ и $S_1(n)=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

$S_m(n)$ находят по этой формуле постепенно, например, из $(n+1)^3=1+C_3^1S_2(n)+C_3^2S_1(n)+C_3^3S_0(n)$ получим

$$3S_2(n)=(n+1)^3-1-C_3^2S_1(n)-C_3^3S_0(n)=(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n=$$
$$=(n+1)\left((n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right)=(n+1)\frac{2n^2+4n+2-3n-2}{2}=(n+1)\frac{2n^2+n}{2}=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

1.4.3 Метод производящих функций.

Этот метод используется для перечисления комбинаторных чисел и установления тождеств между ними.

В нём рассматривается бесконечная последовательность комбинаторных чисел $\{a_i\}$ и последовательность функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=0,1,\dots)$. Из них составляется функциональный ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$. В области своей сходимости ряд задаёт функцию $F(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$, которую называют *производящей*.

Рассмотрим типичные примеры применения производящих функций.

1) $a_i=C_n^i$ $(i=1,\dots,n)$, $\varphi_i(x)=x^i$. Производящей функцией является бином Ньютона $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$, с её помощью установим тождество $C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$. Для этого возьмём тождество $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$. Оно эквивалентно тождеству

$\sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i x^i=\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m\right)$. Сравнивая коэффициенты при x^n

Получим $C_{2n}^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$.

2) Числа Фибоначчи задаются рекуррентными соотношениями $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ и $f_0=f_1=1$. Для получения явной формулы возьмём функции $\varphi_n(x)=x^n$ и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, который в силу $f_n\le 2^n$ $\left(f_n\le 2f_{n-1}\right)$ сходится при $x<\frac{1}{2}$ и определяет производящую функцию $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

Так как $xF(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}x^n$ и $x^2F(x)=\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^n$, то $xF(x)+x^2F(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(f_{n-1}+f_{n-2}\right)x^n=F(x)-1$ или $\left(1-x-x^2\right)F(x)=1$. Откуда получаем $F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$. Корнями квадратного трёхчлена $1-x-x^2$ являются $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Представим рациональную дробь в виде суммы простых дробей $F(x)=\frac{1}{-(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{a}{x_1-x}+\frac{b}{x_2-x}$. Числа a и b удовлетворяют системе

$\begin{cases} a+b=0, \\ a\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}+b\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=-1, \end{cases}$ поэтому $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $b=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Значит

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1-x}-\frac{1}{x_2-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}-\frac{1}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}\right).$$

Поскольку $x<\dfrac{1}{2}$, то $\left|\dfrac{x}{x_1}\right|<1$ и $\left|\dfrac{x}{x_2}\right|<1$, а $\dfrac{1}{1-\frac{x}{x_1}}$, $\dfrac{1}{1-\frac{x}{x_2}}$ – суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий. Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n-\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}}-\frac{1}{x_2^{n+1}}\right)x^n=$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-x_2)^{n+1}-(-x_1)^{n+1}\right)x^n$ здесь учитывается следующая связь между корнями $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}=-\dfrac{-2\left(1+\sqrt{5}\right)}{5-1}=-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=-x_2$.

Выражение коэффициентов ряда $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$ даёт явную формулу для вычисления чисел Фибоначчи.

Резюмируя опыт рассмотренных примеров, сформулируем основные шаги **алгоритма применения метода производящих функций:**

1. построение производящей функции с исследуемой последовательностью комбинаторных чисел;
2. составление уравнения для производящей функции с последующем его решением;
3. разложение в ряд производящей функции, получение выражения комбинаторных чисел приравниванием коэффициентов исходного ряда производящей функции и полученного в результате разложения.

1.5. Линейные рекуррентные отношения с постоянными коэффициентами.

Определение. Уравнение вида

$$a_n=F\left(n, a_{n-1}, a_{n-2},\ldots, a_{n-k}\right), \tag{РО}$$

которое позволяет вычислить все элементы последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известны первые её k элементов, называется *рекуррентным отношением (соотношением, уравнением) k-го порядка*.

Определение. Функция $a(n)$, определённая на множестве натуральных чисел, называется решением (РО), если её подстановка в (РО) является тождеством $a(n) \equiv F(n, a(n-1), a(n-2), \ldots, a(n-k))$.

Замечание 1. Часто бывает удобно считать областью определения решений множество $\mathrm{N}-m$, где $m \in \mathrm{N}$.

Определение. Рекуррентное отношение вида

$$a_n = q_1(n)a_{n-1} + q_2(n)a_{n-2} + \ldots + q_k(n)a_{n-k} + f(n) \quad \text{с} \quad f(n) \equiv 0$$

называется *линейным однородным* (ЛОРО), а с $f(n) \not\equiv 0$ – *неоднородным рекуррентным отношением* (ЛНРО) *порядка* k, если коэффициент $q_k(n)$ отличен от тождественного нуля.(ЛРО) – их общее обозначение.

Определение. Если в линейном рекуррентном отношении коэффициенты $q_1, q_2, \ldots, q_k$ не зависят от переменной n, т.е. являются постоянными вещественными числами, то соотношение называют *отношением с постоянными коэффициентами* (ЛРОсПК).

В этом разделе мы рассмотрим класс линейных рекуррентных отношений с постоянными коэффициентами, для которых известны методы выписывания их общих решений.

Замечание 2. Для поиска решений (ЛРОсПК) удобней записывать его в виде

$$a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + q_2 a_{n+k-2} + \ldots + q_k a_n = f(n)$$

Определение. Для (ЛРОсПК) $a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + q_2 a_{n+k-2} + \ldots + q_k a_n = f(n)$ соответствующее алгебраическое уравнение $r^k + q_1 r^{k-1} + q_2 r^{k-2} + \ldots + q_{k-1} r + q_k = 0$ называют характеристическим.

1.5.1 Однородные рекуррентные отношения.

Определение. Функция $a(n, C_1, C_2, \ldots, C_k)$ называется *общим решением* (ЛРОсПК) $a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + q_2 a_{n+k-2} + \ldots + q_k a_n = f(n)$ если:

1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$ она удовлетворяет (является решением) (ЛРОсПК);
2) для любой последовательности $b_0, b_1, b_2, \ldots$, являющейся решением (ЛРОсПК) найдутся такие значения $c_1, c_2, \ldots, c_k$ произвольных постоянных, что $b_n = a(n, c_1, c_2, \ldots, c_k)$.

Примеры. 1) Рассмотрим (ЛОРОсПК) первой степени $a_n = q \cdot a_{n-1}$ с коэффициентом $q \in \mathrm{R}$. Очевидно, общее решение этого рекуррентного отношения является функция $a_n = C \cdot q^{n-1}$. Действительно, во-первых при любом значении $C = \text{c}$ последовательность, которую образует эта функция $a_1 = \text{c}\cdot q^{1-1} = \text{c}$, $a_2 = \text{c}\cdot q^{2-1} = \text{c}\cdot q = q \cdot a_1$, ..., $a_n = \text{c}\cdot q^{n-1} = q \cdot \text{c}\cdot q^{n-2} = q \cdot a_{n-1}$,..., удовлетворяет рекуррентному отношению. Во-вторых, если некоторая последовательность (a_n) является решением рекуррентного отношения $a_n = q \cdot a_{n-1}$, то для $C = a_1$ $a_n = q \cdot a_{n-1} = q^2 \cdot a_{n-2} = \ldots = a_1 \cdot q^{n-1}$.

2) Теперь рассмотрим (ЛОРОсПК) второй степени $a_{n+2} + q_1 \cdot a_{n+1} + q_2 \cdot a_n = 0$. Будем по аналогии с предыдущим примером искать ненулевое решение этого отношения в виде $a_n = r^n$ с $r \neq 0$. Подставляя его в отношение $r^{n+2} + q_1 \cdot r^{n+1} + q_2 \cdot r^n = 0$ и сокращая на r^n, получим $r^2 + q_1 \cdot r + q_2 = 0$, т.е. любое решение r полученного квадратного уравнения, которое является характеристическим для рассматриваемого отношения, определяет соответствующее решение отношения $a_{n+2} + q_1 \cdot a_{n+1} + q_2 \cdot a_n = 0$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Общим решением (ЛОРОсПК) $a_{n+2} + q_1 \cdot a_{n+1} + q_2 \cdot a_n = 0$ является:

1. $C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, если его характеристическое уравнение $r^2 + q_1 \cdot r + q_2 = 0$ имеет два различных действительных корня $r_1 \neq r_2$;
2. $(C_1 \cdot n + C_2) \cdot r^n$, если r – единственный корень уравнения $r^2 + q_1 \cdot r + q_2 = 0$;
3. $\rho^n \left(C_1 \cdot \cos(n\theta) + C_2 \cdot \sin(n\theta)\right)$, если уравнение $r^2 + q_1 \cdot r + q_2 = 0$ имеет два комплексно сопряжённых корня $r_{1,2} = a \pm ib$, а $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Доказательство. Проверку первого условия определения общего решения проверим подстановкой каждой из рекуррентных функций в отношение $a_{n+2} + q_1 \cdot a_{n+1} + q_2 \cdot a_n = 0$.

1. Равенство $C_1 \cdot r_1^{n+2} + C_2 \cdot r_2^{n+2} + q_1\left(C_1 \cdot r_1^{n+1} + C_2 \cdot r_2^{n+1}\right) + q_2\left(C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n\right) = 0$ эквивалентно следующему

$$r_1^n C_1\left(r_1^2 + q_1 r_1 + q_2\right) + r_2^n C_2\left(r_2^2 + q_1 r_2 + q_2\right) = 0.$$

А последнее равенство выполнено в силу того, что r_1 и r_2 – корни уравнения $r^2 + q_1 \cdot r + q_2 = 0$.

2. $\left(C_1 \cdot (n+2) + C_2\right) \cdot r^{n+2} + q_1\left(C_1 \cdot (n+1) + C_2\right) \cdot r^{n+1} + q_2\left(C_1 \cdot n + C_2\right) \cdot r^n = 0$ эквивалентно

$$r^n\left[\left(C_1(n+2) + C_2\right)\left(r^2 + q_1 r + q_2\right) - C_1\left(q_1 r + 2q_2\right)\right] = 0.$$

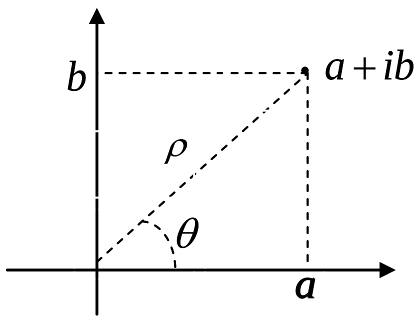
Первое слагаемое равно нулю, так как r – корень уравнения $r^2+q_1\cdot r+q_2=0$, а второе в силу теоремы Виета ($r^2=q_2$ и $2r=-q_1$).

3. Следует из 1 с учётом следующих двух свойств комплексных чисел.

Теорема Муавра. Для произвольного значения угла θ справедливо равенство $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^k=\cos\left(k\theta\right)+i\sin\left(k\theta\right)$.

Эта теорема доказывается методом математической индукции. Попробуйте это сделать самостоятельно.

Кроме того любое комплексное число $a+ib$ можно представить в виде $a+ib=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ (см. рисунок).



Теперь проверим второе свойство общего решения. Предположим, что последовательность $b_0, b_1, b_2,\ldots$ является решением (ЛОРОсПК) $a_{n+2}+q_1\cdot a_{n+1}+q_2\cdot a_n=0$. Тогда:

1. система $\begin{cases} b_0=C_1r_1^0+C_2r_2^0=C_1+C_2, \\ b_1=C_1r_1^1+C_2r_2^1=C_1r_1+C_2r_2 \end{cases}$ с определителем $r_2-r_1\neq 0$ имеет единственное решение $C_1=\dfrac{b_1-b_0r_2}{r_1-r_2}$, $C_2=\dfrac{b_1-b_0r_1}{r_2-r_1}$;

2. система $\begin{cases} b_0=\left(C_1\cdot 0+C_2\right)r^0=C_2, \\ b_1=\left(C_1\cdot 1+C_2\right)r^1=\left(C_1+C_2\right)r \end{cases}$ с ненулевым определителем, равным единице, имеет единственное решение $C_1=\dfrac{b_1}{r}-b_0$, $C_2=b_0$;

3. следует из 1.

Примеры. 1) Найти решение рекуррентного отношения для чисел Фибоначчи $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$, которые удовлетворяют начальным условиям $a_0=1$, $a_1=1$.

<u>Решение.</u> Выпишем соответствующее характеристическое уравнение $r^2-r-1=0$ и найдём его корни $r_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Выписываем общее решение

рекуррентного отношения, согласно утверждению $a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Найдём значения $C_1,\ C_2$ такие, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям.

$$\begin{cases} a_0 = 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2, \\ a_1 = 1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

<u>Ответ.</u> $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

2) Найти решение рекуррентного отношения $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $a_0 = 2$, $a_1 = 6$.

<u>Решение.</u> Выпишем соответствующее характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 4 = 0$, его единственный корень $r = 2$. Выписываем общее решение рекуррентного отношения, согласно утверждению $a_n = (C_1 \cdot n + C_2)2^n$. Найдём значения $C_1,\ C_2$ такие, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям.

$$\begin{cases} a_0 = 2 = (C_1 \cdot 0 + C_2)2^0 = C_2 \\ a_1 = 6 = (C_1 \cdot 1 + C_2)2^1 = 2C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

<u>Ответ.</u> $a_n = (n+2)2^n$.

3) Найти решение рекуррентного отношения $a_{n+2} - 2\sqrt{2}a_{n+1} + 4a_n = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

<u>Решение.</u> Выпишем соответствующее характеристическое уравнение $r^2 - 2\sqrt{2}r + 4 = 0$ и найдём его корни $r_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-16}}{2} = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ и $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Выписываем общее решение рекуррентного отношения, согласно утверждению $a_n = 2^n\left(C_1\cos\frac{\pi n}{4} + C_2\sin\frac{\pi n}{4}\right)$. Найдём значения $C_1,\ C_2$ такие, чтобы решение удовлетворяло начальным условиям.

$$\begin{cases} a_0 = 1 = 2^0\left(C_1\cos\frac{\pi 0}{4} + C_2\sin\frac{\pi 0}{4}\right) = C_1 \\ a_1 = 2 = 2^1\left(C_1\cos\frac{\pi 1}{4} + C_2\sin\frac{\pi 1}{4}\right) = 2\left(C_1\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}.$$

Ответ. $a_n = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} + \left(\sqrt{2}-1\right)\sin\frac{\pi n}{4}\right).$

Для (ЛОРОсПК) произвольной степени справедлива следующая теорема.

Теорема (об общем решении (ЛОРОсПК)). Пусть r_i – корень кратности s_i характеристического уравнения $r^k + q_1 r^{k-1} + q_2 r^{k-2} + \ldots + q_{k-1} r + q_k = 0$ (ЛОРОсПК) $a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + q_k \cdot a_n = 0$. Тогда выражение

$r_i^n \cdot \left(C_{i1} + C_{i2} n + C_{i3} n^2 \ldots + C_{i s_i} n^{s_i - 1}\right)$ – является слагаемым в общем решении (ЛОРОсПК), и общее решение (ЛОРОсПК) состоит из слагаемых только такого рода.

1.5.2 Неоднородные рекуррентные отношения.

Теорема об общем решении (ЛНРОсПК). Если $a\left(n, C_1, C_2, \ldots, C_k\right)$ общее решение (ЛОРОсПК) $a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + q_k \cdot a_n = 0$ и рекуррентная функция $b(n)$ является решением (ЛНРОсПК) $a_{n+k} + q_1 \cdot a_{n+k-1} + q_2 \cdot a_{n+k-2} + \ldots + q_k \cdot a_n = f(n)$, то сумма $a\left(n, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + b(n) = a_n^{oo} + a_n^{чн}$ является общим решением данного (ЛНРОсПК).

Доказательство. Из условия

$$a\left(n+k, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + q_1 \cdot a\left(n+k-1, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + q_2 \cdot a\left(n+k-2, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + \ldots$$
$$+ q_k \cdot a\left(n, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) = 0$$

и $b(n+k) + q_1 \cdot b(n+k-1) + q_2 \cdot b(n+k-2) + \ldots + q_k \cdot b(n) = f(n)$, складывая обе части равенств, получим

$$\left(a\left(n+k, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + b(n+k)\right) + q_1 \cdot \left(a\left(n+k-1, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + b(n+k-1)\right) + \ldots$$
$$+ q_k \cdot \left(a\left(n, C_1, C_2, \ldots, C_k\right) + b(n)\right) = f(n).$$

Таким образом, первое условие определения общего решения выполнено.

Если $\bar{b}(n)$ – произвольное решение (ЛНРОсПК), то, как нетрудно видеть, разность $\bar{b}(n) - b(n)$ будет решением (ЛОРОсПК). Поэтому для неё найдутся значения $c_1, c_2, \ldots, c_k$ произвольных постоянных такие, что $\bar{b}(n) - b(n) = a\left(n, c_1, c_2, \ldots, c_k\right)$, т.е $\bar{b}(n) = a\left(n, c_1, c_2, \ldots, c_k\right) + b(n)$ и второе условие определения общего решения тоже выполнено.

Утверждение о виде частного решения (ЛНРОсПК). Если в (ЛНРОсПК) $f(n)$ имеет вид:

1) $f(n) = P(n)\alpha^n$, то частное решение может быть найдено в виде $b_n = n^{s_i} \cdot Q(n)\alpha^n$, где s_i – кратность корня $r_i = \alpha$ характеристического уравнения, а

$Q(n)$ – многочлены переменной n с неопределёнными коэффициентами имеющий степень, совпадающую со степенью многочлена $P(n)$.

2) $f(n)=\alpha^n\left(P_1(n)\cos(\beta n)+P_2(n)\sin(\beta n)\right)$, то частное решение может быть найдено в виде $b_n=\alpha^n\cdot n^{s_i}\cdot\left(Q_1(n)\cos(\beta n)+Q_2(n)\sin(\beta n)\right)$, где s_i – кратность корня $r_i=\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$ характеристического уравнения, а $Q_1(n)$, $Q_2(n)$ – многочлены переменной n с неопределёнными коэффициентами имеющие степень, совпадающую с максимальной из степеней многочленов $P_1(n)$, $P_2(n)$.

Замечания. 1. Коэффициенты $Q(n)$, $Q_1(n)$, $Q_2(n)$ находят подстановкой вида b_n в (ЛНРОсПК). 2. Если $f(n)=f_1(n)+f_2(n)+\ldots+f_l(n)$, и каждое слагаемое в этой сумме имеет один из видов утверждения, то сначала нужно найти частные решения для каждого слагаемого, а затем сложив их получить частное решение (ЛНРОсПК).

Примеры.

1. Найти общее решение рекуррентного отношения $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}+3\cdot 2^n$.

Решение. Выпишем характеристическое отношение $r^2-5r+4=0$, его корни – $r=1$ и $r=4$. Общее решение однородного отношения $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$ – $a_n^{oo}=C_1+C_2 4^n$. Теперь определим вид частного решения неоднородного отношения по $f(n)=3\cdot 2^n$ – $a_n^{чн}=k\cdot 2^n$. Подставим в отношение $k2^n=5k2^{n-1}-4k2^{n-2}+3\cdot 2^n$ и разделим на 2^{n-2}. $k2^2=5k2-4k+3\cdot 2^2$. Получаем $2k=-12$, откуда $k=-6$. Нашли $a_n^{чн}=-6\cdot 2^n$.

Ответ. $a_n^{он}=C_1+C_2 4^n-6\cdot 2^n$ – общее решение отношения $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}+3\cdot 2^n$.

2. Решить рекуррентное отношение $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}+3\cdot 2^n$.

Решение. У характеристического уравнения $r^2-4r+4=0$ имеется единственный корень $r=2$ кратности $s=2$. $a_n^{oo}=(C_1+C_2 n)2^n$ – общее решение однородного отношения $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}$. $a_n^{чн}=k\cdot n^2 2^n$ – вид частного решения неоднородного отношения с $f(n)=3\cdot 2^n$. Подставляя $a_n^{чн}$ в неоднородное отношение и деля его на 2^{n-2}, получим

$$kn^2 2^2=4k(n-1)^2 2-4k(n-2)^2+3\cdot 2^2 \Rightarrow 4kn^2=8kn^2-16kn+8k-4kn^2+16kn-16k+12$$

или $8k=12$, а $k=1{,}5$.

Ответ. $a_n^{он}=(C_1+C_2 n)2^n+1{,}5\cdot n^2\cdot 2^n$ – общее решение неоднородного отношения.

3. Решить рекуррентное отношение $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+6\cdot 3^n$.

Решение. У характеристического уравнения $r^2-5r+6=0$ есть два различных корня $r=2$ и $r=3$, поэтому $a_n^{oo}=C_1 2^n+C_2 3^n$ – общее решение однородного отношения. Определим вид $a_n^{чн} = k \cdot n \cdot 3^n$ частного решения неоднородного отношения с $f(n) = 6 \cdot 3^n$. Подставляя $a_n^{чн}$ в неоднородное отношение и деля его на 3^{n-2}, получим

$$kn3^2 = 5k(n-1)3 - 6k(n-2) + 6 \cdot 3^2 \Rightarrow 9kn = 15kn - 15k - 6kn + 12k + 54$$

или $3k = 54$, а $k = 18$.

Ответ. $a_n^{он} = C_1 2^n + C_2 3^n + 18 \cdot n \cdot 2^n$ – общее решение неоднородного отношения.

4. Найти решение рекуррентного отношения $a_n = a_{n-1} + n$ с начальным условием $a_1 = 1$.

Решение. Легко видеть, что $a_n^{oo} = C$ – общее решение однородного отношения, так как корень характеристического уравнения равен 1. $f(n) = n = n \cdot 1^n$, поэтому частное решение неоднородного отношения будем искать в виде $a_n^{чн} = n(k_1 + k_2 \cdot n)$. Подставим $a_n^{чн}$ в неоднородное отношение и получим

$$k_1 n + k_2 n^2 = k_1 n - k_1 + k_2 n^2 - 2k_2 n + k_2 + n \Rightarrow -k - 2k_2 n + k_2 + n = 0,$$

откуда $k_1 = k_2 = 0{,}5$.

$a_n^{он} = C + 0{,}5n(1+n)$ – общее решение неоднородного отношения. Найдём $C = 0$ из начального условия $1 = C + 0{,}5(1+1)$

Ответ. $a_n = 0{,}5n(1+n)$ – искомое решение неоднородного отношения.

5. Найти общее решение рекуррентного отношения $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3\sin\frac{n\pi}{2}$.

Решение. Легко найти общее решение однородного отношения $a_n^{oo} = C_1 + C_2 2^n$. Частное решение неоднородного отношения будем искать в виде $a_n^{чн} = k_1 \cos\frac{n\pi}{2} + k_2 \sin\frac{n\pi}{2}$. Подставим его в исходное отношение

$$k_1 \cos\frac{n\pi}{2} + k_2 \sin\frac{n\pi}{2} = 3k_1 \cos\frac{(n-1)\pi}{2} + 3k_2 \sin\frac{(n-1)\pi}{2} -$$

$$- 2k_1 \cos\frac{(n-2)\pi}{2} - 2k_2 \sin\frac{(n-2)\pi}{2} + 3\sin\frac{n\pi}{2}$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos\frac{(n-1)\pi}{2} = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} = -\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{2} = \cos\frac{n\pi}{2}\cos\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\pi = -\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$\sin\frac{(n-2)\pi}{2} = \sin\frac{n\pi}{2}\cos\pi - \sin\pi\cos\frac{n\pi}{2} = -\sin\frac{n\pi}{2}$$

получим

$$k_1\cos\frac{n\pi}{2}+k_2\sin\frac{n\pi}{2}=3k_1\sin\frac{n\pi}{2}-3k_2\cos\frac{n\pi}{2}+2k_1\cos\frac{n\pi}{2}+2k_2\sin\frac{n\pi}{2}+3\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Из последнего равенства, поскольку оно должно выполняться при любых натуральных n, получаем следующую систему уравнений $\begin{cases}k_1=3k_2\\ -k_2-3k_1=3\end{cases}$ с решением $k_1=-0{,}9$ и $k_2=-0{,}3$.

Ответ. Итак, $a_n^{он}=C_1+C_2 2^n-0{,}9\cos\frac{n\pi}{2}-0.3\sin\frac{n\pi}{2}$ – искомое решение.

6. Найти общее решение отношения $a_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}$.

Решение. Пара комплексно сопряжённых чисел $r=1\pm i$ являются корнями характеристического уравнения $r^2-2r+2=0$. Вычислим $\rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ и $\theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$. Поэтому $a_n^{oo}=C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}$ общее решение.

Упражнения.

1. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n=2a_{n-1}+5$; **б)** $a_n=-3a_{n-1}+n$;

в) $a_n=-a_{n-1}+12a_{n-2}+2^n$; **г)** $a_n=-3a_{n-1}-a_{n-2}+3^n$;

д) $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}+n^2$.

2. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n=-2a_{n-1}+n^2$; **б)** $a_n=4a_{n-1}+4^n$;

в) $a_n=6a_{n-1}+9a_{n-2}+(-2)^n$; **г)** $a_n=-9a_{n-2}+3^n$;

д) $a_n=-4a_{n-1}-2a_{n-2}+5$.

3. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n=2a_{n-1}+2^n$; **б)** $a_n=-6a_{n-1}-9a_{n-2}+(-3)^n$;

в) $a_n=3_{n-1}-2a_{n-2}+5$; **г)** $a_n=a_{n-1}+6a_{n-2}+3^n$;

д) $a_n=2\sqrt{3}a_{n-1}-4a_{n-2}+3$.

4. Найдите общее решение для приведенных ниже рекуррентных отношений:

а) $a_n=a_{n-2}+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; **б)** $a_n=-a_{n-2}+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;

в) $a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}+3^n$; **г)** $a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}+2^n$;

д) $a_n=-a_{n-3}+n$.

5. Найдите приведенные ниже суммы, используя рекуррентные отношения:

а) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$; Используйте соотношение $a_n=a_{n-1}+n^2$.

б) $1+4+7+\cdots+3n-2$; Используйте соотношение $a_n=a_{n-1}+3n-2$.

в) $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + 2^n$.

г) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1)$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n \cdot (n+1)$.

6. Найдите приведенные ниже суммы, используя рекуррентные отношения:

а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n^3$.

б) $1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + n^2 \cdot (n+1)$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n^2 \cdot (n+1)$.

в) $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{(n-1)}$;
Используйте соотношение
$a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^{(n-1)}$.