Министерство образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра прикладной математики

519.1(07)
Э157

А.Ю. Эвнин

ЗАДАЧНИК ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Издание второе, переработанное и дополненное

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2002

УДК 519.1(076.1)+511.2(076.1)+510.6(076.1)

Эвнин А.Ю. **Задачник по дискретной математике.** – 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

Сборник задач соответствует курсу дискретной математики для студентов специальностей "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика" и "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем". Задачник может быть использован также для проведения практикумов по решению олимпиадных задач.

Первое издание вышло в 1998 г.

Ил. 27, табл. 9, список лит. — 63 назв.

Одобрено научно-методическим советом по математике.

Рецензенты:
д. ф.-м. н. *М.М. Кипнис,* ЧГПУ,
к. ф.-м. н. *С.М. Воронин,* ЧелГУ.

ISBN 5–696–02145–X

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

По темам задач и по структуре, а также по терминологии и обозначениям данная книга соответствует учебному пособию [9].

Необходимость составления задачника объясняется тем, что в настоящее время практически отсутствуют сборники задач, в которых были бы представлены все темы, составляющие современный курс дискретной математики (в первую очередь, математическая логика, комбинаторный анализ и теория графов). Наиболее полно отвечающий учебной программе указанной дисциплины задачник [20] издан тиражом менее 5 тыс. экз. и малодоступен. Кроме того, в нем отсутствует материал, соответствующий первым трем главам, §7.2, §7.7 и большей части последней главы (в т.ч. §8.4, §8.9) настоящего издания.

Названия первых семи глав сборника совпадают, в основном, с соответствующими заголовками из [9]. Весьма обширная последняя глава, содержащая задачи повышенной трудности и дополнительный теоретический материал, может быть использована для кружковой работы.

Во втором издании наибольшей переработке подверглась четвертая глава, при этом существенным образом использованы материалы лекций по математической логике Ю.П. Нестеренко.

Основными источниками задач послужили книги [1], [2], [4], [5], [6], [8], [23], [24], [27]. Результаты, сформулированные в задачах 327 и 385, принадлежат моему учителю и коллеге М.М. Гольденбергу. Некоторые задачи, в том числе 77, 123.6, 126, 140, 290, 315, 325.2, 369, 370, 374, 502, 540, 553, 556, 609, 612, 647, 660, 669, 671, 677, 678, 696, придуманы (или "переоткрыты") составителем сборника. Формулировки ряда задач возникли как (обратный) перевод с языка олимпиад на язык научный. В частности, широко использованы материалы Всероссийской, Соросовской и Путнамовской олимпиад последних лет, а также задачных разделов журналов "Квант" и "Математика в школе". Указать (и даже установить) авторство всех задач сборника не представляется возможным, но все-таки назову авторов нескольких красивых задач, придуманных совсем недавно и вошедших во второе издание сборника: С.Л. Берлов (задача 731), А.С. Голованов (135), В.М. Гуровиц (514), Д.В. Карпов (12), С.И. Токарев (733).

Электронный адрес автора: evnin@prima.susu.ac.ru. Буду благодарен за замечания и советы.

А.Ю. Эвнин, 10 апреля 2002 г.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Множества и операции над ними

1. Какие из следующих утверждений верные?

1) $\phi \in \phi$; 2) $\phi \subset \phi$;

3) $a \in \{a, b\}$; 4) $a \subset \{a, b\}$;

5) $\{a\} \in \{a, b\}$; 6) $\{a\} \subset \{a, b\}$;

7) $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$; 8) $\{a, b\} \subset \{a, b, \{a, b\}\}$.

2. Пусть $A = [0, 1] \times R$, $B = R \times [0, 1]$. Найти множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, изобразить их на координатной плоскости.

3. Пусть $A_n = [-n; n]$ (отрезок числовой прямой). Найти:

$$1) \bigcup_{n=1}^{k} A_n \ (k \in N);\quad 2) \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;\quad 3) \bigcap_{n=1}^{k} A_n \ (k \in N);\quad 4) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

4. Пусть $A_n = (0; \frac{1}{n})$ (интервал числовой прямой). Найти:

$$1) \bigcup_{n=1}^{k} A_n \ (k \in N);\quad 2) \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;\quad 3) \bigcap_{n=1}^{k} A_n \ (k \in N);\quad 4) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

5. Доказать: $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$.

6. Доказать дистрибутивные законы:

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

7. (**Законы двойственности де Моргана**). Рассматривается семейство подмножеств некоторого множества U: для $i = 1, \ldots, n$ $A_i \subset U$. Пусть для любого множества $B \subset U$ запись $\overline{B}$ означает *дополнение к* B: $\overline{B} = U \setminus B$. Доказать, что

1) $\overline{(\cap_{i=1}^{n} A_i)} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ (дополнение к пересечению есть объединение дополнений);

2) $\overline{(\cup_{i=1}^{n} A_i)} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ (дополнение к объединению есть пересечение дополнений).

1.2. Высказывания и предикаты

8. Определить местность предикатов.
1) $x^2 - 2x - 15 = 0$; 2) $\forall x \;\; x^2 - 2x - 15 = 0$; 3) $\exists x \;\; x^2 - 2x - y = 0$.

9. Связать свободную переменную квантором так, чтобы получить истинное высказывание (предметная область — множество действительных чисел).
1) $|x| = -x$; 2) $x^2 \geq 0$; 3) $\sin x \neq 2$; 4) $\exists x \;\; x^2 - 2x - y = 0$.

10. Пусть $P(x, y)$ — двухместный предикат
"Окружность x вписана в треугольник y".
Прочитать следующие высказывания, определить значения их истинности, построить отрицания данных высказываний.
1)$\forall x \; \forall y \;\; P(x, y)$; 2)$\exists x \; \forall y \;\; P(x, y)$; 3) $\forall x \; \exists y \;\; P(x, y)$.

11. Сформулировать отрицания следующих высказываний в утвердительной форме (т.е. так, чтобы отрицание не начиналось со слов "не" или "неверно, что").

1) В любом городе есть район, в каждой школе которого есть класс, все ученики которого учатся без троек.

2) Существует город, в каждом районе которого есть футбольная команда, все игроки которой не старше 18 лет.

3) В каждом городе есть улица, на которой по крайней мере в одном доме все окна выходят на юг.

4) Существует книга, на каждой странице которой есть не менее чем одна строка, в которой буква "ы" встречается по меньшей мере два раза.

5) В каждом городе хотя бы одна улица застроена только такими домами, в которых есть однокомнатные квартиры.

12. Бизнесмен Вася вывесил в своем супермаркете четыре рекламных лозунга:

(1) Всё дешёвое невкусно! (2) Всё невкусное дёшево!
(3) Всё вкусное недёшево! (4) Не всё вкусное дёшево!

Борющийся за экономию коммерческий директор заметил, что два лозунга утверждают одно и то же. Какие?

Задачи о рыцарях и лжецах

Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

13. Жители некоторого государства делятся на рыцарей и лжецов. Как-то в комнате собралось 10 жителей этого государства, и каждый из них сказал, обращаясь к остальным: "Все вы — лжецы". Сколько среди этих людей было рыцарей и сколько лжецов?

14. В другой комнате собралось четверо жителей того же государства (A, B, C, D), и между ними произошел такой разговор:
A: Все мы рыцари.
B: A лжёт.
C: По крайней мере двое из нас — лжецы.
D: По крайней мере трое из нас — лжецы.
Кто лжец, а кто рыцарь?

15. В думе государства рыцарей и лжецов 101 депутат. Каждый из них заявил, что если его выведут из думы, то среди оставшихся лжецы составят большинство. Сколько рыцарей в думе?

16. По кругу сидят рыцари и лжецы. Каждый из них сказал: "Все, кроме, быть может, меня и тех, кто сидит рядом со мной, — лжецы". Сколько рыцарей сидит за столом?

17. Вокруг стола расселись рыцари и лжецы. Каждый из них сказал о своем соседе справа, правдив тот или лжив. Известно, что на основании этих заявлений можно однозначно определить, какую долю от присутствующих составляют рыцари. Чему она равна?

1.3. Метод математической индукции

Простейший вариант метода математической индукции состоит в следующем.

Рассматривается некоторый предикат $A(n)$, где n — натуральное число. Пусть известно, что
1) **[база индукции]** *высказывание $A(1)$ истинно;*
2) **[индукционный шаг]** *для любого $k \in \mathbf{N}$ из истинности $A(k)$ следует истинность $A(k+1)$.*
Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ высказывание $A(n)$ истинно.

Действительно, поскольку $A(1)$ истинно, а $A(1)$ влечет $A(2)$, высказывание $A(2)$ также истинно. $A(2)$, в свою очередь, влечет $A(3)$. Значит, и высказывание $A(3)$ истинно. Продолжая эти рассуждения, можно "добраться" за конечное число шагов до высказывания $A(n)$, где n — любое *наперед заданное натуральное число, и это высказывание оказывается истинным.*

18. Доказать тождества:
1) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;
2) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$;
4) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

19. Методом математической индукции доказать, что n-элементное множество имеет 2^n подмножеств.

20. Плоскость поделена на части несколькими а) прямыми; б) окружностями. Доказать, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что любые две смежные (то есть имеющие общий участок границы) части были разного цвета.

21. Доказать, что при $n \geq 3$ существует n различных натуральных чисел таких, что их сумма делится на каждое из этих чисел.

22. Выпуклый $2n$-угольник с равными сторонами можно разрезать на ромбы. Доказать.

23. Пусть $a_0 = 2000$, $a_n = \sqrt{2000+\sqrt{a_{n-1}}}$. Доказать, что при $n > 1$ целая часть числа a_n есть величина постоянная.

В следующих задачах используются более сложные схемы индукции (где другой вид имеют индукционный шаг и база индукции).

24. Пусть $x+\frac{1}{x}$ — целое число. Доказать, что для любого натурального n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ также целое.

25. Доказать, что для любого $n > 5$ квадрат можно разрезать на n квадратов.

26. Доказать, что для любого $n > 70$ куб можно разрезать на n кубов.

27. Доказать, что многочлен $f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ при нечётном n имеет один действительный корень, а при чётном n не имеет действительных корней.

28. Доказать, что многочлен, принимающий только неотрицательные значения, представим в виде суммы квадратов многочленов.

1.4. Правило произведения

29. Из города А в город Б ведут 5 дорог, а из города Б в город В — 7 дорог. Сколько есть различных маршрутов из города А в В через Б?

30. В меню столовой 3 первых, 5 вторых и 3 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трёх блюд (первое, второе и третье)?

31. Сколько есть двузначных чисел, не содержащих цифр 0, 2, 5?

32. Сколько есть двузначных чисел, не содержащих цифр 1, 3, 6?

33. Номер автомашины состоит из трёх букв латинского алфавита (содержащего 26 букв) и трёх цифр. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

34. У рояля 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

35. Сколько натуральных делителей имеет число $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^6$?

36. Сколько натуральных делителей имеет число $2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5$?

37. Сколько есть пятизначных чисел,

1) оканчивающихся двумя семёрками?

2) начинающихся с двух одинаковых цифр?

3) в каждом из которых нет одинаковых цифр?

4) в каждом из которых соседние цифры различны?

5) делящихся на 4 и не содержащих цифр 0, 4, 6, 8?

6) в записи которых есть одинаковые цифры?

7) в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

38. Сколько есть перестановок цифр 0, 1, 2, …, 9, в которых

1) цифра 3 занимает третье место, а цифра 5 — пятое?

2) цифра 1 следует непосредственно за цифрой 0?

3) цифра 0 занимает одно из первых трёх мест, а цифра 1 — одно из последних четырёх мест?

4) цифра 0 занимает одно из первых пяти мест, а цифра 1 — одно из первых трёх мест?

5) между цифрами 0 и 1 стоят ровно три цифры?

6) цифра 0 расположена левее цифры 1?

7) цифра 1 расположена между цифрами 0 и 2?

8) хотя бы одна из первых трёх цифр делится на 3?

39. Сколькими способами можно рассадить за десятью партами 10 мальчиков и 10 девочек так, чтобы за каждой партой сидели а) мальчик слева, а девочка справа? б) мальчик и девочка?

40. Сколькими способами можно прочитать слово ПАРУС, двигаясь вправо или вниз по каждой из следующих таблиц?

П	А	Р	У	С
А	Р	У	С	
Р	У	С		
У	С			
С				

				П
			П	А
		П	А	Р
	П	А	Р	У
П	А	Р	У	С

41. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

42. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они били все поля?

43. На координатной плоскости рисуются всевозможные несамопересекающиеся ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, а звенья параллельны координатным осям; L_n — число таких ломаных, выходящих из начала кординат и имеющих длину n. Доказать, что

$$4 \cdot 2^{n-1} \leq L_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}.$$

44. Ключом шифра, называемого "решётка", является трафарет, сделанный из квадратного листа клетчатой бумаги размером $n \times n$ (n — чётное число). Некоторые из клеток вырезаются с тем, чтобы в получившиеся отверстия на чистый лист бумаги того же размера можно было вписывать буквы шифруемого текста. Одна из сторон трафарета помечается; при наложении трафарета на чистый лист бумаги четырьмя возможными способами (помеченной стороной вверх, вправо, вниз, влево) его вырезы полностью покрывают всю площадь квадрата, причем каждая клетка оказывается под вырезом ровно один раз. Буквы сообщения, имеющего длину n^2, последовательно вписываются в вырезы трафарета при каждом из четырёх его возможных положений. После снятия трафарета на листе бумаги оказывается зашифрованное сообщение. Найти число различных ключей шифра для произвольного чётного числа n.

45. При каком наибольшем m с помощью n гирь на чашечных весах можно взвешивать грузы в $1, 2, 3, \ldots, m$ г? Какими дожны быть при этом массы гирь? Рассмотреть два случая:

а) гири могут быть только на одной чашке весов;

б) гири могут быть на разных чашках.

46. Каково наибольшее число подмножеств n-элементного множества, любые два из которых имеют непустое пересечение?

Глава 2

Элементы теории чисел

Математика — царица наук, арифметика — царица математики.

К. Гаусс

Господь Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человеческих.

Л. Кронекер

Целые числа составляют костяк дискретной математики.

Д. Кнут

2.1. Наибольший общий делитель. Простые числа

47. Является ли число 57599 простым?

48. Доказать, что нечётное число $n > 1$ является составным тогда и только тогда, когда оно представимо не менее чем двумя способами в виде разности двух квадратов неотрицательных целых чисел.

49. Два соседних натуральных числа взаимно просты. Доказать.

50. Числа m и n взаимно просты. Доказать, что числа mn и $m+n$ также взаимно просты.

51. Числа m и n взаимно просты. Какие общие делители могут иметь числа $m+n$ и $m-n$?

52. Числа m и n взаимно просты. Доказать, что числа mn и m^2+n^2 также взаимно просты.

53. Числа m и n взаимно просты. Какие общие делители могут иметь числа $m+n$ и m^2+n^2?

54. Найти наибольший общий делитель чисел
1) 321 и 843; 2) 2166 и 6099; 3) 6787 и 7194; 4) 23521 и 75217.

55. Любые два соседние числа Фибоначчи (определение см. §5.5) взаимно просты. Доказать.

56. Пусть r_n — n-значное число $11\ldots1$. Доказать: $(r_n, r_m) = r_{(n,m)}$.

57. Последовательность (a_n) задается соотношениями $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Доказать, что $(a_n, a_m) = a_{(n,m)}$.

58. Показать, что простое число p является делителем $n!$ с кратностью

$$\sum_{k\geq 1}[n/p^k].$$

59. Записать $20!$ в виде произведения степеней простых чисел.

60. Доказать, что кратность простого числа p в каноническом разложении $n!$ не превосходит а) $\frac{n}{p-1}$; б) $\frac{n-1}{p-1}$.

61. Доказать, что $\sqrt[n]{n!} \leq \prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}}$ (произведение берется по всем простым делителям n).

62. Доказать неравенство $\prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}} \geq \frac{n}{\mathrm{e}}$. Показать, что из него следует бесконечность множества простых чисел.

63. Пусть (m, n) — наибольший общий делитель чисел m и n, $[m, n]$ — их наименьшее общее кратное. Аналогичный смысл имеют обозначения (m, n, k) и $[m, n, k]$. Доказать, что имеет место тождество $(m, n)[m, n] = mn$. Верно ли, что$(m, n, k)[m, n, k] = mnk$?

64. Пусть p — простое число. Доказать, что для $n = 1, 2, \ldots, p-1$ числа n и $p - n$ взаимно просты.

65. Доказать, что для любого n найдётся n последовательных натуральных чисел, каждое из которых — составное.

66. Доказать, что для любого $n > 3$ между n и $n!$ найдётся по крайней мере одно простое число.

67. Доказать, что для любого $n > 1$ между n и 2^n найдётся по крайней мере одно простое число.

68. Доказать, что если $2^n > (1 + n)^k$, то среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ существует по крайней мере $k + 1$ простое число. Показать, что отсюда следует бесконечность множества простых чисел.

69. Доказать, что среди чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ не менее четверти свободны от квадратов. Получить из этого утверждения доказательство бесконечности множества простых чисел.

2.2. Сравнения по модулю

70. Найти остаток от деления

1) 6^{100} на 7;

2) 6^{100} на 35;

3) $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} + \ldots + 10^{10^{10}}$ на 7.

71. Доказать, что

1) $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31;

2) $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66;

3) $11^{10} - 1$ делится на 100;

4) $7^{120} - 1$ делится на 143.

72. Пусть k и n — натуральные числа. Доказать, что $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}$ делится на $k^2 + k + 1$.

73. Доказать, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 3, то и каждое из них делится на 3.

74. Доказать, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 7, то и каждое из них делится на 7.

75. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Доказать, что полученное число $192021\ldots7980$ делится на 1980.

76. Можно ли все двузначные числа от 32 до 86 выписать в некотором порядке одно за другим так, чтобы получилось простое число?

77. Можно ли числа 145, 146, ..., 151 выписать в некотором порядке одно за другим так, чтобы получилось простое число?

78. Пусть $n \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$, $n \equiv 3 (\operatorname{mod} 5)$. Найти остаток от деления n на 15.

79. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120^o?

80. Выяснить, при каких $k \leq 11$ сумма квадратов k последовательных натуральных чисел может быть квадратом натурального числа.

81. Число 1144664411 представить в виде суммы наименьшего возможного числа четвёртых степеней натуральных чисел.

82. Можно ли множество натуральных чисел разбить на три подмножества так, чтобы для любого $n \in \mathbf{N}$ числа $n, 2n, 3n$ принадлежали разным подмножествам?

2.3. Китайская теорема об остатках

Теорема, которой посвящен параграф, открыта в Китае в первом (по другим сведениям, в четвертом) веке нашей эры. Она имеет много приложений. Например, она используется в разработанном в 60-х годах двадцатого века алгоритме быстрого преобразования Фурье. См. об этом в статье М. Кельберт. *Что такое преобразование Фурье?* //Математическое просвещение. – 2000. Сер. 3, вып. 4. – С.188–202.

Мы рассмотрим два доказательства этой теоремы — комбинаторное и конструктивное. См. также лабораторную работу №6 в рамках практикума, разработанного под руководством известного специалиста по теории чисел Х. Монтгомери (программы, составляющие Computational Laboratories In Number Theory (CLINT) имеются на кафедре прикладной математики ЮУрГУ).

83. [Китайская теорема об остатках.] *Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ попарно взаимно простые натуральные числа; целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таковы, что $\forall i$ $0 \le r_i < q_i$. Тогда существует такое целое число x, которое для любого i имеет остаток r_i от деления на q_i.* Доказать.

Доказательство. Обозначим через N произведение чисел q_i: $N = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$. Заметим сначала, что если два числа имеют одинаковые наборы остатков при делении на $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то их разность кратна N. Действительно, если $\forall i$ $a \equiv b (\operatorname{mod} q_i)$, т.е. $\forall i$ $a - b \,\vdots\, q_i$, то в силу того, что числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ попарно взаимно просты, $a - b$ делится и на их произведение N.

Рассмотрим множество чисел $A = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Разность любых двух (различных) чисел из этого множества по абсолютной величине меньше N, поэтому она не кратна N, и, следовательно, любые два числа из A имеют *разные* наборы остатков при делении на $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Подсчитаем теперь, сколько всего может быть различных наборов остатков при делении числа на $q_1, q_2, \ldots, q_n$. При делении на q_i остаток принимает одно из q_i значений:

$0, 1, \ldots, q_i - 2$ или $q_i - 1$.

Согласно правилу произведения всего наборов будет $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, т.е.

как раз N. Таким образом, для любого набора остатков от деления на $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в множестве A найдётся (и *при том ровно одно*) число, обладающее им.

84. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ попарно взаимно простые натуральные числа. Для каждого i найти число t_i, удовлетворяющее следующим условиям:
1) $\forall j \neq i \ t_i \equiv 0 (\operatorname{mod} q_j)$;
2) $t_i \equiv 1 (\operatorname{mod} q_i)$.

85. На основе предыдущей задачи получить конструктивное доказательство китайской теоремы об остатках.

86. Найти наименьшее натуральное число, которое даёт при делении на 3 остаток 2, на 4 — остаток 1, на 5 — остаток 2.

87. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ попарно взаимно простые натуральные числа; целые числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таковы, что $\forall i \ 0 \leq r_i < q_i$. Доказать, что существует такое целое число x, что
$x \equiv r_1 (\operatorname{mod} q_1), \ x + 1 \equiv r_2 (\operatorname{mod} q_2), \ldots, x + n - 1 \equiv r_n (\operatorname{mod} q_n)$.

88. Доказать, что для любого n найдётся n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат простого числа.

2.4. Теоремы Эйлера, Ферма, Вильсона

89. Найти остаток от деления

1) 2^{100} на 101;

2) 3^{102} на 101;

3) 8^{900} на 29;

4) 7^{120} на 143.

90. Доказать, что для любого натурального n число $n^{73} - n^{37}$ делится на 10.

91. Доказать, что если n не делится на 17, то либо $n^8 - 1$, либо $n^8 + 1$ делится на 17.

92. Пусть p — нечётное простое число. Доказать, что $n^{\frac{p-1}{2}}$ при делении на p дает остаток 0, 1 или $p - 1$.

93. Доказать, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на простое число $p = 4k + 3$, то и каждое из них делится на p.

94. Пусть a и b — взаимно простые числа, p — нечётный простой делитель числа $a^2 + b^2$. Доказать, что для некоторого натурального n выполняется равенство $p = 4n + 1$.

95. Пусть a — целое число, p — нечётный простой делитель числа a^4+1. Доказать, что p имеет вид $p = 8n + 1$.

96. Пусть a — целое число, $p > 3$ — простой делитель числа $a^2 + a + 1$. Доказать, что p имеет вид $p = 6n + 1$.

97. Пусть a и b — взаимно простые числа. Доказать, что

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 (\operatorname{mod} ab).$$

98. Пусть $a > 1$ — произвольное натуральное число, $p > 2$ — простое число, взаимно простое с $a^2 - 1$. Положим $n = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$. Доказать, что 1) n — составное число; 2) $a^{n-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами. **Решить сравнение**

$$f(x) \equiv 0 (\operatorname{mod} m) \tag{1}$$

означает найти все целые значения переменной x, ему удовлетворяющие. Как известно, если $x \equiv x_0 (\operatorname{mod} m)$, то и $f(x) \equiv f(x_0) (\operatorname{mod} m)$. Поэтому в качестве решений уравнения (1) можно рассматривать классы вычетов по модулю m. Будем говорить, что сравнение (1) имеет столько решений, сколько классов вычетов по модулю m ему удовлетворяют. Степень многочлена $f(x)$ называют **степенью сравнения** *(1).*

99. Пусть p — простое число. Тогда сравнение

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 (\operatorname{mod} p) \tag{2}$$

равносильно сравнению степени не выше $p - 1$.

100. Если сравнение n-й степени (2) по простому модулю p имеет более n решений, то все коэффициенты многочлена $f(x)$ кратны p.

101. Пусть n — составное число. Доказать, что $(n-1)! + 1$ не делится на n.

102. Пусть $n > 4$ — составное число. Доказать, что $(n-1)!$ делится на n.

103. Если p — простое число, то $(p-1)! + 1$ делится на p.

Замечание. *Задачи 101 и 103 показывают, что имеет место следующий* *критерий простоты числа.*

Теорема Вильсона. *Для того, чтобы число p было простым, необходимо и достаточно, чтобы $(p-1)!+1$ делилось на p.*

Другое доказательство этой теоремы (не использующее малую теорему Ферма) можно найти в [60] (с.23).

104. **[Теорема Лейбница.]** *Число $p>2$ является простым тогда и только тогда, когда $(p-2)!-1$ делится на p.* Доказать.

105. Если $p=4k+1$ — простое число, то $\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2+1$ делится на p. Доказать.

106. Доказать, что если $p>2$ — простое число, то

$$1)\;\; 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\operatorname{mod}p),$$

$$2)\;\; 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\operatorname{mod}p).$$

2.5. Квадратичные вычеты и невычеты

Пусть p — простое число. Число a, не делящееся на p, называется **квадратичным вычетом** *по модулю p, если разрешимо (относительно x) сравнение $x^2\equiv a(\operatorname{mod}p)$, и* **квадратичным невычетом** *в противном случае.*

107. Пусть p — нечётное простое число. Доказать, что среди чисел $1,2,\ldots,p-1$ квадратичных вычетов ровно половина.

Для простого числа p **символ Лежандра** $\left(\frac{a}{p}\right)$ *определяется так:*

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}0, & \text{если } a \text{ делится на } p,\\ 1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет},\\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет}.\end{cases}$$

108. **[Лемма Лежандра.]** *Если p — нечётное простое число, то*

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2}(\operatorname{mod}p).$$

109. Доказать, что $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

110. Найти все простые $p>2$, для которых число -1 является квадратичным вычетом.

111. Решить сравнение $x^2 \equiv 5 \pmod{19}$.

112. [Лемма Гаусса.] *Пусть p — нечётное простое число, $q = (p-1)/2$, $P = \{1, 2, \dots, q\}$ и для каждого $k \in P$ число $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ выбрано так, что число $ak\varepsilon_k$ сравнимо по модулю p с каким-нибудь числом из P. Тогда*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{k=1}^{q} \varepsilon_k.$$

113. Найти все простые $p > 2$, для которых число 5 является квадратичным вычетом.

2.6. Уравнения в целых числах

114. Решить в целых числах уравнения:

1) $16x + 4y = 1830$; 2) $13x + 7y = 1$;

3) $21x + 19y = 5$; 4) $1994x - 171y = 1$.

115. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Найти наименьшее натуральное n такое, что при любом натуральном m, большем n, разрешимо в натуральных числах уравнение $ax + by = m$.

116. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Сколько существует натуральных чисел, не представимых в виде $n = ax + by$, где x и y — неотрицательные целые числа?

117. Один фермер потратил 1000 долларов на покупку 100 различных домашних животных. Каждая корова обошлась ему в 100 долларов, свинья — в 30 долларов, а овца — в 5 долларов. Сколько голов скота каждого вида он купил?

118. Другой фермер потратил 1800 долларов на покупку 100 различных домашних животных. Каждая корова стоила 72 доллара, свинья — 36 долларов, овца — 6 долларов. Известно, что коров было куплено больше, чем свиней. Сколько голов скота каждого вида купил фермер?

119. Три мужа — Андрей, Иван и Степан пошли со своими жёнами — Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван — больше Екатерины на 11 вещей. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал на 63 рубля больше своей жены. (Задача экзамена Кишиневской гимназии за 1879 г.).

120. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные нечётные простые числа. Доказать, что их произведение можно представить в виде разности квадратов 2^{n-1} способами.

121. Доказать, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах, выбрав подходящим образом модуль для сравнения.

1) $y^2 = 5x^2 + 6$; 2) $x^2 + y^2 = 4z - 1$;

3) $15x^2 - 7y^2 = 9$; 4) $x^2 - 7y = 10$;

5) $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$; 6) $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

122. Решить в целых числах уравнения
1) $x + y = x^2 - xy + y^2$; 2) $y^2x = 9999y + x$; 3) $2xy - 5x + y = 55$.

123. Решить в натуральных числах уравнения:

1) $x^2 - y^2 = 1988$; 2) $3^m + 7 = 2^n$;

3) $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$; 4) $19^x + 94^y = 1993^z$;

5) $2^x + 3 = 11^y$; 6) $2^x + 3^y = 5^z$;

7) $x^{y+1} - (x+1)^y = 2001$; 8) $1 + 3^x = 3^y + 5^z$.

124. Решить в натуральных числах уравнение

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4},$$

считая, что $x \geq y \geq z$.

125. Найти натуральные числа $x < y < z$, для которых

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{xy} - \frac{1}{xyz} = \frac{19}{97}.$$

126. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 31(z^2 + t^2)$.

127. Найти все пары целых чисел таких что сумма их суммы, разности, произведения и частного равна 150.

128. Даша гадает на ромашке: "Любит — не любит — плюнет — поцелует — к сердцу прижмёт — к черту пошлёт". Глаша при гадании к этим шести вариантам добавляет ещё один: "своей назовёт". На ромашках с n и $2n$ лепестками у Даши хорошее предсказание, а у Глаши плохое. Чему равно n, если считать, что на ромашке не может быть более 100 лепестков?

129. На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 1999 другими. Найти все возможные значения n.

130. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник. Количество его клеток, примыкающих к границе прямоугольника, равно количеству остальных его клеток. Найти размеры прямоугольника.

131. Первоначально во всех клетках таблицы 100×100 записаны плюсы. Допускается операция одновременного изменения знака во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли получить таблицу, в которой а) 2001; б) 1990; в) 2002 минусов?

132. Найти все натуральные n, при которых уравнение $n^{x_1} + \ldots + n^{x_{100}} = 1997$ разрешимо в целых числах $x_1, \ldots, x_{100}$.

133. Пусть $b_0, b_1, b_2, \ldots$ — геометрическая прогрессия, $k < m$ — взаимно простые числа, b_0, b_k и b_m — натуральные числа. Доказать, что при любом $i < m$ число b_i также натуральное. Верно ли, что все члены прогрессии натуральные числа?

134. Пусть p и r, q и s — две пары взаимно простых чисел. Доказать, что любое положительное рациональное число представимо в виде $\frac{a^p+b^q}{c^r+d^s}$, где a, b, c, d — натуральные числа.

135. Если бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия содержит точный квадрат и точный куб, то она содержит и 6-ю степень некоторого целого числа. Доказать.

Большое количество задач по элементарной теории чисел собрано в [60]. См. также §§8.2, 8.3 настоящего сборника. Ряд задач из других разделов также тесно связаны с теорией чисел.

2.7. Мультипликативные функции

136. Пусть $\omega(n)$ — число различных простых делителей n. Доказать, что функция $f(n) = c^{\omega(n)}$ — мультипликативная.

137. Доказать, что произведение мультипликативных функций мультипликативно.

138. Найти количество чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m для $m = 25,\ 60,\ 250,\ 1\,000\,000$.

139. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 288?

140. Пусть число a оканчивается на 1, 3, 7 или 9. Доказать, что a^{400000} оканчивается на 000001.

141. Доказать тождество $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi((m,n))\varphi([m,n])$.

142. При $n > 2$ число $\varphi(n)$ чётно. Доказать.

143. Доказать, что сумма всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n, равна $n\varphi(n)/2$.

144. Из равенства $\varphi(p_1p_2\dots p_s) = (p_1-1)(p_2-1)\dots(p_s-1)$ ($p_1, p_2, \dots, p_s$ — различные простые числа) вывести бесконечность множества простых чисел.

$\tau(n)$ есть число (натуральных) делителей числа n, $s(n)$ — их сумма.

145. Доказать: $\tau(n)$ нечётно $\iff$ n — квадрат.

146. Доказать: $s(n)$ нечётно $\iff$ n — квадрат или удвоенный квадрат.

147. Доказать, что произведение всех делителей числа n равно $n^{\tau(n)/2}$.

148. Каким количеством нулей может оканчиваться произведение всех делителей числа?

149. Исходя из соотношения $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$, докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau(k) = n(\ln n + O(1))$.

Таким образом, на долю каждого их первых n натуральных чисел приходится в среднем примерно $\ln n$ делителей.

150. Доказать неравенство $s(n) + \varphi(n) \ge 2n$.

151. Доказать, что при $n > 1$ справедливо неравенство

$$s(n) < n(\ln n + 1).$$

Существует ли такая константа C, что для всех n справедливо $s(n) \le Cn$?

Продолжение темы мультипликативных функций — в §8.4.

Глава 3

Начальные понятия общей алгебры

152. Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) обладают следующие бинарные отношения на множестве действительных чисел?

1) $x\varrho y \iff x^2 = y^2$;	5) $x\varrho y \iff x^2 + x = y^2 + y$;
2) $x\varrho y \iff x^2 + y^2 = 1$;	6) $x\varrho y \iff x^3 + x = y^3 + y$;
3) $x\varrho y \iff xy > 1$;	7) $x\varrho y \iff x - y \in Z$;
4) $x\varrho y \iff y = \|x\|$;	8) $x\varrho y \iff x - y \in N$.

153. Какие из отношений предыдущей задачи являются отношениями эквивалентности? Для каждого из таких отношений выяснить, что представляют собой классы эквивалентности и сколько элементов они содержат.

154. На множестве учеников класса введем отношение "у́чится лучше". Будем говорить "Ученик A учится лучше ученика B", если по большинству контрольных работ A имел оценки выше, чем B. Обладает ли данное отношение свойством транзитивности?

155. На множестве A введено симметричное и транзитивное отношение ϱ такое, что

$$\forall a\ \exists b\ a\varrho b.$$

Доказать, что отношение ϱ рефлексивно.

Соглашение. *В задачах данного раздела e обозначает нейтральный элемент группы.*

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — конечное множество, на котором определена бинарная операция $*$. Таблица из n строк и n столбцов, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент множества A, равный $a_i * a_j$, называется **таблицей умножения,** *или* **квадратом Кэли.**

156. На множестве $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ определим две бинарные операции:
1) $a * b = (a, b)$ (наибольший общий делитель);
2) $a * b = [a, b]$ (наименьшее общее кратное).
Составить для этих операций квадраты Кэли.

157. Составим матрицу коэффициентов дробно-линейной функции $f_i(x) = \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i}$:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Какая матрица будет соответствовать сложной функции $f_i(f_j(x))$?

158. На множестве функций $\{x, \frac{1}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}, -\frac{1}{x}, -x\}$ выберем в качестве бинарной операции композицию функций (будем считать, что областью определения всех функций является множество $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$). Составить квадрат Кэли для данной операции. Доказать, что рассматриваемая алгебраическая структура является группой.

159. На множестве $(\mathbf{Q} \setminus 0) \times \mathbf{Q}$ введена операция

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$

Доказать, что данная алгебраическая структура является группой.

160. Доказать, что в квадрате Кэли конечной группы каждый элемент группы встречается в каждой строке (и каждом столбце) ровно один раз.

161. Составить квадрат Кэли для следующих групп:

1) вращений правильного треугольника;

2) вращений квадрата;

3) вращений правильного пятиугольника;

4) симметрий ромба, не являющегося квадратом;

5) симметрий правильного треугольника;

6) симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом;

7) симметрий квадрата.

162. Доказать, что группа из задачи 158 изоморфна группе симметрий квадрата.

163. Какие из следующих числовых множеств образуют аддитивные группы?
$\mathbf{Z}, 2\mathbf{Z}, \mathbf{N}, 2\mathbf{Z}+1, \mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \{-1, 0, 1\}$.

164. Какие из следующих числовых множеств образуют мультипликативные группы?
$\mathbf{R}, \mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{R}^+, \mathbf{Z}, 2\mathbf{Z}+1, \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \setminus \{0\}, \{1, -1\}, \{1, 2, \frac{1}{2}\}, \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \{2^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

165. Доказать, что если в группе каждый элемент себе обратен ($\forall a \quad a * a = e$), то группа — абелева.

166. Найти с точностью до изоморфизма все группы, состоящие не более, чем из 4 элементов.

167. Пусть $\varphi:\ G\to H$ — сюръективное гомоморфное отображение абелевой группы G на группу H. Доказать, что H — абелева группа.

168. Пусть $< G,\cdot >$ — группа, $g\in G$. Доказать, что отображение $\varphi_g:\ G\to G$, заданное правилом $\varphi_g(x)=g^{-1}xg$, является изоморфизмом.

169. Пусть $< G,\cdot >$ — конечная группа. Доказать, что

$$\forall g\in G\ \ \exists n\in \mathbf{N}\ \ g^n=e.$$

Наменьшее $n>0$, при котором $g^n=e$, называют **порядком** *элемента g.*

170. Доказать, что конечная группа четного порядка обязательно содержит элемент второго порядка.

171. Пусть группа обладает единственным элементом второго порядка. Доказать, что этот элемент перестановочен с каждым элементом группы.

172. Пусть x и y — элементы (мультипликативной) группы с указанными ниже свойствами. Доказать, что $y^s=e$.

1) $x^2=e,\ xyx^{-1}=y^3;\ \ s=8;$

2) $x^2=e,\ xyx^{-1}=y^n;\ \ s=n^2-1;$

3) $x^3=e,\ xyx^{-1}=y^4;\ \ s=63;$

4) $x^m=e,\ xyx^{-1}=y^k;\ \ s=k^m-1.$

173. Пусть G — группа с единичным элементом e; $\phi:\ G\to G$ — функция такая, что $\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3)=\phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3)$, всякий раз, когда $g_1g_2g_3=e=h_1h_2h_3$. Доказать, что существует такой элемент $a\in G$, что функция $\psi(x)=a\phi(x)$ есть гомоморфизм (т.е. $\forall x,y\ \ \psi(xy)=\psi(x)\psi(y)$).

174. Элемент $x\neq 0$ кольца $< K,+,\cdot >$ называется **нильпотентным,** если $x^n=0$ для некоторого $n\in\mathbf{N}$. Доказать, что нильпотентность элемента x влечет обратимость элемента $1-x$ в любом кольце с единицей.

175. Пусть для элементов a,b,c кольца с единицей выполняются равенства $(1-ab)c=1=c(1-ab)$. Показать, что если $d=1+bca$, то $(1-ba)d=1=d(1-ba)$. Таким образом, из обратимости элемента $1-ab$ следует обратимость элемента $1-ba$.

176. Доказать, что кольцо **идемпотентов** $< K,+,\cdot >$ $(\forall a\in K\ a^2=a)$ коммутативно.

177. Найти все гомоморфизмы поля действительных чисел в себя.

Глава 4

Элементы математической логики

4.1. Формулы и их преобразования. Двойственность

178. По мишени произведено три выстрела. Пусть A_i есть высказывание: "Мишень поражена при i-м выстреле". Что означают следующие высказывания: 1) $A_1 \vee A_2 \vee A_3$; 2) $A_1 \& A_2 \& A_3$; 3) $(\overline{A}_1 \vee \overline{A}_2) \& A_3$?

179. По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Установлено следующее:

1) если A не виновен или B виновен, то C виновен;

2) если A не виновен, то и C не виновен.

Виновен ли A?

180. Определить, кто из четырёх подозреваемых участвовал в ограблении банка, если известно:

1) если A участвовал, то и B участвовал;

2) если B участвовал, то или C участвовал, или A не участвовал;

3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал;

4) если D участвовал, то и A участвовал.

181. В санатории на берегу моря отдыхают отец, мать, сын и две дочери. До завтрака члены семьи часто купаются в море. Известно, что

1) если купается отец, то обязательно купаются мать и сын;

2) если купается сын, то обязательно купается старшая дочь;

3) мать и младшая дочь порознь не купаются;

4) кто-то из мужчин обязательно купается.

Однажды утром из дочерей купалась только одна. Кто купался в это утро?

182. Выяснить, является ли следующее рассуждение логически правильным; для этого представить каждое предложение пропозициональной формой и проверить, является ли заключение логическим следствием конъюнкции посылок.

Если инвестиции останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или увеличится безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не увеличится. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

183. В городе A живут люди, всегда говорящие правду. Жители города B, напротив, всегда лгут. У развилки двух дорог, ведущих в A и B, путешественник встречает местного жителя. Какой вопрос, требующий ответа "да" или "нет", должен задать путешественник, чтобы узнать, какая дорога ведёт в A?

184. Является ли тождественно истинной формула
$(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \vee z))$?

185. Равносильны ли формулы f и g?
1) $f = (x \vee y \vee z) \to ((x \vee y)(x \vee z)), \quad g = x \sim z$;
2) $f = (x \to y) \to z, \quad g = x \to (y \to z)$;
3) $f = \overline{(x \to y) \vee ((x \to z)y)}, \quad g = x\overline{y}(\overline{y} \to x\overline{z})$.

186. Проверить, имеют ли место следующие равносильности:
1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
2) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
3) $x(y \sim z) = xy \sim xz$;
4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
5) $x \to yz = (x \to y)(x \to z)$;
6) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;
7) $x \to (xy \to ((x \to y) \to y)z) = y \to (x \to z)$.

Говорят, что логическая функция f **сохраняет ноль (единицу)**, *если* $f(0, \ldots, 0) = 0$ *(соответственно* $f(1, \ldots, 1) = 1$*).*

187. Подсчитать число логических функций от n переменных, сохраняющих ноль.

Назовем логическую функцию **самодвойственной**, *если она является двойственной к самой себе*, т.е. $f(x_1, \ldots, x_n)$ — самодвойственная функция, если $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

188. Найти число самодвойственных логических функций от n переменных (допуская и фиктивное вхождение переменных).

189. Найти все самодвойственные логические функции от двух и трёх переменных.

190. Пусть $f(x_1, \ldots, x_m)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$ — самодвойственные функции. Доказать самодвойственность сложной функции $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1, \ldots, g_m)(x_1, \ldots, x_n)$.

4.2. Полные системы связок

191. Доказать, что система связок $\{\&, \vee, \to\}$ не является полной.

192. Выразить через стрелку Пирса $\downarrow$ $(A \downarrow B = \overline{A \vee B})$ операцию отрицания, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Многочлены Жегалкина

Введем операцию сложения по модулю 2:

$$x + y = \overline{x \sim y}.$$

193. Докажите, что $\{+, \&, 1\}$[1] — полная система связок.

Назовем **одночленом** *конъюнкцию любого числа попарно различных переменных или константу 1(пустую конъюнкцию), а* **многочленом Жегалкина** *сумму по модулю 2 попарно различных одночленов*

$$\sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

где суммирование ведётся по наборам $(i_1, \ldots, i_k)$, среди которых может быть и пустой. Пустую сумму (число одночленов равно нулю), как обычно, полагаем равной нулю.

194. Выписать все одночлены от двух переменных (x и y) и подсчитать число многочленов от двух переменных.

195. Представить многочленом Жегалкина следующие логические функции:
1) $x \vee y \vee z$; 2) $xy \vee xz \vee yz$; 3) $\overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

196. Доказать, что любая логическая функция однозначно представима многочленом Жегалкина.

[1]Константу 1 можно считать 0-арной связкой, задающей функцию, которая не имеет аргументов.

4.3. Теорема Поста

Всякое множество T логических функций, замкнутое относительно суперпозиции (т.е. такое, что любая суперпозиция функций из T входит в T), называется **функционально замкнутым классом**.

197. Выяснить, какие из указанных ниже множеств являются функционально замкнутыми классами:
1) множество функций от одной переменной;
2) множество функций от двух переменных;
3) множество $\mathbf{L}$ линейных функций (линейная функция — это многочлен Жегалкина степени 1);
4) множество $\mathbf{S}$ самодвойственных функций;
5) множество $\mathbf{P_0}$ функций, сохраняющих ноль;
6) множество $\mathbf{P_1}$ функций, сохраняющих единицу;
7) $\mathbf{P_0} \cap \overline{\mathbf{P_1}}$;
8) множество $\mathbf{A}$ всех логических функций.

198. Доказать, что если функционально замкнутый класс не пуст и не совпадает с $\mathbf{A}$, то дополнение к нему не обладает свойством функциональной замкнутости.

Пусть $E = \{0,1\}$. Упорядочим это множество, полагая $0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1$. На единичном n-мерном кубе E^n введем частичный порядок следующим образом: $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$, если для любого i имеем $x_i \leq y_i$. Логическая функция f называется **монотонной**, *если условие $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ влечет $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$.*

199. Выяснить, какие из указанных ниже функций монотонные.
1) $x \vee y$; 2) xy; 3) $x \to y$; 4) $x \to (x \to y)$;
5) $\overline{x}\,\overline{y} \sim (\overline{x} \vee \overline{y})$; 6) $xy \vee yz \vee zx$; 7) $x + y + xy$.

200. Множество $\mathbf{M}$ монотонных функций функционально замкнуто. Доказать.

Множество логических функций T называется **полным**, *если любая логическая функция представима суперпозицией функций из T. Минимальное полное множество логических функций (т.е. такое полное множество, что если из него удалить любую функцию, то оно перестанет быть полным), называется* **базисом**.

201. Привести примеры базисов из одной, двух и трёх функций.

Функционально замкнутый класс, отличный от ϕ и **A** *называется* **предполным**, *если он не содержится ни в каком функционально замкнутом классе, отличном от себя самого и от A. Известно ([24]), что существует ровно пять предполных классов:* $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{S}$. *Имеет место следующая теорема:*

Теорема Поста. *Множество логических функций T полно тогда и только тогда, когда для каждого из классов* $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{S}$ *в T есть функция, ему не принадлежащая.*

202. С помощью теоремы Поста показать, что множество функций $\{0, 1, x + y + z, xy\}$ является базисом.

203. Из множества логических функций $\{x\overline{y} \vee \overline{x}y, xy + z, (x + y) \sim z, xy \vee yz \vee zx\}$ выделить всевозможные базисы.

204. С помощью теоремы Поста доказать, что базис не может содержать более а) пяти; б) четырёх функций.

Вопросы, затронутые в настоящем параграфе, обстоятельно изучаются в монографии [24].

4.4. Нормальные формы

205. С помощью равносильных преобразований привести к ДНФ следующие формулы:
1) $(x_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_1 \vee x_3)$;
2) $(x_1 \vee x_2\overline{x}_3x_4)((\overline{x}_2 \vee x_4) \to x_1\overline{x}_3\overline{x}_4) \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1 \vee x_4$.

206. Привести к СДНФ, КНФ и СКНФ следующие формулы:
1)$x_1 \vee \overline{x}_2x_3$; 2)$x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3$; 3)$x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3$.

207. С помощью метода Блейка построить сокращённую ДНФ по заданной ДНФ:
1) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$;
2) $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;
3) $x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4$.

208. Построить сокращённую ДНФ по заданной КНФ:
1) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;
2) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;
3) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$.

209. Построить СДНФ, СКНФ и минимальную ДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ со следующей таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

210. Построить сокращённую ДНФ и все тупиковые ДНФ для функции $f = \overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z} \vee \overline{x}\ \overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}$.

211. Привести пример логической функции от n переменных, у которых любая ДНФ и любая КНФ являются совершенными.

212. Пятеро друзей решили записаться в кружок любителей логических задач: Андрей (A), Виктор (B), Семен (C), Дмитрий (D), Евгений (E). Но староста кружка предложил им выдержать вступительный экзамен. "Вы должны приходить к нам по возможности больше вечеров, однако в разных сочетаниях, соблюдая следующие условия:

1) Если A приходит вместе с E, то B должен присутствовать.

2) Если E отсутствует, то B должен быть, а C пусть не приходит.

3) A и C не могут одновременно ни присутствовать, ни отсутствовать.

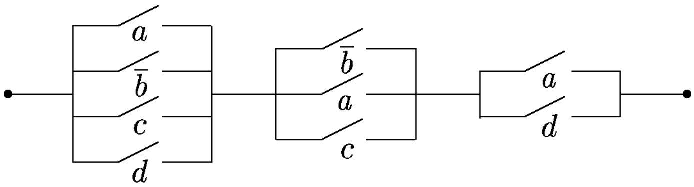
4) Если придёт E, то D пусть не приходит.

5) Если B отсутствует, то E должен присутствовать, но это в том случае, если не присутствует C. Если же C присутствует при отсутствии B, то E приходить не должен, а D должен прийти".

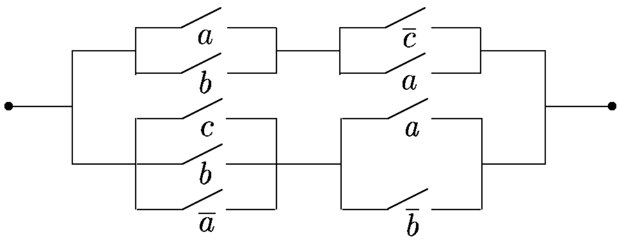
Сколько вечеров и в каком составе друзья должны приходить, чтобы выдержать экзамен?

4.5. Контактные схемы

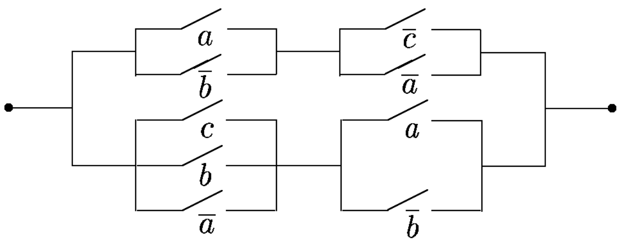
213. Упростить схему до 4-х контактов.



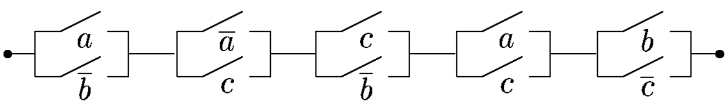
214. Упростить схему до 3-х контактов.



215. Упростить схему до 2-х контактов.



216. Упростить схему.



217. Построить контактную схему, реализующую схему голосования жюри из трёх человек (каждый член жюри голосует "за", нажимая свою кнопку, и "против", не нажимая её; лампочка зажигается лишь в том случае, когда большинство членов жюри голосует "за").

218. Построить контактную схему, реализующую схему голосования жюри из четырёх человек (предложение принимается, если за него проголосовало большинство членов жюри или если голоса разделились поровну, и за предложение подан голос председателя жюри).

219. Спроектировать контактную схему, позволяющую зажигать и тушить лампочку с помощью трёх независимых переключателей. Существует ли решение аналогичной задачи для n переключателей?

4.6. Булева алгебра

Пусть на множестве $S = \{A, B, C, ...\}$ *определены две бинарные операции, обозначаемые* $+$ *и* $\cdot$[2], *так, что при этом выполняются следующие свойства (***аксиомы булевой алгебры***):*

1. *Множество* S *замкнуто относительно операций* $+$ *и* $\cdot$.

   Для любых $A, B, C \in S$

2. $A + B = B + A,\ A \cdot B = B \cdot A$ *(коммутативность операций* $+$ *и* $\cdot$*);*

3. $A + (B + C) = (A + B) + C,\ A(BC) = (AB)C$ *(ассоциативность);*

4. $A + A = A,\ A \cdot A = A$ *(идемпотентность);*

5. $A(B+C) = AB+AC,\ A+BC = (A+B)(A+C)$ *(дистрибутивность).*

6. *Существует элемент* $O \in S$, *называемый* **нулем**, *такой, что* $\forall A \in S\ \ A + O = A$.

7. *Существует элемент* $I \in S$, *называемый* **единицей**, *такой, что* $\forall A \in S\ \ A \cdot I = A$.

8. $\forall A \in S\ \ \exists \overline{A} \in S\ \ A + \overline{A} = I,\ A \cdot \overline{A} = O$ *(существование* **обратного элемента***).*

Тогда алгебраическая структура $< S; +, \cdot >$ *называется* **булевой алгеброй**.

Данная система аксиом не является независимой: некоторые аксиомы являются следствиями других.

220. Вывести аксиому 4 из аксиом 5–8.

221. Используя только аксиомы 5, 7, 8, доказать, что $\forall A\ \ A + I = I$.

222. Вывести аксиому 6 из аксиом 5, 7, 8.

223. Доказать **закон двойственности:** *если в любом тождестве булевой алгебры заменить* $+$ *на* $\cdot$, $\cdot$ *на* $+$, I *на* O, O *на* I, *то вновь получится тождество.*

224. Вывести аксиому 3 из аксиом 4–8.

---

[2]Этот знак иногда будет опускаться.

4.7. Аксиоматические теории

Формальная аксиоматическая теория *определена, если*
1) задан **алфавит** *(множество символов);*
2) из множества **слов** *(конечных последовательностей символов алфавита) выделено множество* **формул**;
3) из множества формул выделены **аксиомы**;
4) заданы **правила вывода** *(отношения между формулами).*

Если ϱ — отношение на множестве формул и $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}) \in \varrho$, то говорят, что формула $\mathcal{A}$ есть **непосредственное следствие** *формул $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k$, или: формула $\mathcal{A}$ непосредственно выводима из гипотез $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k$. При этом используют такую запись:*

$$\frac{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k}{\mathcal{A}}.$$

Выводом *формальной теории называют последовательность формул, в которой каждая формула — либо аксиома, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул. Последнюю формулу вывода называют* **теоремой**.

Говорят, что формула $\mathcal{A}$ выводима из множества формул Γ (запись: $\Gamma \vdash \mathcal{A}$), если существует последовательность формул, в которой каждая формула — либо аксиома, либо принадлежит Γ, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул, и при этом последняя формула последовательности есть $\mathcal{A}$. Если $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k\}$, записывают также

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k \vdash \mathcal{A}.$$

В случае $\Gamma = \phi$ получаем, что $\mathcal{A}$ — теорема (запись: $\vdash \mathcal{A}$).

225. Доказать следующие свойства выводимости:
I. $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$.
II. Если $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, то $\Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$.
III. Если $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{C}$.
IV. Если $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ и $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

4.8. Исчисление высказываний

Алфавит *включает в себя*
логические символы $\bar{\ }$ и $\to$, скобки (и);
пропозициональные переменные $x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$

Формулы *определяются следующим образом:*

- *любая пропозициональная переменная является формулой;*
- *если $\mathcal{A}$ — формула, то $\overline{\mathcal{A}}$ — формула;*
- *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — формулы, то $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ — формула.*

Для сокращения записей внешние пары скобок будем иногда опускать.

Аксиомы. *Для любых формул $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ следующие формулы являются аксиомами:*
A1. $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$;
A2. $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$;
A3. $(\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{A}}) \to ((\overline{\mathcal{B}} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B})$.

Правило вывода — modus ponens (m. p.): *из формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ непосредственным следствием является формула $\mathcal{B}$:*

$$\frac{\mathcal{A},\ (\mathcal{A} \to \mathcal{B})}{\mathcal{B}}.$$

226. Доказать, что если $\Gamma \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ и $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

227. Доказать, что $\mathcal{A} \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$.

228. Доказать, что $\vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$.

229. [Теорема дедукции.] Доказать, что
$\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.

230. Получить следующие следствия из теоремы дедукции:
1) если $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, то $\vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$;
2) **[правило транзитивности]** $\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$;
3) **[правило сечения]** $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}), \mathcal{B} \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$.

231. Доказать, что

1) $\vdash \overline{\overline{\mathcal{A}}} \to \mathcal{A}$;

2) $\vdash \mathcal{A} \to \overline{\overline{\mathcal{A}}}$;

3) $\vdash (\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{A}}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$;

4) $\vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{A}})$;

5) $\vdash \overline{\mathcal{A}} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$;

6) $\vdash \mathcal{A} \to (\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{A} \to \mathcal{B}})$;

7) $\vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\overline{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$.

232. Доказать, что если $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ и $\Gamma, \overline{\mathcal{A}} \vdash \mathcal{B}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

233. Доказать, что если формула $\mathcal{A}$ выводима в исчислении высказываний, то она является тождественно истинной в алгебре высказываний.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула исчисления высказываний, содержащая пропозициональные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а σ принимает значения 0 и 1. Введём обозначение

$$\mathcal{A}^\sigma = \begin{cases} \mathcal{A}, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{\mathcal{A}}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

В частности, для пропозициональной переменной x имеем

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

234. Пусть в алгебре высказываний $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — произвольный набор значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ формулы $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а $\sigma = \mathcal{A}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Доказать, что в исчислении высказываний

$$x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n} \vdash \mathcal{A}^\sigma.$$

235. Доказать, что если формула $\mathcal{A}$, содержащая из логических связок лишь $^{-}$ и $\to$,[3] тождественно истинна в алгебре высказываний, то она выводима в исчислении высказываний.

Задачи 233 и 235 говорят о **полноте исчисления высказываний**: *множество выводимых формул исчисления высказываний совпадает с множеством тождественно истинных формул алгебры высказываний.*

Пусть в формальной аксиоматической теории вместе с каждой формулой $\mathcal{A}$ определена формула $\overline{\mathcal{A}}$. Теорию называют **противоречивой**, если найдётся такая формула $\mathcal{A}$, что одновременно выводимыми являются формулы $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{A}}$. В противном случае теория — **непротиворечивая.**

236. Доказать, что исчисление высказываний — непротиворечивая теория.

Формальную аксиоматическую теорию называют **полной в узком смысле**, *если добавление к списку аксиом любой невыводимой формулы делает теорию противоречивой.*

---

[3]Напомним, что всякую логическую функцию можно представить в таком виде.

237. Доказать, что исчисление высказываний полно в узком смысле.

238. Доказать, что ни одна из аксиом А1, А2 и А3 не выводима из двух других.

4.9. Исчисление предикатов

Алфавит *включает в себя*
предметные переменные $x, y, \ldots, x_1, y_1, \ldots$;
предикатные символы $P^{(n)}, Q^{(n)}, \ldots, P_1^{(n)}, Q_1^{(n)}, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots$;
логические символы $^{-}$ *и* $\to$;
квантор общности $\forall$ *и квантор существования* $\exists$;
служебные символы: скобки (и) и запятую.

Формулы *(а также их* **свободные** *и* **связанные** *переменные) определяются индуктивно следующим образом:*

1. *Если* $P^{(n)}$ *— предикатный символ, а* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ *— предметные переменные, то* $P^{(n)}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ *—* **атомарная формула***; предметные переменные атомарных формул называются свободными.*

2. *Если* $\mathcal{A}$ *— формула, то* $\overline{\mathcal{A}}$ *— формула; свободные и связанные переменные формулы* $\mathcal{A}$ *остаются такими же для формулы* $\overline{\mathcal{A}}$.

3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *— формулы, и при этом ни одна свободная переменная любой из формул не является связанной переменной другой формулы. Тогда* $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ *— формула, в которой свободные переменные формул* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *остаются свободными, а связанные переменные остаются связанными.*

4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— формула, для которой* x *— свободная переменная. Тогда* $\forall x\ \mathcal{A}$ *и* $\exists x\ \mathcal{A}$ *— формулы, в которых* x *— связанная переменная (остальные свободные (связанные) переменные формулы* $\mathcal{A}$ *остаются свободными (связанными)). Формулу* $\mathcal{A}$ *называют областью действия соответствующего квантора.*

Для упрощения записей верхние индексы у предикатных символов, а также некоторые пары скобок будем иногда опускать. Кроме того, определим и другие логические символы: записи $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \& \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ *будут обозначать соответственно* $\overline{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{B}}}$, $\overline{(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to \overline{\mathcal{A} \to \mathcal{B}}}$ *(именно так* *выражаются дизъюнкция, конъюнкция и эквиваленция через отрицание и импликацию в алгебре высказываний).*

239. Определить, какие из переменных следующей формулы являются свободными, а какие связанными.

$$(\forall x\ \exists y\ \ P^{(3)}(x,y,z)) \to (\forall x\ Q^{(2)}(x,t)).$$

Аксиомы. *Для любых формул $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ следующие формулы являются аксиомами:*

A1. $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$;

A2. $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$;

A3. $(\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{A}}) \to ((\overline{\mathcal{B}} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{B})$;

A4. $(\forall x\ \mathcal{A}(x)) \to \mathcal{A}(y)$ *(здесь формула $\mathcal{A}(x)$ не содержит переменной y);*

A5. $\mathcal{A}(y) \to (\exists x\ \mathcal{A}(x))$ *(здесь формула $\mathcal{A}(y)$ не содержит переменной x).*

Правила вывода.

1. *Правило modus ponens (m. p.):* $\frac{\mathcal{A},\ (\mathcal{A}\to\mathcal{B})}{\mathcal{B}}$.

2. *Правило связывания квантором общности:* $\frac{\mathcal{B}\to\mathcal{A}(x)}{\mathcal{B}\to(\forall x\ \mathcal{A}(x))}$, *где формула $\mathcal{B}$ не содержит переменной x.*

3. *Правило связывания квантором существования:* $\frac{\mathcal{A}(x)\to\mathcal{B}}{(\exists x\ \mathcal{A}(x))\to\mathcal{B}}$, *где формула $\mathcal{B}$ не содержит переменной x.*

4. *Правило переименования связанной переменной: связанную переменную формулы $\mathcal{A}$ можно всюду в этой формуле заменить другой переменной, не являющейся свободной в $\mathcal{A}$.*

240. Доказать, что

1) $\forall x\ \mathcal{A}(x) \vdash \exists x\ \mathcal{A}(x)$;

2) $\vdash \exists x\ \forall y\ \mathcal{A}(x,y) \to \forall y\ \exists x\ \mathcal{A}(x,y)$.

Интерпретация формулы. Равносильные формулы. *Интерпретация формулы исчисления предикатов состоит в указании множества M (области интерпретации) и соответствия между предикатными символами и предикатами соответствующей местности. При заданной интерпретации считают, что предметные переменные принимают значения из множества M, а логические символы и кванторы имеют обычный смысл. При этом всякая формула становится предикатом от своих свободных переменных (если таковые отсутствуют, то — высказыванием).*

241. Пусть область интерпретации — множество неотрицательных целых чисел, а предикаты $S(x,y,z)$ и $P(x,y,z)$ означают соответственно $x+y=z$ и $xy=z$. Записать формулу с использованием данных предикатов, истинную тогда и только тогда, когда
1) $x=0$; 2) $x=1$; 3) x — чётное число; 4) x — нечётное число;
5) $x<y$; 6) $x=y$; 7) $x\le y$; 8) y делится на x;
9) z — наибольший общий делитель x и y; 10) x — простое число.

242. Пусть область интерпретации — множество $\beta(A)$ всех подмножеств множества A, а предикат $P(X,Y)$ есть $X\subset Y$. Записать с использованием данного предиката формулу, означающую, что
1) $X\cup Y=Z$; 2) $X\cap Y=Z$; 3) $X=\phi$; 4) $X=A$;
5) Y — дополнение к X.

243. Ввести соответствующие предикаты, и с их помощью записать следующие высказывания:
1) Всякое натуральное число, делящееся на 12, делится на 2, 4 и 6.
2) Жители Швейцарии обязательно владеют французским, или итальянским, или немецким языком.
3) Каждый студент группы выполнил по крайней мере одну лабораторную работу.
4) Через любые две различные точки проходит единственная прямая.
5) Если α — корень многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\overline{\alpha}$ — также корень этого многочлена.
6) Функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$, сохраняет на нем знак или принимает нулевое значение.
7) Функция f непрерывна, но не является равномерно непрерывной, на интервале $(0,1)$.

Пусть формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют одинаковые множества свободных переменных и фиксирована некоторая общая для них интерпретация. Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются **равносильными в данной интерпретации**, *если они принимают одинаковые значения истинности на любом наборе значений предметных переменных. Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются* **равносильными на множестве** M, *если они равносильны в любой интерпретации, для которой множество M является областью интерпретации. Формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$* **равносильны**, *если они равносильны в любой интерпретации.*

244. Привести пример интерпретации формулы $P(x,y)$, в которой равносильны формулы $P(x,y)\&P(y,z)$ и $P(x,y)\&P(x,z)$.

245. Привести пример множества M, на котором равносильны формулы $\forall x\ P(x)$ и $\exists x\ P(x)$.

246. Равносильны ли следующие формулы:

1) $\forall x\ (P(x) \& Q(x))$ и $(\forall x\ P(x)) \& (\forall y\ Q(y))$;
2) $\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$ и $(\exists x\ P(x)) \vee (\exists y\ Q(y))$;
3) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ и $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall y\ Q(y))$;
4) $\exists x\ (P(x) \& Q(x))$ и $(\exists x\ P(x)) \& (\exists y\ Q(y))$;
5) $\forall x\ (P(x) \vee Q)$ и $(\forall x\ P(x)) \vee Q$;
6) $\exists x\ (P(x) \& Q)$ и $(\exists x\ P(x)) \& Q$;
7) $\forall x\ (P(x) \to Q)$ и $(\forall x\ P(x)) \to Q$;
8) $\exists x\ (P(x) \to Q)$ и $(\exists x\ P(x)) \to Q$;
9) $\forall x\ (Q \to P(x))$ и $Q \to (\forall x\ P(x))$;
10) $\exists x\ (Q \to P(x))$ и $Q \to (\exists x\ P(x))$;
11) $\exists x\ (P(x) \to Q)$ и $(\exists x\ P(x)) \to Q$?

Формула называется **выполнимой в данной интерпретации**, *если существует набор значений переменных, на котором она становится истинным высказыванием. Формула называется* **истинной в данной интерпретации**, *если при любом наборе значений переменных она принимает значение ИСТИНА. Формула называется* **общезначимой**, *если она истинна в любой интерпретации.*

247. Привести пример интерпретации, в которой истинной является формула $P(x) \vee \overline{P(y)}$.

248. Выполнимы ли в какой-либо интерпретации следующие формулы:
1) $\exists x\ \ \forall y\ \ P(x,x) \& \overline{P(x,y)}$;
2) $\exists x\ \ P(x) \to P(y)$;
3) $\forall x\ \ \exists y\ \ P(x) \sim \overline{P(y)}$;
4) $\exists y\ \ \forall x\ \ P(x) \sim \overline{P(y)}$?

Теорема о полноте исчисления предикатов ([35]). *Множество выводимых формул исчисления предикатов совпадает с множеством общезначимых формул.*

249. Доказать, что исчисление предикатов — непротиворечивая теория.

250. Является ли исчисление предикатов полным в узком смысле?

4.10. Рекурсивные функции

В этом разделе под множеством натуральных чисел будем понимать множество $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. *Функцию* $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, *где* $n \in \mathbf{N}$, *называют* n*-местной арифметической функцией.*

Простейшие функции:

1) $O(x) = 0$ (нулевая функция);

2) $S(x) = x + 1$ (прибавление единицы);

3) $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ (функция проектирования, или выбора аргумента).

Операторы.

1. Пусть f — m-местная, а $g_1, \ldots, g_m$ — n-местные арифметические функции, а функция $h : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ задаётся следующим образом:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тогда говорят, что функция h получена из функций f и $g_1, \ldots, g_m$ с помощью **оператора суперпозиции**.

2. Пусть f и g — соответственно $(n+2)$- и n-местная арифметические функции, а функция $h : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ задаётся следующим образом:

$$h(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n);$$

$$h(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = f(x_1, \ldots, x_n, y, h(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Тогда говорят, что функция h получена из функций f и g с помощью **оператора примитивной рекурсии**.

3. Пусть f — $(n+1)$-местная арифметическая функция, а функция $g : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ задаётся следующим образом:
$g(x_1, \ldots, x_n) = y$, если при любом $t < y$ $f(x_1, \ldots, x_n, t) > 0$, и $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Тогда говорят, что функция g получена из функции f с помощью **оператора минимизации**. При этом используют обозначение

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Арифметическая функция называется **примитивно рекурсивной**, *если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии.*

251. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций:

1) $O(x_1, \ldots, x_n) = 0$;

2) $f(x) = x + n$, где $n = const \in \mathbf{N}$;
3) $+(x, y) = x + y$;
4) $\operatorname{sg} x = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0; \\ 1, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ (сигнум);
5) $\overline{\operatorname{sg}} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0; \\ 0, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ (антисигнум).

252. Показать, что из примитивно рекурсивных функций с помощью операторов суперпозиции и примитивной рекурсии вновь получаются примитивно рекурсивные функции.

253. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций:
1) $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ если } x \geq y; \\ \quad 0, \text{ если } x < y \end{cases}$ (усечённое вычитание);
2) $|x - y|$;
3) $\cdot(x, y) = x \cdot y$;
4) x^y;
5) $x!$;
6) $\min(x, y)$;
7) $\max(x, y)$.

Пусть f — $(n+1)$*-местная арифметическая функция, а функция* g : $\mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ *задаётся следующим образом:*

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = \sum_{i=0}^{y} f(x_1, \ldots, x_n, i).$$

Тогда говорят, что функция g *получена из функции* f *с помощью* **оператора ограниченного суммирования**.

254. Доказать, что оператор ограниченного суммирования не выводит из класса примитивно рекурсивных функций.

255. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций:
1) $[x/y]$ (положить, что $[x/0] = x$;);
2) $\operatorname{rest}(x, y)$ — остаток от деления x на y (положить, что $\operatorname{rest}(x, 0) = x$);
3) $\operatorname{div}(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \operatorname{rest}(x, y) = 0; \\ 0, \text{ если } \operatorname{rest}(x, y) \neq 0; \end{cases}$
4) $\Pr(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — простое число;} \\ 0 \quad \text{в противном случае;} \end{cases}$
5) $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x;
6) $q(x) = [\sqrt{x}]$.

256. Пусть f — $(n+1)$-местная, g_1 и g_2 — n-местные примитивно рекурсивные функции, а функция $h : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ задаётся следующим образом:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=g_1(x_1,\ldots,x_n)}^{g_2(x_1,\ldots,x_n)} f(x_1, \ldots, x_n, i).$$

Доказать, что функция h — примитивно рекурсивна.

Пусть f — $(n+1)$-местная арифметическая функция, а функция $g : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ задаётся следующим образом:

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod_{i=0}^{y} f(x_1, \ldots, x_n, i).$$

Тогда говорят, что функция g получена из функции f с помощью **оператора ограниченного перемножения**.

257. Доказать, что оператор ограниченного перемножения не выводит из класса примитивно рекурсивных функций.

Арифметическая функция называется **частично рекурсивной**, *если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Частично рекурсивная функция называется* **общерекурсивной**, *если она всюду определена.*

Тезис Чёрча. *Всякая эффективно вычислимая функция является частично рекурсивной.*

Тезис Чёрча не является математической теоремой, которую можно доказать (или опровергнуть), поскольку понятие эффективной вычислимости носит интуитивный характер. Частичная рекурсивность — одна из возможных формализаций эффективной вычислимости.

258. Доказать частичную рекурсивность функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y, \text{ если } x \geq y; \\ \text{не определена, если } x < y. \end{cases}$$

259. Доказать, что общерекурсивная функция, ограниченная сверху примитивно рекурсивной функцией, является примитивно рекурсивной.

260. Пусть $p(n)$ — n-е простое число $(p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, \ldots)$. Доказать, что $p(n)$ — примитивно рекурсивная функция.

Функция Аккермана

Пусть

$$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(f}_{n\ \text{раз}}(x))\ldots)).$$

Определим следующую последовательность функций:

$$\alpha_0(x) = x + 1;\ \alpha_i(x) = \alpha_{i-1}^{[x+2]}(x).$$

261. Найти явные выражения для $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$.

262. Доказать следующие свойства функций $\alpha_i(x)$:
1) $\forall i, x\ \ \alpha_i(x) > x$;
2) $\forall i\ \ \alpha_i(x)$ — возрастающая функция от x;
3) $\forall x\ \ \alpha_i(x)$ — возрастающая функция от i;
4) $\alpha_i(x) \geq \alpha_{i-1}(\alpha_{i-1}(x))$.

263. Пусть f — примитивно рекурсивная n-местная функция, которая может быть получена из простейших функций применением (в совокупности) менее, чем k операторов суперпозиции и примитивной рекурсии. Доказать, что при всех $x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq \alpha_k(\max(x_1, \ldots, x_n)).$$

264. Доказать, что **функция Аккермана** $A(n) = \alpha_n(n)$ не является примитивно рекурсивной.

Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

Характеристической функцией множества A называется функция

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Множество A называется **примитивно рекурсивным** (**рекурсивным**), *если примитивно рекурсивна (общерекурсивна)* его *характеристическая функция.*

265. Доказать, что конечное множество примитивно рекурсивно.

266. Пусть A и B — примитивно рекурсивные множества. Доказать, что множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ — также примитивно рекурсивны.

267. Пусть f — примитивно рекурсивная функция. Доказать, что множество прообразов любого из её значений $A = \{x \mid f(x) = a\}$ примитивно рекурсивно.

Множество называется **рекурсивно перечислимым**, *если оно пусто или является множеством значений некоторой примитивно рекурсивной функции.*

268. Доказать, что всякое примитивно рекурсивное множество рекурсивно перечислимо.

Рекурсивность множества означает существование алгоритма, разрешающего проблему вхождения произвольного наперед заданного элемента $x \in \mathbf{N}$ *в данное множество. В связи с этим рекурсивные множества также называют* **разрешимыми**.

В свою очередь, рекурсивная перечислимость множества говорит о том, что существует алгоритм, в результате работы которого формируется данное множество.

Подробно изучает данные понятия теория вычислимых функций[17].

4.11. Машина Тьюринга

Многовековая практика человечества
от Евклида до Кнута не встретилась с примером
алгоритма, который нельзя было бы записать как
программу машины Тьюринга.

Н.К. Верещагин, А. Шень [17]

Английский математик Алан Тьюринг в 1936 г. с целью формализации понятия алгоритма придумал абстрактное вычислительное устройство, названное позже в его честь машиной Тьюринга.

Пусть имеется **лента**, *разбитая на* **ячейки**, *в каждой из которых записан один из символов 0 или 1. Имеется также* **управляющая головка**, *которая в каждый момент времени находится в одной из ячеек. В каждый момент времени головка находится в одном из* **внутренних состояний** $q_0, q_1, \ldots, q_m$. *Считают, что* q_1 *— начальное состояние, а* q_0 *— конечное.*

В зависимости от символа, расположенного в данной ячейке, и внутреннего состояния головка записывает в ячейку некоторый символ и либо передвигается в одну из двух соседних ячеек, либо остается в прежней, *переходя при этом в новое состояние (возможно, прежнее). В результате работы машина меняется* **конфигурация ленты** *(совокупность записанных в её ячейках символов) от начальной к конечной, тем самым по некоторому алгоритму осуществляется переработка исходных данных.*

Дадим теперь формальное описание. Пусть
$S = \{0, 1\}$ — **внешний алфавит**;
$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ — **внутренний алфавит**, *или* **множество состояний головки**;
$D = \{L, R, C\}$.

Командой *называют 6-буквенное слово вида* $q_i s_j \to s_\beta d q_\alpha$, где
$q_i, q_\alpha \in Q,\ \ s_j, s_\beta \in S,\ \ d \in D$.

Машиной Тьюринга *называют упорядоченную пару* $< Q, K >$, где Q — *внутренний алфавит, а* K — **программа** — *множество команд, удовлетворяющее следующим условиям:*
1) *оно не содержит команд, начинающихся с символа* q_0;
2) *оно не содержит двух шестерок, начинающихся с двух одинаковых символов.*

Конфигурацией ленты, *или* **словом Поста** *называют слово вида* $W = Aq_i s_j B$, где A и B — *слова в алфавите* S *(возможно, пустые).* **Начальное** *слово Поста имеет вид* $Aq_1 s_j B$. **Заключительное** *слово Поста имеет вид* $Aq_0 s_j B$.

Работа машины Тьюринга состоит в поэтапной переработке слов Поста (от начального к заключительному) в соответствии с её программой: $W^{(1)} \Rightarrow W^{(2)} \Rightarrow \ldots$; *при этом* $W^{(n+1)} = \left(W^{(n)}\right)'$, где W' *из* W *получается по следующему правилу.*

Пусть $W = Aq_i s_j B$. *Тогда*
1) *если* $i = 0$, *машина* **останавливается** *и* W — *заключительное слово Поста — результат работы машины Тьюринга;*
2) *если* $i > 0$, *но в* K *нет команды, начинающейся с символов* $q_i s_j$, то *машина* **сломалась** *(*W' не определено*)*;
3) *если* $i > 0$ *и в* K *есть команда* $q_i s_j \to s_\beta d q_\alpha$, то *при*
а) $d = R$
  а1) $W' = As_\beta q_\alpha B$ *в случае* $B \neq \phi$,
  а2) $W' = As_\beta q_\alpha 0$ *в случае* $B = \phi$,
б) $d = L$
  б1) $W' = A_1 q_\alpha s_k s_\beta B$ *в случае* $A = A_1 s_k$,
  б2) $W' = q_\alpha 0 s_\beta B$ *в случае* $A = \phi$,

в) $d = C$

$W' = Aq_\alpha s_\beta B$.

Программу, моделирующую работу машины Тьюринга (автор — Максим Абушаев), можно найти в локальной сети кафедры прикладной математики ЮУрГУ
`H:/students/Учебные материалы/EVNIN/TIURING`.

Через a^n обозначим n-буквенное слово в алфавите S, все символы которого есть a; при $n = 0$ будем иметь пустое слово.

Пусть f — арифметическая n-местная функция. Говорят, что машина Тьюринга **вычисляет** *функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если любое начальное слово Поста вида*

$$q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} \dots 0 1^{x_n} 0$$

она переводит в заключительное слово

$$q_0 0 1^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} 0.$$

Если при этом не приписывались нули слева, то будем говорить, что машина Тьюринга **правильно вычисляет** *функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, или: функция f* **правильно вычисляется** *(машиной Тьюринга).*

269. Какую функцию $f(x)$ вычисляет машина Тьюринга со следующей программой?

$q_1 0 \to 0 R q_2$; $q_5 1 \to 0 R q_2$;
$q_2 1 \to 1 R q_3$; $q_3 0 \to 0 L q_6$;
$q_3 1 \to 1 L q_4$; $q_6 1 \to 1 L q_0$;
$q_4 1 \to 0 R q_5$; $q_2 0 \to 0 C q_0$.

270. Построить машины Тьюринга, правильно вычисляющие следующие функции:

1) $O(x) = 0$; 2) $S(x) = x + 1$; 3) $I_1(x, y) = x$;
4) $f(x) = 2x$; 5) $f(x, y) = x + y$; 6) $f(x) = x \dot{-} 1$.

Если машина Тьюринга перерабатывает слово W в слово W', не приписывая нули при этом на ленте ни справа, ни слева (т.е. в процессе работы не возникают ситуации а2 и б2), будем использовать запись $W \models\!\!\Rightarrow W'$.

271. Построить машины Тьюринга, следующим образом перерабатывающие слова Поста:

1) [перенос нуля] $Z:\quad q_1 001^x 0 \models\!\!\Rightarrow q_0 01^x 00;$
2) [сдвиг вправо] $S^+:\quad q_1 001^x 0 \models\!\!\Rightarrow 01^x q_0 0;$
3) [сдвиг влево] $S^-:\quad 01^x q_1 0 \models\!\!\Rightarrow q_0 01^x 0;$
4) [транспозиция] $T:\quad 01^x q_1 01^y 0 \models\!\!\Rightarrow 01^y q_0 01^x 0;$
5) [удвоение] $D:\quad q_1 01^x 0^{x+3} \models\!\!\Rightarrow q_0 01^x 01^x 00.$

Машиной Тьюринга ${}_\alpha(M)_\beta$ называется программа (множество команд), полученная из программы машины M следующим образом:
1) при $i \neq 0$ во всех командах q_i заменяется на $q_{i+\alpha}$;
2) q_0 заменяется на q_β.

На множестве машин Тьюринга введем функцию l: если M — машина Тьюринга с множеством состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$, то $l(M) = m$.

Композитом *MN машин M и N называется машина Тьюринга с множеством состояний $\{q_0, q_1, \ldots, q_{l(M)+l(N)}\}$ и программой*

$${}_0(M)_{l(M)+1} \cup_{l(M)} (N)_0.$$

Введем обозначение M^n следующим образом: $M^1 = M$, а для любого натурального i $M^{i+1} = M^i M$.

272. Пусть машины M и N следующим образом перерабатывают слова Поста. $M: A \Rightarrow B' q_0 s_\alpha B''$; $N: B' q_1 s_\alpha B'' \Rightarrow C$.
Убедитесь в том, что композит MN переводит слово Поста A в слово C.

273. Машина Тьюринга $C_n = ((S^+T)^{n-1} D (TS^-)^{n-2} T)^n$ действует так:

$$C_n:\ q_1 01^{x_1} 01^{x_2} \ldots 01^{x_n} 0^z \models\!\!\Rightarrow 01^{x_1} 01^{x_2} \ldots 01^{x_n} q_0 01^{x_1} 01^{x_2} \ldots 01^{x_n} 00,$$

где $z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n + 2$. Проверьте это.

274. Постройте машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$.

275. Пусть функции $f(x_1, \ldots, x_m), g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$ правильно вычисляются машинами Тьюринга. Тогда и суперпозиция этих функций $f(g_1, \ldots, g_m)(x_1, \ldots x_n)$ обладает тем же свойством. Доказать.

276. Пусть функция $g(x)$ получена из функции $f(x, y)$ с помощью оператора минимизации $g(x) = \mu y[f(x, y) = 0]$. Доказать, что если функция f правильно вычислима, то и функция g правильно вычисляется машиной Тьюринга.

Имеет место следующая теорема[35].

Теорема. *Множество частично рекурсивных функций совпадает с множеством функций, которые правильно вычисляются машиной Тьюринга.*

Глава 5

Комбинаторика

5.1. Сочетания

277. Вычислить: C_7^2, C_{20}^0, C_{40}^1, C_{35}^{35}, C_8^4, C_{15}^{13}.

278. Найти число подмножеств X множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, обладающих следующими свойствами:
1) $|X| = 3$;
2) $|X| = 5,\ 1 \in X$;
3) $|X| = 6,\ 2 \notin X$;
4) $|X| = 7,\ \{0,1\} \subset X,\ 2 \notin X$;
5) множество X состоит из трёх чётных и двух нечётных чисел;
6) $|X| \leq 5$.

279. На окружности последовательно отмечены точки $A_1, \ldots, A_{12}$. Сколько существует
1) хорд с концами в отмеченных точках;
2) треугольников с вершинами в отмеченных точках;
3) выпуклых четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках;
4) треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8;
5) треугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5?

280. На окружности отмечено n точек. Точки соединяются всевозможными хордами; известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри круга. Найти:
1) число точек пересечения хорд внутри круга;
2) количество частей, на которые хорды делят круг.

281. На прямой l отмечено 8 точек, а на параллельной ей прямой m $(l \neq m)$ — 11 точек. Сколько существует
1) треугольников с вершинами в отмеченных точках;
2) выпуклых четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

282. n человек в совокупности выписывают k журналов, причем каждый выписывает два журнала, каждый журнал выписывают четверо, а каждая пара журналов выписывается только одним человеком. Найти n и k.

283. Две команды играют в волейбол до 4 побед. Сколько существует разных вариантов изменения счёта в игре по партиям?

284. Сколькими способами можно разложить 4 белых и 3 чёрных шара по 6 различным ящикам?

285. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии: ни один ящик не должен быть пустым.

286. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы

1) в каждом ящике оказалось не менее двух шаров;
2) в каждом ящике оказалось не более 5 шаров;
3) оказалось не более двух пустых ящиков?

287. Найти коэффициент при x^{100} в разложении многочлена

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^3.$$

288. Доказать, что

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \cdots \sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = C_{m+n}^{n+1}.$$

289. Пусть n — произвольное натуральное число, большее 1. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы

1) n; 2) не более, чем n

слагаемых, каждое из которых есть n-я степень натурального числа.

290. Дан квадрат. Каждая его сторона разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Сколько существует 1) прямоугольников, 2) квадратов, ограниченных проведёнными линиями?

291. В правлении банка 7 человек. Каково должно быть минимальное число замков от сейфа и как следует распределить ключи между членами правления (каждый член правления может получить ключи от нескольких замков), чтобы любое большинство сейф могло открыть, а любое меньшинство — не могло?

292. Каким числом способов можно прочитать слово "абракадабра", двигаясь вправо или вниз по таблице?

А	Б	Р	А	К	А
Б	Р	А	К	А	Д
Р	А	К	А	Д	А
А	К	А	Д	А	Б
К	А	Д	А	Б	Р
А	Д	А	Б	Р	А

293. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $ABCD$, стороны которого лежат на линиях сетки, причём длина отрезка AD в k раз больше длины отрезка AB (k — натуральное число). Рассматриваются всевозможные пути, проходящие по линиям сетки и кратчайшим образом ведущие из A в C. Доказать, что среди этих путей в k раз больше тех, у которых первое звено лежит на AD, чем тех, у которых первое звено лежит на AB.

294. Изучите поведение последовательности (a_k), где $a_k = C_n^k$ (при фиксированном n), с точки зрения возрастания-убывания.

295. Имеется 12 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Доказать, что существует разносторонний треугольник с вершинами в этих точках.

296. Имеется карточная колода из 52 карт. Каким числом способов можно раздать по 13 карт четырём игрокам?

5.2. Полиномиальная формула. Комбинаторные тождества

297. Найти коэффициент при x^k в разложении многочленов:
1) $(x+2)^{10}$, $k=3$;
2) $(1-2x)^7$, $k=4$;
3) $(\sqrt{x}-\frac{2}{x})^8$, $k=-5$;
4) $(3\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt{x})^9$, $k=11$;
5) $(x^2-x+2)^8$, $k=7$;
6) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})^6$, $k=2$.

298. С помощью формулы бинома Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

доказать следующие тождества:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^k C_n^k = 1$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k = n2^{n-1}$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k C_n^k = 0$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$; 8) $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (C_{2n-1}^k)^2 = 0$.

299. С помощью комбинаторных рассуждений доказать:
1) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k = n2^{n-1}$; 2) $\sum\limits_{k=m}^{n-r+m} C_k^m C_{n-k}^{r-m} = C_{n+1}^{r+1}$.

*Пусть $E = \{0, 1\}$. Назовём n-**мерным кубом** n-ю декартову степень этого множества E^n (множество всех двоичных последовательностей длины n). Элементы E^n —* **вершины куба***. Множество вершин с фиксированными значениями $n-k$ координат называют* **гранью размерности** *k.*

300. Пусть i_k — число граней размерности k у n-мерного куба. Вычислить i_k для всех допустимых значений k и доказать, что

$$i_0 - i_1 + i_2 - \ldots + (-1)^{n-1} i_{n-1} = 1 - (-1)^n. \qquad (*)$$

301. Доказать, что формула $(*)$ имеет место и для n-мерной пирамиды (её задают $n+1$ вершин, а любые $k+1$ вершин определяют k-мерную грань, $k = 0, 1, \ldots, n$).

5.3. Формула включения-исключения

302. На кафедре лингвистики работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский язык, семеро — немецкий, шестеро — французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Сколько человек знают 1) все три языка; 2) ровно два языка; 3) только английский язык?

303. В сборнике [53] предлагается для решения следующая задача.

В группе из 25 студентов 12 изучают латынь, 10 — греческий и 9 — санскрит. Для каждых из двух языков найдётся ровно пять студентов, изучающих оба эти языка. Сколько студентов изучают все три языка?

Корректна ли эта задача?

304. 1) Показать, что количество натуральных чисел, делящихся на n и не превосходящих положительного числа x, равно $[x/n]$.
2) Сколько есть чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7?
3) Сколько есть четырёхзначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7?
4) Сколько есть чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся ни на одно из чисел 6,10 и 15?
5) Показать, что если $n = 30m$, то количество натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6,10 и 15, равно $22m$.

305. Пусть $n > 5$. Показать, что простых чисел в множестве $\{n+1, n+2, \ldots, n+30\}$ не больше восьми.

306. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по n точек, разбивающих её на $n+1$ равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника ABC?

307. Сколько существует 6-значных номеров (первые цифры могут быть и нулями) с суммой цифр 27?

308. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 1, 2 и 5 рублей. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать k монет?

5.4. Задача о беспорядках и встречах

309. С помощью рекуррентных соотношений найти число беспорядков D_n для $n = 1, \ldots, 8$.

310. Доказать, что $D_n = [\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}]$.

311. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга и чтобы ни одна ладья не стояла на главной диагонали?

312. Сколькими способами можно раскрасить клетки шахматной доски 8×8 в 8 цветов так, чтобы клетки, имеющие общую сторону, были бы окрашены в разные цвета и чтобы в каждом горизонтальном ряду встречались все 8 цветов?

313. Две колоды карт, содержащие по 52 карты, тщательно тасуются, после чего сравниваются карта за картой. Какова вероятность того, что не будет ни одной пары совпадающих карт?

314. Для числа перестановок n элементов с k встречами $D_{n,k}$ доказать тождества:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} D_{n,k} = n!$; 2) $D_{n,k} = \frac{n}{k} D_{n-1,k-1}$ $(k = 1, \ldots, n)$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k D_{n,k} = n!$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k D_k = n!$;

5) $\sum\limits_{k=m}^{n} C_k^m D_{n,k} = \frac{n!}{m!}$; 6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2 D_{n,k} = n!$.

315. Случайным образом выбирается перестановка чисел $1, 2 \ldots, n$. Пусть ξ — количество элементов, остающихся на своих местах. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

316. Секретарше нужно отправить n различных писем по n различным адресам. Она подписывает конверты и случайным образом вкладывает письма в конверты. Сколько в среднем писем дойдет до своего адресата?

5.5. Числа Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи (f_n) *задается соотношениями:* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $\forall n \in \mathbf{N_0}$ $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

317. Прыгун перемещается слева направо вдоль клетчатой ленты, совершая прыжки на одну или две клетки. Каким числом способов он может переместиться из 1-й клетки в n-ю?

318. Доказать следующие утверждения:

1) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$;

2) $1 + f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}$;

3) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

4) $f_k f_{k+1} - f_{k-1} f_k = f_k^2$;

5) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

6) $1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{f_{n-1} f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}$;

7) $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$;

8) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$;

9) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$;

10) $f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{3n}$;

11) если n делится на m, то f_n делится на f_m;

12) для наибольшего общего делителя двух чисел Фибоначчи справедливо соотношение $(f_n, f_m) = f_{(n,m)}$;

13) если $m > 2$ и f_n делится на f_m, то n делится на m.

319. Найти все n, для которых $f_n = n^2$.

320. Доказать тождество $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n-k}^k = f_{n+1}$.

321. Вычислить трехдиагональный определитель размера $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

322. Доказать, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$.

323. Доказать тождество **[Кассини, 1680 г.]** $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

324. Продолжив последовательность чисел Фибоначчи влево (сохраняя рекуррентное соотношение), докажите, что $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$.

325. Доказать тождества

1) $f_{n+k} \cdot f_{m-k} - f_n \cdot f_m = (-1)^n \cdot f_{m-n-k} \cdot f_k$;

2) $2f_n^2 = f_{n-2} \cdot f_{n+2} + f_{n-1} \cdot f_{n+1}$;

3) $f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$.

326. Доказать для чётного n

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{f_n}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{f_{n+2}}\right).$$

Вывести отсюда равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{f_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

327. Доказать для нечётного n

$$\ln\left(\frac{f_n+1}{f_n-1}\right) = \ln\left(\frac{f_{n+1}+1}{f_{n+1}-1}\right) + \ln\left(\frac{f_{n+2}+1}{f_{n+2}-1}\right).$$

Вывести отсюда равенство

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{f_{2n}+1}{f_{2n}-1} = 3.$$

328. Найти число двоичных последовательностей длины n, не содержащих единиц ни в каких двух соседних позициях.

329. Доказать, что из p нулей и q единиц можно составить C_{p+1}^q различных последовательностей, в каждой из которых нигде не окажется рядом две единицы.

330. С помощью двух предыдущих задач дать комбинаторное доказательство тождества задачи 320.

331. Найти число различных покрытий прямоугольника $2 \times n$ прямоугольниками 1×2.

332. Требуется составить набор из 10 гирек (каждая гирька весит целое число граммов), с помощью которых можно взвесить любой вес, выражающийся целым числом от 1 до 55, даже если любая из гирек может быть потеряна. Предполагается, что гирьки кладутся на одну чашку весов, а взвешиваемый груз — на другую.

333. Имеется а) 76, б) 199 карточек, на которых написаны различные числа. Карточки разложены на столе по окружности числом вниз. Требуется найти какие-нибудь три идущие подряд карточки такие, что число, написанное на средней из этих трех карточек, больше, чем на каждой из двух соседних. Перевернуть одну за другой можно не более а) 10, б) 12 карточек. Как надо действовать, чтобы наверняка добиться успеха?

334. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n} < 4$.

335. Доказать, что $2^n f_n = 2 \sum_{m=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_n^{2m+1} 5^m$.

336. Пусть p — простое число, большее 5. Доказать, что

1) $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv f_p (\mathrm{mod}\, p)$;

2) $f_p^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

337. Доказать, что если p — простое число, большее 5, то ровно одно из чисел f_{p-1} или f_{p+1} делится на p.

338. Можно ли из последовательности чисел, обратных натуральным, выбрать а) сколь угодно длинную; б) бесконечную подпоследовательность, в которой каждое число равно разности двух предшествующих?

339. Найти все функции $f(x)$, непрерывные на R и для которых имеет место тождество $f(f(x)) = f(x) + x$.

340. Назовем множество *эгоцентричным* (или *э-множеством*), если оно содержит свою мощность (число элементов). (Например, $\{2,3\}$, $\{3,5,8\}$ — э-множества, а $\{3,5\}$, $\{2,5,8\}$ не являются таковыми). Найти число подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n\}$, являющихся *минимальными* э-множествами (или *мэ-множествами*), т.е. такими эгоцентричными множествами, чьи собственные подмножества — не э-множества. (Пример. $\{2,3\}$ — мэ-множество в отличие от $\{1,2\}$).

С числами Фибоначчи тесно связаны числа Лукаса, о которых *см. конец §5.7.*

5.6. Производящие функции

Производящая функция является устройством, отчасти напоминающим мешок. Вместо того, чтобы нести отдельно много предметов, что могло бы оказаться затруднительным, мы собираем их вместе, и тогда нам нужно нести лишь один предмет — мешок.

Д. Пойа

Найти производящие функции следующих последовательностей:

341. $a_n = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\ldots,N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$

342. $a_n = \begin{cases} n+1, & n = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$

343. $a_n = \begin{cases} (n+1)(n+2), & n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ 0, & n \geq N. \end{cases}$

344. $a_n = \alpha^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

345. $a_n = n^2,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть (a_n), (b_n) — последовательности, $A(x)$ и $B(x)$ — соответствующие производящие функции. Выразить $A(x)$ через $B(x)$ при следующих соотношениях между последовательностями:

346. $a_0 = 0,\ \ a_n = b_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$

347. $a_n = b_{n+1}$.

348. $a_n = b_{n+k}, k \in \mathbf{N}$.

349. $a_n = \alpha^n b_n$.

350. $a_0 = 0,\ a_n = b_n - b_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$

351. $a_n = b_{n+1} - b_n$.

352. $a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$.

353. $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$.

354. $a_n = n b_n$.

355. $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ $\ (C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)$.

356. $a_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n b_k$. Доказать, что $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{n-k} C_k^n a_k$.

357. Пусть $a_n = \sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{2j},\ n \in \mathbf{N_0}$;
$b_0 = 0,\ b_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n+j}^{2j+1},\ n \in \mathbf{N}$. Доказать, что
1) $a_{n+1} = a_n + b_{n+1},\quad b_{n+1} = a_n + b_n$;
2) $A(x) - 1 = xA(x) + B(x),\quad B(x) = x(A(x) + B(x))$.
3) Найти $A(x)$ и $B(x)$.
4) Получить явные формулы для a_n и b_n.

358. Показать, что функция $(1-4x)^{-1/2}$ является производящей для последовательности $a_n = C_{2n}^n$.

359. Доказать тождество $\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k} = 4^n$.

5.7. Рекуррентные соотношения

360. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n;$$

уравнение $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ имеет два различных ненулевых корня x_1 и x_2. Доказать, что имеет место тождество

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

для некоторых c_1 и c_2, однозначно определяемых a_1 и a_2.

361. Найти формулу общего члена последовательности:
1)$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n; \quad a_1 = 10, \ a_2 = 16;$
2)$a_{n+2} = 2\cos\alpha a_{n+1} - a_n; \quad a_1 = \cos\alpha, \ a_2 = \cos 2\alpha.$

362. Найти количество n-значных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, в которых первая и последняя, а также любые две соседние цифры различны.

363. Сколько существует раскрасок вершин n-угольника, если соседние вершины должны быть разного цвета, а всего имеется k цветов?

364. Пусть n-й член последовательности задается формулой

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n, \quad \text{где } x_1 \neq x_2.$$

Доказать, что для последовательности имеет место рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n, \quad \text{где } \alpha = x_1 + x_2, \ \beta = -x_1 x_2.$$

365. Найти $ax^4 + by^4$, если

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1, \\ ax+by & = & 1, \\ ax^2+by^2 & = & 2, \\ ax^3+by^3 & = & 3; \end{array}\right. \quad 2)\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1, \\ ax+by & = & 2, \\ ax^2+by^2 & = & 5, \\ ax^3+by^3 & = & 14; \end{array}\right. \quad 3)\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 23, \\ ax+by & = & 79, \\ ax^2+by^2 & = & 217, \\ ax^3+by^3 & = & 691. \end{array}\right.$$

366. Решить задачу 24 с помощью задачи 364.

367. Доказать, что для любого натурального n число

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

является целым и нечётным.

368. Найти первые 100 знаков после запятой у числа $(5+\sqrt{26})^{101}$.

369. Доказать, что числа

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{99}-(1-\sqrt{2})^{99}\right) \text{ и } \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{100}-(1-\sqrt{2})^{100}\right)$$

являются целыми и взаимно простыми числами.

370. Доказать, что целая часть числа $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{1000}$ является чётным числом.

371. Доказать, что число $[(3+\sqrt{5})^n]+1$ делится на 2^n.

372. Пусть $b_1 = 4$, $b_2 = 14$, $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n$. Обозначим через S_n площадь треугольника со сторонами $b_n - 1$, b_n, $b_n + 1$, а через r_n радиус вписанной в него окружности. Получить рекуррентные формулы для S_n и r_n.

373. Доказать, что для любого чётного n число $\operatorname{tg}^n 15^o + \operatorname{ctg}^n 15^o$ представимо в виде суммы квадратов трех последовательных целых чисел.

374. Пусть $k \in \mathbf{N}, k > 1$. Доказать периодичность функции, для которой при любом x

$$f(x+1) + f(x-1) = 2\cos\frac{2\pi}{k} f(x).$$

375. Найти число двоичных последовательностей длины 11, не содержащих единиц ни в каких трех соседних позициях.

376. Найти общие решения рекуррентных соотношений:
1) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$;
2) $a_{n+3} + 10a_{n+2} + 32a_{n+1} + 32a_n = 0$;
3) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

377. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:
1) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + a_{n+1} - 3a_n = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 27$;
2) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$.

378. Пусть $P_i(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^i = \sum_{k=0}^{9i} a_{i,k}x^k$.
1) Доказать, что $a_{i,k} = a_{i,9i-k}$, где $0 \le k \le 9i$.
2) Доказать, что $a_{2i,9i} = \sum_{k=0}^{9i} a_{i,k}^2$.
3) С помощью тождества $P_{i+1}(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^9) \cdot P_i(x)$ выразить $a_{i+1,k}$ через $a_{i,0}, a_{i,1}, \ldots, a_{i,k}$.
4) Вычислить $a_{6,27}$.

379. Найти коэффициент при x^2 в многочлене
$P_n(x) = (\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2$ (здесь n пар скобок).

380. Последовательность (a_n) задана соотношениями $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+1} = a_{n-1} + \sqrt{12a_n(a_n+1)+1}.$$

Доказать, что все члены этой последовательности — целые числа.

381. Пусть $p \neq 0, 1/2, 1$, $q = 1-p$. Доказать, что

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i = \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}.$$

382. Чёрт предложил карточному шулеру: "Каждый раз, как ты перейдешь мост и вернешься обратно, твои деньги в кармане удвоятся, но за это ты мне заплатишь в первый раз 50 руб, во второй — 100 руб, в третий — 150 руб и т.д." Шулер прошел по мосту 17 раз вперед и назад. Сначала он значительно обогащался, однако затем не только спустил то, что приобрел, но даже остался должен чёрту 360 руб 72 коп. Сколько денег у шулера было изначально? Как бы изменилась ситуация, если бы этих денег было на копейку больше?
(Журнал "Математический вестник", 1914 г.)

383. Бесконечная последовательность нулей и единиц 01101001100101... строится так: первая цифра — нуль; следующий шаг повторяется бесконечное число раз: *к уже построенному куску последовательности приписывается новый кусок той же длины, получаемый из него заменой нулей на единицы, а единиц на нули.* Является ли эта последовательность, начиная с некоторого места, периодической?

Числа Лукаса

Последовательность чисел Лукаса (l_n) задается соотношениями:
$l_0 = 2$, $l_1 = 1$, $\forall n \in \mathbf{N_0}$ $l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$.

384. Пусть $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Показать, что числа Фибоначчи и Лукаса задаются формулами

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n); \quad l_n = \alpha^n + \beta^n.$$

385. Доказать тождества

1) $f_{2n} = f_n \cdot l_n$;

2) $l_n^2 = l_{2n} + 2 \cdot (-1)^n$;

3) $f_k \cdot f_n = \frac{1}{5}(l_{k+n} - (-1)^n l_{k-n})$.

В статье А.Н. Рудакова [43] приведено доказательство следующего результата.

Теорема (Э. Лукас, 1876 г.). *Пусть $q = 4k + 3$ — простое число. Число $M = 2^q - 1$ является простым тогда и только тогда, когда число Лукаса $l_{2^{q-1}}$ делится на M.*

С помощью этой теоремы Э. Лукас установил простоту числа $M = 2^{127} - 1$, которое с 1877 г. по 1951 г. являлось самым большим известным простым числом. Как сообщается в [43], доказательство простоты указанного 38-значного числа M потребовало около 100 часов вычислений (напомним, дело происходило 125 лет назад).

386. Пусть $r_i = l_{2^i}$. Показать, что $r_1 = 3$, и имеет место рекуррентное соотношение $r_{i+1} = r_i^2 - 2$.

387. Написать программу, определяющую, является ли число $2^q - 1$ простым, если известно, что $q = 4k + 3$ — простое число.

Глава 6

Теория Пойа

388. Пусть $S = \{a, b, c, d\}$ и $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ — группа подстановок, действующая на множестве S:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix},$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}.$$

1) Убедиться в том, что G — группа, составив для неё квадрат Кэли.
2) Отношение эквивалентности на S порождается группой G. С помощью леммы Бернсайда найти число классов эквивалентности.
3) Выписать классы эквивалентности в явном виде.

389. Составляются трехбуквенные слова из букв a и b. Два различных слова считаются эквивалентными, если они получаются друг из друга при перемене местами крайних букв; например, $abb \sim bba$. Определить число классов эквивалентности, пользуясь леммой Бернсайда. Выписать классы эквивалентности в явном виде.

390. Вокруг стола рассаживаются n человек. Сколько существует различных расположений, если отождествлять такие, которые получаются одно из другого сдвигом всех людей по часовой стрелке на произвольное, но одинаковое для всех число мест?

391. На листках бумаги пишут числа от 00000 до 99999 (числа, меньшие 10000, дополняют слева нулями). Будем считать, что при переворачивании цифры 0, 1, 8 не меняются, а цифры 6 и 9 переходят друг в друга. Например, для чисел 06981 и 18690 можно приготовить только один листок. Сколько всего листков понадобится?

392. Составляются ожерелья из бусин трех цветов. Каждое ожерелье состоит из 1) 5; 2) 6 бусин. Не будем различать ожерелья, получающиеся друг из друга поворотом в плоскости. Пользуясь леммой Бернсайда, найти число различных ожерелий.

393. Решить предыдущую задачу в предположении, что не различаются ожерелья, получающиеся друг из друга поворотом в пространстве.

394. Решить задачи 392, 393 с помощью следствия из теоремы Пойа.

395. Сколько ожерелий можно составить из двух красных, двух зелёных и двух синих бусин в предположениях задач 392 и 393?

396. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него p красными и q синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено? Две погремушки считаются одинаковыми, если могут быть получены друг из друга передвижением шариков по кольцу или переворачиванием.

Еще один подход к задаче о числе ожерелий продемонстрирован в §8.4.

Некоторые общие результаты по подсчету числа ожерелий содержатся в §8.10.

397. Сколькими способами можно раскрасить в k цветов 1) рёбра; 2) грани тетраэдра, который может свободно вращаться в пространстве?

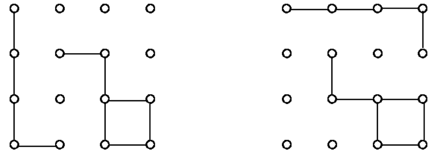
398. Сколькими способами можно раскрасить в k цветов 1) вершины; 2) рёбра; 3) грани куба, который может свободно вращаться в пространстве?

399. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить вершины куба в два цвета так, чтобы вершин каждого цвета было поровну?

400. Сколькими способами можно раскрасить 5 рёбер куба в синий цвет, а остальные рёбра в красный цвет?

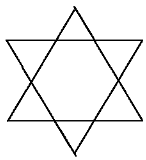
401. Найти число существенно различных способов размещения восьми одинаковых пометок на шахматной доске размера 8×8. Два способа разметки считаются существенно различными, если их нельзя преобразовать друг в друга вращением доски или отражением относительно любой из четырёх осей симметрии.

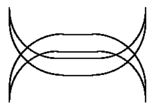
402. Конструктор интегральных схем строит чипы с 16 элементами, расположенными в виде матрицы 4×4. Чтобы реализовать различные схемы, эти элементы нужно соединять; непосредственно соединяются только элементы, соседние по горизонтали или по вертикали, например



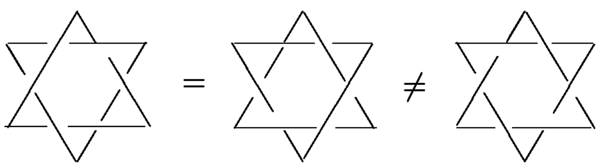
Чтобы напылить межкомпонентные соединения, необходим фотошаблон рисунка соединений. Для двух рисунков, показанных выше, используется один и тот же фотошаблон (схемы симметричны относительно диагонали). Сколько требуется фотошаблонов для того, чтобы на этих чипах реализовать все возможные рисунки соединений?

403. Следующие две картинки называются соответственно "Звезда Давида" и "Мечи Магомета":





Представим себе, что эти фигуры составлены из кусков проволоки, спаянных в точках пересечений. Сколько существует различных звёзд и мечей с точки зрения вида пересечений? Две фигуры отождествляем, если одну из них можно переместить в пространстве так, что они становятся неразличимыми по виду пересечений. Например,



См. также задачи 445, 485 и §8.10.

Глава 7

Введение в теорию графов

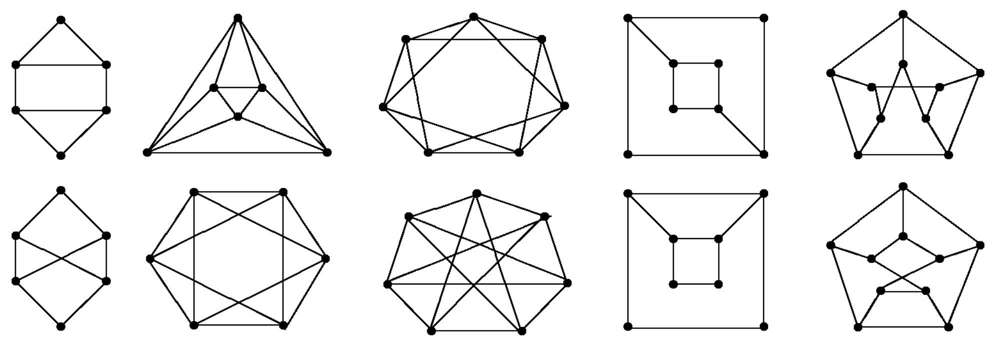
7.1. Определения и примеры

Напомним некоторые стандартные обозначения.
N_n — *пустой граф с* n *вершинами;*
K_n — *полный граф с* n *вершинами;*
$K_{n,m}$ — *полный двудольный граф, в долях которого* n *и* m *вершин;*
C_n — *циклический граф с* n *вершинами;*
$W_n = N_1 + C_{n-1}$ — *колесо;*
E_n — *граф, соответствующий* n*-мерному кубу.*

Простой граф — граф без петель и кратных рёбер.

404. Пусть G_n — простой граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$, в котором вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда числа i и j взаимно просты. Изобразить графы G_4 и G_6 и найти их матрицы смежности. Показать, что если $m < n$, то $G_m \subset G_n$.

405. Для графов из каждой пары графов, изображенных на рисунке, выяснить, изоморфны ли они.



а) б) в) г) д)

406. Найти все (с точностью до изоморфизма) простые графы, в которых не более пяти вершин.

407. Сколько существует попарно неизоморфных простых графов с 10 вершинами и 1) 44; 2) 43 рёбрами?

408. Сколько существует помеченных простых графов с n вершинами? Сколько из них имеет m рёбер?

409. Доказать, что в простом графе с не менее чем двумя вершинами найдутся две вершины одинаковой степени.

410. Если в простом графе G с $n > 2$ вершинами в точности две имеют одинаковую степень, то либо в G, либо в $\overline{G}$ имеется ровно одна изолированная вершина. Доказать.

411. Пусть в простом графе никакие две вершины одинаковой степени не соединены цепью длины 2. Доказать, что в графе есть висячая вершина.

412. Для любого конечного множества неотрицательных целых чисел, в котором количество нечётных чисел чётно, существует граф, для которого это множество является множеством степеней его вершин. Доказать.

413. Показать, что рёберные графы $L(K_n)$ и $L(K_{n,m})$ являются регулярными.

414. Доказать, что при $n > 2$ звёздный граф $K_{1,n}$ не является рёберным графом.

415. Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — степени вершин графа G. Сколько вершин и рёбер содержит рёберный граф $L(G)$?

416. Доказать, что простой граф изоморфен своему рёберному графу тогда и только тогда, когда он является дизъюнктным объединением циклических графов.

417. Привести примеры (когда это возможно)

1) двудольного графа, являющегося регулярным;

2) кубического графа с 9 вершинами;

3) (для каждого n) простого графа с n вершинами и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ рёбрами;

4) (для каждого n) простого графа с n вершинами, изоморфного своему рёберному графу;

5) связных графов, являющихся регулярными графами степени 4.

418. Какие из платоновых графов являются двудольными?

419. [Теорема Кёнига.] *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину.* Доказать.

420. Доказать, что в E_n нет циклов нечётной длины.

421. Доказать, что в непустом двудольном регулярном графе доли содержат равное число вершин.

422. Может ли регулярный степени выше 1 двудольный граф иметь мосты?

423. В связном графе степени четырёх вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Доказать, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

424. Пусть в графе среди любых четырёх вершин найдётся вершина, смежная с тремя остальными. Доказать, что радиус графа равен единице.

425. Найти дополнения к графам, соответствующим тетраэдру, кубу и октаэдру.

426. Вычислить

1) $C_4 + N_2$; 2) $K_n + K_m$; 3) $\overline{K}_{n,m}$; 4) $\overline{G + H}$ (G и H — простые графы).

427. Пусть G, H и K — простые графы; доказать или опровергнуть следующие равенства:

1) $G \cup (H + K) = (G \cup H) + (G \cup K)$;

2) $G + (H \cup K) = (G + H) \cup (G + K)$.

428. Найти матрицы смежности графов K_n, N_n и C_n.

429. Чем характерна матрица смежности двудольного графа?

430. Какова связь между матрицами смежности простого графа и его дополнения?

431. Пусть A — матрица смежности регулярного графа степени k. Доказать, что k есть собственное значение матрицы A. Найти отвечающий ему собственный вектор.

432. В графе Петерсена найти циклы длины 5, 6, 8 и 9.

433. В графе Петерсена найти разрезы из 3, 4 и 5 рёбер.

434. Доказать, что дополнение к (простому) несвязному графу есть связный граф.

435. Доказать, что рёберный граф связного графа связен.

436. Пусть G — граф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и матрицей смежности A. Доказать, что число маршрутов длины k из v_i в v_j равно (i, j)-му элементу матрицы A^k. Показать также, что если G — простой граф, то число **треугольников** (циклов длины 3) в G равно $\operatorname{tr} A^3/6$ (где $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ — **след** матрицы A). Верно ли, что число циклов длины 4 равно $\operatorname{tr} A^4/8$?

437. Основываясь на результате предыдущей задачи, предложите алгоритм определения диаметра графа по его матрице смежности.

438. Пусть в простом графе G степень каждой вершины не меньше r, где $r \geq 2$. Доказать, что в G существует цикл длины $\geq r+1$.

439. Доказать, что при $n \geq 10$ верно утверждение: если в простом графе $2n$ вершин и степень каждой вершины не меньше n, то в графе имеется подграф $K_{3,3}$.

440. [Экстремальная теорема Турана.] Пусть G — простой граф с $2n$ вершинами, не содержащий треугольников. Доказать, что в G не более n^2 рёбер и привести пример, когда эта верхняя граница достигается.

441. Найти максимальное число рёбер в простом графе с $2n+1$ вершинами, не содержащем треугольников.

442. Найти радиус и диаметр графа Петерсена.

443. Графом Клебша называют граф, образованный вершинами, рёбрами и главными диагоналями четырёхмерного куба. Другими словами, в качестве вершин графа Клебша можно рассматривать упорядоченные двоичные наборы $0000, 0001, \ldots, 1111$; и вершины являются смежными тогда и только тогда, когда их двоичные представления различаются либо в одном, либо во всех разрядах. Найти радиус и диаметр графа Клебша.

444. Для каждого n построить пример графа, центр которого состоит из n вершин и не совпадает с множеством всех вершин.

445. Пусть а) $n=4$; б) $n=5$.

1) Найти цикловой индекс группы подстановок на множестве рёбер полного графа с n вершинами, порождённых перестановками вершин.

2) С помощью теоремы Пойа найти число попарно неизоморфных простых графов с n вершинами и m рёбрами.

7.2. Гамильтоновы и эйлеровы графы

446. Для каких чисел m и n следующие графы являются а) эйлеровыми; б) гамильтоновыми: 1) K_n; 2) $K_{m,n}$; 3) W_n; 4) E_n?

447. Привести пример эйлерова графа, не являющегося гамильтоновым, и гамильтонова графа, не являющегося эйлеровым.

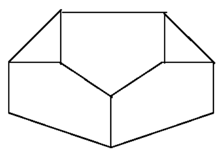
448. Пусть G — двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин соответственно. Доказать, что

1) если G — гамильтонов граф, то $m = n$;

2) если G — полугамильтонов граф, то $|m - n| \leq 1$.

449. Может ли а) конь; б) король; в) ладья побывать на каждой клетке шахматной доски размером 8×8 ровно один раз и последним ходом возвратиться в исходную позицию? Решить такую же задачу для доски 7×7.

450. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям (см. рис.) так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз?

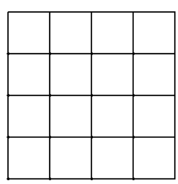


451. При каких n можно пометить вершины выпуклого $\frac{n(n-1)}{2}$-угольника так, чтобы для каждой пары различных натуральных чисел, не превосходящих n, нашлась сторона, концы которой помечены этими числами?

452. Доказать, что если граф G связен и имеет $k > 0$ вершин нечётной степени, то минимальное число не имеющих общих рёбер цепей, объединение которых содержит каждое ребро графа G, равно $k/2$.

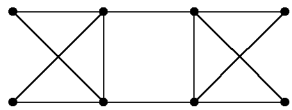
453. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы изготовить каркас куба с ребром 10 см?

454. Можно ли сетку, составленную из единичных квадратов,



представить в виде объединения 1) восьми ломаных длины 5; 2) пяти ломаных длины 8?

455. С помощью алгоритма Флёри найти эйлеров цикл в графе на рисунке.



456. Любой разрез эйлерова графа состоит из чётного числа рёбер. Доказать.

457. Доказать, что рёберный граф простого эйлерова графа является одновременно эйлеровым и гамильтоновым.

458. Доказать, что рёберный граф простого гамильтонова графа является гамильтоновым.

459. Пусть G — простой негамильтонов граф, содержащий $n \geq 3$ вершин. Доказать, что если несмежные вершины u и v соединяет гамильтонова цепь, то

1) число вершин, не смежных с u, не меньше числа вершин, смежных с v (и наоборот);

2) $\rho(u) + \rho(v) \leq n - 1$.

460. С помощью предыдущей задачи доказать **теорему О.Оре**. *Если в простом графе с n вершинами ($n \geq 3$) для любой пары несмежных вершин u и v выполняется неравенство*

$$\rho(u) + \rho(v) \geq n,$$

то граф является гамильтоновым.

461. При каком наименьшем числе рёбер в простом графе с 10 вершинами этот граф заведомо гамильтонов?

462. [Теорема Л. Поша.] *Пусть в графе G имеется $n \geq 3$ вершин и для любого натурального $k \leq \frac{n-1}{2}$ число вершин со степенью, не превосходящей k, меньше k. Тогда G — гамильтонов граф.* Доказать.

7.3. Деревья

463. Найти все (с точностью до изоморфизма) деревья, в которых не более семи вершин.

464. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее количество верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

465. Доказать, что каждое дерево является двудольным графом. Какие деревья являются полными двудольными графами?

466. Если в дереве не менее двух рёбер, то его радиус меньше диаметра. Доказать.

467. Доказать, что центр дерева состоит из одной вершины, если диаметр дерева есть чётное число, и двух вершин в противном случае.

468. Верно ли, что в дереве с нечётным диаметром любые две простые цепи наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро?

469. Выразите радиус дерева через его диаметр.

470. Пусть n — количество вершин дерева, r — его радиус. Доказать, что $n \geq 2r$.

471. Верно ли, что если диаметр графа равен $k > 2$, то граф имеет стягивающее дерево диаметра k?

472. Для каждого из указанных ниже графов найти какое-нибудь стягивающее дерево и фундаментальную систему циклов относительно него.

1) K_5; 2) $K_{3,3}$; 3) W_5; 4) C_6; 5) граф Петерсена.

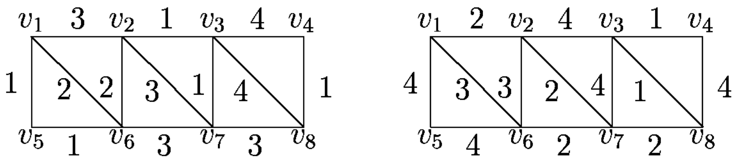
473. Пусть T_1 и T_2 — стягивающие деревья связного графа G. Показать, что для любого ребра e из T_1 существует ребро f из T_2 такое, что после "замены" в T_1 ребра e на ребро f вновь получится стягивающее дерево. (С помощью подобной процедуры можно построить последовательность стягивающих деревьев $T_1, \dots, T_2$, в которой каждое дерево получается из предыдущего заменой одного ребра).

474. Показать, что если $\rho_1, \dots, \rho_n$ — заданные натуральные числа, то дерево с $n > 1$ вершинами, в котором степень v_k равна ρ_k (для каждого k), существует в том и только в том случае, если $\sum_{k=1}^{n} \rho_k = 2(n-1)$.

475. Доказать, что число рёберно-помеченных деревьев с $n \geq 3$ вершинами (в которых помечены не вершины, а рёбра) равно n^{n-3}.

476. Показать, что при больших n вероятность того, что случайным образом выбранная вершина дерева с n вершинами является висячей, приближенно равна $1/e$.

477. Найти стягивающее дерево минимального веса для каждого графа на рис.



Корневые деревья

*Дерево с выделенной вершиной (***корнем***) называют* **корневым деревом**.

478. Найти число помеченных корневых деревьев с n вершинами.

В книгах, посвященных исследованию структур данных (например, [30], [42]), корневое дерево определяют рекурсивно следующим образом.

Корневое дерево T *— это непустое конечное множество T с элементами, называемыми вершинами, такими, что*

1) *имеется выделенная вершина, называемая корнем данного дерева;*

2) *если множество остальных вершин непусто, то оно разбивается на m множеств $T_1, \ldots, T_m$, каждое из которых в свою очередь является корневым деревом.*

Деревья $T_1, \ldots, T_m$ называются **поддеревьями** *данного корня. Из определения следует, что каждая вершина дерева является корнем некоторого своего дерева. Число поддеревьев дерева с корнем r —* **порядок** *вершины r. Вершины нулевого порядка называют* **листьями***; остальные вершины называют* **внутренними**.

479. Сколько листьев имеет дерево с k внутренними вершинами, порядок каждой из которых равен двум?

480. В турнире по олимпийской системе ("проигравший выбывает") участвует n человек. Сколько встреч будет проведено?

481. Некто купил курицу. После того, как она снесла два яйца, её съели. Из яиц вывелись цыплята. Петухов съедали сразу, а куриц — после того, как они сносили по два яйца. И т.д. В какой-то момент вывелись одни петухи, и процесс закончился. Сколько куриц было съедено, если съели 97 петухов?

482. Сколько листьев имеет дерево, в котором (кроме листьев) содержится n_1 вершин порядка 1, n_2 вершин порядка 2,..., n_s вершин порядка s?

Бинарное дерево T *определяется* рекурсивно *следующим образом:* $T = \phi$ (пустое дерево) *или* $T = < L, c, R >$ *— упорядоченная тройка, где c —*

корень *дерева (элемент некоторого множества),* L *и* R *— бинарные деревья;* L *и* R *называют соответственно левым и правым поддеревом дерева* T. Вершинами *дерева называют его корень, корни его поддеревьев, корни поддеревьев его поддеревьев и т.д.*

483. Найти число различных бинарных деревьев с n вершинами.

Высота *бинарного дерева — наибольшая длина цепи от корня до какой-либо другой вершины. Дерево называют* **сбалансированным**, *если для любой его вершины высоты левого и правого поддеревьев различаются не более чем на 1 (например, если одно поддерево пусто, то второе должно состоять только из своего корня).*

484. Пусть высота сбалансированного бинарного дерева равна n. Найти наибольшее и наименьшее число вершин в этом дереве.

Бинарное дерево назовем **полным**, *если расстояния от всех листьев до корня равны между собой.*

485. Будем раскрашивать вершины полного бинарного дерева в два цвета, отождествляя при этом раскраски, которые могут быть получены друг из друга перестановками левого и правого поддеревьев некоторых вершин. Подсчитать число различных раскрасок в два цвета полного бинарного дерева высоты 2 с помощью а) леммы Бернсайда; б) следствия из теоремы Пойа.

7.4. Укладки графов

486. При каком k можно так расположить 6 точек на плоскости и соединить их попарно непересекающимися отрезками, чтобы каждая точка была соединена ровно с k другими?

487. При каких n графы G_n (определение см. в задаче 404) планарны?

488. Проверить формулу Эйлера, связывающую число вершин, рёбер и граней плоского графа, для следующих графов: 1) W_n; 2) $K_{2,n}$; 3) графа, соответствующего клетчатому полю $s \times t$.

489. Пусть f_k — число k-угольных граней выпуклого многогранника. Доказать, что $3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 12 + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + 4f_{10} + \ldots$.

490. Пусть в связном плоском графе каждая грань ограничена s рёбрами, а степень каждой вершины равна ρ. Доказать, что $\frac{1}{s} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$, где m — количество рёбер графа.

491. С точностью до изоморфизма найти все регулярные связные плоские графы, в которых каждая грань ограничена одним и тем же числом рёбер.

492. Всегда ли планарен рёберный граф планарного графа?

493. Пусть в простом графе G не менее 11 вершин. Доказать, что граф G и его дополнение $\overline{G}$ не могут быть одновременно планарными.

494. Используя тот факт, что в простом плоском графе есть вершина степени не больше 5, доказать, что его вершины можно раскрасить не более чем в 6 цветов так, чтобы смежные вершины были разного цвета.

495. Планарен ли простой регулярный граф степени 5, в котором 10 вершин?

496. Доказать, что не существует плоского графа с пятью гранями такого, что любые две его грани имеют общее ребро.

497. [Теорема Эрдёша.] *Пусть R и r — максимальное и минимальное расстояния, определяемые n точками на плоскости. Тогда R встречается не более n раз, а r — не более $3n-6$ раз.* Доказать.

498. В любом плоском графе найдутся две грани с одинаковым числом сторон. Доказать.

Назовем **картой** *связный плоский граф без мостов.*

499. Грани карты G можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две смежные грани были разного цвета, тогда и только тогда, когда G — эйлеров граф. Доказать.

Числом скрещиваний $\mathrm{cr}(G)$ *графа G называется наименьшее число попарных пересечений рёбер, получаемых при изображении графа на плоскости. В этом определении* **пересечение** *понимается так: жордановые кривые, соответствующие двум рёбрам, пересекаются в точке, которая либо не соответствует никакой вершине графа, либо соответствует вершине, не инцидентной хотя бы одному из данных двух рёбер.*

Ясно, что $\mathrm{cr}(G)=0$ *тогда и только тогда, когда G — планарный граф.*

500. Пусть граф G образован вершинами, сторонами и главными диагоналями правильного $2n$-угольника. Доказать, что $\mathrm{cr}(G)=1$.

501. Найти $\mathrm{cr}(K_5)$ и $\mathrm{cr}(K_{3,3})$.

502. Доказать, что
а) при $n \geq 5$ $\mathrm{cr}(K_n) \geq C_n^4/5$;
б) при $m,n \geq 3$ $\mathrm{cr}(K_{m,n}) \geq C_m^2 C_n^2/9$.

503. Найти число скрещиваний графов K_6, $K_{3,4}$ и $K_{4,4}$.

504. Доказать, что $\mathrm{cr}(K_{m,n}) \le \left[\frac{m}{2}\right] \cdot \left[\frac{m-1}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Подробно вопрос о числе скрещиваний полного графа и полного двудольного графа изучается в книге [44].

505. Доказать, что в любом графе G порядка n найдётся такая вершина, что после её удаления (вместе с инцидентными ей рёбрами) возникнет граф G', удовлетворяющий условию

$$\mathrm{cr}(G) - \frac{4\,\mathrm{cr}(G)}{n} \ge \mathrm{cr}(G').$$

506. Пусть P — граф Петерсена. Доказать, что $\mathrm{cr}(P) = 2$.

7.5. Ориентированные графы. Алгоритмы

507. Пусть A — матрица смежности орграфа с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Какой смысл имеют суммы строк и суммы столбцов матрицы A? Доказать, что (i, j)-й элемент матрицы A^k равен числу путей длины k из v_i в v_j.

508. В дереве с n вершинами рёбра ориентируются случайным образом. Какова вероятность того, что найдётся вершина, из которой ведут пути ко всем остальным вершинам?

509. Пусть G — связный граф. Зафиксируем некоторую его вершину v. Доказать, что можно так ориентировать рёбра графа, что в получившемся орграфе существует путь от v до любой другой вершины.

Ориентированный граф называют **сильно связным**, *если для любых его вершин u и v существует путь из u в v.*

510. В связном графе степени всех вершин чётны. Доказать, что можно так ориентировать рёбра графа, чтобы

1) получившийся орграф был сильно связным;

2) для каждой вершины полустепень исхода была равна полустепени захода.

511. В ориентированном графе со связным основанием для каждой вершины полустепень исхода равна полустепени захода. Доказать, что орграф эйлеров.

512. Доказать, что существует циклическая последовательность длины k^n, составленная из k различных символов, в которой встречаются все возможные строки из этих символов длины n.

513. Доказать, что существует последовательность длины $k^n + k - 1$, составленная из k различных символов, в которой встречаются все возможные строки из этих символов длины n.

514. По кругу расставлены вазы с конфетами. Ход состоит в том, что из какой-то вазы берутся все конфеты и раскладываются по одной в каждую вазу, начиная со следующей вазы (движение происходит по часовой стрелке). Доказать, что за несколько ходов из любого первоначального распределения конфет по вазам можно получить любое другое.

515. В связном графе чётное число рёбер. Доказать, что можно так ориентировать его рёбра, что в получившемся орграфе полустепени исхода всех вершин будут чётными.

516. В орграфе, основанием которого служит колесо W_n, нет источников и стоков. Доказать, что орграф сильно связный.

Связный граф называют **ориентируемым**, *если ориентацией его рёбер можно получить сильно связный орграф.*

517. [Теорема Роббинса.] *Связный граф является ориентируемым тогда и только тогда, когда в нем нет мостов.* Доказать.

518. Найти кратчайший путь от 1-й вершины до всех остальных (см. рис. 1, а, б).

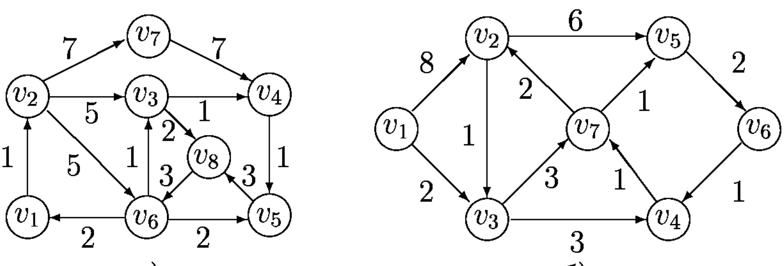
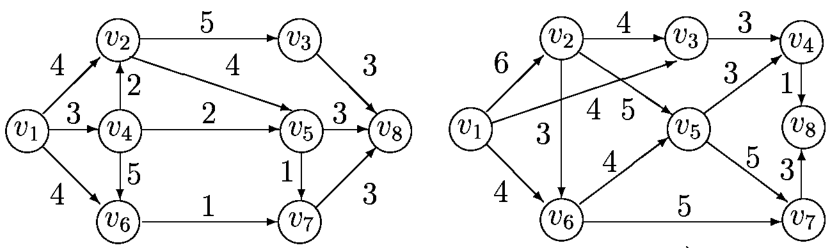


Рис. 1

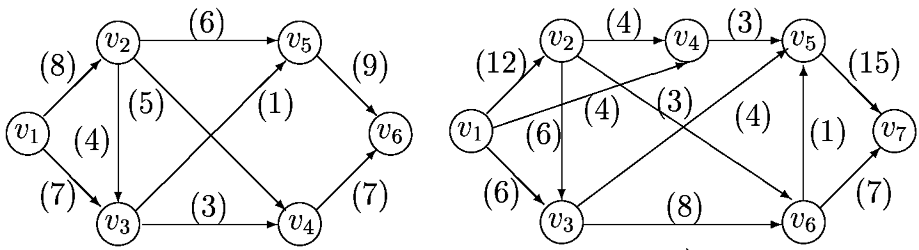
519. Пусть проекты описываются взвешенными графами (см. рис. 2, а, б), где дуги соответствуют операциям (этапам) проекта, а вес дуги обозначает время выполнения соответствующей операции. Найти наименьшее время выполнения проектов, критические пути и резервы времени для выполнения каждой операции.



а) б)

Рис. 2

520. Найти максимальные потоки и минимальные разрезы в транспортных сетях (см. рис. 3, а, б). Число рядом с дугой есть её пропускная способность.



а) б)

Рис. 3

521. Пусть имеется m неженатых мужчин, n незамужних женщин и k свах. У каждой свахи есть список своих клиентов; между любыми мужчиной и женщиной из этого списка сваха может устроить брак. Для i-й свахи число устроенных ею за год браков не превосходит числа b_i. Перевести задачу нахождения наибольшего числа браков, которые могут устроить свахи за год, в задачу нахождения максимального потока в некоторой сети.

7.6. Турниры

Орграф, в котором каждые две (различные) вершины соединены ровно одной дугой, называют **турниром.** *Таким образом, турнир получается из полного графа ориентацией рёбер.*

522. Доказать, что сумма квадратов полустепеней исхода всех вершин турнира равна сумме квадратов полустепеней захода.

523. Доказать следующие утверждения.

1) Существует турнир, в котором нет ни одного замкнутого пути.

2) При этом орграф обязательно содержит ровно по одному источнику и стоку.

3) Существует ровно $n!$ турниров, имеющих по n вершин и обладающих свойством из п. 1).

524. Доказать, что при любом n, не равном 2 и 4, существует турнир с n вершинами, в котором для любой упорядоченной пары вершин (u, v) найдётся путь из u в v, состоящий из одной или двух дуг.

Числом очков *вершины турнира называют её полустепень исхода.*

525. В турнире все вершины имеют одно и то же число очков. Доказать, что для произвольных вершин u и v найдётся путь из u в v из одной или двух дуг.

526. Пусть u — вершина турнира с наибольшим числом очков. Доказать, что для любой вершины v есть путь из u в v, состоящий из одной или двух дуг.

527. Будем говорить, что вершины u и v орграфа являются **взаимно достижимыми**, если существуют пути из u в v и из v в u. Показать, что это отношение является отношением эквивалентности. Показать также, что в случае турнира соответствующие классы эквивалентности можно пронумеровать таким образом, что из вершины, принадлежащей классу с меньшим номером, идут дуги во все вершины из классов с большими номерами.

528. Показать, что если турнир не является сильно связным графом, то в нём существует дуга, изменение ориентации которой приводит к сильной связности графа.

529. Доказать, что любой турнир полугамильтонов.

530. Если турнир с n вершинами сильно связен, то в нём есть циклы длины 3, 4,..., n (в частности, он гамильтонов). Доказать.

Треугольники

Назовём **треугольником** *замкнутый путь из трёх дуг.*

531. У двух вершин турнира одинаковое число очков. Доказать, что в турнире есть треугольник.

532. Доказать, что если турнир — сильно связный граф, то любая его вершина входит в некоторый треугольник.

533. Доказать, что число треугольников в турнире с n вершинами равно

$$C_n^3 - \sum_{i=1}^{n} C_{s_i}^2,$$

где для каждого i через s_i обозначено число очков i-й вершины.

534. Доказать, что число треугольников в турнире с n вершинами не больше $\frac{n^3-n}{24}$ при нечётном n и $\frac{n^3-4n}{24}$ при чётном n.

7.7. Доминирование, независимость, покрытия, паросочетания

"Во многих прикладных задачах требуется найти в конечном множестве объектов максимальную систему объектов, попарно не связанных друг с другом, или же выбрать минимальную систему объектов, связанных со всеми другими. Формулировки подобных задач на языке теории графов приводят к понятиям независимости и покрытия." ([7])

Подмножество $V' \subset V$ вершин графа $G =< V, E >$ называется **доминирующим** *(или* **внешне устойчивым***), если каждая вершина из $V \setminus V'$ смежна с некоторой вершиной из V'.*

Наименьшую мощность доминирующего множества графа называют **числом доминирования** *графа (или* **числом внешней устойчивости***) и обозначают $\delta(G)$.*

535. Найти число доминирования для следующих графов:
K_n; W_n; $K_{n,m}$; C_n; графа Петерсена; графа Клебша (определение см. в задаче 443).

536. Пусть в графе нет изолированных вершин. Доказать, что в нем можно указать такое доминирующее множество, дополнение к которому также является доминирующим множеством.

537. Показать, что для регулярного графа G степени k с n вершинами справедливо неравенство $\delta(G) \geq \frac{n}{1+k}$. Привести пример графа, для которого в указанном соотношении имеет место равенство.

538. Найти число доминирования d-мерного куба при $d = 1, 2, 3, 4, 7$.

539. Показать, что $\delta(E_{2^m-1}) = 2^{2^m-m-1}$.

540. Пусть граф G порядка n имеет диаметр 2. Доказать, что $\delta(G) < \sqrt{n \ln n + 1}$.

Множество попарно несмежных вершин (рёбер) графа называется **независимым**. *Независимое множество —* **максимальное**, *если оно не является подмножеством некоторого другого независимого множества. Независимое множество с наибольшим числом элементов называется* **наибольшим.**

541. Доказать, что наибольшее независимое множество является максимальным.

542. Доказать, что независимое множество вершин является максимальным тогда и только тогда, когда оно доминирующее.

543. Показать на примерах, что доминирующее множество вершин наименьшей мощности может быть независимым, а может и не быть таковым.

Используется также следующая терминология. Независимое множество вершин называют **внутренне устойчивым.** *Независимое множество рёбер называют* **паросочетанием.**

Мощность наибольшего независимого множества вершин (рёбер) графа G обозначают $\alpha_0(G)$ (соответственно $\alpha_1(G)$).

544. *Доказать, что* $\alpha_0(E_n) = 2^{n-1}$.

Говорят, что вершина и ребро графа **покрывают** *друг друга, если они друг другу инцидентны. Подмножество $V' \subset V$ вершин графа $G =< V, E >$ называется* **покрытием** *графа, если вершины из V' покрывают (в совокупности) все рёбра графа (т.е. каждое ребро из E инцидентно хотя бы одной вершине из V').*

545. Доказать, что подмножество вершин графа является его покрытием тогда и только тогда, когда дополнение к нему — независимое множество.

Подмножество $E' \subset E$ рёбер графа $G =< V, E >$ называется **рёберным покрытием** *графа, если рёбра из E' покрывают (в совокупности) все вершины графа (т.е. каждая вершина из V инцидентна хотя бы одному ребру из E'). Таким образом, нет рёберных покрытий лишь у графов, имеющих изолированные вершины. Наименьшую мощность покрытия (рёберного покрытия) графа G обозначают $\beta_0(G)$ (соответственно $\beta_1(G)$).*

546. Найти $\alpha_0(G), \beta_0(G), \alpha_1(G), \beta_1(G)$ для следующих графов: $C_n; K_n; W_n; K_{n,m}$; графа Петерсена.

547. Пусть граф G содержит n вершин. Доказать, что $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n$.

548. Доказать, что для любого графа G справедливо неравенство $\beta_0(G) \geq \alpha_1(G)$.

549. Пусть граф G порядка n не содержит изолированных вершин. Тогда $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n$. Доказать.

550. Для любого двудольного графа G справедливо, что $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$. Доказать.

Паросочетание называется **совершенным**, *если оно одновременно является рёберным покрытием.* **k-фактором** *графа называется его остовный регулярный подграф степени k. Таким образом, совершенное паросочетание и 1-фактор есть совпадающие понятия.*

551. Доказать, что если в графе 8 вершин, и степень каждой вершины равна 4, то в графе есть совершенное паросочетание.

552. В графе $2n$ вершин ($n \geq 2$). Какие три вершины ни взять, среди них найдётся смежная с двумя другими. Доказать, что в графе существует совершенное паросочетание.

553. Доказать, что кубический граф, являющийся гамильтоновым, распадается на совершенные паросочетания.

554. Доказать, что граф Петерсена не распадается на совершенные паросочетания. Получить отсюда негамильтоновость графа Петерсена.

555. Привести пример кубического графа, в котором нет совершенного паросочетания.

556. Если граф, все вершины которого имеют нечётную степень, распадается на совершенные паросочетания, то в нем либо все рёбра — мосты, либо нет мостов. Доказать.

557. Показать, что граф K_{2n} распадается на $2n-1$ совершенное паросочетание.

558. Можно ли раскрасить рёбра графа K_n в $n-1$ цветов так, чтобы все рёбра, исходящие из произвольной вершины, были разного цвета?

559. Показать, что число различных совершенных паросочетаний в (помеченном) графе K_{2n} равно $\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!!$.

560. Показать, что число различных наибольших паросочетаний в (помеченном) графе K_{2n+1} равно $(2n+1)!!$.

561. Показать, что число различных совершенных паросочетаний в (помеченном) графе $K_{n,n}$ равно $n!(n-1)!\dots 2!$.

Задача о свадьбах

Пусть G — двудольный граф с долями V_1 и V_2. **Совершенным паросочетанием из** V_1 **в** V_2 *называется паросочетание в G, покрывающее V_1 (т.е. для всякой вершины из V_1 в паросочетании найдётся инцидентное ей ребро).*

Пусть $A \subset V$ — подмножество вершин графа $G =< V, E >$. **Окружением** *множества A называют множество*

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v\in A} \Gamma(v) \setminus A,$$

где $\Gamma(v)$ — множество вершин, смежных с v.

Имеет место следующая теорема (см., например, [7] или [8]):

Теорема [Ф. Холл, 1935 г.] *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе G существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall A \subset V_1 \quad |\Gamma(A)| \geq |A|.$$

562. В любом непустом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание. Доказать.

563. Любой непустой регулярный двудольный граф распадается на совершенные паросочетания. Доказать.

564. Задача о свадьбах. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно одновременно женить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?

565. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. В каждой деревне общее число женихов и невест не больше половины общего их числа. Доказать: можно всех переженить так, что в каждой паре жених и невеста будут из разных деревень.

566. На танцевальном вечере каждый юноша знаком с k девушками, а каждая девушка знакома с k юношами. Доказать, что можно провести k (медленных) танцев так, чтобы каждый участник вечера станцевал со всеми своими знакомыми (противоположного пола).

567. На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток так, что на каждой вертикали и горизонтали оказалось по две помеченные клетки. Доказать, что на помеченных клетках можно расставить 8 чёрных и 8 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло по одной белой и одной чёрной фигуре.

568. Вуз посылает 8 юношей и 8 девушек на стажировку по восьми специальностям в 8 зарубежных университетов, причем каждый университет принимает по два человека и учит их двум разным специальностям, и каждой из восьми специальностей учат два университета. Всегда ли можно так распределить студентов, чтобы в каждом университете стажировались юноша и девушка, и при этом как юноши, так и девушки обучались (в совокупности) по всем восьми специальностям?

Глава 8

Дополнительные задачи

Ultra posse nemo obligatur. [1]

8.1. Инвариант и полуинвариант

Ниже предлагаются задачи, в каждой из которых задан некоторый объект и описаны преобразования, которые разрешено производить над этим объектом. Каждый раз задается вопрос, можно ли объект из одного состояния перевести в другое.

Предположим, что существует некоторая характеристика объекта, которая не меняется при указанных преобразованиях (это и есть **инвариант задачи**). *Если для двух состояний объекта значения инварианта различны, то ответ на заданный вопрос будет, очевидно, отрицательным.*

569. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В вершинах A, B, D и середине M ребра AA_1 сидели четыре мухи. В некоторый момент одна из мух взлетела и, пролетев параллельно прямой, соединяющей некоторых двух из оставшихся мух, села на поверхность куба. Затем снова какая-то муха совершила аналогичный маневр. И т.д. Могут ли мухи после нескольких перелетов оказаться в вершинах A, B, D, A_1?

570. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

571. Имея числа a и b, можно получить число $a + b + ab$. Можно ли, имея первоначально числа 1 и 4, с помощью (многократного) применения указанной операции, получить а) 1999; б) 2000?

572. Числа a и b можно заменить числами $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли, имея первоначально числа 2, $\sqrt{2}$ и $1/\sqrt{2}$, с помощью (многократного) применения указанной операции, получить числа 1, $\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$?

---

[1] Никого нельзя обязать сверх его возможностей (лат.).

573. На льду лежат три шайбы. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого шайбы оказаться на исходных местах?

574. Допускаются следующие преобразования квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$: 1) можно менять местами a и c; 2) многочлен $f(x)$ можно заменить на многочлен $f(x-k)$, где k — произвольная константа. Можно ли из $x^2 - 3x - 4$ получить $x^2 - x - 1$?

575. По кругу растут n деревьев. Первоначально на каждом дереве сидит один чиж. Иногда какие-нибудь два чижа перелетают в противоположных направлениях, причем каждый чиж садится на дерево, соседнее с тем, с которого он взлетел. Могут ли чижи собраться на одном дереве?

576. По кругу расположены 12 лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). Допускается (многократное) выполнение следующей операции: изменить состояния любых трех рядом расположенных лампочек. Вначале горит одна лампочка. Можно ли зажечь все лампочки?

577. В вершине A_1 12-угольника стоит минус, в остальных — плюс. Можно одновременно менять знак в любых а) 6; б) 4; в) 3 последовательных вершинах. Доказать, что нельзя добиться того, чтобы минус стоял в вершине, соседней с A_1, а в остальных вершинах были плюсы.

Полуинвариант — *(числовая) характеристика объекта, которая меняется монотонно (например, увеличивается) при каждом преобразовании.*

578. По кругу выписаны n чисел. Если последовательно против часовой стрелки стоят числа a, b, c, d и $(a-d)(b-c) < 0$, то числа b и c можно поменять местами. Доказать, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

579. Числа a и b можно заменить числами $a + \frac{b}{2}$ и $b - \frac{a}{2}$. Можно ли, имея первоначально два ненулевых числа, с помощью (многократного) применения указанной операции, прийти к исходному набору чисел?

580. Каждый член парламента имеет не более $2k+1$ врагов. Доказать, что парламент можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь в своей палате не более k врагов.

При решении двух следующих задач используется понятие **чётности перестановки**.

581. Имеются катушечный магнитофон, пять катушек с магнитной лентой и одна пустая катушка. Можно ли добиться того, чтобы каждая лента оказалась на той же катушке, но перемотанная?

582. В плоской квадратной коробке размещены 15 одинаковых фишек квадратной формы, одно место остается свободным. Можно ли, не вынимая фишек из коробки, а лишь передвигая их друг за другом на свободное место, перейти от одной конфигурации к другой?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

583. Двое по очереди пишут цифры $2k$-значного числа, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Может ли второй игрок добиться того, чтобы полученное число делилось на 9, если первый стремится ему помешать? 1) $k = 15$; 2) $k = 10$.

584. Пусть вершины правильного $2n$-угольника занумерованы по порядку числами от 1 до $2n$. Доказать, что нельзя занумеровать вершины другого правильного $2n$-угольника так, чтобы при любом совмещении многоугольников (в плоскости) для некоторой вершины совпадали оба номера.

585. При каких n в таблице $n \times n$

1	2	3	$\ldots$	n
n	1	2	$\ldots$	$n-1$
$n-1$	n	1	$\ldots$	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2	3	4	$\ldots$	1

можно выбрать n чисел от 1 до n так, чтобы любые два из них стояли в разных строках и разных столбцах?

586. Окружность разбита $2n$ точками на равные дуги. Доказать, что у любой замкнутой ломаной с вершинами во всех точках есть параллельные звенья.

587. Имеется бесконечная клетчатая доска. Фигура "волк" за один ход перемещается на n клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали) и на $n+1$ клетку в перпендикулярном направлении. За какое наименьшее число ходов "волк" сможет переместиться из какой-нибудь клетки в соседнюю (т.е. имеющую с исходной общую сторону)?

588. В n-мерном кубе покрашено более половины вершин. Доказать, что имеется не менее n ребер, у которых оба конца покрашены.

8.2. Задачи с целыми числами

Теория чисел немало служит к изощрению разума начинающих и большое проворство в исчислении приносит.

Л. Эйлер

589. Пусть n — **совершенное число** (т.е. равное сумме всех своих натуральных делителей, отличных от самого числа). Найти сумму

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d}.$$

590. Доказать, что число $11\ldots1$, в десятичной записи которого 3^n единиц, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1}.

591. Верно ли, что если сумма цифр числа делится на 81, то и число делится на 81?

592. Найти все n, при которых число $a_n = 1010\ldots01$ (в его записи n единиц и $n-1$ нулей) является простым.

593. В ряду 60 точек, двое поочерёдно заменяют любую точку на цифру. Доказать, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.

594. Если число с суммой цифр 2 делится на 19, то оно делится и на 13. Доказать.

595. Для каких натуральных m и n число 2^n+1 делится на 2^m-1?

596. Доказать, что 2^m-1 делится на 2^n+1 тогда и только тогда, когда m делится на $2n$.

597. Доказать, что при любом натуральном n
1) $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ делится на 1897;
2) $1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$ делится на 1946.

598. Доказать, что при любом нечётном n
1) $46^n + 296 \cdot 13^n$ делится на 1947;
2) $2269^n + 1779^n + 1730^n - 1776^n$ делится на 2001.

599. Доказать, что если n — нечётное число, кратное 5, то $12^n + 9^n + 8^n + 6^n$ делится на 1991.

600. Доказать, что натуральное число не представимо в виде суммы последовательных натуральных чисел тогда и только тогда, когда оно является степенью двойки.

601. Доказать, что

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^{2^2})(1+2^{2^3})\dots(1+2^{2^{n-1}}) = 2^{2^n} - 1.$$

602. Доказать, что число $2^{2^n} - 1$ имеет не менее n различных простых делителей.

603. Доказать, что любые два числа последовательности

$$3, 5, 17, \dots, 1 + 2^{2^n}, \dots$$

взаимно просты.

604. Используя утверждение предыдущей задачи, доказать бесконечность множества простых чисел.

605. Доказать, что число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ имеет не менее n различных простых делителей.

Л. Эйлер предложил следующий способ разложения на множители нечётного числа, для которого известны два представления в виде суммы двух квадратов ([48]).
Пусть $n = x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, причем x и u — чётные числа, а y и v — нечётные. Тогда $x^2 - u^2 = v^2 - y^2$ и

$$\frac{x-u}{v-y} = \frac{v+y}{x+u} = \frac{a}{b},$$

где a/b — несократимая дробь. Для некоторых целых t_1 и t_2 имеем равенства

$$x - u = at_1, \quad v + y = at_2,$$

$$v - y = bt_1, \quad x + u = bt_2.$$

Поскольку числа $x \pm u$ и $v \pm y$ чётны, а одно из чисел a или b нечётно, заключаем, что числа t_1 и t_2 чётны. Разрешив написанные выше уравнения относительно x и y, получим

$$x = \frac{at_1 + bt_2}{2}; \quad y = \frac{at_2 - bt_1}{2},$$

откуда $n = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left((at_1 + bt_2)^2 + (at_2 - bt_1)^2\right) = \frac{1}{4}(a^2t_1^2 + b^2t_2^2 + a^2t_2^2 + b^2t_1^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)(t_1^2 + t_2^2) = (a^2 + b^2)((t_1/2)^2 + (t_2/2)^2)$.

606. С помощью метода Л. Эйлера разложите на множители следующие числа: $1000001 = 199^2 + 980^2$; $1000009 = 235^2 + 972^2$; $1000049 = 632^2 + 775^2$; $1000169 = 155^2 + 988^2$; $1000361 = 656^2 + 755^2$; $1000441 = 240^2 + 971^2$; $1000529 = 673^2 + 740^2$.

607. Обобщите метод Л. Эйлера для нахождения разложения на множители нечётного числа n, для которого известны два представления вида $n = x^2 + dy^2 = u^2 + dv^2$.

608. Разложите на множители число
$13\,717\,421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2$.

609. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — полные системы вычетов по модулю n. Доказать, что если $n > 2$, числа $a_1b_1, a_2, b_2, \ldots, a_nb_n$ не образуют полной системы вычетов по модулю n.

610. Докажите, что для $n \geq 2$

$$\overbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}^{n \text{ цифр}} \equiv \overbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}^{n-1 \text{ цифр}} \pmod{n}.$$

611. Доказать, что если $a - 1 \,\vdots\, k^m$, то $a^k - 1 \,\vdots\, k^{m+1}$ (где $a, k, m \in N$).

612. Пусть a — произвольное натуральное число, (u_n) — последовательность, задаваемая рекуррентно

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = a^{u_n}, \ n \in N.$$

Доказать, что при $n \geq 3$ разность двух соседних чисел последовательности $(u_{n+1} - u_n)$ делится на 10^{n-2}.

Замечание. *Из результата данной задачи следует* **свойство стабилизируемости цифр "сверхстепеней":** *какой бы разряд ни взять, начиная с некоторого числа в последовательности*

$$a, a^a, a^{a^a}, a^{a^{a^a}}, \ldots$$

цифра в этом разряде не меняется.

613. Пусть p — простое число, $n > 1$, $(p-1)^n + 1 \,\vdots\, n$. Доказать, что n делится на p.

614. Пусть p — простое число, $p > 3$, $k = [2p/3]$. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов $C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^k$ делится на p^2.

615. Для каждого натурального n запишем сумму $\sum_{m=1}^{n} 1/m$ в виде α_n/β_n, где α_n и β_n — взаимно простые числа. Найти все n, при которых β_n не делится на 5.

616. Для $n = 10$ определить, чётно или нечётно число упорядоченных n-элементных наборов натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

8.3. Числа Кармайкла

Составное число m такое, что для любого числа a, взаимно простого с m, выполняется соотношение $a^{m-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} m)$, называется **числом Кармайкла**.

617. Доказать, что любое число Кармайкла нечётно.

618. Доказать, что числа $561, 46657 = 6^6 + 1, 101101$ являются числами Кармайкла.

619. Пусть m — свободное от квадратов составное число, обладающее тем свойством, что $m - 1 \,\vdots\, p - 1$ для произвольного простого числа p, делящего m. Доказать, что m — число Кармайкла.

Справедливо и обратное утверждение, что доказывает следующая серия задач.

620. Пусть число m делится на квадрат простого числа p и $a^{m-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} m)$. Доказать, что $a^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p^2)$.

621. Верно ли, что $(p+1)^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p^2)$ (где p — простое число)?

622. Доказать, что число Кармайкла свободно от квадратов.

623. Пусть m — число Кармайкла, p — простой делитель m. Доказать, что $m - 1 \,\vdots\, p - 1$.

Утверждения задач 619, 622, 623 показывают, что справедлива

Теорема. *Число m является числом Кармайкла тогда и только тогда, когда m — свободное от квадратов составное число, обладающее тем свойством, что $m-1$ делится на $p-1$ для произвольного простого числа p, делящего m.*

624. Составьте алгоритм и напишите программу нахождения чисел Кармайкла.

8.4. Формула обращения Мёбиуса

В этом параграфе будем считать, что **мультипликативная функция** *определяется соотношениями:* $f(1) = 1$; $(n, m) = 1 \Rightarrow f(nm) = f(n)f(m)$.

625. Мультипликативная функция однозначно определяется своими значениями на степенях простых чисел. Доказать.

Функция Мёбиуса $\mu(n)$ *вводится следующим образом.*

$\mu(1) = 1$;

если n *делится на квадрат простого числа, то* $\mu(n) = 0$;

если n *свободно от квадратов и представимо в виде произведения* s *различных простых чисел, то* $\mu(n) = (-1)^s$.

626. Вычислить $\mu(n)$ для $n = 1, 2, \ldots, 12$.

Определим функции $E(n), I(n), J(n)$*:*

$$E(n) = 1 \ \ \forall n; \ \ I(n) = n \ \ \forall n; \ \ J(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Мультипликативность этих функций очевидна.

Произведением Дирихле *функций* $f(n)$ *и* $g(n)$ *называется функция*

$$f \circ g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}).$$

627. Доказать коммутативность и ассоциативность операции $\circ$.

628. Доказать, что из мультипликативности функций $f(n)$ и $g(n)$ следует мультипликативность $f \circ g(n)$.

629. 1) Проверить, что $J \circ f = f$ для любой функции $f(n)$.

2) Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция. Доказать, что существует такая мультипликативная функция $f'(n)$, что $f \circ f' = J$.

Замечание. *Последние три задачи показывают, что мультипликативные функции образуют коммутативную группу с единичным элементом* J *и произведением Дирихле в качестве групповой операции.*

630. Доказать, что из мультипликативности функций $f(n)$ и $f \circ g(n)$ следует мультипликативность $g(n)$.

Функция $F = f \circ E$ называется **сумматорной функцией** *для $f(n)$. Таким образом, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, где суммирование ведется по всем делителям числа n (включая 1 и n).*

631. Доказать, что $f(n)$ — мультипликативная функция тогда и только тогда, когда мультипликативна её сумматорная функция $F(n)$.

$\tau(n)$ — число (натуральных) делителей числа n, $s(n)$ — их сумма.

632. Проверить, что $E \circ E = \tau; I \circ E = s$.

633. Доказать, что $\mu \circ E = J$.

634. Найти $\mu \circ \tau$ и $\mu \circ s$.

635. Доказать, что $\varphi \circ E = I$, т.е. что сумматорная функция для функции Эйлера имеет вид:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

636. С помощью задач 635 и 631 доказать мультипликативность функции Эйлера.

637. [Формула обращения Мёбиуса.] Доказать, что

$$F = f \circ E \iff f = F \circ \mu.$$

Таким образом, найдено выражение функции $f(n)$ через её сумматорную функцию:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

638. С помощью задач 635 и 637 доказать:

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

639. Убедившись в справедливости равенства

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2},$$

найти сумматорную функцию для натурального логарифма.

640. Пусть $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k, \text{ где } p \text{ — простое }, k \in N; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$
Доказать: 1) $\Lambda \circ E = \ln$; 2) $\Lambda = \ln \circ \mu$.

На множестве (линейных) последовательностей длины n, элементы которых принимают значения из некоторого конечного множества, зададим отношение эквивалентности

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Класс эквивалентности назовем **циклической последовательностью**. *Подсчитать число различных циклических последовательностей не так просто, поскольку в разных классах эквивалентности может быть разное число (линейных) последовательностей; например, постоянная циклическая последовательность порождается одной линейной последовательностью, а циклической последовательности из n попарно различных элементов соответствует n линейных последовательностей.*

Период *циклической последовательности $(a_1, \ldots, a_n)$ — наименьшее число d такое, что $a_{i+d} = a_i$ для всех i, где сложение ведется по модулю n (т.е. если $i + d > n$, то $i + d$ заменяется на $i + d - n$).*

641. Пусть $M(d)$ — количество циклических последовательностей длины и периода d, элементы которых могут принимать k различных значений. Доказать, что $k^n = \sum_{d|n} dM(d)$.

642. С помощью задач 641 и 637 найти количество циклических последовательностей длины и периода n.

643. Доказать, что общее количество циклических последовательностей длины n равно

$$T(n) = \sum_{d|n} M(d) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) k^{\frac{n}{d}}.$$

644. Составляются ожерелья из бусин трех цветов. Каждое ожерелье состоит из 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8 бусин. Не будем различать ожерелья, получающиеся друг из друга поворотом в плоскости. Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти число различных ожерелий.

8.5. Бинарные операции и отношения

645. Пусть на множестве S определена коммутативная и ассоциативная операция $*$. Имеется разбиение S на множества T и U (т.е. $T \cup U = S$; $T \cap U = \phi$), обладающее свойством:

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in T \quad t_1 * t_2 * t_3 \in T;$$

$$\forall u_1, u_2, u_3 \in U \quad u_1 * u_2 * u_3 \in U.$$

Доказать, что по крайней мере одно из множеств T или U замкнуто относительно операции $*$.

646. На множестве X задана бинарная операция $*$ такая, что для любых $x, y, z \in X$ выполнено равенство $x * (y * z) = y * (z * x)$, а из равенства $x * y = x * z$ следует $y = z$. Доказать, что операция $*$ является коммутативной и ассоциативной.

647. На множестве действительных чисел определена бинарная операция $*$, обладающая свойствами: для любых x, y, z $x*(x*x) = x; x*(y*z) = (x * y) + z$. Найти все такие бинарные операции.

648. На множестве действительных чисел определена бинарная операция $*$, обладающая свойством: для любых x, y, z, t $(x*y)z+y(z*t) = (xz)*(y*t)$. Доказать, что для найдётся такая постоянная C, что $x*y = C(x-y)$.

649. На множестве X задана бинарная операция $*$ такая, что для любых $x, y \in X$ выполнено равенство $(x*y)*x = y$. Доказать, что имеет место и равенство $x * (y * x) = y$. Разрешить относительно x уравнения $x * a = b$ и $a * x = b$. Пусть к тому же X — конечное множество, и его мощность не кратна трем. Доказать, что в X найдётся идемпотентный элемент, т.е $\exists x \in X \quad x * x = x$.

650. Бинарная операция на множестве целых чисел $n * m = -n - m$ коммутативна и не ассоциативна. При этом имеют место тождества $(n * m) * m = n, \quad m * (m * n) = n$.
Пусть в произвольной алгебраической структуре $< X, * >$

$$\forall x, y \in X \quad (x * y) * y = x, \quad y * (y * x) = x.$$

Доказать, что операция $*$ является коммутативной.

651. Пусть S — множество упорядоченных троек (a, b, c) различных элементов конечного множества A. Выполняются следующие условия:

1. $(a, b, c) \in S \iff (b, c, a) \in S$;

2. $(a, b, c) \in S \iff (c, b, a) \notin S$;

3. $(a, b, c), (c, d, a) \in S \iff (b, c, d), (d, a, b) \in S$.

Доказать, что существует такая функция $g : A \to R$, что из двойного неравенства $g(a) < g(b) < g(c)$ следует: $(a, b, c) \in S$.

8.6. Разные комбинаторные задачи

652. Предположим, что сейчас в России имеется 110 млн телефонов. Можно ли ввести 10-значные номера таким образом, чтобы ошибка в наборе одной цифры обнаруживалась и исправлялась? (Например, если имеется номер 240-877-2082, а по ошибке набрано 240-872-2082, то все существующие номера, кроме первого указанного, должны отличаться от набранного номера не менее, чем двумя цифрами).

653. В квадрате отметили 10 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

654. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри n-угольника. Сколько получится треугольников и сколько диагоналей?

655. На какое количество частей делят плоскость n прямых общего положения (т.е. среди них нет параллельных и никакие три прямые не пересекаются в одной точке)?

656. На какое наибольшее количество частей могут разделить пространство n плоскостей?

657. На какое наибольшее количество частей могут разделить плоскость n окружностей?

658. На какое наибольшее количество частей могут разделить пространство n сфер?

659. Сколькими способами можно из цифр 2, 7, 9 составить три таких n-значных числа, что их сумма равна $2(10^n - 1)$?

660. Сколько существует квадратов с вершинами в узлах квадратной сетки $(n-1) \times (n-1)$ клеток?

661. Сколькими способами можно расположить в ряд k_1 единиц, k_2 двоек, ..., k_n чисел n так, чтобы любому числу $(k+1)$ предшествовало по крайней мере одно число k?

662. Сколько существует перестановок (с повторениями) $2n$ чисел $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ таких, что для любого i все числа, расположенные в перестановке между двумя вхождениями числа i, больше i?

663. Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$, в которых для любого числа i, стоящего не на первом месте, хотя бы одно из чисел $i-1$ или $i+1$ стоит левее i?

664. На правой чашке весов лежит груз массой 11111 г. Весовщик последовательно раскладывает по чашкам гири в 1, 2, 4, 8,... г. В какой-то момент весы оказались в равновесии. На какую чашу весов попала гиря в 16 г?

665. Некоторые из подмножеств n-элементного множества M — "особые". Найти наименьшее возможное число особых подмножеств, если известно, что любое подмножество M представимо в виде пересечения особых.

666. Доказать, что среди $n+2$ подмножеств n-элементного множества найдутся два, не сравнимых по отношению включения (т.е. ни одно из этих двух множеств не является подмножеством другого).

667. Какое наибольшее число подмножеств n-элементного множества можно указать таких, что любые два из них не сравнимы по отношению включения?

668. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

669. При фиксированном чётном числе $k \geq 4$ найти наименьшее n, при котором в n-элементном множестве можно выделить такие k подмножеств, среди которых нет одинаковых и взаимно дополнительных, что каждый элемент исходного множества входит ровно в половину этих подмножеств.

670. Какое наибольшее число тупоугольных треугольников можно составить из 16 различных отрезков, если отношение длин самого длинного отрезка и самого короткого не больше 2?

671. Найти число умножений при вычислении определителя n-го порядка с помощью рекурсивной процедуры разложения по элементам столбца.

672. Найти формулу общего члена последовательности, определяемой соотношениями

$$x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}),\ n \geq 3;\quad x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

673. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Найти как функцию от n $(n \geq 2)$ наибольшее значение выражения

$$S_n = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

674. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные действительные числа. Доказать, что величина $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, принимает не менее $(n^2 + n + 2)/2$ различных значений. Показать, что эта оценка точная.

675. Пусть N — наибольшее число пар различных натуральных чисел таких, что суммы чисел в парах различны между собой и меньше натурального числа n. Доказать, что $N \leq (2n-3)/5$.

676. Для строки S, состоящей из единиц и нулей, обозначим через $\Delta(S)$ разность числа единиц и нулей. Например, $\Delta(1001001) = -1$. Назовем строку S *сбалансированной*, если для любой подстроки T (последовательных символов) S $-2 \leq \Delta(T) \leq 2$. Так, строка 1001001 не является сбалансированной, так как содержит подстроку 00100. Найти число сбалансированных строк длины n.

677. Дан правильный треугольник с длиной стороны $n \geq 2$. Каждая его сторона разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам.

1) На сколько маленьких треугольников (со стороной 1) разбит исходный треугольник?

2) Сколько получилось треугольников со стороной 2?

3) Сколько всего есть треугольников, ограниченных проведенными линиями?

678. n мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый мальчик взял из своих яблок половину и ещё одно яблоко и разделил эти яблоки поровну между остальными мальчиками. Затем так же последовательно поступают и остальные мальчики (каждый берет половину *всех* *накопившихся* у него яблок и ещё одно яблоко и и делит эти яблоки поровну между остальными мальчиками). В результате у всех оказалось по a яблок. Известно, что все яблоки остались целыми. Каким наименьшим может быть a и сколько при этом яблок было у каждого мальчика первоначально?

679. [Задача Иосифа[2].] По кругу стоит 300 человек, пронумерованных последовательно по часовой стрелке числами от 1 до 300. Удаляют, начиная считать с первого человека, каждого третьего по ходу часовой стрелки до тех пор, пока не останется один человек. Каков его номер?

680. Пусть по кругу стоят m человек, а удаляется каждый k-й. Напишите программу на любом известном вам языке программирования, находящую номер последнего оставшегося человека.

681. Некто, имея n монет одинаковой массы, хочет при помощи чашечных весов без гирь доказать окружающим, что все эти монеты весят одинаково. Какое наменьшее число взвешиваний ему придется сделать?

682. За круглым столом сидят n игроков. Каждый из них первоначально имеет по одному рублю. Первый игрок передает рубль второму, после чего второй передает два рубля третьему. Затем третий игрок передает рубль четвертому, а четвертый два рубля пятому и т.д. Игроки поочередно передают рубль или два рубля следующему игроку, у которого ещё есть деньги; игрок, лишившийся денег, выбывает из игры и покидает стол. Найти бесконечное множество таких n, при которых игра заканчивается тем, что у некоторого игрока оказываются все n рублей.

683. В школе работает 6 кружков. Каждый из 20 учеников класса может посещать любое количество кружков — от 0 до 6. Верно ли, что обязательно найдутся такие 5 учеников и такие 2 кружка, что все пятеро либо посещают оба кружка, либо не посещают ни один из этих двух кружков?

8.7. Тождества

684. Доказать тождество $\sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot(m+k-1)!}{m^k} = \frac{(n+m)!}{m^n} - m!$

685. Пусть $1 \le m < n$. Доказать тождество $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^m C_n^k = 0$.

---

[2] О происхождении названия задачи см. [25].

686. Комбинаторными рассуждениями доказать тождество $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k C_{n-k}^{m-k} = 0$.

687. Доказать формулу для матрицы, обратной нижнетреугольной матрице биномиальных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} C_0^0 & & & & & \\ C_1^0 & C_1^1 & & & & \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_0^0 & & & & & \\ -C_1^0 & C_1^1 & & & & \\ C_2^0 & -C_2^1 & C_2^2 & & & \\ -C_3^0 & C_3^1 & -C_3^2 & C_3^3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ (-1)^n C_n^0 & \dots & \dots & \dots & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

688. Пусть $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k$. Доказать, что $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k a_k$.

689. Известно (см. [9]) следующее соотношение между числами Стирлинга I и II рода:

$$\sum_{j=0}^{n} S(n,j)s(j,k) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k; \\ 0, & \text{если } n \neq k. \end{cases}$$

Пусть $a_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)b_k$. Доказать, что $b_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)a_k$.

690. Доказать, что число $x_n = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^{2n+1}$ имеет вид $x_n = a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{3} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{30}$, где a_n, b_n, c_n, d_n — целые числа. Найти $\lim a_n/d_n$.

691. Числа от 1 до $4m^2 - 1$ разбиты на две группы: в первую собраны числа, для каждого из которых ближайшим к нему квадратом является квадрат нечётного числа, а во вторую — все остальные. Доказать, что суммы чисел в группах совпадают.

692. Пусть n — чётное натуральное число. Запишем числа $1, 2, \dots, n^2$ в клетки квадрата $n \times n$ так, что k-я строка есть

$$(k-1)n + 1, (k-1)n + 2, \dots, (k-1)n + n.$$

Раскрасим клетки в чёрный и белый цвет таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце чёрных и белых клеток было поровну. Доказать, что для любой такой раскраски суммы чисел на чёрных и белых клетках равны.

693. Доказать тождество $\sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}] = \sum_{k=2}^{n}[\log_k n]$ (при $n \geq 2$).

694. Пусть m и n — взаимно простые числа, большие 1. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

695. Пусть N — натуральное число. Вычислить для каждого $N\geq 2$

$$\sum_{1\leq m<n\leq N,\ m+n>N,\ (m,n)=1}\frac{1}{mn}.$$

696. Доказать:

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(1+[\log_4(\frac{n}{2k-1})])=\sum_{k=0}^{[\log_2 n]}(-1)^k[n/2^k]=\sum_{k=0}^{[\log_4 n]}\left[\frac{n}{2\cdot 4^k}+\frac{1}{2}\right].$$

697. Пусть $s(x)$ есть расстояние между числом x и ближайшим к нему целым числом. Для произвольного натурального n вычислить

$$F_n=\sum_{m=1}^{6n-1}\min\left(s(\frac{m}{6n}),s(\frac{m}{3n})\right).$$

698. Пусть $a_{m,n}$ есть коэффициент при x^n в разложении многочлена $(1+x+x^2)^m$. Докажите, что для всех целых $k\geq 0$

$$0\leq b_k=\sum_{i=0}^{[\frac{2k}{3}]}(-1)^i a_{k-i,i}\leq 1.$$

699. Пусть n — натуральное число, c — действительное число. Последовательность (x_k) определяется соотношениями $x_0=0, x_1=1$ и

$$x_{k+2}=\frac{cx_{k+1}-(n-k)x_k}{k+1},\quad k\geq 0.$$

Пусть при фиксированном n число c принимает наибольшее значение, при котором $x_{n+1}=0$. Выразить x_k через n и k, где $1\leq k\leq n$.

8.8. Две классические задачи

В данном разделе на основе формулы включения-исключения решаются две классические комбинаторные задачи — **задача мажордома** *и* **задача о супружеских парах**. *В [2] приводится три решения первой из этих задач. Вторая задача была сформулирована в 1891 г., но окончательно решена была лишь в 1934 г.*

700. Задача мажордома. К обеду за круглым столом приглашены n пар враждующих рыцарей ($n \geq 2$). Требуется рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом. Каким числом способов это можно сделать?

701. 1-я лемма Капланского. Число способов выбрать из n точек, расположенных на одной прямой, k точек так, чтобы никакие две из них не были соседними, равно

$$f(n,k) = C_{n-k+1}^{k}, \quad k \leq \frac{n+1}{2}.$$

702. 2-я лемма Капланского. Число способов выбрать из n точек, расположенных на одной окружности, k точек так, чтобы никакие две из них не были соседними, равно

$$g(n,k) = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^{k}, \quad k \leq \frac{n}{2}.$$

703. Задача о супружеских парах. К обеду за круглым столом приглашены n супружеских пар. Требуется рассадить их так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом. Каким числом способов это можно сделать?

8.9. Теорема Рамсея

704. По двум ящикам размещаются n предметов. Каким должно быть число n,чтобы обеспечить попадание p предметов в первый ящик или q предметов во второй ящик?

705. Доказать, что в любой компании из шести человек найдётся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.

706. В графе K_6 каждое ребро покрашено в красный или синий цвет. Доказать, что существует по крайней мере два одноцветных треугольника.

707. В графе K_8 каждое ребро покрашено в красный или синий цвет. Доказать, что в графе есть два одноцветных треугольника без общих вершин.

708. В графе K_{17} каждое ребро покрашено в красный или синий цвет. Доказать, что в графе есть одноцветный треугольник.

709. Во всякой группе из 9 человек, в которой нет трёх попарно незнакомых, найдутся четверо попарно знакомых. Доказать.

710. В простом графе G 18 вершин. Доказать, что $K_4 \subset G$ или $K_4 \subset \overline{G}$.

711. Пусть $a_1 = 2$, $a_n = n{\cdot}a_{n-1}{+}1$. Доказать, что в графе порядка $a_n{+}1$, рёбра которого окрашены в n цветов, найдётся одноцветный треугольник. Показать, что $a_n = [n!e]$.

712. [Теорема Рамсея.] *Пусть $p, q, r \in \mathbf{N}$, причем $p \geq r$, $q \geq r$. Существует число $N(p, q, r)$ со следующим свойством.*

Для произвольного множества S из n элементов рассмотрим произвольное разбиение множества всех его r-элементных подмножеств T на две части: $T = \alpha \cup \beta$, $\alpha \cap \beta = \phi$. При $n \geq N(p, q, r)$

- *найдётся p-элементное подмножество $A \subset S$, все r-элементные подмножества которого принадлежат α, или*

- *найдётся q-элементное подмножество $B \subset S$, все r-элементные подмножества которого принадлежат β.*

Доказательство. В силу задачи 704 можно положить $N(p, q, 1) = p + q - 1$. Покажем, что в качестве $N(r, q, r)$ подходит q. Действительно, если α не пусто, то любое r-элементное подмножество из α годится для роли A. Если же $\alpha = \phi$, то все r-элементные подмножества содержатся в β и $B = S$. Аналогично $N(p, r, r) = r$. Три найденных соотношения служат *базой индукции.* Теперь, предположив существование $N(p-1, q, r)$, $N(p, q-1, r)$ и $N(p', q', r-1)$ для любых p' и q', докажем, что существует $N(p, q, r)$ (это и будет *индукционный шаг*).

Считая, что $r > 1$, $p > r$ и $q > r$, положим

$$p_1 = N(p-1, q, r),\ q_1 = N(p, q-1, r),\quad N(p, q, r) = N(p_1, q_1, r-1) + 1.$$

Достаточно доказать теорему для случая $n = N(p, q, r)$.

Пусть $x \in S$ и $S' = S \setminus \{x\}$. По произвольному разбиению $T = \alpha \cup \beta$ построим следующее разбиение множества $T' = \alpha' \cup \beta'$ всех $r-1$-элементных подмножеств множества S':

$$\alpha' = \{X \mid X \cup \{x\} \subset \alpha\}, \beta' = \{X \mid X \cup \{x\} \subset \beta\}.$$

По предположению индукции

- найдётся p_1-элементное подмножество $A' \subset S'$, все $(r-1)$-элементные подмножества которого принадлежат α', или
- найдётся q_1-элементное подмножество $B \subset S$, все $(r-1)$-элементные подмножества которого принадлежат β'.

Рассмотрим подробно первый случай (для второго рассуждения аналогичные). Поскольку $p_1 = N(p-1, q, r)$,

- существует $(p-1)$-элементное подмножество $A'' \subset S'$, все r-элементные подмножества которого принадлежат α (тогда множество $A = A'' \cup \{x\}$ — искомое); либо
- найдётся q-элементное подмножество $B \subset S'$, все r-элементные подмножества которого принадлежат β (в этом случае B и есть искомое множество).

Теорема доказана.

Наименьшее число $N(p,q,r)$ из формулировки теоремы Рамсея называют числом Рамсея *и обозначают $R(p,q,r)$.*

713. Доказать, что $R(p,q,1) = p+q-1$.

714. Доказать, что $R(r,q,r) = q$, $R(p,r,r) = p$.

715. Доказать, что $R(3,3,2) = 6$.

716. Доказать, что $R(p,q,2) \leq C_{p+q-2}^{p-1}$, где $p, q \geq 2$.

Ниже рассматриваются геометрические задачи, последняя из которых решается с помощью теоремы Рамсея, а первые две имеют характер вспомогательных лемм.

Всюду будет предполагаться, что **точки лежат в одной плоскости.**

Пусть рассматривается некоторое множество точек. Будем говорить, что это точки **общего положения**, *если никакие три из них не лежат на одной прямой.*

717. Из любых пяти точек общего положения можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырёхугольника. Доказать.

718. Даны n точек общего положения, причем любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Доказать, что эти n точек — вершины выпуклого n-угольника.

719. [Теорема Эрдёша-Секереша.] *Для любого натурального n можно указать такое натуральное число $k = k(n)$, что из любых k точек общего положения можно выделить n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника.*
Доказать теорему, положив $k = R(n, 5, 4)$.

8.10. Ожерелья

Данный параграф служит продолжением темы последнего примера §6.5 учебного пособия [9].

720. Доказать, что цикловой индекс группы подстановок на множестве вершин правильного n-угольника, порождённых его вращениями в плоскости, есть

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} x_d^{\frac{n}{d}}\varphi(d).$$

721. Составляются ожерелья из n_1 бусинок 1-го вида, n_2 бусинок 2-го вида, ..., n_m бусинок m-го вида. Не считаются различными ожерелья, которые могут быть получены друг из друга вращением в плоскости. Доказать, что число различных ожерелий равно

$$\frac{1}{n}\sum \varphi(d)\frac{(n/d)!}{(n_1/d)!(n_2/d)!\ldots(n_m/d)!},$$

где суммирование ведется по всем числам d, одновременно являющимся делителями чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

722. Найти цикловой индекс группы подстановок на множестве вершин правильного n-угольника, порождённых группой его симметрий.

8.11. Графы

723. Простой граф, изоморфный своему дополнению, называется **самодополнительным.** Доказать, что число вершин самодополнительного графа при делении на 4 дает остаток 0 или 1. Найти все самодополнительные графы с числом вершин меньше 6.

724. Доказать, что самодополнительный граф связен и его диаметр равен 2 или 3.

725. Диаметр графа равен 2, степень каждой вершины не больше 3. Каково максимальное число вершин графа?

726. Какие из платоновых графов являются а) эйлеровыми; б) гамильтоновыми? Указать в каждом случае эйлеров или гамильтонов цикл.

727. Реберный граф $L(G)$ гамильтонов тогда и только тогда, когда в графе G есть цикл, содержащий хотя бы по одной вершине из каждого ребра G. Доказать.

728. Доказать, что граф K_{2n} распадается на n гамильтоновых цепей.

729. Доказать, что граф K_{2n+1} распадается на n гамильтоновых циклов.

730. На плоскости проведено 100 прямых общего положения. Докажите, что части, на которые они делят плоскость, нельзя обойти, переходя каждый раз в соседнюю (по стороне), побывав в каждой части ровно один раз и вернуться после этого в исходную часть.

731. В простом графе порядка $2n+1$ у любых n вершин есть общая смежная вершина. Доказать, что радиус графа равен единице.

732. Пусть в графе G для любых двух вершин число общих смежных вершин нечётно. Доказать, что

1) G — эйлеров граф;

2) число вершин G нечётно.

733. При каких n и $k > 1$ существует простой граф с n вершинами, в котором любые k вершин имеют ровно одну общую смежную вершину?

734. Найти порядок регулярного степени 6 простого графа, в котором у любых двух вершин ровно две общих смежных вершины.

735. Пусть в графе G любые две смежные вершины не имеют общих смежных вершин, а любые две несмежные вершины имеют две общие смежные вершины.

1) Доказать, что G — регулярный граф.

2) Пусть n — порядок графа G, а k — степень каждой его вершины. Доказать, что $n = 1 + k + C_k^2$.

3) Пусть A — матрица смежности графа G. Доказать, что если λ — собственное значение A, отличное от k, то $\lambda^2 + 2\lambda - k + 2 = 0$.

4) Найти кратности собственных значений матрицы A.

5) Доказать, что число k представимо в виде $k = 1 + m^2$, где m — целое число.

6) Найти графы, удовлетворяющие условию задачи при $m = 1, 2, 3$.

Ответы. Указания. Решения

15. 50. **16.** 2 рыцаря. **17.** 1/2.

28. Пусть $P(x)$ — многочлен из условия задачи. Очевидно, что он чётной степени. Пусть c — его наименьшее значение. Все действительные корни многочлена $Q(x) = P(x) - c$ имеют чётную кратность. Поэтому для некоторого всюду положительного многочлена $R(x)$ имеем $Q(x) = T^2(x)R(x)$, где $T^2(x)$ — произведение всех множителей многочлена вида $(x-\alpha)$ (каждый множитель берется столько раз, какова кратность соответствующего корня). Поскольку $R(x)$ имеет степень меньше, чем $P(x)$, можно воспользоваться предположением индукции. Осталось заметить, что $P(x) = Q(x) + (\sqrt{c})^2$.

35. 140. **36.** 70. **39.** а) $10!^2$; б) $10!^2 \cdot 2^{10}$. **41.** $8!$ **42.** $2 \cdot 8^8 - 8!$ **44.** $4^{n^2/4}$.

45. а) $2^n - 1$; $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$; б) $(3^n - 1)/2$; $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}$.

46. 2^{n-1}.

47. $57599 = 240^2 - 1 = 239 \cdot 241$. **51.** 1 и 2.

52. Пусть d — общий делитель чисел mn и $m^2 + n^2$. Тогда d делит и $(m \pm n)^2$. Если $(m+n, m-n) = 1$, то $((m+n)^2, (m-n)^2) = 1$, откуда $d = 1$. Если $(m+n, m-n) = 2$, то m и n нечётные числа (чётными они быть не могут, так как взаимно просты) и $((m+n)^2, (m-n)^2) = 4$. Таким образом, d — нечётный делитель четырёх, то есть $d = 1$.

53. 1 и 2. Используйте тождества $2m^2 = (m^2 + n^2) + (m+n)(m-n)$ и $2n^2 = (m^2 + n^2) - (m+n)(m-n)$.

54. 1) 3; 2) 57; 3) 11; 4) 1.

57. Положим $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = P(P_n(x))$. Тогда $a_n = P_n(0)$, $a_n = P_{n-m}(a_m)$ (при $n > m$). В силу теоремы Безу $P_n(x) = P_n(0) + xQ_n(x) = a_n + xQ_n(x)$, где $Q_n(x)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Поскольку $a_n = P_{n-m}(a_m) = a_{n-m} + a_m Q_{n-m}(a_m)$, имеем $(a_n, a_m) = (a_{n-m}, a_m)$. Из последнего соотношения следует, что $(a_n, a_m) = a_{(n,m)}$.

59. $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

67. См. доказательство бесконечности множества простых чисел в [9].

68. Пусть среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ содержится $r \le k$ простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Тогда каждое число, не превосходящее 2^n, представимо в виде $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r}$, где, очевидно, каждый показатель степени s_i не больше n. Однако чисел такого вида (по правилу произведения) $(1+n)^r$, что меньше 2^n. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи. Поскольку, как известно из анализа, показательная функция "растет быстрее" степенной, и для любого (сколь угодно большого) k при достаточно больших n неравенство $2^n > (1+n)^k$ имеет место, получено доказательство бесконечности множества простых чисел.

69. Среди чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеем не более n/p^2 чисел, делящихся на p^2. Поэтому количество чисел, делящихся на квадрат простого числа, не больше

$$\sum_{p \le \sqrt{n}} \frac{n}{p^2} < \frac{n}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{k(k+1)} = \frac{n}{4} + n \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{3n}{4}.$$

Утверждение задачи позволяет получить не только доказательство бесконечности множества простых чисел, но и оценку сверху для k-го простого числа p_k. Первые (по возрастанию) $k-1$ простых чисел порождают 2^{k-1} чисел, свободных от квадратов. Поэтому среди чисел от 1 до $4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$ содержится по меньшей мере k простых чисел (в противном случае доля чисел, свободных от квадратов, была бы менее четверти), т.е. $p_k \le 2^{k+1}$.

70. 1) 1; 2) 1; 3) 5. В последнем примере имеем:
$10^{10} \equiv 3^{10} = 9^5 \equiv 2^5 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$; $10^{100} = (10^{10})^{10} \equiv 4^{10} \equiv (-3)^{10} \equiv 3^{10} \equiv 4$. Далее по индукции легко доказать, что $\forall k \;\; 10^{10^k} \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$.

75. Поскольку $1980 = 20 \cdot 99$, достаточно доказать делимость на 20 и на 99. Первое очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что $100^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 99)$. Поэтому $1920 \ldots 80 \equiv 19 + 20 + \ldots + 80 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 99)$.

76. Нет. Получившееся число обязательно делится на 11.

77. Нет. Получившееся число обязательно делится на 37.

78. 8. **80.** При $k = 2$ и 11.

81. $11 \cdot 101^4$. Четвёртая степень целого числа при делении на 16 даёт остаток 0 или 1.

82. Да. Представив число n в виде $n = m \cdot 2^i \cdot 3^j$, где m не делится на 2 и на 3, будет относить его к одному из трёх подмножеств в соответствии с остатком от деления на 3 числа $i - j$.

84. Пусть $N = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$, $a_i = N/q_i$. Из условий задачи следует, что t_i кратно a_i. Положив $t_i = a_i x_i$, из второго свойства числа t_i имеем, что для некоторого целого y_i выполняется равенство $a_i x_i = 1 + q_i y_i$. Получили линейное диофантово уравнение, в котором коэффициенты при неизвестных взаимно просты.

85. $x \equiv \sum r_i t_i (\operatorname{mod} N)$. **86.** 37.

87. По китайской теореме об остатках найдётся такое число x, что $x \equiv r_1 (\operatorname{mod} q_1)$, $x \equiv r_2 - 1 (\operatorname{mod} q_2), \ldots, x \equiv r_n - n + 1 (\operatorname{mod} q_n)$.

89. 1) 1; 2) $3^{102} = 3^{100} \cdot 3^2 \equiv 9 (\operatorname{mod} 101)$;
3) $8^{900} = 8^{28 \cdot 32} \cdot 8^4 \equiv 8^4 \equiv 6^2 \equiv 7 (\operatorname{mod} 29)$; 4) 1.

92. $(n^{\frac{p-1}{2}} - 1)(n^{\frac{p-1}{2}} + 1) \,\vdots\, p$.

98. 1) $n = \frac{a^p - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^p + 1}{a + 1}$.
2) $n - 1 = \frac{a^{2p} - a^2}{a^2 - 1} = (a^{p-1} - 1)\frac{a^2(a^{p-1} + 1)}{a^2 - 1}$. В силу малой теоремы Ферма из последнего соотношения получаем: $n - 1 \,\vdots\, p$. Покажите, что n — нечётное число. Отсюда $n - 1 \,\vdots\, 2p$ и $a^{n-1} - 1 \,\vdots\, a^{2p} - 1$. В то же время из определения числа n следует: $a^{2p} - 1 \,\vdots\, n$. Таким образом, $a^{n-1} - 1$ делится на n. Это и требовалось доказать.

99. Поделим многочлен $f(x)$ на многочлен $x^p - x$:

$$f(x) = (x^p - x)q(x) + r(x),$$

где степень остатка $r(x)$ не превосходит $p - 1$. Из малой теоремы Ферма следует, что $f(x) \equiv r(x) (\operatorname{mod} p)$.

100. Доказательство можно найти в [3].

101. Пусть q — простое число, являющееся делителем числа n. Так как $2 \le q \le n - 1$, число q является делителем $(n-1)!$. В силу задачи 49 $(n-1)! + 1$ не делится на q, а, значит, и на n.

102. Пусть n — составное число. Может представиться два случая.

а) n не является квадратом простого числа. Тогда n представимо в виде произведения двух различных целых чисел: $n = n_1 \cdot n_2$, каждое из которых больше 1. Заметим, что при этом $n - 1 > n_1$ и $n - 1 > n_2$.

Значит, $(n-1)!$ содержит в качестве множителей и n_1, и n_2, в силу чего $(n-1)!\,\vdots\, n_1 \cdot n_2 = n$.

б) n является квадратом простого числа: $n = p^2$. При $n > 4$ выполняется неравенство $n - 1 = p^2 - 1 > 2p$ и, следовательно, $(n-1)!$ в числе своих множителей содержит как p, так и $2p$. Таким образом, вновь $(n-1)!\,\vdots\, n(= p^2)$.

103. Если $p = 2$, то доказываемое утверждение проверяется непосредственно. Будем считать, что $p > 2$. Введем в рассмотрение многочлен

$$f(x) = x^{p-1} - 1 - (x-1)(x-2)...(x-(p-1)).$$

Легко видеть, что степень $f(x)$ не превосходит $p-2$. По малой теореме Ферма $x^{p-1} - 1$ делится на p при $x = 1, 2, ..., p-1$. Тем же свойством обладает и многочлен $f(x)$. Итак, сравнение

$$x^{p-1} - 1 - (x-1)(x-2)...(x-(p-1)) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$$

имеет степень не выше $p-2$, в то время как число его решений не меньше $p-1$. В силу задачи 100 все коэффициенты многочлена $f(x)$ кратны p, в частности, его свободный член, равный $-(1+(p-1)!)$. Таким образом, $(p-1)!+1$ делится на p.

106. По теореме Вильсона $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv -1 (\operatorname{mod} p)$.
1) В левой части сравнения каждый чётный множитель $2k$ следует заменить на нечётное число $-(p-2k)$.
2) В левой части сравнения каждый нечётный множитель $2k-1$ следует заменить на чётное число $-(p-2k+1)$.

107. Сначала заметим, что $x^2 \equiv y^2 (\operatorname{mod} p)$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $x+y$ и $x-y$ делится на p (поскольку p — простое число). Если не равные друг другу числа x и y берутся из множества $A = \{1, 2, \ldots, p-1\}$, то $0 < |x-y| < p$ и

$$x^2 \equiv y^2 (\operatorname{mod} p) \iff x + y \,\vdots\, p.$$

Поскольку A — приведенная система вычетов, квадрат любого числа из A сравним по модулю p с некоторым числом из того же множества A. Разобьем множество A на пары вида $\{k, p-k\}$. Квадраты любых двух чисел из разных пар не сравнимы по модулю p, а квадраты двух чисел из одной пары сравнимы по модулю p. Таким образом, каждой паре соответствует свой "индивидуальный" квадратичный вычет, а квадратичных вычетов столько же, сколько и указанных пар, то есть $(p-1)/2$.

108. Рассмотрим три возможных случая.

- a кратно p. Здесь утверждение тривиально.

- a — квадратичный вычет. Для некоторого числа b, не кратного p, имеем $a \equiv b^2 (\operatorname{mod} p)$. Тогда, используя малую теорему Ферма, получим
$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{2(\frac{p-1}{2})} \equiv b^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p).$$

- a — квадратичный невычет. Поскольку $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv a^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, число $a^{\frac{p-1}{2}}$ сравнимо по модулю p с 1 или -1. Мы уже выяснили, что сравнению $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$ удовлетворяет $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов. В силу задачи 100 других решений у данного сравнения нет. Значит, для квадратичного невычета остается лишь возможность $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 (\operatorname{mod} p)$.

110. $p = 4k + 1$.

111. Сначала убедимся в том, что 5 — квадратичный вычет по модулю 19:
$$\left(\frac{5}{19}\right) \equiv 5^9 \equiv 6^4 \cdot 5 \equiv (-2)^2 \cdot 5 \equiv 1 (\operatorname{mod} 19).$$
Итак, $5^9 \equiv 1 (\operatorname{mod} 19)$. Отсюда $5^{10} \equiv 5 (\operatorname{mod} 19)$ и $x \equiv \pm 5^5 \equiv \pm 9 (\operatorname{mod} 19)$. Аналогично решаются сравнения вида $x^2 \equiv a (\operatorname{mod} p)$, где p — простое число вида $p = 4k + 3$.

112. Убедитесь в том, что когда число k пробегает по P, то и число $ak\varepsilon_k$ пробегает по P. Пусть $K = \prod\limits_{k=1}^{q} k$. Тогда
$$K \equiv \prod_{k=1}^{q} ak\varepsilon_k \equiv a^q K \prod_{k=1}^{q} \varepsilon_k \equiv \left(\frac{a}{p}\right) K \prod_{k=1}^{q} \varepsilon_k (\operatorname{mod} p).$$
Сократив на K, получим $\left(\frac{a}{p}\right) \prod\limits_{k=1}^{q} \varepsilon_k \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, откуда и вытекает требуемое.

113. $p \equiv \pm 1 (\bmod 5)$. Примените лемму Гаусса, перебирая возможные остатки от деления p на 10.

114. 1) Решений нет; 2) $x = -1 + 7t,\ y = 2 - 13t,\quad t \in Z$; 3) $x = -7 + 19t,\ y = 8 - 21t$; 4) $x = 56 + 171t,\ y = 653 + 1994t$.

115. ab. **Решение.** Если $m = ab$, то $x \vdots b,\ y \vdots a$ и $ax + by \geq 2ab$. Пусть теперь $m > ab$. Общее решение уравнения $ax + by = m$ в целых числах: $x = x_0 - bt,\ y = y_0 + at$, где $ax_0 + by_0 = m$. Покажем, что найдётся такое целое число t, что $x > 0$ и $y > 0$, то есть $bt < x_0,\ at > -y_0$, или $-y_0/a < t < x_0/b$. Выразив y_0 через x_0, имеем $\frac{x_0}{b} - \frac{m}{ab} < t < \frac{x_0}{b}$. Осталось заметить, что интервал $(\frac{x_0}{b} - \frac{m}{ab}, \frac{x_0}{b})$ имеет длину, большую 1, и значит, содержит целую точку.

116. $(a - 1)(b - 1)/2$. **Решение.** Все натуральные числа $\geq ab$, представимы указанным образом. Проверьте, что для каждого из чисел $0, 1, \ldots, ab - 1$ указанное представление единственно (если оно существует). Рассмотрим на координатной плоскости прямоугольник с вершинами $O(0,0),\ A(b,0),\ C(b,a),\ B(0,a)$. Пусть $ax + by < pq$. Тогда точка (x,y) лежит в прямоугольнике $OABC$ ниже диагонали AB. Несложный подсчет: всего прямоугольник содержит $(a+1)(b+1)$ точек с целыми координатами, на диагонали AB точек, отличных от A и B, нет (в силу взаимной простоты a и b), стало быть, ниже диагонали расположено $\frac{(a+1)(b+1)-2}{2}$ точек. Каждой точке соответствует число $ax + by < ab$ (и разным точкам — разные числа). Значит, чисел, не представимых в виде $ax + by$ с неотрицательными x и y, будет $ab - \frac{ab+a+b-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

117. 5 коров, 1 свинью, 94 овцы. **118.** 15 коров, 7 свиней, 78 овец.

119. Андрей женат на Ольге, Иван — на Анне, Степан — на Екатерине.

122. 1) $(0,0), (2,2), (1,2), (2,1), (1,0), (0,1)$;
2) $(0,0), (\pm 1010, \pm 10), (\pm 100, \pm 100), (\pm 6666, \pm 2)$.

123. 1) (498, 496), (78, 64); 2) $m = 2,\ n = 4$; 3) $(m,n) = (3,5), (4,7)$; 4) решений нет; 5) $(3,1)$;6) $(1,1,1), (4,2,2)$; 7) $(13,2)$; 8) $(3,1,2)$. Подробное решение шестого уравнения приведено в первом издании настоящего сборника. См. также журналы "Квант", 1998, №4, С.50 и "Математика в школе", 1999, №3, С.60.

124. $(7,3,3), (8,5,2), (13,4,2)$. **125.** 5, 49, 97.

126. Воспользуйтесь результатом задачи 93.

127. $(-300,-2), (-36,-6), (24,4)$. **128.** 17. **129.** 2000 и 3998.

130. 12×5 или 8×6.

131. а) нет; б) да; в) нет. **Указание.** Пусть x (y) — количество строк (столбцов), в которых знак менялся нечётное число раз. Тогда количество минусов в таблице равно $x(100-y)+y(100-x)$.

132. 2, 8, 272, 1898.

133. Докажите, что знаменатель прогрессии — рациональное число. Контрпример: $b_i = 2^{m-i}$.

134. Для представления числа m/n указанной дробью ищите a, b, c и d в виде произведения степеней m и n.

135. Если квадрат a^2 и куб b^3 совпадают, то утверждение задачи тривиально. Рассмотрим различные случаи взаимного расположения квадрата и куба в прогрессии.

I. Пусть $a^2 < b^3$.

1) Рассмотрим случай, когда b делится на a. Положив $b = ka$, будем искать натуральное x, для которого

$$a^2 + x(b^3 - a^2) = a^2 + x(k^3a^3 - a^2) = y^6.$$

Удобно положить, что $y = at$. Тогда $x = \frac{a^4t^6-1}{k^3a-1}$. Видно, что если $t = k^2$, то $x \in \mathbf{N}$.

Итак, при $b = ka$ прогрессия содержит член $(ak^2)^6$.

Например, если прогрессия содержит 2^2 и 6^3, то в ней будет и член, равный 18^6.

2) Пусть a и b — взаимно простые числа. Сведем этот случай к предыдущему, найдя в прогрессии число z^3 такое, что z кратно a. Имеем

$$a^2 + x(b^3 - a^2) = z^3, \quad x = \frac{z^3 - a^2}{b^3 - a^2} = 1 + \frac{z^3 - b^3}{b^3 - a^2}.$$

Пусть $z = b + t(b^3 - a^2)$. Тогда $z^3 - b^3 \,\vdots\, z - b \,\vdots\, b^3 - a^2$ и $x \in \mathbf{N}$. Подберем t так, чтобы $z = b + tb^3 - ta^2$ делилось на a. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для некоторого y выполнялось равенство $b + tb^3 = ya$, или

$$ay - b^3t = b. \tag{1}$$

Поскольку a и b^3 взаимно простые числа, уравнение (1) разрешимо в натуральных числах.

Пример. Если $a = 2, b = 5$, из уравнения $2y - 125t = 5$ найдём $t = 1, y = 65, z = 5 + 1 \cdot (5^3 - 2^2) = 126$. Таким образом, вместе с 2^2 и 5^3

прогрессия содержит и 126^3. Используя далее результаты предыдущего пункта, обнаруживаем в прогрессии член $(63^2 \cdot 2)^6$ (хотя можно найти в этом конкретном примере и меньшую шестую степень: 48^6).

3) Рассмотрим, наконец, общий случай. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — все простые делители чисел a и b,

$$a = \prod p_i^{m_i}, \ b = \prod p_i^{k_i}, \ d = (b^3, a^2) = \prod p_i^{\min(3k_i, 2m_i)}.$$

Заметим, что если $3k_i = 2m_i = s_i$, то $s_i \vdots 6$ и все числа вида $a^2 + x(b^3 - a^2)$ делятся на $(p_i^{s_i/6})^6$. Поэтому вместо чисел a и b можно рассматривать числа $a/p_i^{m_i}$ и $b/p_i^{k_i}$. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что для любого i ровно одно из чисел b^3/d и a^2/d делится на p_i, отсюда $\frac{b^3-a^2}{d}$ не делится на p_i и число $c = \frac{b^3-a^2}{d}$ взаимно просто с a.

Пусть $g = \prod p_i^{s_i}$ — наименьшее натуральное число, куб которого делится на d. Легко убедиться, что для любого i выполняется неравенство $k_i \geq s_i$. Значит, b кратно g. Положим $b = gb_1$. Найдём член прогрессии z^3 с z, делящимся на a. Исходя из равенств

$$b^3 + x(b^3 - a^2) = z^3, \ x = \frac{z^3 - b^3}{b^3 - a^2},$$

будем искать z в виде $z = gz_1$. Тогда

$$x = \frac{g^3(z_1^3 - b_1^3)}{d(b^3/d - a^2/d)} = \frac{g^3}{d} \cdot \frac{z_1^3 - b_1^3}{c}.$$

Поскольку $g^3 \vdots d$, для того, чтобы $x \in \mathbf{N}$, число z_1 можно определить как $z_1 = b_1 + ct$. Если положить $z_1 = ay$, то будем иметь уравнение

$$ay - ct = b_1. \qquad (2)$$

Как уже было отмечено, коэффициенты a и c взаимно просты (и положительны), поэтому уравнение (2) разрешимо в натуральных числах. По y находим $z = gay \vdots a$ такое, что z^3 — член прогрессии. Вновь задача сведена к случаю 1).

Пример. При $a = 480$, $b = 72$ имеем $d = (b^3, a^2) = 2^9 \cdot 3^2$, $g = 2^3 \cdot 3$, $b_1 = 3$,

$$x = \frac{24^3}{2^9 \cdot 3^2} \cdot \frac{z_1^3 - 3^3}{3^4 - 50} = 3 \cdot \frac{z_1^3 - 3^3}{31};$$

$$z_1 = 3 + 31t = 480y,\ 480y - 31t = 3.$$

Одно из решений последнего уравнения $y = 25,\ t = 387$. Отсюда $z = 24 \cdot 480 \cdot 25 = 600 \cdot 480$, и прогрессия содержит член $(480 \cdot 360000)^6$.

II. Пусть $b^3 < a^2$.

Будем искать в прогрессии куб, больший, чем a^2 :

$$b^3 + x(a^2 - b^3) = z^3,\ x = \frac{z^3 - b^3}{a^2 - b^3}.$$

Достаточно положить $z = b+t(a^2-b^3)$, где t нужно выбрать столь большим, чтобы z^3 было больше a^2. Таким образом, задача сведена к случаю I.

138. 20, 16, 100, 400000. **139.** 96.

143. Числа, взаимно простые с n, разбейте на пары вида $< k, n-k >$.

144. Если бы числами $p_1, \ldots, p_s$ исчерпывался весь список простых чисел, то ни одно число, кроме 1, не было бы взаимно просто с их произведением $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$, откуда $\varphi(P) = 1$, что противоречит формуле из условия задачи.

150. Пусть $1 = d_1 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа n. Количество чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, которые делятся на d_i, равно n/d_i. Поэтому количество чисел, не превосходящих n и не являющихся взаимно простыми с n, не больше $\frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} \ldots + \frac{n}{d_k} = d_{k-1} + d_{k-2} + \ldots + d_1 = s(n) - n$. Таким образом, $n - \varphi(n) \le s(n) - n$, что и требовалось доказать.

151. Используя обозначения из решения предыдущей задачи, имеем

$$s(n) = \sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{d_i} \le n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < n(1 + \int_1^n \frac{dx}{x}) = n(\ln n + 1).$$

С другой стороны, $s(n!) \ge n! \sum_{i=1}^{n} 1/i$. Множитель при $n!$ может быть сколь угодно большим при достаточно большом n (как частичная сумма гармонического ряда). Поэтому ответ на вопрос задачи отрицательный.

154. Нет. **157.** Произведение матриц $A_i A_j$.

173. Решение можно найти в [63].

174. $(1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 1$.

177. Нулевой гомоморфизм и тождественное отображение.

179. Да. **180.** Все участвовали. **181.** Мать и младшая дочь. **182.** Нет.

183. Эта дорога ведёт в ваш родной город? Положительный (отрицательный) ответ означает, что указанная дорога ведёт в A (соответственно в B).

Решение. Пусть x означает высказывание "встреченный путешественником житель правдив", а y означает высказывание "некоторая фиксированная (конкретная) дорога ведёт в A". Для того, чтобы составить вопрос, положительный (отрицательный) ответ $f(x,y)$ на который означает, что указанная дорога ведёт в A (соответственно в B), составим таблицу истинности.

x	y	Ожидаемый ответ	$f(x,y)$
1	1	Да	1
1	0	Нет	0
0	1	Нет	0
0	0	Да	1

Из таблицы видно, что $f(x,y) = x \sim y$. Таким образом, нужно выяснить соответствие направления дороги и места жительства "аборигена".

187. $2^{2^{n-1}}$. **188.** $2^{2^{n-1}}$.

189. $x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}, xy \vee yz \vee zx, \overline{x}\ \overline{y} \vee \overline{y}\ \overline{z} \vee \overline{z}\ \overline{x}$.

191. Если все переменные принимают значение ИСТИНА, то любая их комбинация, содержащая из связок лишь $\&, \vee$ или $\to$, истинна. Таким образом, отрицание не выражается через указанные логические операции.

193. $\overline{x} = x + 1$;
$x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(x+1)(y+1)} = (x+1)(y+1) + 1 = xy + x + y$;
$x \to y = \overline{x} \vee y = (x+1) \vee y = x + 1 + y + (x+1)y = x + xy + 1$.

194. $1, x, y, xy$; 16 многочленов $(0, 1, \ldots, 1 + x + y + xy)$ соответствуют всевозможным подмножествам 4-элементного множества одночленов.

195. 1) $x + y + z + xy + xz + yz + xyz$; 2) $xy + xz + yz$; 3) $x + y + z$.

196. Существование вытекает из 193. Приведем также явную конструкцию, позволяющую получить многочлен от n переменных, если известно представление в виде многочлена любой функции от $n - 1$ переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n) + x_1 \left(f(0, x_2, \ldots, x_n) + f(1, x_2, \ldots, x_n)\right).$$

Проверьте!

Единственность докажем двумя способами.

Комбинаторное доказательство. Из 2^n одночленов от n переменных можно составить 2^{2^n} многочленов. Столько же имеется и различных логических функций от n переменных (поскольку таково число различных таблиц истинности функции от n переменных). Так как любая функция представима многочленом и число функций равно числу многочленов, каждая функция представима ровно одним многочленом.

Доказательство по индукции. Индукция проводится по числу переменных. *База индукции* (число переменных равно нулю) очевидна. *Индукционный шаг.* Пусть для функций от $n-1$ переменных единственность представления многочленом установлена. Предположим, что некоторая логическая функция от n переменных представима двумя многочленами: $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $f_2(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть $f = f_1 + f_2$. Из предположения следует, что f — многочлен, при всех значениях переменных равный нулю. Нужно доказать, что f — пустой многочлен (не содержит непустых одночленов), поскольку это равносильно совпадению многочленов f_1 и f_2. Сгруппировав слагаемые, содержащие x_1, получим $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 g(x_2,\ldots,x_n) + h(x_2,\ldots,x_n)$. Подставив $x_1 = 0$, имеем $h = 0$. Подставив теперь $x_1 = 1$, имеем $g + h = 0$, откуда $g = 0$. Таким образом, задача сведена к многочленам от $n-1$ переменных.

197. 1), 3), 4), 5), 6), 8). **Указание.** 2) $x \vee y \vee z = (x \vee y) \vee z$; 7) функция $x + y$ входит в указанное множество, а функция $x + y + z$ не входит.

198. Все дело в штрихе Шеффера.

199. 1), 2), 6).

204. б) Покажите, что $\overline{\mathbf{P_0}} \subset \overline{\mathbf{M}} \cup \overline{\mathbf{S}}$.

212. Пусть высказывание $a(b,c,d,e)$ означает: "A (соответственно B,C,D,E) присутствует". Тогда заданным условиям отвечают следующие сложные высказывания:

1) $s_1 = a\&e \to b = \overline{a} \vee \overline{e} \vee b$;

2) $s_2 = \overline{e} \to b\&\overline{c} = e \vee b\overline{c}$;

3) $s_3 = \overline{a\&c \vee \overline{a}\&\overline{c}} = (\overline{a} \vee \overline{c})(a \vee c) = a\overline{c} \vee \overline{a}c$;

4) $s_4 = e \to \overline{d} = \overline{e} \vee \overline{d}$;

5) $s_5 = (\overline{c} \to (\overline{b} \to e))\&(\overline{b}\&c \to \overline{e}\&d) = (c \vee b \vee e)(b \vee \overline{c} \vee \overline{e}d) =$
$= b \vee (c \vee e)(\overline{c}\&\overline{e}d) = b \vee c\overline{e}d \vee e\overline{c}$.

Каждый вечер (с точки зрения присутствия на нем A,B,C,D,E) можно описать совершенной элементарной конъюнкцией $a^{\sigma_1}b^{\sigma_2}c^{\sigma_3}d^{\sigma_4}e^{\sigma_5}$, где σ_i — логические переменные, не обращающиеся одновременно в 0. Таким об-

разом, задача сводится к нахождению СДНФ для формулы
$f = s_1 \& s_2 \& s_3 \& s_4 \& s_5$.

Исходя из высказывания s_3, рассмотрим два возможных случая.

- Пусть $a = 1$. Тогда $c = 0, s_1 = \overline{e} \vee b, s_2 = e \vee b, s_5 = b \vee e$ и
  $f = (\overline{e} \vee b)(e \vee b)(\overline{e} \vee \overline{d})(b \vee e) = b(\overline{e} \vee \overline{d})$.

- Пусть $a = 0$. Тогда $c = 1, s_1 = 1, s_2 = e, s_5 = b \vee \overline{e}d$ и
  $f = e(\overline{e} \vee \overline{d})(b \vee \overline{e}d) = e\overline{d}(b \vee \overline{e}d) = eb\overline{d}$.

Значит, $f = a\overline{c}b(\overline{e} \vee \overline{d}) \vee \overline{a}ceb\overline{d} = ab\overline{c}\overline{d}e \vee ab\overline{c}d\overline{e} \vee ab\overline{c}\overline{d}\overline{e} \vee \overline{a}bc\overline{d}e$.

Ответ. 4 вечера: A, B, E; A, B, D; A, B; B, C, E.

213. См. рис. 4, а). **214.** См. рис. 4, б). **215.** См. рис. 4, в).

216. См. рис. 4, г).

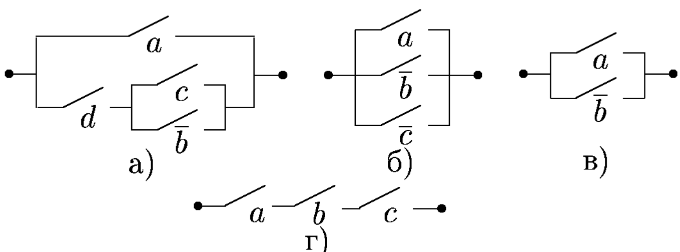


Рис.4. Схемы с минимальным числом контактов

220. $AA = AA + O = AA + A\overline{A} = A(A + \overline{A}) = A \cdot I = A$;
$A + A = (A + A) \cdot I = (A + A)(A + \overline{A}) = A + A\overline{A} = A + O = A$.

221. $A + I = (A + I)I = (A + I)(A + \overline{A}) = A + I \cdot \overline{A} = A + \overline{A} = I$.

222. $A + O = A + A\overline{A} = A \cdot I + A \cdot \overline{A} = A(I + \overline{A}) = A \cdot I = A$.

224. Обозначим $X = (A + B) + C$, $Y = A + (B + C)$. Нужно доказать, что $X = Y$. Имеем:
$AX = A((A + B) + C) = A(A + B) + AC = A + AC = A$;
$AY = A(A + (B + C)) = A + A(B + C) = A$;
$\overline{A}X = \overline{A}((A + B) + C) = (\overline{A}A + \overline{A}B) + \overline{A}C = \overline{A}B + \overline{A}C = \overline{A}(B + C)$;
$\overline{A}Y = \overline{A}(A + (B + C)) = \overline{A}A + \overline{A}(B + C) = \overline{A}(B + C)$.

Итак, $AX = AY$, $\overline{A}X = \overline{A}Y$. Поэтому

$$X = (A + \overline{A})X = AX + \overline{A}X = AY + \overline{A}Y = (A + \overline{A})Y = Y.$$

Доказана ассоциативность сложения. Из закона двойственности теперь следует ассоциативность умножения.

238. Независимость аксиомы А от В и С будем доказывать указанием интерперетации, при которой аксиомы В и С и все выводимые из них формулы принимают одно значение, а формула А не всегда имеет это значение.

Независимость А1 от А2 и А3. Будем считать, что каждая формула имеет одно из значений 0, 1 или 2, и при этом логические связки $\to$ и ${}^{-}$ задаются следующими таблицами.

B	0	1	2
A	$A \to B$		
0	1	1	1
1	0	1	0
2	0	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0
2	1

Проверьте, что при любых значениях переменных формулы А2 и А3 принимают значение 1, а из формул, принимающих значение 1, по правилу modus ponens выводится формула, имеющая также значение 1. В то же время при $A = 2$ и $B = 1$ формула А1 имеет значение 0.

Независимость А2 от А1 и А3. Будем считать, что каждая формула имеет одно из значений 0, 1 или 2, и при этом логические связки $\to$ и ${}^{-}$ задаются следующими таблицами.

B	0	1	2
A	$A \to B$		
0	1	1	1
1	0	1	1
2	2	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0
2	0

Проверьте, что при любых значениях переменных формулы А1 и А3 принимают значение 1, а из формул, принимающих значение 1, по правилу modus ponens выводится формула, имеющая также значение 1. В то же время при $A = 1,\ B = 2,\ C = 0$ формула А2 имеет значение 0.

Независимость А3 от А1 и А2. Будем считать, что каждая формула имеет одно из значений 0 или 1, и при этом логические связки $\to$ и ${}^{-}$ задаются следующими таблицами.

B	0	1
A	$A \to B$	
0	1	1
1	0	1

A	$\overline{A}$
0	0
1	0

Проверьте, что при любых значениях переменных формулы А1 и А2 принимают значение 1, а из формул, принимающих значение 1, по правилу modus ponens выводится формула, имеющая также значение 1. В то же время при $A = 1$ и $B = 0$ формула А3 имеет значение 0.

250. Нет. К аксиомам исчисления предикатов можно добавить без противоречия невыводимую в нем формулу

$$(\exists x\ A(x)) \to (\forall x\ A(x))\,.$$

253. 6) $\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$; 7) $\max(x,y) = y + (x \dot{-} y)$.

255. 1) $[x/y] = \sum\limits_{i=0}^{x} \mathrm{sg}(x \dot{-} iy) \dot{-} 1$;

2) $\mathrm{rest}(x,y) = x \dot{-} [x/y] \cdot y$; 3) $\mathrm{div}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}\,\mathrm{rest}(x,y)$;

4) $\mathrm{Pr}(x) = \mathrm{sg}(x \dot{-} 1) \cdot \overline{\mathrm{sg}} \left(\sum\limits_{i=0}^{x} \mathrm{div}(x,i) \dot{-} 2 \right)$; 6) $q(x) = \sum\limits_{i=0}^{x} \mathrm{sg}(x + 1 \dot{-} i^2) \dot{-} 1$.

259. Пусть $g(x_1,\ldots,x_n) = \mu y[f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0] \leq h(x_1,\ldots,x_n)$, где h — примитивно рекурсивная функция.Тогда

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=0}^{h(x_1,\ldots,x_n)} \mathrm{sg} \left(\prod_{y=0}^{i} f(x_1,\ldots,x_n,y) \right).$$

260. $p(n) = \mu[|\pi(y) - n| = 0]$. Ограниченность сверху примитивно рекурсивной функцией $p(n) \leq 2^{n+2}$ установлена в решении задачи 69.

261. $\alpha_1(x) = 2(x+1)$; $\alpha_2(x) = 2^{x+2} \cdot x + 2^{x+3} - 2$.

268. Пусть A — непустое примитивно рекурсивное множество, a — некоторый его элемент. Положим

$$g(x) = x \cdot f_A(x) + a \cdot \overline{\mathrm{sg}} f_A(x).$$

Покажите, что множество значений функции g совпадает с A.

278. 6) $(2^{10} + C_{10}^5)/2$.

280. 1) C_n^4. Каждая точка пересечения хорд однозначно задается (неупорядоченной) четверкой точек — концов этих хорд.

2) $1 + C_n^2 + C_n^4$. Будем последовательно проводить хорды. Каждая новая хорда увеличивает количество частей на величину, равную количеству отрезков, на которые хорда разбивается ранее проведёнными хордами, т.е. на единицу больше, чем число её точек пересечения с ранее проведёнными

хордами. Поскольку при этом каждая точка пересечения считается ровно один раз, количество частей, первоначально равное единице, после проведения всех хорд увеличится на сумму числа точек пересечения и числа хорд. Интересен ответ к задаче при $n = 1, 2, \dots, 6$. Он таков: 1, 2, 4, 8, 16, 31. Физик из известного анекдота на основании первых пяти результатов заявил бы, что общий ответ — 2^{n-1}, а число 31 возникло в результате погрешности эксперимента.

282. $n = 10, k = 5$. **283.** $2C_7^4 = 70$.

286. $1)\overline{C_5^{10}}$; $2)\overline{C_5^5} = 126$; $3)\overline{C_5^{20}} - C_5^3\overline{C_2^{18}} - 5 = 10431$.

287. 5151.

288. Левая часть тождества — это число наборов $i_0, i_1, \dots, i_n$, удовлетворяющих неравенствам $m \geq i_n \geq i_{n-1} \geq i_1 \geq i_0 \geq 1$. Пусть $x_0 = i_0 - 1,\ x_1 = i_1 - i_0, \dots, x_n = i_n - i_{n-1},\ x_{n+1} = m - i_n$. Тогда $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ — неотрицательные целые числа, чья сумма равна $m - 1$. Число наборов $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ равно $\overline{C_{n+2}^{m-1}} = C_{n+m}^{m-1} = C_{n+m}^{n+1}$.

289. Пусть $A_k = \{1, 2, 3, \dots, k^n - 1\}$. Если $a = \sum_{i=1}^n x_i^n < k^n$, где x_i — неотрицательные целые числа, то $\forall i \ \ x_i \leq k - 1$.

1) Из n натуральных чисел, каждое из которых не превосходит $(k-1)$, можно составить $(k-1)^n$ упорядоченных выборок. Поэтому в множестве A_k по крайней мере $k^n - 1 - (k-1)^n$ чисел не представимо в виде $\sum_{i=1}^n x_i^n$. Число $k^n - 1 - (k-1)^n$ может быть сколь угодно большим за счет выбора числа k.

2) Можно считать, что речь идет о представлении числа в виде суммы ровно n слагаемых $\sum_{i=1}^n x_i^n$, если допустить, что некоторые из них могут быть равны нулю. В указанной сумме каждое из n слагаемых принимает одно из k значений: $0, 1, 2^n, 3^n, \dots, (k-1)^n$. Поэтому можно образовать не более $\overline{C_k^n} = C_{k+n-1}^n$ таких сумм. Заметим, что

$$C_{k+n-1}^n = k \cdot \frac{k+1}{2} \cdot \frac{k+2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k+n-1}{n} < k^{n-1} \cdot \frac{k+1}{2},$$

откуда

$$k^n - C_{k+n-1}^n > k^{n-1}(k - \frac{k+1}{2}) = k^{n-1} \cdot \frac{k-1}{2}.$$

Значит, не менее $k^{n-1} \cdot \frac{k-1}{2}$ чисел не представимы в указанном виде.

290. 1) $(C_{n+1}^2)^2$; 2) $n(n+1)(2n+1)/6$. **292.** C_{10}^5.

294. Составьте отношение a_{k+1}/a_k.

295. Покажите, что число равнобедренных треугольников с фиксированным основанием не больше 3. Поэтому число треугольников, не являющихся разносторонними, не превосходит $C_{12}^2 \cdot 3 = 198$.

296. $52!/(13!)^4$.

299. 1) Подсчитайте двумя способами сумму мощностей всех подмножеств n-элементного множества.

306. $(n-1)^3$ при нечётном n; $(n-1)^3+1$ при чётном n.

307. $\overline{C_6^{27}} - 6 \cdot \overline{C_6^{17}} + C_6^2 \cdot \overline{C_6^{7}}$. **Решение.** Пусть U — множество последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$, составленных из шести неотрицательных целых чисел с суммой 27; а для каждого i множество $A_i \subset U$ состоит из таких последовательностей, в которых $a_i \geq 10$. Для решения задачи нужно вычислить $|\bigcap\limits_{i=1}^{6} \overline{A_i}|$. Заметим, что $|U| = \overline{C_6^{27}}$, $|A_i| = \overline{C_6^{17}}$, $|A_i \cap A_j| = \overline{C_6^{7}}$ $(i \neq j)$, а пересечение двух и большего числа множеств A_i пусто.

Замечание. Как отмечно в [9], ответ к данной задаче даёт число *счастливых* 6-значных билетов (в которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр).

310. Используйте оценку остаточного члена ряда из признака Лейбница.

311. 14833. **314.** 6) $(k-1)^2 = 2!C_k^2 - 1!C_k^1 + 1$. **315.** $M\xi = D\xi = 1$.

317. f_n.

318. 7) Можно доказать индукцией по m (или n). Существует также комбинаторная трактовка этого тождества, связанная с "задачей о прыгуне".

319. 0, 1, 12.

320. Примените индукцию.

325. 1) С помощью соотношения $f_{n+k} = f_{n-1}f_k + f_n f_{k+1}$ проверьте матричное тождество

$$\begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n & f_{m-k} \\ f_{n+1} & f_{m-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+k} & f_m \\ f_n & f_{m-k} \end{pmatrix}.$$

Теперь вычисление соответствующих определителей даёт желаемый результат. 2) Сложите тождества из п. 1) при $m = n,\ k = 1$ и $m = n, k = 2$.

335. $2^n\sqrt{5}f_n = (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n$.

336. 1) Используйте результат предыдущей задачи, а также следующие соотношения:

$2^{p-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$; $C_p^k \vdots p$ при $1 \leq k < p$.
2) Следствие 1).

337. Используйте задачу 323.

338. а) Да. Если условие задачи выполняется для последовательности $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \ldots, \frac{1}{n_k}$, то это же будет верно и для последовательности $\frac{1}{n_1 n_2}, \frac{1}{n_1(n_1+n_2)}, \frac{1}{n_2(n_1+n_2)}, \ldots, \frac{1}{n_k(n_1+n_2)}$.

б) Нет. Покажите, что если бесконечная последовательность $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \ldots$ удовлетворяет условию задачи, то

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}} < \frac{n_2}{n_1} < \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}.$$

Переходя к пределу в двойном неравенстве по n, отсюда получаем,что

$$\frac{n_2}{n_1} = \lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbf{Q}.$$

339. $f(x) = kx$, где $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

340. f_n — n-е число Фибоначчи. **Решение.** Обозначим число искомых подмножеств f_n. Выпишем минимальные э-множества при $n \leq 6$:

$$\{1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}.$$

Прямой подсчет показывает: $f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8$. Возникает предположение, что для для любого натурального n
$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Убедимся в этом.

Разобьем все мэ-подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n+2\}$ на два класса: множеств, содержащих число $n+2$, и множеств, не содержащих это число. Всякое множество из второго класса является мэ-подмножеством множества $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, поэтому во втором классе f_{n+1} множеств.

Заметим, что в минимальном э-множестве, содержащем k элементов, не могут присутствовать числа меньше k (из-за минимальности), и так как множество — эгоцентрично, то число k — его элемент. Легко проверить, что верно и обратное: произвольное k-элементное множество с минимальным элементом k будет мэ-множеством.

Возьмем теперь произвольное множество из первого класса (пусть k — число его элементов; ясно, что $k > 2$), удалим в нем элемент $n+2$, а все остальные элементы уменьшим на единицу. Получим $k-1$-элементное множество с минимальным элементом $k-1$ — это мэ-множество, причем максимальный элемент его не превосходит n. Установлено взаимно однозначное соответствие между множествами из первого класса и мэ-подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Таким образом, первый класс содержит f_n множеств. Соотношение $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ доказано.

Замечание. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ можно составить C_{n-k}^{k-1} k-элементных минимальных э-множеств (к числу k нужно добавить ещё $k-1$ больших k чисел). Поэтому

$$f_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_{n-k-1}^k.$$

Другие доказательства данного тождества см. в задачах 320 и 330.

356. $A(x) = B(x+1)$.

357. 3) $A(x) = \frac{1-x}{1-3x+x^2}$, $B(x) = \frac{x}{1-3x+x^2}$.

4) $a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (\sqrt{5}-1)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$;

$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

362. $2 \cdot (-1)^n + 2^n$.

372. $S_{n+2} = 14S_n - S_{n-1}$; $r_{n+2} = 4r_{n+1} - r_n$.

375. 927. **Указание.** Обозначим через a_n число двоичных последовательностей длины n, удовлетворяющих условию задачи. Найдите начальные условия и рекуррентное соотношение для последовательности (a_n).

378. 4) 55252.

379. $(16^n - 4^n)/12$. Решение можно найти в [58].

380. Сделайте замену $y_n = 2a_n + 1$ и докажите, что $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$.

381. Обозначив левую часть доказываемого тождества через S_n, докажите, что $S_{n+1} = S_n - pqS_{n-1}$.

382. 99 руб 99 коп. Если бы у шулера было 100 руб, то он был бы всегда в выигрыше.

383. Нет. **Решение.** Каждый шаг удваивает длину последовательности. После очередного шага она имеет вид (для некоторого n)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2^n}, 1-a_1, 1-a_2, 1-a_3, \ldots, 1-a_{2^n}.$$

1^o. Докажем индукцией по k, что $\forall k \ \ a_{2k} = 1 - a_{2k-1}$, или $a_{2k} + a_{2k-1} = 1$. База индукции очевидна. Пусть доказываемое утверждение верно для $k \le 2^n$. Докажем его справедливость для k, удовлетворяющего двойному неравенству $2^n < k \le 2^{n+1}$. Действительно,
$a_{2^n+2i} = 1 - a_{2i}$, $a_{2^n+2i-1} = 1 - a_{2i-1}$ (где $1 \le 2i-1, 2i \le 2^n$), откуда $a_{2^n+2i} + a_{2^n+2i-1} = 2 - (a_{2i} + a_{2i-1}) = 2 - 1 = 1$.

2^o. Вновь по индукции докажем, что $\forall k \ \ a_{2k-1} = a_k$. Для $k = 1$ это утверждение тривиально. Пусть оно выполняется для $k \le 2^n$. Тогда при $i \le 2^n$ имеем $a_i = a_{2i-1}$, $\ a_{2^n+i} = 1 - a_i$, $\ a_{2^n+2i-1} = 1 - a_{2i-1}$, откуда $a_{2^{n+1}+2i-1} = a_{2^n+i}$, т.е. доказываемое соотношение выполняется и при $k \le 2^{n+1}$.

3^o. Пусть a_n — периодическая с некоторого места последовательность и T — период. Докажем, что число T — чётно.

Если T нечётно, найдётся период, первый элемент которого имеет нечётный индекс. Рассмотрим этот период и следующий за ним:

$$a_{2j-1}, a_{2j}, \ldots, a_{2j+T-2}; \quad a_{2j+T-1}, \ldots, a_{2j+2T-2}.$$

В силу 1^o этот отрезок последовательности содержит поровну нулей и единиц, этот "паритет" должен иметь место и для каждого периода, что, однако, невозможно из-за нечётности T.

4^o. Пусть $T = 2s$ — наименьший период. Тогда $\exists k_0 \ \ \forall k \ge k_0 \ \ a_{k+T} = a_k$. В силу 2^o $\ \forall k \ge k_0 \ \ a_k = a_{2k-1} = a_{2k-1+T} = a_{2(k+s)-1} = a_{k+s}$, то есть s — также период последовательности, что противоречит минимальности T.

Доказано, что последовательность не является периодической.

390. $(n-1)!$ **391.** 98475. **395.** 16 и 11 соответственно.

401. $\frac{1}{8}(C_{64}^8 + 2C_{16}^2 + 3C_{32}^4 + 2(C_{28}^4 + C_8^2 C_{28}^3 + C_8^4 C_{28}^2 + C_8^6 C_{28}^1 + C_8^8)) =$
$= 553\,332\,533$.

402. $\frac{1}{8}(2^{24} + 2 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^{12} + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^{10}) = 2\,102\,800$.

403. 13 звёзд и 88 мечей.

406. Существует 11 простых графов с 4 вершинами и 34 — с 5 вершинами.

407. 1) 1; 2) 2.

411. Пусть v — вершина максимальной степени; $k=\rho(v)$. Если ни одна из k вершин, смежных с v, не является висячей, то степени этих вершин принимают значения от 2 до k; поэтому по крайней мере две из них имеют одинаковую степень, хотя соединены цепью длины 2.

415. $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i$ вершин и $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\rho_i^2-\rho_i)$ рёбер.
Решение. Вершина рёберного графа $L(G)$, отвечающая ребру v_iv_j в G, имеет степень $(\rho_i+\rho_j-2)$. В сумме $A=\sum(\rho_i+\rho_j-2)$, где суммирование ведётся по всем рёбрам G, степень каждой вершины ρ_i встречается ровно ρ_i раз. Поэтому удвоенное число рёбер $L(G)$ равно $A=\sum\rho_i^2-2m$, где $2m=\sum\rho_i$ — удвоенное число рёбер исходного графа G.
Другое решение. Ребра, инцидентные i-й вершине в графе G, образуют $C_{\rho_i}^2$ пар смежных рёбер, каждой паре соответствует ребро в рёберном графе. Суммируя C_{ρ_i} по всем i, вновь найдём общее число рёбер $L(G)$.

416. *Достаточность* очевидна. *Необходимость*. Из предыдущей задачи следует: $\sum_{i=1}^{n}\rho_i=2n$; $\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2=4n$, откуда $\sum_{i=1}^{n}(\rho_i-2)^2=0$, т.е. $\forall i\ \ \rho_i=2$. Связный регулярный граф степени 2 есть циклический граф.

441. n^2+n.

445. 1) а) $P_4(x_1,x_2,\ldots)=\frac{1}{24}(x_1^6+9x_1^2x_2^2+8x_3^2+6x_2^1x_4^1)$;
б) $P_5(x_1,x_2,\ldots)=\frac{1}{120}(x_1^{10}+10x_1^4x_2^3+20x_1^1x_3^3+30x_2^1x_4^2+15x_1^2+20x_1^1x_3^1x_6^1+24x_5^2)$.
2) Положив вес ребра равным x, а вес *неребра* равным 1, получим следующие производящие функции $\sum a_mx^m$, где m — число графов с m рёбрами:
а) $\sum a_mx^m=\sum W(F)=P_4(1+x,1+x^2,\ldots)=1+x+2x^2+3x^3+2x^4+x^5+x^6$;
б) $\sum a_mx^m=\sum W(F)=P_5(1+x,1+x^2,\ldots)=1+x+2x^2+4x^3+6x^4+6x^5+6x^6+4x^7+2x^8+x^9+x^{10}$.

451. При нечётных n.

453. 3 раза. См. задачу 452.

454. 1) Да; 2) нет.

459. В гамильтоновой цепи $u\to\ldots\to v$, где вершины u и v не смежны, произвольная вершина, смежная с u (обозначим её u'), не может следовать за вершиной (например, v'), смежной с v. Действительно, гамильтонова цепь $u\to\ldots\to v'\to u'\to\ldots\to v$ легко преобразуется в гамильтонов цикл $u\to\ldots\to v'\to v\to\ldots\to u'\to u$. Поэтому число вершин, не смежных с u, не меньше числа вершин, смежных с v, то есть $n-1-\rho(u)\geq\rho(v)$, или $\rho(u)+\rho(v)\leq n-1$.

460. Предположив, что граф не является гамильтоновым, будем последовательно добавлять к нему рёбра до тех пор, пока он не станет гамильтоновым. Удалив последнее добавленное ребро uv, получим полугамильтонов граф G', не являющийся гамильтоновым. В нем существует гамильтонова цепь $u \to \ldots \to v$, причем вершины u и v не смежны. Применение результата предыдущей задачи даёт: $\rho'(u)+\rho'(v) \leq n-1$, где $\rho'(u)$, $\rho'(v)$ — степени вершин u и v в графе G'. Осталось заметить, что $\rho'(u) \geq \rho(u)$, $\rho'(v) \geq \rho(v)$, откуда $\rho(u) + \rho(v) \leq \rho'(u) + \rho'(v) \leq n - 1 < n$. Получено противоречие с условием.

461. 38.

462. Упорядочим степени вершин графа по неубыванию: $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \ldots \leq \rho_n$. Условие теоремы теперь можно сформулировать так:

$$\forall k \leq \frac{n-1}{2} \quad \rho_k > k. \tag{$*$}$$

Предположив, что граф негамильтонов, будем, пока это возможно, добавлять к нему рёбра так, чтобы не получить гамильтонова графа. В результате получим граф, в котором любые две несмежные вершины соединены гамильтоновой цепью, и, как показывает задача 459, сумма их степеней не больше $n - 1$. Для степеней вершин полученного графа G' условие $(*)$ сохраняется. Выберем в G' пару несмежных вершин u и v, сумма степеней которых принимает наибольшее значение. Пусть $k = \rho(u) \leq \rho(v)$. Тогда (поскольку $\rho(u) + \rho(v) \leq n - 1$) выполняется неравенство $k \leq \frac{n-1}{2}$. Кроме того, степень любой вершины, не смежной с v, не превосходит $\rho(u) = k$. Вершин, не смежных с v, не меньше, чем вершин, смежных с u (см. задачу 459), т.е. не меньше k. Таким образом, не менее, чем k вершин, имеют степень не больше k. Поэтому $\rho_k \leq k$. Полученное противоречие доказывает теорему.

466. Рассмотрите вершину, смежную с концом самой длинной цепи.

469. $r = \left[\frac{d+1}{2}\right]$. **471.** Нет. **478.** n^{n-1}. **479.** $k+1$.

482. $1 + \sum_{k=1}^{s} kn_k - \sum_{k=1}^{s} n_k$. Из общего количества вершин нужно вычесть количество внутренних вершин.

483. $C_{2n}^{n}/(n+1)$.

484. Наибольшее число вершин равно $2^{n+1} - 1$, а наименьшее $f_{n+3} - 1$. **Указание.** Пусть a_n — наименьшее число вершин в сбалансированном дереве высоты n. Тогда $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 1 + a_n + a_{n+1}$. Отсюда для разности $u_n = a_n - a_{n-1}$ имеем $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, то есть $u_n = f_{n+1}$ — $n+1$-е число Фибоначчи. Значит, $a_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + a_0 = f_{n+1} + f_n + \ldots + f_2 + f_1$. Осталось использовать тождество 3) задачи 318.

485. 42. **486.** $k \le 4$.

490. $2m = sf = \rho(m - f + 2)$.

491. Пять платоновых графов, циклические графы и графы с двумя вершинами без петель. **Указание.** Если в графе из условия задачи более двух вершин, то степень каждой вершины не превосходит 5. Используйте далее тождество предыдущей задачи.

492. Нет.

493. Если у планарного графа n вершин и m рёбер, то выполняется неравенство $m \le 3n - 6$.

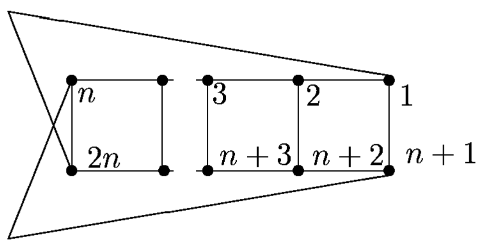
494. Индукция по числу вершин.

495. Нет. **Указание.** Докажите связность графа. Применяя лемму о рукопожатиях, легко найти число рёбер графа: $m = 25$. Если бы граф был плоским, то (по формуле Эйлера) он имел бы 17 граней. Так как каждая грань ограничена не менее, чем 3 рёбрами, для m имеем неравенство $2m \ge 3 \cdot 17$, а оно не выполняется.

497. Доказательство можно найти в [44], с. 100.

498. Возьмём грань с наибольшим числом сторон. Сколько сторон может быть у смежных граней?

500. См. рис.



502. 1) В K_n имеем C_n^5 полных подграфов с 5 вершинами. Каждый из них даёт хотя бы одно скрещивание, а каждая пара скрещивающихся рёбер входит в $n - 4$ таких подграфов. Отсюда

$$\operatorname{cr}(K_n) \ge \frac{C_n^5}{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5! \cdot n - 4} = \frac{C_n^4}{5}.$$

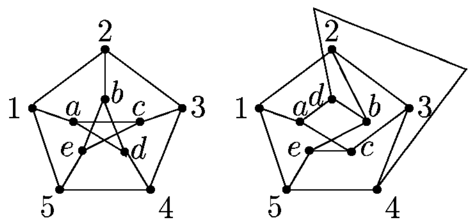
2) В $K_{m,n}$ имеем $C_m^3 \cdot C_n^3$ подграфов вида $K_{3,3}$. Каждый из них даёт хотя бы одно скрещивание, а каждая пара скрещивающихся рёбер входит в $(m-2)(n-2)$ таких подграфов. Отсюда

$$\operatorname{cr}(K_{m,n}) \ge \frac{C_m^3 \cdot C_n^3}{(m-2)(n-2)} = \frac{C_m^2 \cdot C_n^2}{9}.$$

503. $\mathrm{cr}(K_6) = 3$; $\mathrm{cr}(K_{3,4}) = 2$; $\mathrm{cr}(K_{4,4}) = 2$.

505. $4\,\mathrm{cr}(G)/n$ — это среднее число скрещиваний, приходящихся на рёбра, инцидентные вершине графа.

506. На рис. приведено изображение графа Петерсена с двумя пересечениями.



Для доказательства того, что одним пересечением при изображении графа обойтись нельзя, используйте утверждение задачи 505.

508. $n/2^{n-1}$.

510. В исходном графе существует эйлеров цикл.

511. Перенеся доказательство теоремы Эйлера на случай графа из условия задачи, можно построить замкнутый путь, содержащий все дуги орграфа.

515. Произвольно ориентируем рёбра графа. Поскольку сумма *полустепеней исхода* (*пси*) всех вершин равна числу рёбер и, значит, есть число чётное, число вершин с нечётной пси чётно. Возьмём произвольную цепь, соединяющую две такие вершины, и поменяем ориентацию всех входящих в нее дуг. Теперь пси этих вершин станут чётными, в то время как пси остальных вершин не изменятся. Повторяя эту процедуру, пока она возможна, получим в конце концов требуемую ориентацию дуг.

522. Пусть в турнире n вершин. Исходя из соотношений $\sum \overleftarrow{\rho}(v) = \sum \overrightarrow{\rho}(v)$ и $\overleftarrow{\rho}(v) + \overrightarrow{\rho}(v) = n - 1 \quad (\forall v)$, получим: $\sum \overleftarrow{\rho}^2(v) - \sum \overrightarrow{\rho}^2(v) = \sum(\overleftarrow{\rho}(v) - \overrightarrow{\rho}(v))(\overleftarrow{\rho}(v) + \overrightarrow{\rho}(v)) = (n-1)\sum(\overleftarrow{\rho}(v) - \overrightarrow{\rho}(v)) = 0$.

524. Постройте соответствующие примеры при $n = 3$ и $n = 6$ и придумайте, как от турнира с n вершинами перейти к турниру с $n{+}2$ вершинами.

529. Примените индукцию по числу вершин.

530. Примените индукцию по длине цикла.

532. Из сильной связности следует, что всякая вершина входит в некоторый цикл; например, v_1 входит в цикл $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n \to v_1$ длины n. Если $n > 3$, то можно указать цикл меньшей длины. Действительно, если в графе есть дуга v_3v_1, то это цикл $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$, в противном случае — цикл $v_1 \to v_3 \to \ldots \to v_n \to v_1$.

536. Рассмотрите остовный лес графа. Он является двудольным графом.

538. 1, 2, 2, 4, 16. Пример минимального доминирующего множества при $d = 7$:
0000000, 0000111, 0011001, 1100001, 0101010, 1010010, 0110100, 1001100, 1111111, 1111000, 1100110, 0011110, 1010101, 0101101, 1001011, 0110011.

540. Так как диаметр графа равен 2, доминирующим множеством будет $\Gamma(v)$ — множество вершин, смежных с v, где v — произвольная вершина графа. Поэтому $\delta(G) \le \min_{v\in V} \rho(v)$.

При $\delta(G) = 1$ доказываемое утверждение очевидно. Считая, что $\delta(G) \ge 2$, положим $m = \delta(G) - 1$. Тогда $\forall v \quad \rho(v) > m$. В силу того, что никакое множество из m вершин не является доминирующим, для любых m вершин графа G найдётся вершина, не смежная с этими m вершинами. Поскольку всего существует C_n^m множеств из m вершин, найдётся такая вершина u в графе G, для которой существует **не менее** C_n^m/n неупорядоченных наборов из m вершин, ни с одной из которых эта вершина не смежна. Действительно, обозначив через k_i число m-элементных множеств вершин, не пересекающихся с $\Gamma(v_i)$, получим $\sum_{i=1}^n k_i \ge C_n^m$, откуда $\max k_i \ge C_n^m/n$. С другой стороны, так как $\rho(u) \ge \delta(G) = m+1$, для данной вершины u найдётся $n-1-\rho(u) \le n-m-2$ вершин, не смежных с ней. Из указанных вершин можно составить **не более** C_{n-m-2}^m наборов по m вершин. Таким образом, выполняется неравенство $C_{n-m-2}^m \ge C_n^m/n$, или $C_{n-m-2}^m/C_n^m \ge 1/n$. Последнее неравенство запишем в виде

$$\frac{(n-m-2)(n-m-3)\ldots(n-2m-1)}{n(n-1)\ldots(n-m+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{m+2}{n}\right)\left(1 - \frac{m+2}{n-1}\right)\ldots\left(1 - \frac{m+2}{n-m+1}\right) \ge \frac{1}{n}.$$

В полученном произведении первый множитель больше всех последующих и поэтому больше среднего геометрического всех m множителей, которое, в свою очередь, не меньше, чем $1/\sqrt[m]{n}$. Получено неравенство

$$1 - \frac{m+2}{n} > \frac{1}{\sqrt[m]{n}}.$$

Прологарифмируем его: $\ln(1-\frac{m+2}{n}) > -\frac{\ln n}{m}$. Применив (справедливое для $0 < x < 1$) неравенство $\ln(1-x) < -x$, получим теперь $-\frac{m+2}{n} > -\frac{\ln n}{m}$, или $m^2+2m < n\ln n$, откуда $m < -1+\sqrt{n\ln n+1}$.

Таким образом, $\delta(G) = m+1 < \sqrt{n\ln n+1}$, что и требовалось доказать.

546.

граф G	C_n	K_n	W_n	$K_{n,m}$	граф Петерсена
$\alpha_0(G)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	1	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$	$\max(n,m)$	4
$\beta_0(G)$	$n-\left[\frac{n}{2}\right]$	$n-1$	$n-\left[\frac{n-1}{2}\right]$	$\min(n,m)$	6
$\alpha_1(G)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$	$\min(n,m)$	5
$\beta_1(G)$	$n-\left[\frac{n}{2}\right]$	$n-\left[\frac{n}{2}\right]$	$n-\left[\frac{n-1}{2}\right]$	$\max(n,m)$	5

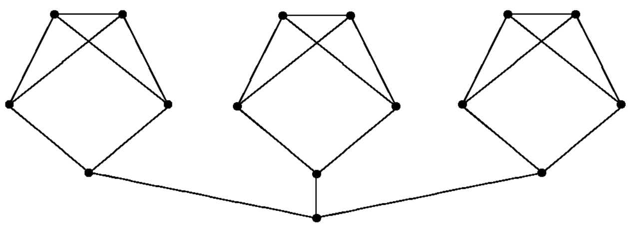
549, 550. Доказательство можно найти в [7].

551. Используйте теорему О. Оре (задача 460).

552. Доказательство ведётся индукцией по n.

553. Число вершин в кубическом графе чётно. Гамильтонов цикл распадается на два совершенных паросочетания. Оставшиеся рёбра составляют ещё одно совершенное паросочетание.

555. См. рис.



556. Если совершенное паросочетание одно, то "структура" графа очевидна. Пусть теперь число совершенных паросочетаний, на которые распадается граф, не менее двух и в графе есть мост — ребро uv. Рассмотрим ту компоненту, которой принадлежит вершина u после удаления ребра uv. В этой компоненте имеется одна вершина чётной степени, а остальные вершины нечётной степени. Из леммы о рукопожатиях получаем, что в этой компоненте связности нечётное число вершин. Значит, после удаления ребра uv граф не содержит совершенного паросочетания. По условию ребро uv входит в одно из совершенных паросочетаний; других, стало быть, нет. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

557. Данную задачу решают организаторы спортивных турниров, проходящих по круговой системе (когда каждый играет с каждым).

Если вершинам графа K_{2n} сопоставить участников турнира, а рёбрам — встречи между ними, то каждому туру состязания соответствует некоторое совершенное паросочетание (участники образуют n пар).

Шахматисты поступают следующим образом. Если участник турнира получил при жеребьевке номер $i < 2n$, то он последовательно встречается с игроками, имеющими такие номера: $2n+1-i, 2n+2-i, \ldots, 2n-1, 1, 2, \ldots, i-1, 2n, i+1, \ldots, 2n-i$. Для иллюстрации приведем расписание встреч для турнира с 8 участниками. В каждой клетке следующей таблицы проставлен номер тура, в котором встречаются соответствующие участники.

N участника	1	2	3	4	5	6	7	8
1	■	2	3	4	5	6	7	1
2	2	■	4	5	6	7	1	3
3	3	4	■	6	7	1	2	5
4	4	5	6	■	1	2	3	7
5	5	6	7	1	■	3	4	2
6	6	7	1	2	3	■	5	4
7	7	1	2	3	4	5	■	6
8	1	3	5	7	2	4	6	■

В турнирах по настольному теннису принят иной алгоритм распределения встреч по турам. В качестве примера приведем расписание встреч для 8 участников (каждая колонка отвечает очередному туру).

1 - 8	1 - 7	1 - 6	1 - 5	1 - 4	1 - 3	1 - 2
2 - 7	8 - 6	7 - 5	6 - 4	5 - 3	4 - 2	3 - 8
3 - 6	2 - 5	8 - 4	7 - 3	6 - 2	5 - 8	4 - 7
4 - 5	3 - 4	2 - 3	8 - 2	7 - 8	6 - 7	5 - 6

При переходе к очередному туру 1 стоит на месте, а любое другое число сдвигается против часовой стрелки на одну позицию либо (после "встречи" с единицей) на две позиции.

Читателю предлагается самостоятельно доказать корректность описанных алгоритмов.

В книге [39] (гл. 8, §3) приводится ещё один способ составления расписания встреч кругового турнира.

558. Ребра одного цвета должны составлять совершенное паросочетание. При нечётном n ответ отрицательный, при чётном n — положительный (см. предыдущую задачу).

564. Решение задачи о свадьбах существует тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее, чем с k девушками.

569. Нет. Инвариант — объём тетраэдра, в вершинах которого сидят мухи.

570. Нет. Разность числа хамелеонов разного цвета каждый раз либо не меняется, либо меняется на 3.

571. а) да; б) нет. Изучите остатки от деления на 3.

573. Нет. После каждого броска меняется ориентация треугольника.

574. Нет. Инвариант — дискриминант квадратного трёхчлена.

575. Только при нечётном n. Инвариант — сумма номеров деревьев, занимаемых чижами, по модулю n.

576. Пронумеруем лампочки, начиная с зажённой, числами от 1 до 12. Подсчитайте, как может измениться за каждый ход число горящих лампочек в множестве $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$.

578. Сумма попарных произведений соседних чисел увеличивается с каждой операцией.

579. Полуинвариант — сумма квадратов чисел.

580. Разделим сначала парламент на две палаты произвольным образом. Если перевести в другую палату того, у кого в данной палате более k врагов, то общее число пар врагов в парламенте уменьшится.

581. Нет. **582.** Нет. **583.** 1) Да; 2) нет.

584. Пусть $\alpha = \pi/n$. Для приведения к противоречию предположим, что при повороте второго многоугольника на угол $k\alpha$ его вершина с номером c_k совпадает с вершиной первого многоугольника, имеющей тот же номер ($k = 1, \ldots, 2n$). Тогда первоначально эта вершина занимала позицию, чей "номер" сравним по модулю $2n$ с числом $c_k - k$. Заметим, что числа c_k принимают все значения от 1 до $2n$; числа $c_k - k$ образуют полную систему вычетов по модулю $2n$. С одной стороны, $\sum_{k=1}^{2n}(c_k - k) = \sum c_k - \sum k = 0$. С другой стороны, $\sum_{k=1}^{2n}(c_k - k) \equiv (2n+1)n \not\equiv 0 (\operatorname{mod} 2n)$. Противоречие получено.

585. Число n должно быть нечётно.
Если $n = 2k+1$, то на диагонали, идущей с верхней правой клетки к нижней левой клетке, стоят неповторяющиеся числа
$2k+1, 2k-1, 2k-3, \ldots, 1, 2k, 2k-2, \ldots, 2$.
Пусть $n = 2k$. Обозначим через a_{ij} элемент таблицы, стоящий в i-й строке и j-м столбце. Имеет место соотношение $a_{ij} \equiv j - i + 1 (\operatorname{mod} n)$. Если $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}$ (т.е. $a_{i_1,j_1}, \ldots, a_{i_n,j_n}$ — числа, взятые по одному из каждой строки и каждого столбца таблицы), то $\sum a_{i_k,j_k} \equiv \sum (j_k - i_k + 1) \equiv n \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$. Если бы все числа $a_{i_1,j_1}, \ldots, a_{i_n,j_n}$ были бы разными, то выполнялось бы сравнение $\sum a_{i_k,j_k} = \frac{1+n}{2} \cdot n = (1+2k)k \equiv k (\operatorname{mod} 2k)$, противоречащее ранее найденному.

586. Занумеруем вершины по ходу часовой стрелки числами от 1 до $2n$. Звенья ломаной $i - j$ и $k - l$ параллельны тогда и только тогда, когда $i + j \equiv k + l (\operatorname{mod} 2n)$. Пусть идущие по порядку вершины ломаной имеют номера $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1$. Рассмотрим остатки от деления на $2n$ чисел $a_i + a_{i+1}$. Если все они различны (что равносильно отсутствию в ломаной параллельных звеньев), то они принимают все значения от 0 до $2n - 1$ и их сумма равна $n(2n-1)$, что сравнимо с n по модулю $2n$. С другой стороны, $\sum_{i=1}^{2n} (a_i + a_{i+1}) = 2 \sum_{i=1}^{2n} i = 2n(2n+1) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2n)$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

587. За $2n+1$ ход. **Решение.** Пусть
k (m) — разность числа ходов волка вправо и влево с горизонтальной составляющей n (соответственно $n+1$);
r (s) — разность числа ходов вверх и вниз с вертикальной составляющей n (соответственно $n+1$).
Если волк передвинулся в соседнюю сверху клетку, то

$$kn + m(n+1) = 0; \tag{1}$$

$$rn + s(n+1) = 1. \tag{2}$$

Из (1) следует, что $k \,\vdots\, n+1$, $\quad m \,\vdots\, n$. Если $k = 0$, то $m = 0$, а s чётно; равенство $m = 0$ влечет чётность r; но тогда левая часть (2) чётна, что невозможно. Поскольку $k \neq 0$ и $m \neq 0$, имеем: $|k| \geq n+1$ и $|m| \geq n$. Значит, общее число ходов не меньше $2n+1$. Покажем, как за $2n+1$ ход попасть в нужную клетку. Для этого можно сделать n ходов типа $(n, -(n+1))$, один ход $(n, n+1)$ и n ходов типа $(-(n+1), n)$, где (a, b) означает ход на a клеток по горизонтали и b клеток по вертикали, а знак минус соответствует движениям влево или вниз.

588. Докажите, что любые две противоположные $(n-1)$-мерные грани соединяет ребро с покрашенными концами.

589. 2. **591.** Нет.

592. При чётном n число a_n делится на 101; при нечётном n имеем разложение
$$a_{2k+1} = \left(\frac{10^{2k+1}-1}{9}\right)\left(\frac{10^{2k+1}+1}{11}\right).$$

595. $m = 1, n \in \mathbf{N}$; $m = 2, n = 3$.

605. Используйте метод математической индукции. В тождестве $x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$ положите $x = 2^{2^{n-1}}$. Числа $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1$ и $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ взаимно просты, так как если бы у них был общий (нечётный) множитель q, то их разность $2^{2^{n-1}+1}$ делилась бы на q, что неверно.

606. $1\,000\,001 = 101 \cdot 9901$; $1\,000\,009 = 293 \cdot 3413$; $1\,000\,049 = 353 \cdot 2833$; $1\,000\,169 = 197 \cdot 5077$; $1\,000\,361 = 97 \cdot 10\,313$; $1\,000\,441 = 13 \cdot 41 \cdot 1877$; $1\,000\,529 = 29 \cdot 34\,501$.

608. $13\,717\,421 = (10^2 + 7 \cdot 23^2) \cdot (60^2 + 7 \cdot 1^2) = 3803 \cdot 3607$.

609. Доказательство будем вести методом от противного. Предположим, что $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ — полная система вычетов. Если при $i \neq j$ $a_i \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$ и $b_j \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, то $a_ib_i \equiv a_jb_j \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$ и числа $a_1b_1, a_2, b_2, \ldots, a_nb_n$ не образуют полной системы вычетов по модулю n. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $a_n \equiv b_n \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$. Можно также положить, что $\forall i \;\; a_i = i$. Рассмотрим два возможных случая.

- Число n свободно от квадратов.

  Пусть $n = pm$, где p — наибольший простой делитель n. Тогда $p > 2$ и m не делится на p. Если $j \,\vdots\, m$, то $a_jb_j = jb_j \,\vdots\, m$ и остаток от деления a_jb_j на n кратен m. Для полной системы вычетов $a_1b_1, a_2, b_2, \ldots, a_nb_n$ остатков такого вида должно быть ровно p (включая нулевой). Поэтому для любого j, делящегося на m, число b_j также кратно m. Вычислив произведение чисел a_jb_j для $j = m, 2m, \ldots, (p-1)m$, получим
  $$\prod_{k=1}^{p-1} a_{km}b_{km} \equiv m \cdot 2m \cdot \ldots \cdot (p-1)m \equiv (p-1)!m^{p-1} (\operatorname{mod} n).$$

С другой стороны,

$$\prod_{k=1}^{p-1} a_{km}b_{km} = \prod_{k=1}^{p-1} a_{km} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} b_{km} \equiv ((p-1)!m^{p-1})^2 (\mathrm{mod}\, n).$$

Таким образом, $(p-1)!m^{p-1} \equiv ((p-1)!m^{p-1})^2 (\mathrm{mod}\, n)$, или $(p-1)!m^{p-1}((p-1)!m^{p-1}-1) \vdots pm$, откуда в силу простоты p следует, что $(p-1)!m^{p-1} - 1 \vdots p$. По теореме Вильсона $(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$. Стало быть, $m^{p-1} + 1 \vdots p$. В силу малой теоремы Ферма $m^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, и, значит, $2 \vdots p$, что невозможно, так как $p > 2$. Получено противоречие.

- Число n делится на квадрат некоторого простого числа.

  Пусть $n = p^2 s$, где p — простое число. Тогда

$$a_j = j \vdots p \iff b_j \vdots p \iff a_j b_j \vdots p$$

  (в противном случае среди чисел $a_1 b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n b_n$ будет "больше, чем нужно" (для полноты системы вычетов) таких чисел, которые при делении на n дают остаток, кратный p). Таким образом, если $a_j b_j \vdots p$, то $a_j b_j \vdots p^2$, и среди чисел $a_1 b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n b_n$ нет, например, имеющего остаток p от деления на $n = p^2 s$. Вновь пришли к противоречию.

Замечание. В [41] рассмотрен частный случай этой задачи, когда n — простое число.

610. Обозначим $a_n = \overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{n \text{ цифр}}$ и $b_n = a_n - a_{n-1}$. Докажем сначала, что в последовательности (b_n) каждый член (начиная с b_3) делится на предыдущий (значит, и на все предыдущие). Действительно, $b_2 = 2^2 - 2 = 2$; $b_3 = a_3 - a_2 \vdots 2 = b_2$. Предположим, что $b_{k+1} \vdots b_k$. Тогда

$$b_{k+2} = a_{k+2} - a_{k+1} = 2^{a_{k+1}} - 2^{a_k} = 2^{a_k}(2^{a_{k+1}-a_k} - 1) = 2^{a_k}(2^{b_{k+1}} - 1).$$

Поскольку последовательность (a_k) возрастающая, $2^{a_k} \vdots 2^{a_{k-1}}$. Так как (по предположению индукции) $b_{k+1} \vdots b_k$, имеем также $2^{b_{k+1}} - 1 \vdots 2^{b_k} - 1$. Таким образом, $b_{k+2} \vdots 2^{a_{k-1}}(2^{b_k} - 1) = b_{k+1}$.

Перейдем к непосредственному доказательству утверждения задачи. Оно также проводится методом математической индукции. База индукции очевидна ($b_2 = 2$). Пусть теперь для любого $k < n$ выполняется $b_k \vdots k$.

Представим число n в виде $n = 2^s t$, где t — нечётное число. Легко проверить, что при $n \geq 3$ имеет место неравенство $a_{n-2} > n$. Отсюда $b_n \vdots 2^{a_{n-2}} \vdots 2^n \vdots 2^s$. Теперь осталось доказать, что $2^{b_{n-1}} - 1 \vdots t$.

Применим теорему Эйлера. Заметим, что $\varphi(n) = \varphi(2^s) \cdot \varphi(t) = 2^{s-1}\varphi(t)$. Поэтому $\varphi(t) \leq \varphi(n) \leq n - 1$. Для любого $k \leq n - 1$ имеем $b_{n-1} \vdots b_k \vdots k$. В частности, $b_{n-1} \vdots \varphi(t)$. Отсюда следует, что $2^{b_{n-1}} - 1 \vdots 2^{\varphi(t)} - 1$. В силу теоремы Эйлера $2^{\varphi(t)} - 1 \vdots t$. Из последних двух соотношений и вытекает, что $2^{b_{n-1}} - 1 \vdots t$. Таким образом, $b_n \vdots n$.

611. $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1)$.
Так как $a \equiv 1 (\operatorname{mod} k)$, то $a^j \equiv 1 (\operatorname{mod} k)$ и $\sum_{j=0}^{k-1} a^j \vdots k$.

612. Доказательство проведём в несколько этапов.

1^o. Применив n раз утверждение задачи 611, получим следующий результат:
Если $a - 1 \vdots k^m$, то $a^{k^n} - 1 \vdots k^{m+n}$.

2^o. Докажем, что $\forall n \;\; u_{n+1} - u_n \vdots 2^n$.

При чётном a число $u_n = a^{u_{n-1}}$ делится на 2^n (так как $u_{n-1} \geq n$). Пусть теперь a нечётно. Доказательство будем вести по индукции. *База индукции* очевидна: $u_2 - u_1 \vdots 2$. Пусть $u_{k+1} - u_k = s \cdot 2^k$ $(s \in N)$. Тогда $u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+1}(a^{u_{k+1} - u_k} - 1) \vdots a^{s \cdot 2^k} - 1$. Осталось заметить, что $a^s - 1 \vdots 2$ и поэтому (в силу 1^o) $(a^s)^{2^k} - 1 \vdots 2^{k+1}$. *Индукционный шаг* доказан.

3^o. Докажем, что $\forall n \geq 2 \;\; u_{n+1} - u_n \vdots 5^{n-2}$.

Если a кратно 5, то $\forall n \;\; u_n = a^{u_{n-1}} \vdots 5^n$ (так как $u_{n-1} \geq n$). Отсюда следует, что $\forall n \;\; u_{n+1} - u_n \vdots 5^n$. Если a не делится на 5, то по малой теореме Ферма $a^4 - 1 \vdots 5$. Вновь применяя индукцию, предположим, что $u_{k+1} - u_k = s \cdot 2^k \cdot 5^{k-2}$. Тогда (при $k \geq 2$)

$$u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+1}(a^{u_{k+1} - u_k} - 1) = u_{k+1}(a^{4t \cdot 5^{k-2}} - 1),$$

где $t = s\cdot 2^{k-2}$. Так как $a^4 - 1 \vdots 5$, $a^{4t} - 1 \vdots 5$ и в силу 1^o имеем: $(a^{4t})^{5^{k-2}} - 1 \vdots 5^{k-1}$. Индукционный шаг доказан, а база индукции очевидна.

4^o. Из 2^o и 3^o вытекает утверждение задачи.

Замечание 1. Аналогично можно доказать,что

$$\forall m \;\; \exists l \;\; \forall n \geq l \;\; u_{n+1} - u_n \vdots m^{n-l}.$$

Замечание 2. Развитие темы двух последних задач см. в [56].

614. Отметим сначала, что каждое слагаемое делится на p ($C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$— целое число; числитель дроби кратен p, а знаменатель — нет (так как p — простое число)). Доказываемое утверждение равносильно делимости на p суммы $\sum_{i=1}^k k!\frac{C_p^i}{p}$. Проведем сравнение по модулю p:

$$\frac{k!C_p^i}{p} = \frac{k!}{i}\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)}{(i-1)!} \equiv \frac{(-1)^{i-1}k!}{i}(\operatorname{mod} p).$$

Итак, задача сводится к проверке того, что

$$k!\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \vdots\, p.$$

По условию p не делится на 3. Рассмотрим два возможных случая.
1) $p = 3m+1$. Здесь m — чётное число (иначе p делилось бы на 2). Тогда $k = [\frac{6m+2}{3}] = 2m$. Имеем:

$$(2m)!\left(1 - \frac{1}{2} + \ldots - \frac{1}{2m}\right) = (2m)!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2m} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{m}\right) =$$

$$= (2m)!\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) = \sum_{j=1}^{m/2}(2m)!\left(\frac{1}{m+j} + \frac{1}{2m+1-j}\right) =$$

$$= (3m+1)\sum_{j=1}^{m/2}\frac{(2m)!}{(m+j)(2m+1-j)} \vdots\, 3m+1 = p.$$

2) $p = 3m+2$. Здесь m —нечётное число (иначе p делилось бы на 2). Тогда $k = [\frac{6m+4}{3}] = 2m+1$. Имеем:

$$k!\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2m+1} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{m}\right) =$$

$$= (2m+1)!\left(\frac{1}{m+1}+\ldots+\frac{1}{2m+1}\right) = \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}}(2m+1)!\left(\frac{1}{m+j}+\frac{1}{2m+2-j}\right) =$$

$$= (3m+2)\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(2m+1)!}{(m+j)(2m+2-j)} \,\vdots\, 3m+2 = p.$$

615. β_n не делится на 5 при только при $n = 1, \ldots, 4, 20, \ldots, 24, 100, \ldots, 104, 120, \ldots, 124$. Подробное решение см. в [63].

616. Нечётно. Решение приведено в [63].

620. $a^m \equiv a (\mathrm{mod}\, m) \Rightarrow a^{p-1} \equiv a^{m(p-1)} (\mathrm{mod}\, m)$. Так как к тому же $m \,\vdots\, p^2$, отсюда следует, что $a^{p-1} \equiv a^{m(p-1)} (\mathrm{mod}\, p^2)$. Наконец,
$m \,\vdots\, p \Rightarrow a^{m(p-1)} - 1 \,\vdots\, a^{p(p-1)} - 1 = a^{\varphi(p^2)} - 1 \,\vdots\, p^2$.

621. Нет.

623. Достаточно доказать, что наибольший общий делитель $r = (m-1, p-1)$ равен $(p-1)$. Поскольку

$$\forall a,\ (a,m) = 1 \quad a^{m-1} - 1 \,\vdots\, m \,\vdots\, p,\ a^{p-1} - 1 \,\vdots\, p,$$

имеем: $(a^{m-1} - 1, a^{p-1} - 1) = a^{(m-1,p-1)} - 1 = a^r - 1 \,\vdots\, p$. Таким образом, при $r < p-1$ сравнение $x^r - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ имеет $p-1 > r$ решений $(1, 2, \ldots, p-1)$. Осталось применить результат задачи 100 и получить противоречие.

624. В таблице приведены **числа Кармайкла** $\leq 2\,117\,000$.

561	10585	63973	188461	399001	656601	997633	1461241
1105	15841	75361	252601	410041	658801	1024651	1569457
1729	29341	101101	278545	449065	670033	1033669	1615681
2465	41041	115921	294409	488881	748657	1050985	1773289
2821	46657	126217	314821	512461	825265	1082809	1857241
6601	52633	162401	334153	530881	838201	1152271	1909001
8911	62745	172081	340561	552721	852841	1193221	2100901

Студент Алексей Гуйдо составил программу, которая нашла первые 336 чисел Кармайкла. Самое большое из них — 146 843 929. Пусть $c(n)$ — количество чисел Кармайкла, не превосходящих n. Известны ([49]) следующие значения $c(n)$.

k	3	4	5	6	7	8	9	10
$c(10^k)$	1	7	16	43	105	255	646	1547

Интересные сведения о числах Кармайкла можно найти в Интернете по адресу
`www.utm.edu/research/primes/glossary/CarmichaelNumber.html`.

627. $(f\circ g)\circ h(n) = f\circ(g\circ h)(n) = \sum\limits_{d_1d_2d_3=n} f(d_1)g(d_2)h(d_3)$.

628.

$$(n,m)=1 \Rightarrow f\circ g(nm) = \sum_{d|nm} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right) = \sum_{d_1|n,d_2|m} f(d_1d_2)g\left(\frac{nm}{d_1d_2}\right) =$$

$$= \sum_{d_1|n,d_2|m} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\right)g\left(\frac{m}{d_2}\right) = \sum_{d_1|n} f(d_1)g\left(\frac{n}{d_1}\right)\sum_{d_2|m} f(d_2)g\left(\frac{m}{d_2}\right) =$$

$$= (f\circ g(n))\cdot(f\circ g(m)).$$

629. Определим функцию $f'(n)$ следующими соотношениями. $f'(1) = 1$. (Тогда $f\circ f'(1) = f\cdot f'(1) = 1$.) Для каждого простого числа p пусть $f'(p) = -f(p)$. (Отсюда следует, что $f\circ f'(p) = 0$.) Положив

$$f'(p^n) = -(f(p^n) + f(p^{n-1}f'(p) + \ldots + f(p)f'(p^{n-1})),$$

мы добьемся того, что $\forall n \quad f\circ f'(p^n) = 0$. Пусть теперь f' — мультипликативная функция. Поскольку значения f' определены на всех степенях простых чисел, свойством мультипликативности функция полностью определена. В силу задачи 628 функция $\Phi = f\circ f'$ мультипликативна. Поскольку $\Phi(1) = 1$ и для любого простого числа p и любого натурального n справедливо $\Phi(p^n) = 0$,

$$\Phi(p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}) = \Phi(p_1^{n_1})\cdot\ldots\cdot\Phi(p_k^{n_k}) = 0.$$

Доказано, что $f\circ f' = J$.

630. Пусть f' — мультипликативная функция со свойством $f\circ f' = J$. Тогда функция $g = J\circ g = (f'\circ f)\circ g = f'\circ(f\circ g)$ также мультипликативна.

633. Пусть $n = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_k^{r_k}$, где $k\geq 1$. Поскольку $\mu(d)\neq 0$ только если число d свободно от квадратов, имеем: $\sum_{d|n}\mu(d) = \mu(1) + \sum\mu(p_i) + \sum\mu(p_ip_j) + \ldots + \mu(p_1\ldots p_k) = 1 - k + C_k^2 - C_k^3 - \ldots + (-1)^k = (1-1)^k = 0$.

634. $\mu \circ \tau = E, \ \mu \circ s = I$.

635. Пусть d — делитель n и A_d — множество чисел $k \le n$ таких, что $(k,n) = d$. Элемент A_d представим в виде $k = dk_1$, где число k_1 взаимно просто с числом n/d и не больше его. Поэтому $|A_d| = \varphi(n/d)$. Осталось заметить, что $n = \sum |A_d|$.

637. Следствие задачи 633.

639. $\ln \circ E(n) = \frac{\tau(n)}{2} \cdot \ln n$.

642. $M(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) k^{\frac{n}{d}}$.

643.

$$\sum_{d|n} M(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{c|d} \mu(c) k^{\frac{d}{c}} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{c|d} \mu\left(\frac{d}{c}\right) k^c = \sum_{c|n} \frac{k^c}{c} \sum_{c|d} \frac{c}{d} \mu\left(\frac{d}{c}\right) =$$

$$= \sum_{c|n} \frac{k^c}{c} \sum_{e|\frac{n}{c}} \frac{\mu(e)}{e} = \sum_{c|n} \frac{k^c}{c} \frac{\varphi(n/c)}{n/c} = \frac{1}{n} \sum_{c|n} k^c \varphi(\frac{n}{c}) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) k^{\frac{n}{d}}.$$

644. 1) 51; 2) 130; 3) 315; 4) 834.

645. Предположите противное.

647. Последовательно докажите: $x * x = 0, \ x * 0 = x, \ x * y = x - y$.

648. Определим $C = 1 * 0$. Из тождества задачи при $x = 1, \ y = 0$ имеем $Cz = z * 0$, а при $z = 1, \ t = 0$ соответственно $x * y + Cy = x * 0 = Cx$, откуда $x * y = C(x - y)$.

649. $a * x = b \Rightarrow x = b * a; \quad x * a = b \Rightarrow a = b * x \Rightarrow x = a * b$.
Если в X нет идемпотентных элементов, то число клеток в квадрате Кэли должно быть кратно трем ввиду соотношения
$x * y = z \Rightarrow z * x = y, \ y * z = x$.

650. $x * (y * x) = (y * (y * x)) * (y * x) = y; \quad y * x = y * ((x * y) * y) = x * y$.

651. Пусть в множестве A n элементов. Из 2) следует, что ровно половина всех упорядоченных троек (различных) элементов A входит в S. Зафиксируем некоторый элемент $w \in A$ и на множестве $A \setminus \{w\}$ введем отношение ρ: $x\rho y \iff (w,x,y) \in S$. Легко видеть, что оно антисимметрично: если $x\rho y$, то неверно, что $y\rho x$.Докажем, что данное отношение транзитивно. Пусть $x\rho y$ и $y\rho z$. Тогда $(w,x,y) \in S$ и $(w,y,z) \in S$. В силу 1) и $(y,z,w) \in S$. В силу 2) S принадлежат и тройки $(x,y,z),(z,w,x)$. Опять применяя 1), получим, что $(w,x,z) \in S$, т.е. $x\rho z$, что и требовалось доказать. Обозначим через k_i количество элементов x из множества $A \setminus \{w\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ таких, что $a_i \rho x$. Если $a_i \rho a_j$, то из-за транзитивности и антисимметричности $k_i > k_j$. (Действительно, с одной стороны, $a_i \rho a_j, a_j \rho x \Rightarrow a_i \rho x$ — этим обеспечивается нестрогое неравенство; с другой стороны неверно, что $a_j \rho a_i$). Нетрудно видеть, что верно и обратное: если $k_i > k_j$, то $a_i \rho a_j$ (по закону контрапозиции). Положим $g(a_i) = n - 1 - k_i$, $g(w) = n$. Покажем, что функция g обладает требуемыми свойствами. Если $g(a) < g(b)$, то $a \rho b$, или $(w, a, b) \in S$. Если $c = w$, то из того, что$(c, a, b) \in S$ в силу 2) следует: $(a, b, c) \in S$. Если же $c \neq w$, то из $g(b) < g(c)$ получаем: $(w, b, c) \in S$, стало быть, $(b, c, w) \in S$. Поскольку при этом и $(w, a, b) \in S$, то в силу 3) $(a, b, c) \in S$.

652. Нет. **655.** $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

656. $\frac{n^3+5n+6}{6}$. Решение этой и предыдущей задачи можно найти в [26], с. 46–47.

657. $n^2 - n + 2$. **658.** $n(n^2 - 3n + 8)/3$.

659. 6^{n-1}.

660. Назовем любой квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, *основным*. Каждый квадрат вписан в некоторый основной квадрат, а в основной квадрат с длиной стороны k можно вписать k различных квадратов (с вершинами в узлах сетки). Несложно подсчитать, что имеется $(n-k)^2$ основных квадратов со стороной k. Далее вычисляем:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n-k)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cdot j^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (k(n-k)^2 + (n-k)k^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)n = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \ldots = \frac{n^4 - n^2}{12}.$$

661. $\prod_{i=1}^{n} C_{k_i+k_{i+1}+\ldots+k_n-1}^{k_i-1}$.

Все возможные расположения чисел, удовлетворяющие условию задачи, можно получить в результате выполнения следующих действий.

1) Поместить 1 на первое место, а остальные единицы на любые $k_1 - 1$ из $k_1 + k_2 + \ldots + k_n - 1$ оставшихся мест.

2) Поместить 2 на первое свободное место, а остальные двойки на любые $k_2 - 1$ из $k_2 + \ldots + k_n - 1$ оставшихся мест. И т.д.

662. $(2n-1)!!$ О связи данной задачи с задачей 559, а также с задачей о *монотонных плоских деревьях* см. статью [14], в которой также приводятся новые результаты, связанные с числами Стирлинга.

663. 2^{n-1}.

664. На левую. **Решение.** Пусть последняя гиря имела вес 2^n г, а на левую чашку весов был выставлен вес в x г. Тогда имеем равенство $x = 2^{n+1} - 1 - x + 11111$, или $x = 2^n + 5555$. Заметим, что $2^n + 5555 > 11111$, откуда $2^n > 5556$ (и даже $2^n \geq 8192$). Теперь имеем $x = 2^n + 4096 + 1024 + 256 + 128 + 32 + 16 + 2 + 1$.

665. $n+1$. **Решение.** Ясно, что M — особое множество. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Обозначим $M_i = M \setminus \{x_i\}$. Если выбрать в качестве особых множеств $M, M_1, \ldots, M_n$ (всего $n+1$ множеств), то условие задачи выполняется, поскольку произвольное множество $A \subset M$ представимо в виде

$$A = \bigcap_{x_i \notin A} M_i.$$

Докажем теперь, что менее чем $n+1$ особых множеств быть не может. Пусть их не больше n. Тогда отличных от самого множества M особых множеств имеем не более $n-1$, а число пересечений, которые можно составить из особых множеств не превосходит 2^{n-1}, что меньше 2^n — общего числа подмножеств множества M.

667. $C_n^{[n/2]}$. **Решение** Будем рассматривать подмножества множества $U = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $A \subset U$ и $|A| = k$. Будем говорить, что перестановка чисел от 1 до n порождена множеством A, если первые k элементов перестановки принадлежат A. Очевидно, что A порождает $k!(n-k)!$ различных перестановок. Если $A \setminus B \neq \phi$ и $B \setminus A \neq \phi$, то множества перестановок, порожденных A и B соответственно, не пересекаются. Пусть теперь $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — семейство подмножеств, удовлетворяющих условию задачи; для каждого i положим $k_i = |A_i|$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} k_i!(n-k_i)! \leq n!$$

Учтя, что $k!(n-k)! \geq ([n/2])!(n-[n/2])!$, имеем

$$m \cdot ([n/2])!(n-[n/2])! \leq n!,$$

откуда $m \leq C_n^{[n/2]}$. С другой стороны, если рассмотреть все $C_n^{[n/2]}$ подмножеств мощности $[n/2]$, то они удовлетворяют условию задачи.

Замечание. Этот результат впервые получил Шпернер в 1928 г. Другое решение (основанное на понятиях цепи и антицепи) см. в [34], с. 172–173. С содержанием задачи тесно связана теорема Дилворта (1950 г.), её формулировку и доказательство можно найти также в книге [34], на с. 177–178.

668. 10.

669. Если $k = 2^l$, то наименьшее значение n равно $l+1$, а если $k = 2^l-2$ или $2^l < k < 2^{l+1} - 2$, то наименьшее значение n равно $l + 2$.

Решение (В. Белокобыльский). Пронумеруем элементы множества числами от 1 до n, и сопоставим каждому подмножеству двоичную последовательность длины n, в которой i-я цифра равна 1 (0), если i-й элемент исходного множества входит (соответственно, не входит) в данное подмножество. Для краткости двоичную последовательность будем называть *маркером*, а маркер длины n — n-маркером. Введём также следующие определения. Маркеры одинаковой длины — *противоположные*, если они различаются в каждом разряде. Набор маркеров одинаковой длины — *уравновешенный*, если по каждому разряду данных маркеров число единиц совпадает с числом нулей. Очевидно, что уравновешенный набор всегда состоит из чётного числа маркеров. Уравновешенный набор — *правильный*, если в нём нет совпадающих или противоположных маркеров. Очевидно, что в правильном наборе не менее четырёх маркеров. В новых терминах исходная задача формулируется так:

При каком наименьшем n существует правильный набор из k маркеров длины n?

Пусть A — правильный набор n-маркеров. Обозначим через $\overline{a}$ маркер, противоположный к a. Пусть также $\overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}$. Поскольку A и $\overline{A}$ не пересекаются, правильный набор содержит не более 2^{n-1} маркеров, то есть $k \leq 2^{n-1}$, или

$$n \geq \log_2 k + 1. \qquad (*)$$

1^o. Покажем, что при $k = 2^l$, где $l \geq 2$, оценка $(*)$, является точной. Действительно, с одной стороны, из $(*)$ имеем $n \geq l+1$. С другой стороны, рассмотрим всевозможные $(l+1)$-маркеры, среди последних трёх разрядов которых чётное число единиц. Легко проверить, что эти маркеры образуют правильный набор, и их ровно $k = 2^l$.

2^o. Пусть $2^l < k \leq 2^{l+1} - 4$, где $l \geq 2$. Из $(*)$ имеем $n \geq l + 2$. Покажем, как построить правильный набор $(l + 2)$-маркеров мощности k. Для этого сначала из 2^{l+1} маркеров длины $l + 1$ выделим $k - 4$ маркера таких, что в каждом из них не все первые $l-1$ разрядов совпадают, и каждый маркер выделен вместе со противоположным себе (поскольку $k-4 \le 2^{l+1}-8$, а $(l+1)$-маркеров, у которых первые $l-1$ разрядов одинаковые, как раз восемь, и маркер, противоположный "запрещённому", тоже "запрещённый", то это всегда возможно). Получен набор, состоящий из пар взаимно противоположных маркеров. Пронумеруем эти пары числами от 1 до $\frac{k-4}{2}$. К маркерам, входящим в пары с нечётными номерами, припишем справа единицу, а к остальным — ноль. При этом противоположных маркеров не станет (совпадающих, конечно, тоже не возникнет).

Если k кратно четырем, то число указанных пар чётно, и полученный набор правильный. Дополним его такими $(l+2)$-маркерами:

$$0\ldots0000, 0\ldots0110, 1\ldots1011, 1\ldots1101.$$

Если же k при делении на 4 даёт остаток 2, то число пар нечётно, и в последнем разряде единиц на две больше, чем нулей. В этом случае дополним набор такими маркерами длины $l+2$:

$$0\ldots0000, 0\ldots0110, 1\ldots1010, 1\ldots1101.$$

В обоих случаях возникает правильный набор маркеров.

3^o. Пусть $k = 2^l - 2$. Из $(*)$ следует, что $n \ge l+1$. Покажем, что равенство здесь невозможно.

Назовем два маркера одинаковой длины *почти равными* (п.р.), если они различаются только в последнем разряде, и *почти противоположными* (п.п.), если у них совпадает только последний разряд. Для маркера a обозначим через a' п.р. маркер, а через $\hat{a}$ п.п. маркер. Очевидно, что маркеры a' и $\hat{a}$ — противоположны (значит, вместе с a в правильный набор одновременно они входить не могут), а множество всех маркеров разбивается на четвёрки вида $\{a, \overline{a}, a', \hat{a}\}$. Пусть теперь A — правильный набор $k = 2^l - 2$ маркеров длины $l+1$. Тогда множество $A \cup \overline{A}$ содержит $2^{l+1}-4$ (различных) маркеров. Заметим, что если не менее трёх маркеров $(a, b, c, \ldots)$ из A не имеют в A ни п.р., ни п.п. маркера, то за пределами $A \cup \overline{A}$ остается не менее 6 различных маркеров $(a', \hat{a}, b', \hat{b}, c', \hat{c}, \ldots)$, что невозможно, поскольку всего имеется 2^{l+1} маркеров длины $l+1$. Таким образом, A состоит из пар п.р. и п.п. маркеров и ещё не более двух *непарных* маркеров (точнее, нуля или двух, поскольку общее число маркеров в правильном наборе чётно).

Докажем, что на самом деле непарных маркеров нет. Действительно, в каждом из первых l разрядов пары почти равных маркеров число единиц равно 0 или 2, а по всем таким парам оно чётно. А для любой пары почти противоположных маркеров в каждом из указанных разрядов имеем в совокупности ровно одну единицу. Для уравновешенности набора общее число единиц в каждом разряде должно быть равно $k/2 = 2^{l-1} - 1$, то есть нечётно. Значит, в каждом из l разрядов общее число единиц по двум непарным маркерам должно иметь фиксированную чётность. В случае чётного числа единиц имеем совпадающие или почти равные маркеры, а в случае нечётного числа единиц — противоположные или почти противоположные маркеры. В любом случае приходим к противоречию.

Итак, непарных маркеров нет. Рассуждение, изложенное в предыдущем абзаце, говорит о том, что число пар почти противоположных маркеров нечётно. Рассмотрим последний разряд. По парам почти равных маркеров число единиц в этом разряде совпадает с числом нулей. Значит, этот паритет должен иметь место и по парам почти противоположных маркеров — количество таких пар, оканчивающихся единицей, должно быть равно количеству пар, оканчивающихся нулем. Но тогда количество пар п.п. маркеров чётно — противоречие!

Мы показали, что в случае $k = 2^l - 2$ выполняется строгое неравенство $n > l + 1$. Используя конструкцию из 2^o, можно построить правильный набор $(l + 2)$-маркеров.

670. 360. **Указание.** Положим, что длина наименьшего отрезка равна 1. Пусть имеется m отрезков длины меньше $\sqrt{2}$, n отрезков длины из промежутка $[\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Тогда $16-m-n$ отрезков имеют длину из промежутка $[\sqrt{3}, 2]$. Итак мы имеем три класса отрезков, квадраты длин которых принимают значения соответственно от 1 до 2 (1-й класс), от 2 до 3 (2-й класс) и от 3 до 4 (3-й класс). Тупоугольный треугольник характеризуется тем, что в нем квадрат большей стороны больше суммы квадратов двух других сторон. В условиях задачи тупоугольный треугольник не может иметь более одного отрезка из 3-го класса; поэтому число тупоугольных треугольников не уменьшится, если считать, что все отрезки из 3-го класса имеют длину 2. Аналогично можно положить, что все отрезки из 1-го класса имеют длину 1,1, а из 2-го — 1,6. Тогда треугольник будет тупоугольным в двух случаях:

- он содержит по одному отрезку из каждого класса (таких треугольников $mn(16 - m - n)$);
- ровно две его стороны из 1-го класса (количество таких треугольников $C_m^2(16 - m)$).

Осталось максимизировать функцию $F(m, n) = mn(16-m-n)+C_m^2(16-m)$ при условии $0 \le m, n, m+n \le 16$.

671. Пусть y_n — число умножений при вычислении определителя n-го порядка. Тогда $y_1 = 0$, $y_n = ny_{n-1} + n$, откуда $\frac{y_n}{n!} = \frac{y_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$. Для последовательности с общим членом $a_n = \frac{y_n}{n!}$ справедливы соотношения: $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} = a_{n-2} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \ldots = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$. Таким образом, $y_n = n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$. Полезно заметить, что $\lim \frac{y_n}{n!} = e - 1$.

672. $x_n = D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{n!}$ — число беспорядков.
Рекуррентное соотношение можно переписать так: $x_n - nx_{n-1} = -(x_{n-1} - (n-1)x_{n-2})$. Пусть $y_n = x_n - nx_{n-1}$. Тогда $y_n = -y_{n-1}$. Из начальных условий $y_2 = 1$; поэтому предыдущее соотношение даст равенство $y_n = (-1)^n$. Итак, $x_n = nx_{n-1} + (-1)^n$. Далее можно действовать, как при решении предыдущей задачи.

673. $S_n = \frac{2n^3+3n^2-11n+18}{6}$.
Решение. Можно считать, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расположены по кругу и S_n — сумма попарных произведений *соседних* чисел.

Докажем по индукции следующее утверждение: если S_n максимально, то число n стоит между числами $n-1$ и $n-2$. *База индукции* ($n = 3$) очевидна. *Индукционный шаг.* Пусть утверждение справедливо при $n = k$. Если число $k+1$ вставляется между числами a и b, то сумма попарных произведений изменяется так:

$$\Delta_k = S_{k+1} - S_k = (k+1)(a+b) - ab.$$

При фиксированном a $\Delta_k = (k+1)a + b(k+1-a)$ тем больше, чем больше b. Аналогично при фиксированном b Δ_k увеличивается с ростом a. Поэтому

$$\Delta_k \le (k+1)(k+(k-1)) - k(k-1) = k^2 + 2k - 1.$$

По предположению индукции если S_k максимально, то числа k и $k-1$ стоят рядом. Если $k+1$ вставить между этими числами, то получим максимальное значение $\Delta_k = k^2 + 2k - 1$, а заодно и $S_{k+1} = S_k + \Delta_k$, что и требовалось доказать.

Теперь легко найти S_n. $S_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$. При $n > 2$

$$S_n = S_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \Delta_k = S_2 + \sum_{k=3}^{n} \Delta_{k-1} = 4 + \sum_{k=3}^{n} (k^2 - 2) = 4 - 2(n-2) + \sum_{k=3}^{n} k^2 =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2-2n+3=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2n+3=\frac{2n^3+3n^2-11n+18}{6}.$$

676. $2(2^{[\frac{n}{2}]}+2^{[\frac{n-1}{2}]}-1)$.

677. 1) n^2; 2) n^2-3n+3;
3) $j(j+1)(4j+1)/2$ при $n=2j$, $j(4j^2-j-1)/2$ при $n=2j-1$.
Указания. 1) Сравните площади треугольников. 2) Каждый треугольник со стороной 1, не лежащий "на границе" исходного треугольника, взаимно однозначно определяет треугольник со стороной 2. 3) Подробное решение содержится в первом издании настоящего сборника.

678. Подробное решение — в первом издании настоящего сборника. См. также журнал "Математика в школе", 2001, №5, С.74.

679. 191. **Решение.** Пусть по кругу стоят n человек и a_n — "счастливый" номер. Получим рекуррентное соотношение для последовательности (a_n). При увеличении числа человек на единицу задача сводится к предыдущей после удаления первого человека (имеющего номер 3), при этом отсчет начинается не с 1-го, а с 4-го человека. Поэтому новый счастливый номер на 3 больше предыдущего (по модулю $n+1$). Отсюда
$a_1=1; a_2\equiv 1+3(\operatorname{mod}2)\Rightarrow a_2=2; a_3\equiv 2+3(\operatorname{mod}3)\Rightarrow a_3=2;$
$a_4\equiv 2+3(\operatorname{mod}4)\Rightarrow a_4=1; a_5=4; a_6=1; a_7=4; a_8=7;$
$a_9=1; a_{10}=4; \ldots; a_{13}=13; \ldots$

Легко видеть: если $a_n=n$, то $a_{n+1}=2$; если $a_n=n-1$, то $a_{n+1}=1$.

Пусть $a_s=1$, тогда равенство $a_{s+k}=a_{s+k-1}+3$ будет выполняться, пока $1+3k\le s+k$, или $2k\le s-1$. Поэтому положив при нечётном s $\Delta=\frac{s+1}{2}$, имеем $a_{s+\Delta}=2$. Если же s чётно, то для $\Delta=s/2$ выполняется равенство $a_{s+\Delta}=1$.

Пусть теперь $a_s=2$, тогда равенство $a_{s+k}=a_{s+k-1}+3$ будет выполняться, пока $2+3k\le s+k$, или $2k\le s-2$. Отсюда при чётном s положив $\Delta=s/2$, имеем $a_{s+\Delta}=2$. Если же s нечётно, то для $\Delta=\frac{s-1}{2}$ выполняется равенство $a_{s+\Delta}=1$.

Последовательно применяя найденные соотношения, получаем:
$a_6=1, \Delta=3, a_9=1, \Delta=5, a_{14}=2, \Delta=7, a_{21}=2, \Delta=10,$
$a_{31}=1, \Delta=16, a_{47}=2, \Delta=23, a_{70}=1, \Delta=35,$
$a_{105}=1, \Delta=53, a_{158}=2, \Delta=79, a_{237}=2, a_{300}=2+3\cdot 63=191.$

680. Повторим решение предыдущей задачи в общем виде. Пусть a_i — счастливый номер для круга из i человек (если удаляется каждый k-й человек). Тогда $a_{i+1}\equiv a_i+k(\operatorname{mod}i+1)$. Заметим, что если $a_i+k<i+1$, то

выполняется простое соотношение $a_{i+1} = a_i + k$. Более того, при $a_i + k\Delta \le i + \Delta$ (т.е. когда $\Delta \le \frac{i-a_i}{k-1}$) выполняется равенство $a_{i+\Delta} = a_i + k\Delta$. Если же в качестве Δ взять наименьшее целое, большее $\frac{i-a_i}{k-1}$, то для вычисления $a_{i+\Delta}$ нужно вычислять остаток от деления $a_i + k\Delta$ на $i + \Delta$.

При составлении программы будет излишним организовывать массив для значений a_i, поскольку переход $(i, a_i) \to (i+\Delta, a_{i+\Delta})$ не требует знания других элементов рассматриваемой последовательности.

Ниже приведен текст соответствующей программы на языке Си.

```
/* Решение задачи Иосифа                             */
/* По кругу стоят m человек, выбывает каждый k-й     */
/* happy(m,k) - номер последнего оставшегося         */

int happy(int m,int k)
{
     int i;       /* число человек в круге           */
     int h;       /* номер последнего оставшегося    */
     int delta;   /* приращение к i                  */

     if(k==1)return(m);
     for(i=h=1; i<m; ) {
       delta=1+(i-h)/(k-1);
       if(delta>m-i){h+=(m-i)*k; i=m;}
       else {i+=delta; h+=k*delta;
             h=h%i; if(h==0)h=i;
       }
     }
     return(h);
}
```

681. $n - 1$.

682. Решение можно найти в [63].

683. Нет. **Решение.** Заметим, что $C_6^3 = 20$. Пусть каждый ученик посещает ровно три кружка, причем у каждого набор кружков отличен от других. (В силу сделанного замечания это возможно.) Тогда и наборы непосещаемых кружков также будут разными у разных учеников. Если бы некоторые 5 человек посещали одновременно какие-нибудь два кружка, тогда из оставшихся четырёх кружков по крайней мере один пришлось бы посещать одновременно двум (принцип Дирихле), что приводит к противоречию. Последняя фраза останется справедливой, если в ней перед словами "посещали", "посещать" поставить частицу "не".

685. Левая часть тождества легко выражается через числа Стирлинга II рода ([9], §5.11): $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k k^m = n!(-1)^n S(m,n)$. Известно, что при $n > m$ справедливо равенство $S(m,n) = 0$.

Замечание. Тождеству данной задачи посвящена статья [13][3], в которой приводится ещё 4 способа доказательства данного тождества. Прочитать указанную статью весьма полезно начинающим математикам.

690. $\sqrt{15}$. **Указание.** Примените полиномиальную формулу. Покажите, что если $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^{2n+1} = a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{3} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{30}$, то $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})^{2n+1} = a_n\sqrt{2} + b_n\sqrt{3} - c_n\sqrt{5} - d_n\sqrt{30}$. Данные соотношения и ещё два аналогичных составляют систему линейных уравнений относительно a_n, b_n, c_n, d_n.

693. Обе части тождества выражают собой число решений в натуральных числах неравенства $x^y \le n$.

694. $[k \cdot \frac{n}{m}]$ — это количество точек вида (k, y), где $0 < y \le k \cdot \frac{n}{m}$. Подсчитайте количество точек с целыми координатами, лежащих внутри прямоугольника $[0,m] \times [0,n]$, лежащих под диагональю.
Другое решение (А. Бадзян). $[k \cdot \frac{n}{m}] = k \cdot \frac{n}{m} - \{k \cdot \frac{n}{m}\}$. Числа $n, 2n, \ldots, (m-1)n$ образуют приведенную систему вычетов по модулю m.

695. 1/2.

696. Тождество возникает в результате решения различными способами следующей задачи:
Сколько нужно взять различных натуральных чисел, не превосходящих n, чтобы среди них наверняка одно было вдвое больше другого? Подробности — в первом издании настоящего сборника.

697, 698. Решения можно найти в [63].

699. Запишем рекуррентное соотношение в виде

$$(n-k)x_k + (k+1)x_{k+2} = cx_{k+1}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

---

[3]Эта статья помещена также в сборнике [27], №5.

С учетом условий $x_0 = x_n = 0$, $x_1 = 1$ получим матричное уравнение $Ax = cx$, где A — трёхдиагональная матрица, x — вектор-столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ n-1 & 0 & 2 & & & & \\ & n-2 & 0 & 3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 3 & 0 & n-2 & \\ & & & & 2 & 0 & n-1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Теперь задача сводится к нахождению наибольшего (вещественного) собственного значения матрицы A и к определению отвечающего ему собственного вектора (с условием $x_1 = 1$). Для локализации спектра матрицы используем круги Гершгорина. Поскольку главная диагональ матрицы состоит из нулей, а сумма модулей всех внедиагональных элементов каждого столбца равна $(n-1)$, заключаем, что собственные значения матрицы A расположены в круге (комплексной плоскости) радиуса $(n-1)$ и с центром в нуле. Легко проверить, что число $(n-1)$ является собственным значением матрицы A и, значит, является искомым. Переходим к нахождению собственного вектора. Имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = n-1$; $x_3 = \frac{(n-1)x_2-(n-1)x_1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$. Далее индукцией по k легко доказать, что для $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $x_k = C_{n-1}^{k-1}$.

700. $(2n)! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{k+1}(2n-k-1)!$. **Решение.** Пусть A — множество всевозможных расположений рыцарей за круглым столом, а A_i — множество расположений рыцарей за круглым столом, при которых рыцари из i-й пары врагов сидят рядом $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда требуемое число есть мощность множества $\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$, где, как обычно, $\overline{A}_i = A \setminus A_i \ \ \forall i$.

Найдём $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ — число расположений рыцарей, при которых рыцари из k фиксированных пар сидят рядом враг с врагом. Каждое такое расположение можно получить с помощью следующих действий.

- Разместить первую пару. Это можно сделать $4n$ способами (пару соседних мест из $2n$ мест за круглым столом можно выбрать $2n$ способами, после чего два рыцаря могут разместиться на этих местах двумя способами).

- Разместить всех остальных рыцарей, рассматривая каждую из $k-1$ пар как один объект. Имеем $k-1$ пар врагов и ещё $2n-2k$ рыцарей —

всего $(2n-k-1)$ объектов, которые можно переставить $(2n-k-1)!$ способами.

- Определить для каждой из $k-1$ пар, кто из двух рыцарей сидит слева от своего врага. Данное действие выполняется 2^{k-1} способами.

Применяя правило произведения, получаем:
$|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}| = 4n(2n-k-1)!2^{k-1}$. Данная формула годится и для случая $k=1$. Учитывая теперь, что k пар из n можно выбрать C_n^k способами, получаем ответ.

701. Поставим в ряд $n-k$ нулей. Теперь для расстановки k единиц имеется $n-k+1$ возможных позиций.

702. Справедливость доказываемого утверждения для $n=2,\ 3$ легко проверяется. Зафиксируем некоторую точку и разобьем наборы точек, среди которых нет соседних, на два класса в зависимости от того, попадает в набор данная точка или нет. Очевидно, что классы содержат соответственно $f(n-3,k-1)$ и $f(n-1,k)$ наборов. Поэтому

$$g(n,k)=f(n-3,k-1)+f(n-1,k)=C_{n-k-1}^{k-1}+C_{n-k}^{k}.$$

По известному комбинаторному тождеству $C_{n-k}^k=\frac{n-k}{k}C_{n-k-1}^{k-1}$, откуда имеем: $C_{n-k-1}^{k-1}=\frac{k}{n-k}C_{n-k}^k$. Стало быть, $g(n,k)=C_{n-k}^k(\frac{k}{n-k}+1)=\frac{n}{n-k}C_{n-k}^k$.

703. $2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^k(n-k)!$

Решение. Разместим сначала жён. Это можно сделать $2n!$ способами (сначала определяем, на чётных или нечётных местах будут сидеть жёны, а затем размещаем n жён по n предназначенным им местам).

Идя по часовой стрелке, пронумеруем жён числами от 1 до n; каждому мужу присвоим такой же номер, как у его жены. Идя по часовой стрелке, начиная с 1-й жены, пронумеруем свободные места числами от 1 до n. Теперь нам предстоит разместить мужей по свободным местам так, чтобы 1-й муж не занимал n-го или 1-го места, 2-й муж — 1-го или 2-го,…, n-й муж — $n-1$-го или n-го. Обозначим через P_i событие: *i-й муж сидит на i-м месте*; через P_i' — событие: *i-й муж сидит на $i-1$-м месте* $(i=2,\ldots,n)$, через P_1' -событие: *1-й муж сидит на n-м месте*. В циклической последовательности $P_1',P_1,P_2',P_2,\ldots,P_n',P_n,P_1'$ любые два соседних события не могут осуществляться одновременно, а любые два несоседних — могут.

Пусть A — множество всевозможных расположений мужей, а A_i — множество расположений мужей, при которых i-й муж сидит рядом со своей

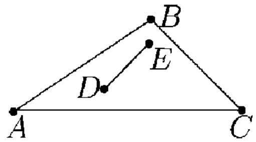
женой, $\overline{A}_i = A \setminus A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда число расположений мужей (при фиксированном расположении жён) есть мощность множества $\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$. Для того, чтобы иметь возможность применить формулу включения-исключения, найдём $\sum |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n)$. Мужья из некоторых k пар могут сидеть одновременно рядом со своими жёнами, если события, отвечающие этим мужьям, не противоречат друг другу. Число способов разместить k мужей есть число способов выбрать из циклической последовательности $P_1', P_1, P_2', P_2, \ldots, P_n', P_n, P_1'$ k попарно несоседних элементов, т.е. $g(2n, k) = \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^k$ (согласно 2-й лемме Капланского). Оставшиеся $n - k$ мужей на свободных местах размещаются $(n-k)!$ способами. Таким образом, $\sum |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^k (n-k)!$ Применяя формулу включения-исключения, получим:
$|\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^k (n-k)!$

704. $n \ge p + q - 1$.

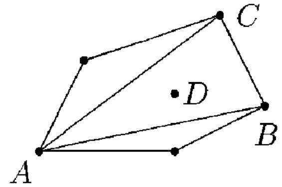
711. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n = k+1$. Зафиксируем некоторую вершину u. Среди $(k+1)a_k + 1$ рёбер, инцидентных u, найдётся $a_k + 1$ рёбер одного цвета (скажем, синего). Если из $a_k + 1$ концов этих рёбер, отличных от u, по крайней мере две (например, v и w) соединены синим ребром, то получаем синий треугольник uvw. В противном случае в подграфе, порожденном $a_k + 1$ вершинами, синий цвет отсутствует, то есть рёбра покрашены в k цветов. По предположению индукции в этом подграфе найдётся одноцветный треугольник. Положив $b_n = \frac{a_n}{n!}$, получим $b_1 = 1 + \frac{1}{1!}$ и $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n!}$, откуда $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ и $a_n = n! \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Для доказательства того, что $a_n = [n!e]$, с помощью оценки остаточного члена формулы Маклорена для функции e^x при $x = 1$ проверьте выполнение неравенства

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le e < \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

717. Если выпуклая оболочка точек A, B, C, D, E представляет собой пяти- или четырёхугольник, то утверждение очевидно. Пусть выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Тогда точки D и E находятся внутри него. Прямая DE не может пересекать все стороны треугольника. Если она не пересекает, например, отрезок AB, то точки A, D, E, B будут вершинами искомого выпуклого четырёхугольника.



718. Выпуклая оболочка n точек представляет собой многоугольник. Если число его вершин меньше n, то какая-то из заданных точек (скажем, D) лежит внутри указанного многоугольника. Всевозможные диагонали многоугольника, проведенные из некоторой его вершины, делят выпуклую оболочку на треугольники, одному из них (например, ABC) принадлежит точка D.



Точки A, B, C, D не удовлетворяют условию задачи. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

719. Пусть $k = R(n, 5, 4)$; множество α составляют четвёрки точек, выпуклые оболочки которых — четырёхугольники, множество β тогда состоит из четвёрок точек, чьи выпуклые оболочки — треугольники. Согласно теореме Рамсея

1) существует n точек (из заданных k) таких, что любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника, либо

2) найдутся такие пять точек, что никакие четыре из них не могут быть вершинами выпуклого четырёхугольника.

Задача 717 показывает, что второй случай осуществиться не может, значит, имеет место первая ситуация. Осталось воспользоваться результатом задачи 718.

720. В [9] выведена формула $P_G(x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{n/(n,j)}^{(n,j)}$. В полученной сумме нижний индекс при x принимает значения всех делителей числа n. В качестве упомянутого индекса число d встретится столько раз, сколько есть чисел j от 1 до n, для которых $(n, j) = n/d$. Такие числа имеют вид $j = kn/d$, где число k взаимно просто с d и не превосходит d. Значит, d будет в качестве нижнего индекса ровно $\varphi(d)$ раз.

721. Применив теорему Пойа, выражение для циклового индекса из предыдущей задачи и полиномиальную формулу, получим:

$$P_G\left(\sum w_i, \sum w_i^2, \ldots\right) = \frac{1}{n}\sum \varphi(d) \sum_{k_1+\ldots+k_m=n/d} w_1^{k_1 d}\ldots w_m^{k_m d}\frac{(n/d)!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

Нас интересует коэффициент при $w_1^{n_1}\dots w_m^{n_m}$. Указанное произведение возникает лишь при d, делящем одновременно $n_1,\dots,n_m$. Дальнейшее просто.

722. Если n чётно, то $P_G=\frac{1}{2n}(\sum_{d|n}x_d^{n/d}\varphi(d)+\frac{n}{2}x_1^2x_2^{n/2-1}+\frac{n}{2}x_2^{n/2})$. Если n нечётно, то $P_G=\frac{1}{2n}(\sum_{d|n}x_d^{n/d}\varphi(d)+nx_1x_2^{\frac{n-1}{2}})$.

724. Пусть G' — граф, дополнительный к G. Расстояния в G и G' будем обозначать соответственно d и d'. Докажем, что если диаметр G не меньше 3, то диаметр G' не больше 3.

Пусть $d(u,v)\geq 3$. Тогда ни одна вершина x графа G не может быть одновременно смежна с u и v, так как в этом случае $d(u,v)\leq d(u,x)+d(x,v)=2$. Если вершины x и y не смежны с одной и той же вершиной (скажем, u), то $d'(x,y)\leq d'(x,u)+d'(u,y)=2$. Если же x и y не смежны с разными вершинами (например, x с u, а y с v), то, поскольку u и v также несмежны, имеем $d'(x,y)\leq d'(x,u)+d'(u,v)+d'(v,y)=3$. Итак, расстояние между двумя произвольными вершинами графа G' не превосходит 3.

Для самодополнительного графа G справедливо: $d(G)=d(G')$. Предыдущее рассуждение показывает, что $d(G)\leq 3$. С другой стороны, если $d(G)=1$, то G — полный граф и не может быть изоморфен своему дополнению (пустому графу). Поэтому $2\leq d(G)\leq 3$. Осталось придумать примеры самодополнительных графов диаметров 2 и 3.

725. 10.

728. Обозначим вершины графа числами $1,2,\dots,2n$. Рассмотрим цепи $k\to k+1\to k-1\to k+2\to k-2\to k+3\to\dots\to k-n+1\to k+n$ $(k=1,\dots,n)$, (к каждому неположительному числу добавляем $2n$). Каждая такая цепь является гамильтоновой, поскольку числа $k-n+1,k-n+2,\dots,k+n-1,k+n$ образуют полную систему вычетов по модулю $2n$. Так как в k-й цепи сумма номеров соседних вершин сравнима с $2k$ или $2k+1$ по модулю $2n$, данные цепи не имеют общих рёбер. Осталось заметить, что общее количество рёбер в указанных цепях равно $n(2n-1)$ и совпадает с количеством рёбер графа K_{2n}.

729. Гамильтонову цепь $k\to\dots\to k+n$ из решения предыдущей задачи дополним до гамильтонова цикла добавлением цепи
$k+n\to 2n+1\to k$.

730. Используйте результаты задач 655, 20 и 448.

731. Докажите, что в графе есть полный подграф порядка $n+1$.

732. 1) Связность графа очевидна. Осталось доказать, что степень каждой вершины чётна. Для произвольной вершины v рассмотрим (максимальный по количеству рёбер) подграф G, образованный вершинами, смежными с v. Степень каждой вершины этого подграфа нечётна, поэтому число его вершин (суть степень v) чётно.
2) Пусть V — множество вершин графа; n — число вершин; $\Gamma(v)$ — множество вершин, смежных с v; $\mu(u,v)$ — число общих вершин, смежных с u и v. Тогда при вычислении суммы $S = \sum_{u\in V\setminus\{v\}} \mu(u,v)$ каждая вершина w, смежная с v, учитывается $\rho(w)-1$ раз. В силу предыдущего пункта задачи $|\Gamma(v)|$ — чётное число, а $(\rho(w)-1)$ — нечётное для любого w. Сумма чётного числа нечётных слагаемых $S = \sum_{w\in\Gamma(v)}(\rho(w)-1)$ чётна. С другой стороны, S есть сумма $(n-1)$ нечётных слагаемых $\mu(u,v)$. Стало быть, число n нечётно.

733. Если $k=2$, то n — нечётное число ≥ 3; если $k \geq 3$, то $n = k+1$. **Указание.** В случае $k=2$, как следует из результата предыдущей задачи, n — нечётно (ясно, что $n > 1$). Примером графа с $2l+1$ вершинами, удовлетворяющего условиям задачи, является объединение l треугольников с общей вершиной.

Докажите, что 1^o) у любых двух вершин ровно $k-1$ общих смежных вершин; 2^o) в графе найдётся полный подграф K_{k+1}.

Пусть $k \geq 3$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$ — множество вершин полного подграфа, а $v \notin Y$. У вершин y_1 и y_2 в силу 1^o все общие смежные вершины входят в Y, поэтому общая смежная вершина y_1, y_2 и v принадлежит Y. Значит, v имеет смежную вершину из Y. Если у v есть две смежные вершины из Y, то у этих двух вершин будет не менее k общих смежных вершин (это оставшиеся $k-1$ вершин из Y и вершина v), что противоречит 1^o. Таким образом, у v ровно одна смежная вершина из Y — пусть это вершина x. Возьмем вершину y из Y, отличную от x. У вершин v, x и y есть общая смежная вершина, и она принадлежит Y (так как все общие смежные вершины x и y из Y). Но тогда у v есть две общие смежные вершины из Y. Полученное противоречие говорит о том, что множество Y совпадает с множеством вершин графа, то есть граф — полный, при этом $n = k+1$.

734. 16.

735. 1), 2) Возьмем произвольную вершину v. Пусть n — число вершин графа, $k = \rho(v)$. Для любых двух вершин v_i и v_j, смежных с v, найдётся общая смежная вершина w_{ij}, не смежная с v. Причем все вершины w_{ij}, $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$ *разные* (иначе некоторая вершина, не смежная с v, имела бы с ней более двух общих смежных вершин). Вершинами $v, v_1, \ldots, v_k, w_{1,2}, \ldots, w_{1,k}, \ldots, w_{k-1,k}$ исчерпывается все множество вершин графа. Значит, $n = 1+k+\frac{k(k-1)}{2}$. Это уравнение имеет (при фиксированном n) единственное положительное решение относительно k. Таким образом, степень каждой вершины определяется однозначно порядком графа. Поэтому граф является регулярным.

3) Из условия задачи вытекает матричное равенство

$$A^2 + 2A + (2-k)I = 2J, \tag{1}$$

где I — единичная матрица размера $n \times n$, J — матрица того же размера, состоящая из одних единиц. Пусть x — собственный вектор матрицы A, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Умножив обе части матричного равенства (1) на x, получим

$$(\lambda^2 + 2\lambda + (2-k))x = 2\sum_{i=1}^{n} x_i j, \qquad (2),$$

где j — вектор, все координаты которого единицы. Поскольку $\lambda \neq k$, вектор x не коллинеарен вектору j (который как раз отвечает собственному значению k). Значит, равенство (2) возможно лишь при

$$\lambda^2 + 2\lambda + (2-k) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

4) Матрица A как матрица смежности связного графа удовлетворяет условиям теоремы Перрона-Фробениуса, согласно которой наибольшее по модулю собственное значение матрицы A положительно и имеет алгебраическую кратность 1 (см. [33]). Таким образом, собственное значение k имеет алгебраическую кратность 1. Для определения кратностей $r_{1,2}$ собственных значений $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{k-1}$ нужно решить систему линейных уравнений

$$r_1 + r_2 = n - 1, \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + k = 0.$$

(Последнее соотношение есть следствие того факта, что сумма собственных значений матрицы, взятых с учетом их алгебраической кратности, равна сумме её диагональных элементов).

5) вытекает из 4).

6) C_4, граф Клебша (определение в задаче 443) и *граф Гевиртца* ([29]).

Замечание. Рассмотренные в данной задаче графы относятся к так называемым *сильно регулярным графам* (см. [29], [61], [52]).

Литература

[1] Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М. *Задачи по математике. Алгебра и анализ.* — М.: Наука, 1982. - 192 с.

[2] Виленкин Н.Я. *Комбинаторика.* — М.: Наука, 1969. - 328 с.

[3] Виноградов И.М. *Основы теории чисел.* — М.: Наука, 1981. - 176 с.

[4] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Сборник задач по дискретной математике.* — М.: Наука, 1977. - 368 с.

[5] *Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения* /Под ред. К.А. Рыбникова. — М.: Наука, 1982. - 365 с.

[6] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. *Сборник задач по алгебре и теории чисел.* — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.

[7] *Лекции по теории графов* /В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов и др. — М.: Наука, 1990. - 384 с.

[8] Уилсон Р. *Введение в теорию графов.* — М.: Мир, 1977. — 208 с.

[9] Эвнин А.Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций.* — Челябинск: ЮУрГУ, 1998. - 176 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

[10] Айерлэнд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* — М.: Мир, 1987. - 415 с.

[11] Басакер Р., Саати Т. *Теория графов и сетей.* — М.: Наука, 1974. - 366 с.

[12] Березина Л.Ю. *Графы и их применение.* — М.: Просвещение, 1979. - 144 с.

[13] Вагутен В.Н. *Числа C_n^k, многочлены, последовательности* //Квант. - 1973. - №2. - С.27-34.

[14] Васильев Н., Коганов Л. *Разбиения, ГС-перестановки и деревья* //Квант. - 1997. - №6.

[15] *Венгерские математические олимпиады.* — М.: Мир, 1976. - 543 с.

[16] Верещагин Н.В., Шень А. *Логические формулы и схемы* //Математическое просвещение. - 2000. - Сер. 3. - Вып. 4. - С.53-80.

[17] Верещагин Н.К., Шень А. *Вычислимые функции.* — М.: МЦНМО, 1999, - 176 с. Интернет:
`ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/logic/comput`.

[18] Виленкин Н.Я. *Популярная комбинаторика.* — М.: Наука, 1975. - 208 с.

[19] Воробьев Н.Н. *Числа Фибоначчи.* — М.: Наука, 1992. - 190 с.

[20] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.* — М.: Наука, 1992. - 405 с.

[21] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел.* — М.: Изд-во МГУ, 1995. - 160 с.

[22] Гашков С.Б, Чубариков В.Н. *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.* — М.: Высшая школа, 2000. - 320 с.

[23] Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. *Ленинградские математические кружки.* — Киров: АСА, 1994. - 272 с.

[24] Гиндикин С.Г. *Алгебра логики в задачах.* — М.: Наука, 1972. — 288 с.

[25] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика.* — М.: Мир, 1998. - 703 с.

[26] *Олимпиады ЮУрГУ для абитуриентов. Математика. Задачи и решения* /В.Л. Дильман, В.И. Заляпин В.И., Ю.Г. Малиновский и др. и др. — Челябинск: Изд. дом Обухова, 2000. - 100 с.

[27] *Задачник "Кванта": Математика.* — В трех частях/ Под ред. Н.Б. Васильева. — М.: Бюро Квантум, 1997 (Прил. к журналу "Квант" №1, №3, №5).

[28] *Избранные задачи из журнала "American Mathematical Monthly".* — М.: Мир, 1977. - 598 с.

[29] Камерон П., ван Линт Дж. *Теория графов, теория кодирования и блок-схемы.* — М.: Наука, 1980. - 139 с.

[30] Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ.* Т.1. Основные алгоритмы. — М.: Мир, 1976. - 736 с.

[31] Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Основы алгебры.* — М.: Наука, 1994. - 318 с.

[32] Кофман А. *Введение в прикладную комбинаторику.* — М.: Наука, 1975. - 480 с.

[33] Ланкастер П. *Теория матриц.* — М.: Наука, 1978. - 269 с.

[34] Липский В. *Комбинаторика для программистов.* — М.: Мир, 1988. - 213 с.

[35] Нефедов В.Н., Осипова В.А. *Курс дискретной математики.* — М.: Изд-во МАИ, 1992. - 264 с.

[36] Новиков П.С. *Элементы математической логики.* — М.: Наука, 1973. - 400 с.

[37] Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов.* — СПб.: Питер, 2000. - 304 с.

[38] Мендельсон Э. *Введение в математическую логику.*— М.: Наука, 1976. - 320 с.

[39] Оре О. *Приглашение в теорию чисел.* — М.: Наука, 1980. - 128 с.

[40] Оре О. *Теория графов.* — М.: Наука, 1980. - 392 с.

[41] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* — М.: Наука, 1978. — Т.2. - 432 с.

[42] Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. *Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.* — М.: Мир, 1980. - 478 с.

[43] Рудаков А.Н. *Числа Фибоначчи и простота числа* $2^{127}-1$ //Математическое просвещение. - 2000. Сер. 3. - Вып. 4. - С.127-139.

[44] Саати Т. *Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы.* — М.: Мир, 1973. - 304 с.

[45] Сендеров В., Спивак А. *Малая теорема Ферма* //Квант. - 2000. - №1. - С.9-16, 37; №3. - С. 11-17; №4. - С. 15-18.

[46] *Сборник задач по алгебре* /Под ред. А.И. Кострикина. — М.: Факториал, 1995. - 452 с.

[47] Тараканов В.Е. *Комбинаторные задачи и* $(0,1)$*-матрицы.* — М.: Наука, 1985. - 192 с.

[48] Трост Э. *Простые числа.* — М.: ГИФМЛ, 1959. - 136 с.

[49] Уильямс Х. *Проверка чисел на простоту с помощью вычислительных машин* //Кибернетический сборник. - Вып. 23. — М.: Мир, 1986.

[50] Харари Ф. *Теория графов.* — М.: Мир, 1973. - 302 с.

[51] Холл М. *Комбинаторика.* — М.: Мир, 1970. - 424 с.

[52] Цветкович Д., Дуб М., Закс Х. *Спектры графов. Теория и применение.* — Киев: Наукова думка, 1984. - 383 с.

[53] *Школа в "Кванте": Арифметика и алгебра* /Под ред. А.А. Егорова. — М.: Бюро Квантум, 1994 (Прил. к журналу "Квант"). - 128 с.

[54] Эвнин А.Ю. *Девятнадцать доказательств теоремы Евклида* //Квант. - 2001. - №1. - С.35-38. Интернет: `http://www.vivovoco.rsl.ru/quantum/2001.01/matkr_1_01.pdf`.

[55] Эвнин А.Ю. *Две заметки по комбинаторике* //Математическое образование. - 2000. - №3(14). - С.27-34.

[56] Эвнин А.Ю. *Сверхстепени и их разности* //Математическое образование. - 2001. - №1(16). - С.68-73.

[57] Эвнин А.Ю. *Букет окрестностей одной задачи, или О методах суммирования* //Математика в школе. – 2000. – №8. – С.64–67.

[58] Эвнин А.Ю. *Решение задач на возвратные последовательности* //Математика в школе. – 2001. – №7. – С.69–70.

[59] Эвнин А.Ю. *Возвратные последовательности в олимпиадных задачах* //Математика (прил. к газете "Первое сентября"). – 1999. – №36. – С.15–16.

[60] Эвнин А.Ю. *Элементарная теория чисел: Сборник олимпиадных задач.* — Челябинск: ЧГТУ, 1996. – 76 с.

[61] Юбо К. *Сильно регулярные графы* //Кибернетический сборник. — М.: Мир, 1987. – Вып. 24.

[62] Яглом И.М. *Булева структура и ее модели.* — М.: Сов. радио, 1980. – 193 с.

[63] http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=national.putnam.