Упражнение 1. Формализовать и проверить.

1. Неверно, что существует большее 0 число x такое, что для всех чисел a меньших нуля, $ax > 0$. Существует число y такое, что для всех отрицательных чисел a $ay > 0$. Следовательно, существует число не большее 0.

2. Любая функции f является возрастающей в том и только в том случае, когда для любых $x_1 < x_2$ из области определения f выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Существует число y, принадлежащее области определения функции g и такое, что $0 < y$ и $\neg g(0) < g(y)$. Следовательно, 0 не принадлежит области определения g, или g не является возрастающей.

3. Неверно, что найдётся такое вещественное число x, для которого при всех натуральных n $xn < \pi n$ и $x \geq \pi$. Неравенство $xn < \pi n$ для некоторых вещественных чисел x выполнено при всех натуральных n. Следовательно, существует вещественное число меньшее π.

4. Неверно, что существует вещественное меньшее 0 число x такое, что для всех натуральных чисел n $xn > 0$. Существует вещественное число y такое, что для всех натуральных n $yn > 0$. Следовательно, существует вещественное число не меньшее 0.

5. Для любого натурального числа справедливо, что из кратности его квадрата четырём вытекает кратность самого числа двум. Не все числа кратны двум. Следовательно, существует число, которое либо не является натуральным, либо его квадрат не кратен четырём.

6. Все натуральные числа положительны. Для любого вещественного числа x верно, что если оно не является положительным, то неравенство $x > 0$ для него не может быть выполнено. Значит, если найдётся не положительное вещественное число, то найдётся вещественное число, которое не является натуральным.

7. Не у всех чисел их квадрат кратен четырём. Для любого натурального числа кратного двум верно, что его квадрат кратен четырём. Следовательно, существует число, которое либо не является натуральным, либо не кратно двум.

8. Не существует вещественного числа по модулю меньшего 1 такого, что его квадрат без 1 является неотрицательным числом. Не существует числа x такого, что $x^2 - 1 < 0$. Значит, либо существует число, не являющееся вещественным, либо все числа по модулю больше 1.

Упражнение 2. Проверить противоречивость списка предикатов.

1. $\forall\ x: x \vdots 4\ \ \neg x > 10 \rightarrow \exists\ y: \neg y \vdots 2\ \ y \vdots 4$, $\neg\exists\ x: x \vdots 4\ \ x \vdots 2 \rightarrow x > 10 \models$;
2. $\forall\ x: x \in \mathrm{A}\ \ x \leq 10 \rightarrow \exists\ y: \neg y \in \mathrm{B}\ \ y \in A$, $\neg\exists\ x: x \in A\ \ x \in B \rightarrow \neg x \leq 10 \models$;
3. $\exists\ x: x \in \mathrm{R}\ \ x > 5 \vee \exists\ n: n \in \mathrm{N}\ \ n < 5$, $\forall\ y: y \in \mathrm{R} \vee y<5\ \ \neg y > 5 \wedge \neg y \in N \models$;
4. $\exists\ x: x \in \mathrm{R}\ \ x \leq a \vee \exists\ n: n \in \mathrm{N}\ \ n \geq a$, $\forall\ y: y \in \mathrm{R} \vee y \geq a\ \ \neg y \leq a \wedge \neg y \in N \models$;
5. $\forall\ x: x \in \mathrm{R} \wedge x < -5\ \ \neg x > 5 \wedge \neg x \in \mathrm{N}$, $\exists\ z: x \in \mathrm{R}\ \ z < -5 \wedge z > 5 \vee$
   $\vee \exists\ n: n \in \mathrm{N}\ \ n < -5 \wedge n \in \mathrm{R} \models$;
6. $\exists\ x: x \in \mathrm{N}\ \ x \leq a \vee \exists\ n: n \in \mathrm{N}\ \ n \geq a$, $\forall\ y: y \in \mathrm{R} \vee y \geq a\ \ \neg y \leq a \wedge \neg y \in N \models$.

Упражнение 3. Является ли предикат тавтологией.

1. $\models \exists(x : x \in \mathbf{R})\left[x^2 > x \wedge x > 0 \rightarrow x > 1\right] \vee \left(\neg\exists(x : x \in \mathbf{R})[x > 1] \wedge \forall(x : x \in \mathbf{R})\left[x^2 > x \wedge x > 0\right]\right)$;

2. $\models \left(\neg\exists(x : x \in \mathbf{N})[x < 1] \wedge \forall(x : x \in \mathbf{R} \wedge x > 0)\left[x^2 \geq x \vee x < 1\right]\right) \vee \exists(x : x \in \mathbf{R} \vee x < 1)\left[x^2 \geq x \wedge x > 0 \rightarrow x \in \mathbf{N}\right]$;

3. $\models \neg\exists\ x: x \in A\ \ x > 1 \wedge \forall\ x: x > 1\ \left[x^2 > x \wedge x > 0\right] \vee \exists\ x: x \in \mathrm{R}\ \left[x^2 > x \wedge x > 0 \rightarrow x \in A\right]$.

Упражнение 3. Проверить, является ли заключение следствием посылок в логике предикатов, предварительно упростив, если это возможно, входящие в рассуждение формулы с помощью теорем.

1. $\neg\exists\ x:\ x>0\ \forall\ a<0\ \ a\cdot x>0$, $\exists\ y\ \forall\ a<0\ \ a\cdot y>0\ \models\exists\ x\ \ \neg x>0$;

2. $\forall\ T:\ \mathrm{T}>0\left[P\ T\ \leftrightarrow\forall\ x: D\ x\ \ \left[D\ x+T\ \wedge R\ x+T\ \right]\right]$,

$$\exists\ y: D\ y\ \wedge D\ y+\pi\ \ \left[\neg R\ y+\pi\ \right]\models\neg P\ \pi\ \vee\neg\pi>0;$$

3. $\forall\ n: n\in\mathrm{N}\ \ n>0$, $\forall\ x: x\in\mathrm{R}\ \ x\le 0\to\neg x<0\ \models$

$$\models\exists\ x: x\in\mathrm{R}\ \ x\le 0\ \to\exists\ x: x\in\mathrm{R}\ \ \neg x\in\mathrm{N}\ ;$$

4. $\neg\exists\ x: x\in\mathrm{R}\left[x^2-1\ge 0\wedge x\in\ -1;\ 1\right]$, $\neg\exists\ x\left[\neg x^2-1\ge 0\right]\models$

$$\models\forall\ x\left[\neg x\in\ -1;\ 1\right]\vee\exists\ x\ \ \neg x\in\mathrm{R}\ ;$$

5. $\neg\exists\ x:\ x\in\mathrm{Z}\left[x^2\le 10\wedge\neg x\in\ -3;\ 3\right]$, $\neg\exists\ x\left[\neg x^2\le 10\right]\models$

$$\models\forall\ x\left[x\in\ -3;\ 3\right]\vee\exists\ x\ \ \neg x\in\mathrm{Z}\ ;$$

6. $\forall\ n: n\in\mathrm{N}\left[n^2\vdots 4\to n\vdots 2\right]$, $\neg\forall\ n\ \ n\vdots 2\ \models\exists\ x\left[\neg x\in\mathrm{N}\vee\neg x^2\vdots 4\right]$;

7. $\neg\exists\ x\ \forall\ n:\ n\in\mathrm{N}\ \ xn>8n\wedge x\le 8$, $\exists\ x\ \forall\ n:\ n\in\mathrm{N}\ \ xn>8n\ \models$

$$\models\exists\ x\ \ \neg x\le 8\ :$$

8. $\neg\forall\ n\left[n^2\vdots 4\right]$, $\forall\ n:\ n\in\mathrm{N}\left[n\vdots 2\to n^2\vdots 4\right]\models\exists\ x\ \ \neg x\in\mathrm{N}\vee n\vdots 2$;

9. $\forall\ x: x\in\mathrm{R}\ \ x\le 0\to\neg x>0$, $\forall\ n:\ n\in\mathrm{N}\ \ n>0\ \models$

$$\models\exists\ x:\ x\le 0\ \ x\in\mathrm{R}\to\exists\ x:\ \neg x\in\mathrm{N}\ \ x\in\mathrm{R}\ ;$$

10. $\forall\ f\left[A\ f\ \leftrightarrow\forall\ y, z: y<z\left[D\ f, y\ \wedge D\ f, \mathrm{z}\ \to N\ f, y, z\ \right]\right]$,

$$\exists\ y:\ D\ g, y\ \left[0<y\wedge\neg N\ g,\ 0,\ y\ \right]\models\neg D\ g,\ 0\ \vee\neg A\ g\ .$$